PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA
PARA PROFESSORES DO 1º CICLO

Cadeia de tarefas para o ensino dos decimais

$\frac{25}{100}$	25 %
$\frac{1}{4}$	
um quarto	0,25

Escola Superior de Educação de Lisboa

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2006). *Cadeia de tarefas para o ensino dos decimais.* Escola Superior de Educação de Lisboa.

Cecília Monteiro
Elsa Lobo
Graciosa Veloso
Hélia Sousa
Isabel Moura
Sandra Ribeiro

Março 2006

Índice

CADEIA DE TAREFAS PARA O ENSINO DOS DECIMAIS

Esta brochura apresenta uma cadeia de tarefas para o ensino dos decimais. Propomos que a introdução aos decimais seja feita a partir de uma abordagem intuitiva às fracções. A cadeia das tarefas que se apresenta não pretende ser rígida nem completa; ela tem como objectivo apresentar diversos contextos onde se podem trabalhar os decimais assim como as diferentes representações dos números. As crianças costumam apresentar dificuldades na transição entre o raciocínio com os números inteiros e o raciocínio com os números racionais não inteiros[1], assim como com as representações simbólicas, sendo pois aconselhável ter em consideração vários aspectos:

1º Iniciar com problemas em contextos familiares aos alunos e partir das suas resoluções informais (com desenhos, esquemas ou materiais concretos) para as representações simbólicas;

2º Ter como "âncoras" as noções de metade e quarta parte e fazer a conexão entre as diferentes representações simbólicas: $\frac{1}{2}$ e 0,5 e mesmo 50% ; $\frac{1}{4}$ e 0,25, 25%;

3º Usar várias representações dos números: representações pictóricas, numeral decimal, fracção, na linha numérica, com material manipulável (por exemplo o Cuisenaire, o MAB[2], círculos ou bandas rectangulares).

Pretende-se que **os professores iniciem este estudo a partir das estratégias dos alunos na resolução de problemas,** de modo a que a formalização e os cálculos venham a ser trabalhados gradualmente. O confronto, orientado pelo professor, das diferentes estratégias produzidas pelos alunos enriquece o desenvolvimento do sentido do número, na medida em que permite a reflexão sobre, não só o modo como cada um resolveu o problema, mas também sobre o modo como os outros o resolveram.

Nesta cadeia, a primeira sequência de tarefas é uma **história** em que, de um modo motivador, se aborda as noções intuitivas de **metade** e da **quarta parte** e também da **fracção como operador** aplicado a um conjunto discreto[3].

---

[1] Os números racionais são os números inteiros e os números fraccionários. As fracções e os numerais decimais são formas de representar esses números. Por exemplo ¼ pode representar-se também na forma de numeral decimal 0,25.

[2] No MAB há que ter em atenção a peça que se escolhe para representar a unidade. Se escolhermos a barra, o cubinho representa a décima, mas se escolhermos a placa para representar a unidade, o cubinho representa a centésima. Há que ter em atenção a altura em que este material é introduzido, dependendo dos alunos, e das experiências prévias com o material. Ver texto sobre a unidade, em anexo.

[3] Conjunto discreto é um conjunto de unidades soltas, por exemplo 12 lápis. A fracção como operador (a metade de) aplicada a este conjunto será $\frac{1}{2} \times 12$.

Após a exploração desta história apresenta-se aos alunos uma sequência de três problemas num contexto significativo, a **partilha equitativa** de sandes e de chocolates. Estas tarefas permitem a emergência da noção de décima de uma unidade.

Nesta sequência de tarefas há algumas que consistem em pedir aos alunos que **a partir de uma parte reconstruam a unidade inicial**. Introduzimos aqui tarefas com o material Cuisenaire que facilitam a compreensão da relação entre a fracção de uma unidade e a unidade, visto que permite diversificar a unidade que se fracciona. É muito importante que o raciocínio dos alunos seja conduzido ao problema inverso, que consiste em, a partir de uma parte (a metade, a quarta parte, a décima, etc.) de uma unidade reconstruir a unidade. O facto de os decimais e as fracções terem sempre subjacentes a **unidade de referência** pode trazer confusões aos alunos, se o professor não promover actividades convenientes. Na verdade a décima parte de um conjunto de 20 objectos, não é o mesmo que a décima parte de um conjunto de 30 objectos, ou a décima parte de um queijo, ou a décima parte de um chocolate. A unidade, o todo, de onde se parte para o estudo do números não inteiros deve ser variado, mas o professor deve ter consciência da perturbação que isso traz, e portanto deve explorar as resoluções dos alunos chamando a atenção para a unidade em questão. A noção de centésima deve vir num contexto onde se sinta a necessidade de fraccionar a unidade em partes mais pequenas do que a décima. Apresentamos assim uma sequência de tarefas em contextos de medida, que se inicia com a tarefa do **refinamento da unidade de medida**, permitindo aos alunos perceberem que a divisão da unidade de medida em décimas nem sempre é suficiente para medir com mais precisão um dado comprimento. Em diálogo com os alunos o professor sugerirá (se os alunos não o fizerem) que se faça a divisão da décima em 10 partes iguais e assim a unidade ficará dividida em 100 partes, sendo cada uma delas a centésima da unidade. As outras tarefas desta sequência permitem fazer a conexão com o sistema métrico que prevê no 3ºano relacionar o metro, o decímetro e o centímetro.

As **tarefas das toalhas** evidenciam a necessidade, através do modelo 10x10, de comparar a décima com a centésima. Mal entendidos, como 0,02 ou 0,2 representarem o mesmo número ou que 0,15 ser maior que 0,5 (porque dizemos zero vírgula QUINZE e zero vírgula CINCO) podem ser explorados no confronto com possíveis erros. Inserimos também o **modelo circular** que evidencia mais uma representação de unidade que está dividida em décimas e em centésimas.

Sugere-se também que se trabalhem estes números no **contexto do dinheiro**, sendo as tarefas seguintes perspectivadas nesse sentido. É importante que também aqui se relacione os cêntimos com a unidade (o euro), visto que em situações reais dizemos 25 cêntimos ou 10 cêntimos, estando pois a mudar a unidade para o cêntimo. A relação entre essa quantidade e o euro deve ser realçada nas situações didácticas. Vinte e cinco cêntimos é a quarta parte de um euro e 10 cêntimos a décima parte. No caso do sistema métrico é visível numa fita métrica que o centímetro é a centésima parte do metro, por exemplo, o que não acontece com o cêntimo, onde esta visualização não se faz, visto que numa moeda de um euro não cabem fisicamente 100 moedas de um cêntimo. Isto torna mais abstracto o contexto do dinheiro e portanto deverá ser trabalhado mais tarde.

A representação na **linha numérica** é essencial ser feita. Estas tarefas serão apresentadas antes ou depois das tarefas do dinheiro (e mesmo antes das tarefas que conduzem às centésimas, podendo pois ser representados somente números com décimas). É fundamental que os alunos percebam que existem sempre números entre dois quaisquer números racionais; por exemplo, entre 0,5 e 0,6 podemos ter os número 0,51, 0,52, etc. Mas entre 0,51 e 0,52 existem muitos outros, como 0,511 e 0,514, etc..

As tarefas com **estimativas e cálculo mental** devem ser introduzidas durante todo este percurso de aprendizagem e sempre que o professor considere oportuno. O recurso à máquina de calcular permite levar a cabo várias actividades no âmbito dos decimais e das fracções. Por exemplo, encontrar fracções que tenham como valor 0,5, pode ser uma tarefa de cariz investigativo que além de entusiasmar as crianças, permite-lhes encontrar várias representações para o mesmo número e perceber que uma fracção representa um quociente.

Finalmente as últimas tarefas são problemas e jogos que mobilizam os conceitos e procedimentos trabalhados até aqui e permitem consolidar este assunto.

Convém que o desenvolvimento desta cadeia de tarefas inclua trabalho a pares ou em grupos de 3/4 alunos, para que possam observar, confrontar e discutir os modos de resolver de cada um.

No final desta brochura, em anexo, estão inseridos dois textos: um que discute a questão da unidade na abordagem das fracções e dos decimais, evidenciando por um lado as dificuldades que daí advêm para as crianças que iniciam o estudo dos racionais não inteiros e por outro chamando a atenção dos professores para a necessidade de a diversificarem; outro faz uma síntese sobre os números racionais e o aparecimento do zero. Também em anexo os professores podem encontrar folhas fotocopiáveis para usarem nas aulas.

História: “As Metades e os Quartos”

Noção de metade e de quarta parte
A fracção como operador
Introdução à simbologia das fracções

História

As metades e os quartos

$$\frac{1}{4}$$

A Maria é uma boa aluna. Gosta de estar na escola e o seu passatempo favorito é brincar com a Matemática. Quase todos os dias brinca com os números, com as figuras geométricas,...

A menina cada vez que olha à sua volta vê situações relacionadas com a Matemática e está sempre interessada.

Mais uma vez, o fim-de-semana da Maria foi passado à volta da Matemática, só que, desta vez, a sua preocupação era com as metades e com os quartos. Os seus colegas estavam com muitas dificuldades e ela queria ajudá-los.

Na segunda-feira seguinte, a Maria foi para a escola e, quando olhou em seu redor viu a maior confusão porque os seus colegas não percebiam nada do assunto e até brincavam com isso:

- Um quarto é a divisão da casa que eu mais gosto. Aí posso dormir à vontade! - dizia o Nuno em voz alta .

Todos começaram numa risota imparável e a Maria resolveu levantar-se.

Os colegas ficaram muito surpreendidos com a atitude da Maria porque sabiam que ela era muito tímida e introvertida. Um silêncio absoluto invadiu a sala de aula e a Maria disse:

- Estão a ver o meu relógio?

Todos tentaram espreitar e um dos colegas disse:

- Tem um palhaço no mostrador!
- Pois tem! - disse a Maria.
- O que é que isso tem a ver com a aula de Matemática? - perguntou a Isabel.
- É isso que vamos ver! Quero que alguém me responda ao seguinte desafio: dividir o mostrador do relógio ao meio (através de uma linha recta imaginária), de forma a que a soma dos números de cada uma das partes seja igual. - disse a Maria.

1. Ajuda a encontrar a solução.

O entusiasmo foi geral. Uns tentavam debruçar-se no braço da Maria, outros faziam os registos nos seus cadernos e a Maria esperava ansiosa pela resposta dos colegas.

A professora foi circulando pelos grupos de meninos e apreciando o seu entusiasmo.

-Já sei! - exclamou o Ricardo.

- Queres explicar aos teus colegas como é que pensaste?- disse a professora.

O Ricardo levantou-se e fez os registos no quadro. Depois foi a Marta e mostrou o raciocínio do seu grupo e, um grupo de cada vez, foi mostrando as diferentes estratégias utilizadas para a resolução do desafio da Maria.

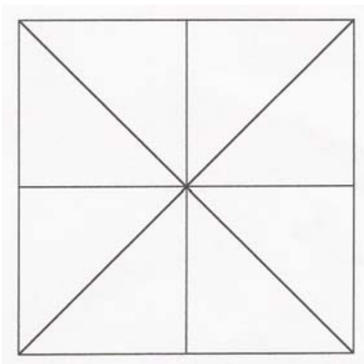
A Maria estava feliz e pensou para consigo:

-Pelo menos já perceberam o que é metade!

-Trrim, trrim- soava a campainha da saída. Os alunos arrumaram e saíram calmamente.

No dia seguinte, os alunos foram a uma visita de estudo ao "Museu do Azulejo" e a professora aproveitou a situação para explorar um conceito matemático: a metade. E, na manhã seguinte, após um período de reflexão sobre a visita de estudo, deu aos alunos a seguinte actividade:

Observa a figura que representa um quadrado dividido em oito triângulos:



Pinta metade do quadrado da forma que quiseres.
Faz o registo das possibilidades que encontraste.

2. Tenta encontrar todas as soluções possíveis.

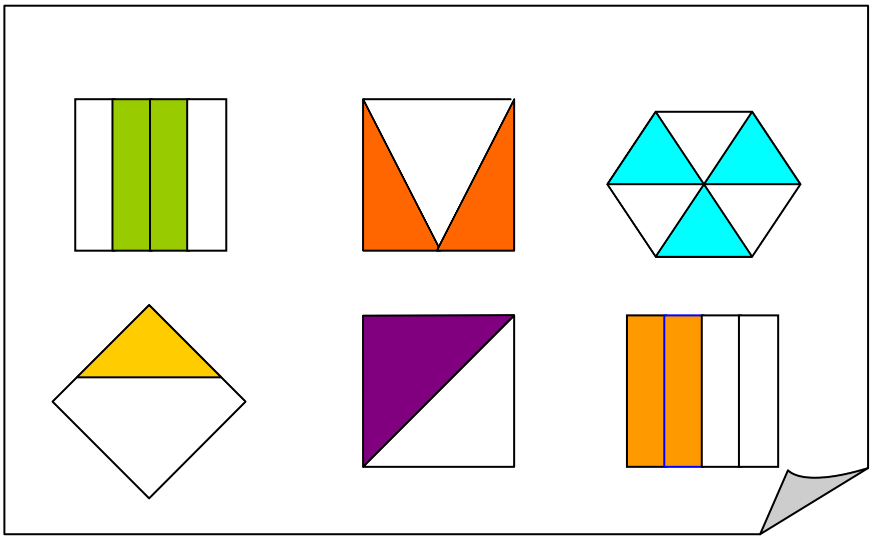
Surgiu uma discussão interessante na turma. Os alunos pintaram metade do quadrado, de diferentes formas, e cada grupo apresentou a sua solução aos colegas.

Entretanto, o Ricardo continuava a rabiscar no seu caderno quadriculado. A professora perguntou-lhe:

- Passa-se alguma coisa, Ricardo?

- Não, professora! Gostei muito do "Museu do Azulejo" e, por isso, estou aqui a representar outros azulejos. E, em cada um deles, apenas pinto metade.

A professora achou a situação muito interessante e resolveu olhar para os registos do Ricardo.



3. Achas que o Ricardo pintou a metade de cada um dos azulejos?

Depois desta situação estar resolvida a professora pediu aos alunos que, em grupo, fizessem um pequeno resumo da visita de estudo. O grupo da Maria gostava muito de escrever no computador e pediu à professora para os deixar ir para a biblioteca. E, assim foi, a Maria, o Ricardo, a Marta e a Sofia correram apressadamente para a biblioteca e sentaram-se todos em redor do computador que estava a um cantinho. Enquanto escreviam o Ricardo disse à Maria:

- Sabes do que é eu gostei mais nesta visita de estudo?
- Do que foi?- perguntou admirada a Maria.
- De ter ido ao teu lado no banco do autocarro- respondeu o Ricardo muito envergonhado. A sua face não deixava de corar.

A Marta e a Sofia trocaram olhares e perceberam que estavam a mais. Saíram da biblioteca e foram para o recreio porque, entretanto, já tinha tocado a campainha para o intervalo.

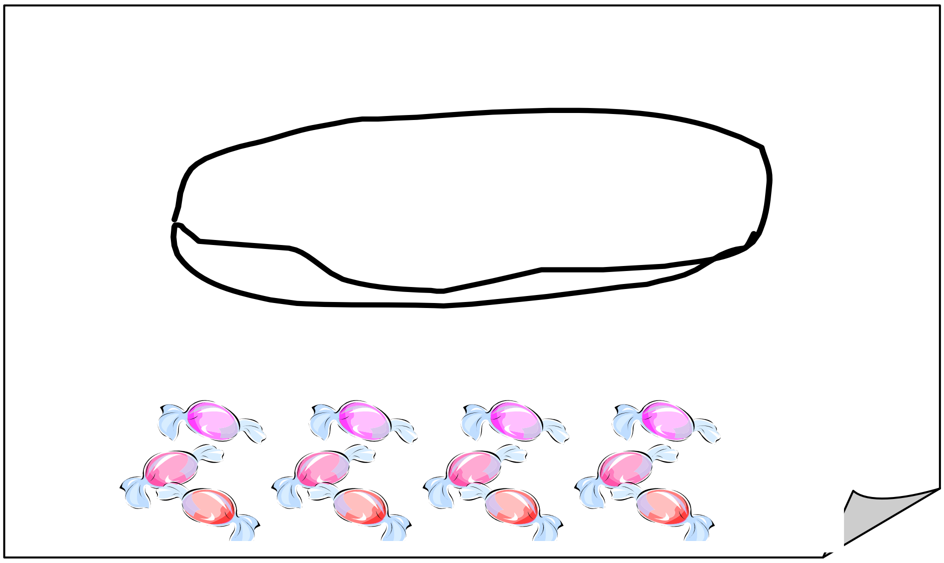
Depois de alguns segundos de silêncio, a Maria e o Ricardo abraçaram-se e tentaram avançar um pouco mais com o trabalho.

Entretanto chegaram a Marta e a Sofia novamente.

-O que se passa?- perguntou a Maria muito admirada. O que fazem aqui novamente?

- Estamos com um problema. Não trouxemos a lancheira e a sala de aula está fechada - referiu a Maria.

- Não há problema! Eu trouxe a minha lancheira.-respondeu a Maria.
- Mas, como é que vamos repartir uma sandes e os teus doze rebuçados, por nós quatro? Afinal só tu é que trouxeste a lancheira!- disse o Ricardo.



4. Ajuda os quatro amigos a resolver o problema.

A Marta e a Sofia, depois do lanche, resolveram ir espalhar a novidade: O Ricardo e a Maria estavam apaixonados! É claro que a notícia contentou todos os colegas e, no dia seguinte, chegaram mais cedo e escreveram no quadro:

MATEMÁTICA

Sentaram-se e esperaram pela Maria e pelo Ricardo. Assim que os viram disseram:

- Calma! Têm que descobrir um enigma!
- Qual é? – perguntou a Maria muito curiosa.
- Achas que podemos dizer que na palavra MATEMÁTICA, 50% são vogais?
- Sim, claro. É a mesma coisa que dizer que $\frac{1}{2}$ das letras são vogais.- respondeu a Maria.
- Muito bem! - exclamou a Marta.
- Agora o testado vai ser o Ricardo - disse o António.

Os colegas escreveram no quadro a palavra

AMOR

- Podemos dizer que nesta palavra $\frac{1}{2}$ das letras são consoantes ? - perguntou o Nuno.
- São o M e o R. Que representam a Maria e o Ricardo. As primeiras letras dos nossos nomes representam metade das letras da palavra AMOR.- respondeu o Ricardo.

5. Desafio: Descobre, na seguinte listagem de palavras, aquelas em que o número de consoantes é a quarta parte do número das letras da palavra.

Euro
Três
Oito
Dez

O problema das metades e dos quartos acabou e o amor do Ricardo por Maria duplicou!

NOTAS PARA O PROFESSOR

Tarefa 1- O relógio

Nesta tarefa pretende-se que os alunos dividam a área do mostrador do relógio em duas partes. Nesta situação a unidade considerada é a área total do mostrador. Contudo, há uma condição, neste enigma, a soma dos números que ficam em cada uma das partes tem que ser igual. Logo, os alunos têm que identificar qual é a soma total dos números do relógio. Ao verificarem que é 78 (que é agora a unidade), terão que encontrar a metade (39). Depois terão que combinar as duas condições pedidas na tarefa.

Tarefa 2 – O azulejo

Nesta tarefa, a unidade (o quadrado) está dividida em oito partes iguais. Pretende-se que os alunos identifiquem a metade (½), numa representação, em que o número de partes em que a unidade está dividida não corresponde ao denominador da fracção pedida. Permite ainda estender a actividades de simetrias de rotação, translação e reflexão, por exemplo.

Tarefa 3 – Identificação do azulejo intruso

Nesta tarefa a unidade (quadrado ou triângulo) aparece associada às áreas das figuras geométricas. Contudo, a metade aparece pintada de uma forma "não convencional" e há uma figura que é a "intrusa" (onde não está pintada metade da figura).

Tarefa 4 – O lanche

Nesta situação pretende-se que os alunos se confrontem com situações onde surge uma grandeza contínua (sandes) e uma grandeza discreta (rebuçados). É, também, a primeira tarefa (desta sequência) em que os alunos se confrontam com a noção de quarta parte (¼).

Tarefa 5- As palavras

Neste desafio, pretende-se que os alunos identifiquem a fracção (¼), numa relação "parte-todo".

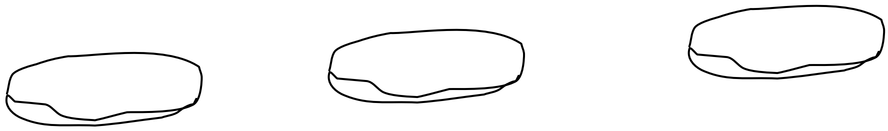
A fracção como quociente
Introdução à décima a partir das estratégias dos alunos na resolução de problemas de partilha equitativa
Representação dos números racionais através de fracções e de numerais decimais
Reconstrução da unidade
Diversificação da unidade (material Cuisenaire)

Problemas de partilha equitativa

Tarefa1

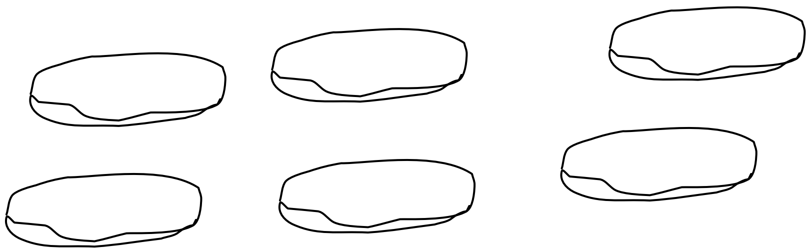
Os alunos da turma da Joana foram a um passeio. A Joana e quatro dos seus colegas decidiram levar para o lanche 3 sandes para partilharem igualmente entre elas. Que porção de sandes coube a cada uma das 5 crianças?

Podes responder através de palavras, esquemas ou desenhos.



Tarefa 2

No mesmo passeio outras 10 crianças levaram 6 sandes que também distribuíram igualmente por elas. Que porção de sandes coube a cada uma?



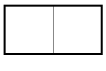
Tarefa 3

Quem comeu mais sandes, as crianças da tarefa 1 ou as crianças da tarefa 2?

Tarefa 4

Numa festa havia 23 chocolates iguais para distribuir igualmente por 10 crianças. Com que porção de chocolate ficou cada uma?

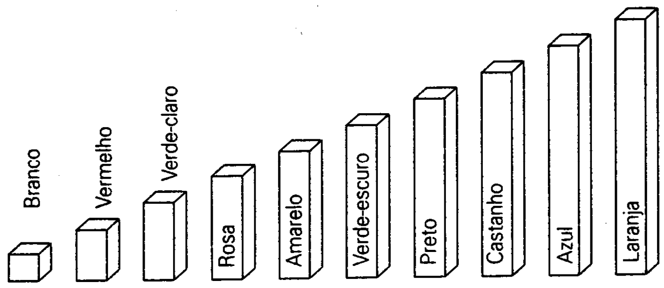
Tarefa 5

Se  representa a quarta parte de um chocolate desenha

o chocolate inteiro (usa o papel quadriculado do teu caderno).

Material Cuisenaire

Comparar barras



Tarefa 1
Considera como **unidade a barra verde escuro**. Que fracção da barra verde escuro é representada pela barra verde claro?
E a barra branca?
E a barra vermelha?

Tarefa 2
Considera agora a **barra laranja como sendo a unidade**. Que fracção da barra laranja representa a barra amarela?
E a barra branca?
E a castanha?
Qual é a barra que representa 0,9?
Qual é a barra que representa $\frac{1}{5}$?

Tarefa 3
Escolhe com os elementos do teu grupo uma barra para ser a unidade.
Consegues uma barra que seja $\frac{1}{2}$ da barra que escolheste?

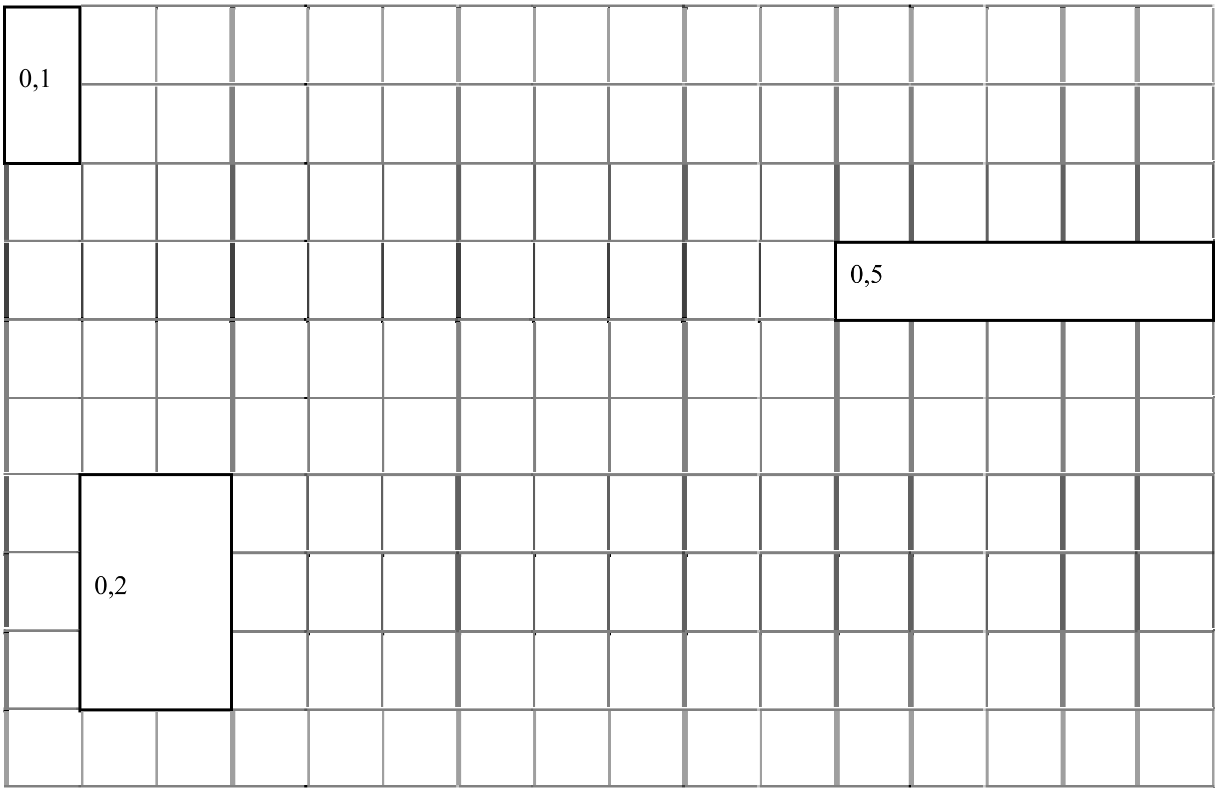
Tarefa 4
Se a barra verde claro representa $\frac{3}{4}$ qual é a barra que representa a unidade?

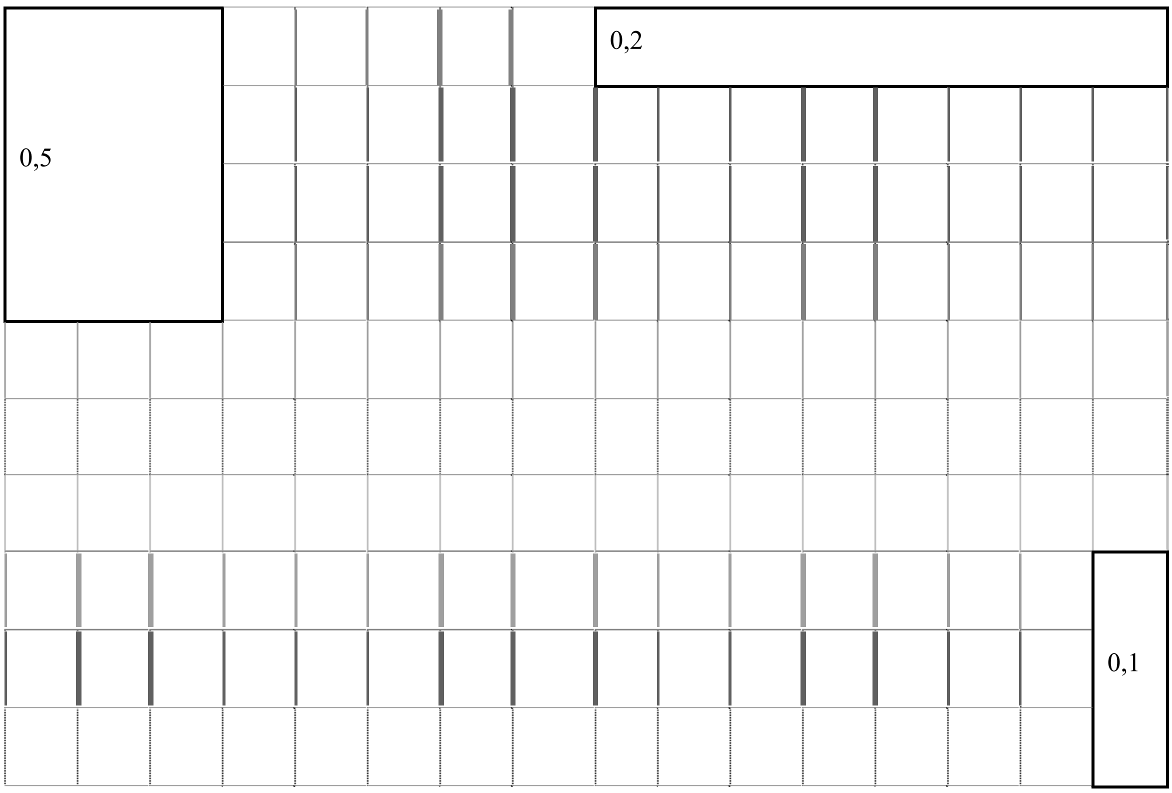
Tarefa 5
Se a barra vermelha representa $\frac{1}{5}$ qual é a barra que representa a unidade? E qual é a barra que representa $\frac{1}{2}$?

Vamos reconstruir a unidade

Tarefa 1

Constrói as unidades (as figuras inteiras) a partir das porções indicadas.





NOTAS PARA O PROFESSOR

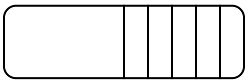
Problemas de partilha equitativa

Tarefa 1

Por cada grupo de alunos distribua uma folha de papel quadriculado, de preferência e as sandes em papel (todas do mesmo tamanho). É importante que o professor enfatize o facto da partilha ser feita de tal modo que cada criança fica com a mesma quantidade de sandes. O modelo das sandes da tarefa pode ser um modelo rectangular em vez do modelo apresentado em anexo, para permitir uma maior precisão. Optou-se por este modelo por ser um tipo de sandes mais real.
Perante as diferentes estratégias dos alunos, sugira que vão ao quadro explicar como fizeram.

Possíveis soluções dos alunos para a tarefa 1:

- Dividem cada sandes ao meio e distribuem 5 metades, dividindo a última metade em 5 partes iguais. Cada um receberia $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ (as respostas não seriam dadas na forma simbólica mas através de desenhos ou esquemas)

última sandes


- Dividem todas as sandes em 5 partes iguais   e davam a cada um $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$
- Contam as 15 partes (resultado de dividirem as 3 sandes em 5 partes cada) e respondem 15:5 = 3 (que equivalem aos 3 quintos).

Exploração da tarefa

O professor a partir desta tarefa discute a noção de metade e da quinta parte, noções que são provavelmente do conhecimento informal dos alunos. Confronta e discute com os alunos as diferentes estratégias, de modo a realçar a equivalência das respostas.

Exploração da tarefa 2 e 3

O professor discute as diferentes soluções dos alunos. Faz a comparação com a situação anterior e realça o facto da quantidade de sandes atribuída a cada criança ter sido a mesma. Apresenta a representação simbólica em forma de fracção e de numeral decimal

Exploração da tarefa 4

Aqui a solução é um número maior que a unidade. O professor discute as diferentes soluções dos alunos. Provavelmente sendo uma das respostas possíveis 23: 10 o professor pode explorar a divisão do resto (3) em 10 partes iguais (caso já tenha sido estudada a divisão).

Material Cuisenaire: Comparar barras

Este material proporciona uma grande variedade de experiencias fazendo variar a unidade e também a reconstrução da unidade (tarefas 4 e 5). Na tarefa 3, visto que os alunos escolhem a unidade, podem surgir barras que (como por exemplo a amarela), não tenham outra que seja a sua metade.

Vamos reconstruir a unidade

Tarefa1

Pretende-se que os alunos, agora com o papel quadriculado, continuem a desenvolver a ideia de que a partir de uma parte (neste caso com numerais decimais) é possível reconstruir a unidade.

A necessidade de refinamento da unidade de medida
As décimas e as centésimas
O modelo rectangular
O modelo circular

Tarefa1
Mede o comprimento do tampo da tua mesa com a tira de papel que te foi entregue e regista-o no teu caderno.

Tarefa 2
Mede alguns objectos utilizando a unidade de medida que te foi entregue.
Deves ser muito rigoroso nas medições.

Medições de comprimentos de objectos com o metro

Caneta	Borracha	Afia	Lápis	Lápis de cor	Estojo

Tarefa 3
Marca a tua altura num papel preso na parede e procede à medição usando como unidade de medida o metro. Compara a tua altura com as alturas dos teus colegas.

Tarefa 4
Constrói o decímetro e mede os objectos da tabela anterior usando agora como unidade de medida, o decímetro.

Medições de comprimentos de objectos com o decímetro

Caneta	Borracha	Afia	Lápis	Lápis de cor	Estojo

Tarefa 5
Completa: 10 dm = m 1 dm = m

10 cm = m 1 cm = m

2,5 dm = m 2,5 dm = cm

2 m = dm 2 m = cm

NOTAS PARA O PROFESSOR

Refinamento da unidade de medida

Tarefa1: O professor, depois de iniciar a aula com uma conversa sobre a necessidade de medições (por exemplo a altura dos alunos, as cheias do Nilo, etc.), pede aos alunos, em grupo, que meçam o comprimento da mesa onde trabalham, dando para o efeito uma tira de papel ou um cordel (pode ser um cordel com 1m ou mais pequeno). É pedido que façam o registo das medições.

Os alunos terão de encontrar uma maneira de traduzir a parte da unidade que corresponde à porção do comprimento que ficou por medir com a unidade. Suponhamos que obtiveram 3 unidades e mais um bocado. Esse bocado irá ter de ser objecto de discussão entre os alunos, de modo a encontrarem uma representação satisfatória . Provavelmente irão dividir em duas, quatro ou mais partes.
O professor a partir das diferentes respostas dos alunos e da sua discussão, caso não tenha surgido a divisão em dez partes, introduz também a divisão da unidade em 10 partes iguais, como uma divisão conveniente e avança para a noção de décima.
Se esta tarefa for apresentada aos alunos depois das tarefas anteriores desta cadeia de tarefas, provavelmente, visto que a décima já é conhecida dos alunos, ela não vai apresentar nenhuma dificuldade. No entanto esta tarefa pode substituir a das sandes no início do estudo das fracções e decimais.

Tarefa 2: Com a unidade já dividida em 10 partes iguais o professor solicita que os alunos meçam comprimentos de outros objectos (alguns com comprimentos inferiores à unidade) e os registe.
Representa-se então a medida do comprimento (por exemplo 3,4).
Caso os alunos já tenham conhecimento das fracções pode representar-se também por $3\frac{4}{10}$
A discussão seguinte deverá incidir na comparação de comprimentos e provavelmente vai surgir a necessidade de dividir ainda a décima para que a medição seja mais rigorosa.

Tarefa 3: Os alunos marcam a sua altura num papel na parede e procedem à sua medição (nesta situação o metro seria a unidade indicada), comparando as suas alturas
Com esta tarefa os alunos podem explorar o metro e as divisões em dm e cm. O professor explora a as diferentes unidades de medida e as suas relações.

Tarefa 4: A unidade de medida agora é o decímetro.

Tarefa 5: Tarefa para equivalência de medidas, sem contextos. Convém que este tipo de tarefas venha depois de se trabalhar as medições em situações contextualizadas e partindo de medições feitas pelos alunos.

- **Pode encontrar mais tarefas com o sistema métrico na brochura "Grandezas e Medidas"**

O modelo 10x10

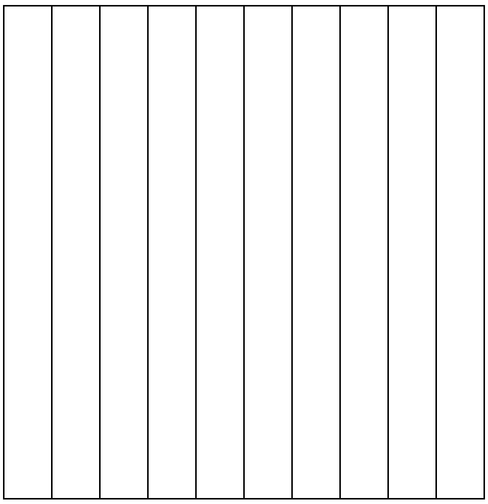
Tarefa 1: As toalhas da Joana

A Joana queria pôr na mesa da sua festa dos anos uma toalha bonita.

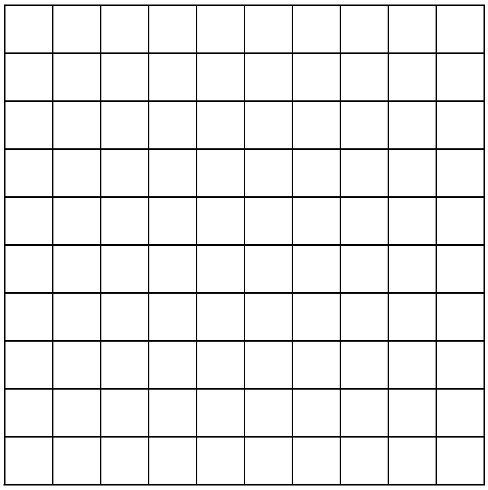
Tinha duas hipóteses: uma toalha às barras e outra toalha aos quadradinhos. Qual das duas escolherias: a que está dividida em décimas ou a que está dividia em centésimas?

Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A



Toalha B



Quantas décimas da toalha A pintaste?

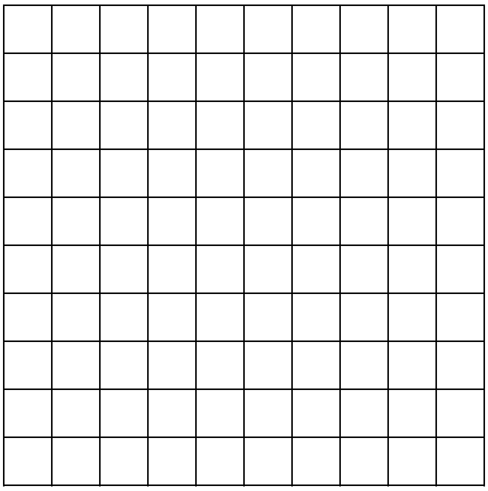
Quantas centésimas da toalha B pintaste?

Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações?

Que conclusões podes tirar?

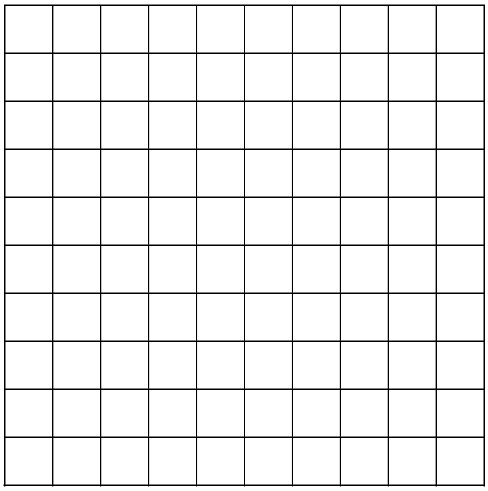
Tarefa 2: Pinta a quarta parte da toalha C de uma cor

Toalha C

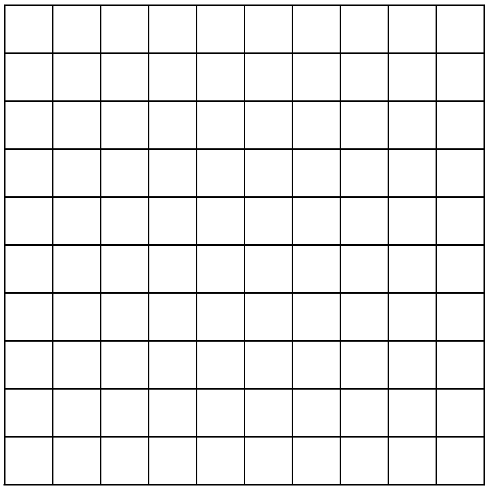


Pinta 25 centésimas da toalha D de outra cor

Toalha D



Toalha E

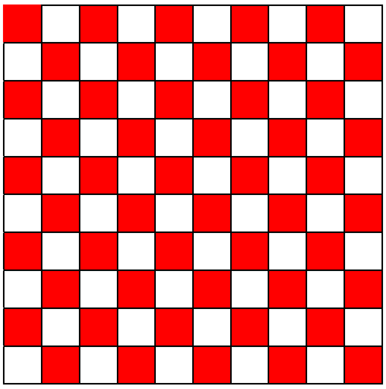


Na toalha E pinta 0,02 de uma cor e 0,20 de outra cor.

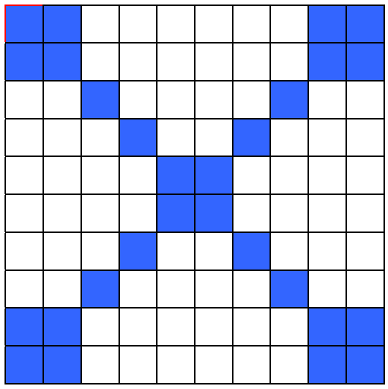
Que parte da toalha ficou em branco?

Tarefa 3: Se cada figura representar 1 toalha, que parte da toalha está pintada?
Escreve em numeral decimal e em fracção.

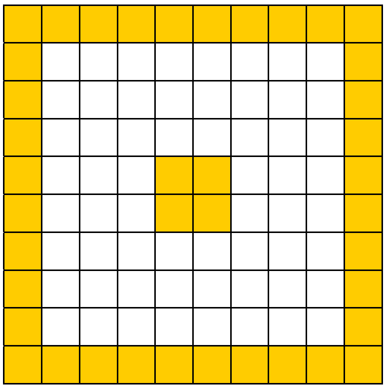
Toalha 1



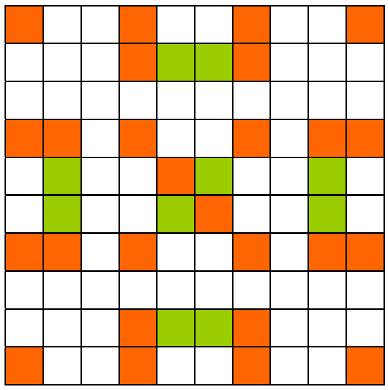
Toalha 2



Toalha 3



Toalha 4



Tarefa 4: Uma toalha bonita!

Uma das toalha que a mãe da Joana vai utilizar nos anos da filha é aos quadrados. Tem 100 quadrados. Pinta de modo a ficar uma toalha muito bonita. Mas só podes utilizar 3 cores: azul, amarelo e branco.

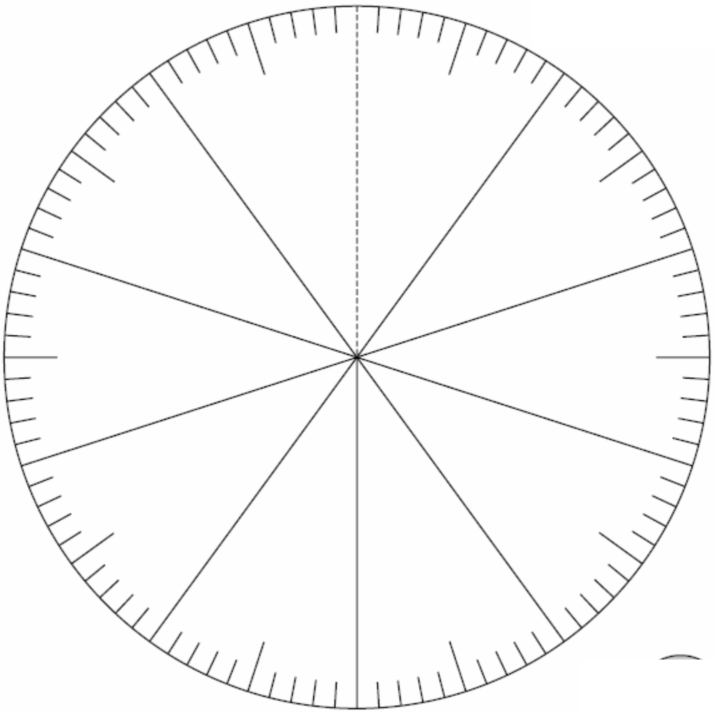
Pinta:

- 0,50 – azul ;
- 0,30 – amarelo;
- restante branco

Atenção: O padrão da toalha deve ficar simétrico em relação à linha central. Por isso, repara na linha a preto mais grossa que divide a toalha ao meio e pinta de forma a que a toalha fique igual dos dois lados.

O MODELO CIRCULAR

Tarefa 5
Pinta 7 centésimas do círculo a uma cor e pinta 7 décimas a outra cor
Que parte do círculo ficou por pintar?



Tarefa 6
Calcula os valores das seguintes expressões:

1 - 0,07 1 - 0,7 1 - 0,77

Tarefa7
Coloca por ordem crescente os seguintes números:

0,3 0, 15 0,03 0,9 0,77 0, 99

NOTAS PARA O PROFESSOR

Com este conjunto de tarefas – **As toalhas -** pretende-se partir de situações próximas do quotidiano familiar dos alunos onde os números decimais possam fazer sentido e os alunos tenham oportunidade de lhes atribuir significado.

Propõe-se usar o modelo 10x10 para ajudar os alunos a conceptualizar os números decimais, principalmente quando se pretende que os alunos compreendam a noção de centésima. A visualização que o uso deste modelo proporciona poderá ajudar os alunos a evitar alguns erros que habitualmente se verificam, como por exemplo quando se trata de comparar a centésima com a décima. Não é fácil para os alunos compreenderem, por exemplo, que uma décima representa a mesma quantidade do que dez centésimas quando se trata da mesma unidade. Por conseguinte, o apoio na visualização poderá ajudar os alunos a fazerem comparações entre esses números facilitando a compreensão dos mesmos, numa primeira fase.

Também se pretende que os alunos lidem com diversas maneiras de referir a mesma quantidade (ex: quarta parte / 25 centésimas) assim como de diversas formas de representar números decimais.

Na tarefa **"Uma toalha bonita!"** pretende-se que os alunos usem o conhecimento da noção de centésima fazendo conexões com o conceito de simetria. Poder-se-á também analisar com os alunos os padrões que surgirem ou as estratégias que os alunos usaram para serem bem sucedidos na realização da tarefa.

O professor poderá propor aos alunos que realizem este conjunto de tarefas individualmente ou em pequenos grupos, embora seja essencial haver após a sua realização uma discussão em grande grupo mediada pelo professor para que possam ser esclarecidas todas as dúvidas ou dificuldades dos alunos bem como explicitadas as soluções encontradas.

O **círculo das centésimas** proporciona outra representação das décimas e das centésimas. As tarefas 6 e 7 podem ser resolvidas somente a nível simbólico, mas, caso os alunos ainda tenham dúvidas podem recorrer ao círculo para visualizar os valores correspondentes nos sectores circulares.

Os decimais em contextos de dinheiro

Tarefa 1
Tenho uma moeda de 1 euro. Quero trocá-la por outras moedas, mantendo o valor de 1 euro.
Como posso fazer?

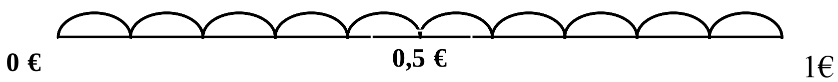
Tarefa 2
Cinco amigos foram ao cinema. Depois de pagarem os bilhetes, receberam 3 euros de troco que partilharam equitativamente entre eles.
Quanto recebeu de troco cada um dos cinco amigos?

Tarefa 3
Considera o euro como unidade.
Observa a seguinte figura.

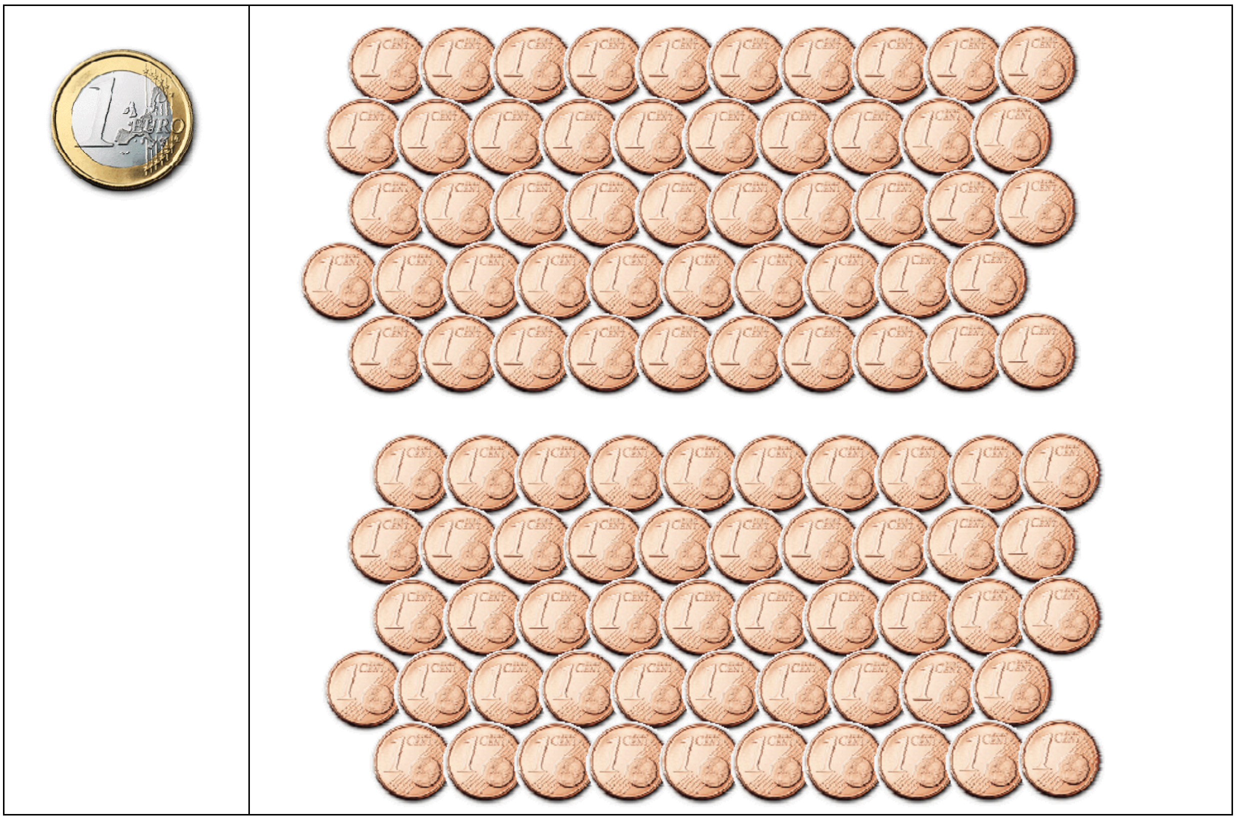

Moeda de dez cêntimos

● 10 cêntimos que parte é do euro? Escreve a tua resposta também com símbolos matemáticos.

A linha em baixo pode ajudar a compreender a relação que existe entre 1 euro e 10 cêntimos.
● Assinala nessa linha 8 cêntimos e 0,3 euros.



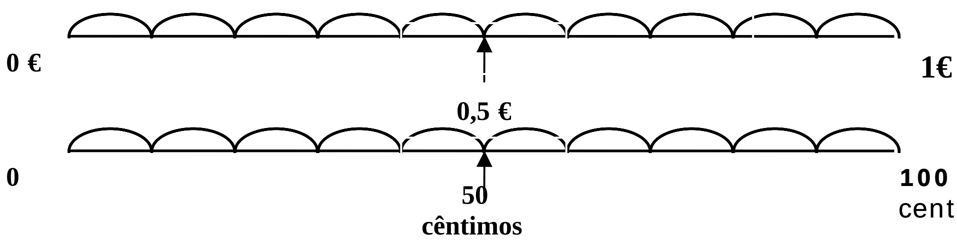
Tarefa 4
Considera o euro como unidade. Observa a seguinte figura.



 Moeda de um cêntimo

- Um cêntimo que parte é do euro? Escreve a tua resposta também com símbolos matemáticos.

As linhas em baixo podem ajudar a compreender a relação que existe entre euro e cêntimo.



Completa:
30 cêntimos = ? euro ? cêntimos = 0, 7 euro

- 1 cêntimo que parte é de 10 cêntimos? Escreve a tua resposta também com símbolos matemáticos.

Tarefa 5

Observa as moedas e completa as duas colunas do lado direito da tabela.

		Nº de moedas equivalentes a 1 €	Valor correspondente
 1€	 1 cent	**100**	**100x0,01 = 1**
 1 €	 2 cent		
 1 €	 5 cent		
 1 €	 10 cent		
 1 €	 20 cent		
 1 €	 50 cent		

Tarefa 6

No quadro abaixo estão representadas moedas tuas conhecidas.

Quanto falta a cada linha para ter 1 € ? Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.

Faltam cinquenta cêntimos, ou 50 cent., ou 0,50 €, ou meio euro, ou $\frac{1}{2}$ **€.**

Tarefa 7

No quadro abaixo estão representadas moedas tuas conhecidas.

Quanto falta a cada linha para ter 5 € ? Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.

Tarefa 8 Jogo "Quanto falta para 3 euros?"

Cada par de alunos recebe um cartões (estão em ANEXO). O professor mostra um cartão (por exemplo 2,95 □) e o par tem de levantar o cartão cujo valor é a diferença para 3 □. Ganha o par que o fizer mais rapidamente.
Nota: Os alunos deverão dizer por palavras o valor, por exemplo "5 cêntimos".

Tarefa 9
O João costuma ajudar a mãe no mercado. A mãe deu-lhe uma nota de 10€ e pediu-lhe que trocasse tudo em moedas de 10 cêntimos que lhe faziam falta. Quantas moedas tem de levar o João à mãe?

Tarefa 10
O meu avô deu-me os trocos que tinha no bolso para ajudar a comprar o presente para os anos da minha mãe. Deu-me 3 moedas de 2 euros, 10 de 20 cêntimos, 3 de 10 cêntimos e 6 de 5 cêntimos. Que dinheiro me deu?

Tarefa 11
Eu e o meu amigo Pedro zangámo-nos porque ele disse que tinha mais dinheiro e eu acho que não. Descobre quem tem razão.
Eu disse: - Tenho o dobro de 5, 25 €!
Ele disse: - Tenho metade de 20 € e 5 moedas de 5 cêntimos!

Tarefa 12
Dois irmãos gémeos, a Ana e o João juntaram moedas em dois mealheiros. Os pais tinham-lhes dito que quando fizessem 8 anos poderiam abrir os mealheiros e verificar quanto dinheiro havia em cada um.
Fizeram anos no mês passado, cada um abriu o seu mealheiro e tiveram a seguinte conversa:
- Oh João, tenho 20 moedas no meu mealheiro! – diz a Ana.
- Eu tenho mais dinheiro que tu, pois contei 50 moedas – reagiu o João.
O João terá razão?

Tarefa 14
A tia da Catarina deu-lhe dinheiro no dia de anos. Ela comprou rebuçados e gastou 0,25 □. Depois comprou uma camisola que custou 7,25 €. Depois comprou um livro que custou 3,25 €.
O pai dela deu-lhe 1 € e ela comprou um boneco que custou
2,75 □. Ficou sem dinheiro. Quanto lhe deu a tia?

Tarefa 15
A Joana fez anos. Convidou as maiores amigas para irem ao cinema e para lancharem com ela. Os pais deram-lhe 20 □ para pagar as despesas. Nos bilhetes de cinema gastou $\frac{1}{4}$ do dinheiro e no lanche $\frac{1}{2}$. Quanto dinheiro gastou?
E quanto lhe sobrou?

NOTAS PARA O PROFESSOR

O principal propósito desta sequência de tarefas é desenvolver o sentido de número e competências de cálculo, alargando o campo dos números inteiros ao dos números racionais, através da inclusão de números decimais presentes em situações reais que envolvem dinheiro, situações essas geralmente familiares aos alunos.

Na **Tarefa 1** pretende-se que as crianças relacionem o cêntimo com o euro, reconhecendo que um cêntimo é a centésima parte de um euro, tomando este como unidade, e que utilizem esta relação para exemplificarem casos de equivalência entre um euro e o valor de várias moedas de cêntimo.

A organização de uma tabela que apresente o número de moedas de cêntimo e o respectivo valor pode ser um bom auxiliar na sistematização das diversas respostas construídas pelas crianças.

Nas **Tarefa 2, Tarefa 3 e Tarefa 4** pretende-se que as crianças consolidem o conceito de décima, reconhecendo, por exemplo, que se meio euro é equivalente a cinquenta cêntimos também a décima parte do euro é equivalente a dez cêntimos. É aqui apresentada uma situação de partilha equitativa, que se relaciona com o mesmo modelo matemático que a situação já trabalhada anteriormente, na tarefa 1 de **Problemas de partilha equitativa** – página 15.

A utilização da linha numérica e da linha dupla é facilitadora da compreensão das relações existentes entre as duas unidades, o euro e o cêntimo.

Na **Tarefa 5** pretende-se que as crianças reflictam sobre duas variáveis diferentes: a de número de moedas e a do valor representado por elas. A ideia, nem sempre correcta, presente na afirmação "a um maior número de moedas corresponde uma quantia maior", pode ser explorada e podem ser construídos argumentos que justifiquem em que casos é verdadeira e em que casos é falsa.

Nas **Tarefa 6** e **Tarefa 7** pretende-se que os alunos explorem situações que contemplem a adição e a subtracção. As crianças também poderão utilizar cálculo mental para responder às questões aqui formuladas. Neste contexto os alunos também podem criar situações problemáticas que envolvam as ideias matemáticas aqui presentes.

Na **Tarefa 8** pretende-se consolidar, através de um jogo de pares, a compreensão e utilização do euro e do cêntimo. Pode ser traçada a linha numérica e representar a situação que relaciona o valor apresentado pelo professor e a que deve ser apresentada pelo par de crianças, correspondente à diferença para três euros, para auxiliar os alunos que revelem enganos ou dúvidas. Os cartões do professor que estão em anexo permitem variar o valor do cartão que o professor apresenta.

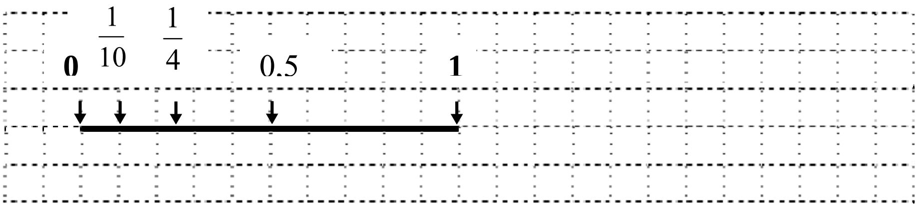
- **Nota: Na brochura "Grandezas e Medidas" são também propostas tarefas em contexto de dinheiro.**

Linha Numérica

A Linha Numérica

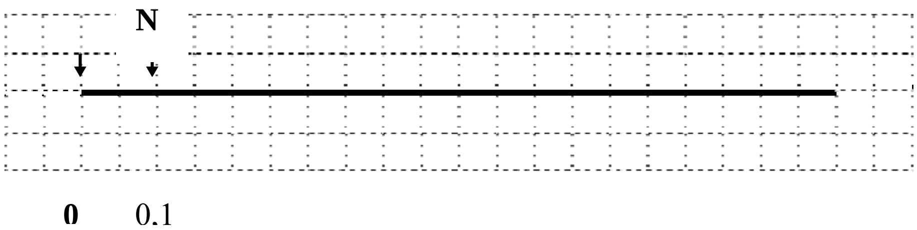
Tarefa 1. Podemos representar os números decimais numa linha numérica, assim como fazemos com os números inteiros.
Na linha seguinte estão representados alguns números.
Representa tu agora nessa mesma linha os seguintes números:

0,25 $\quad \frac{3}{4} \quad$ 0,6 $\quad \frac{4}{10}$



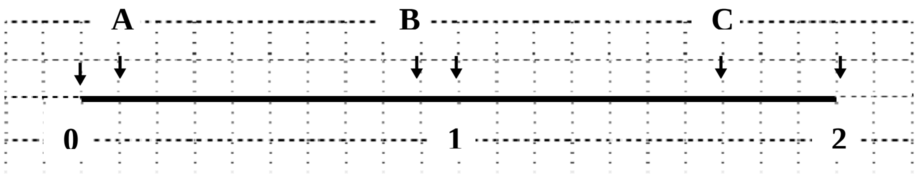
Tarefa 2. Considera agora a linha seguinte onde está assinalada a décima parte como sendo o ponto **N**. Marca na linha os seguintes pontos:

0,6 $\quad$ 1 $\quad \frac{1}{2}$



Tarefa 3. Na linha seguinte estão assinadas com uma seta vários números escondidos. Descobre que números são: A B C

Haverá algum número entre o numero B e o número 1?



NOTAS PARA O PROFESSOR

A representação de números na linha numérica é uma das actividades que permite aos alunos irem percebendo a relação que existe entre diferentes números e também que várias representações podem corresponder ao mesmo número. Por exemplo a 0,5 e a $\frac{1}{2}$ corresponde o mesmo ponto na linha. No caso dos números fraccionários essa representação é de extrema importância visto que ela vai contribuir para dar sentido à "quantidade" inerente a cada uma das representações. Um número maior fica à direita de um número menor. A ordenação de números é muito explícita na linha numérica.

A mudança da unidade é facilitada porque no papel quadriculado o professor pode variar o comprimento do segmento que determina o valor da unidade, o que como vimos é de extrema importância (ver em anexo o texto " O conceito de unidade"). **A tarefa 2** permite a reconstrução da unidade através da representação prévia de uma décima.

Outro aspecto facilitador da recta numérica (**tarefa 3**) é a percepção fácil da *densidade* dos números racionais (entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais). Entre 0,5 e 0,6 existem números tais como 0,54 e 0,55. Por sua vez entre estes dois últimos números existem por exemplo 0,543 e 0,544 e assim sucessivamente.

As tarefas que inserimos nesta secção são um mero exemplo e a ordem pela qual estão apresentadas nesta brochura não significa que somente nesta altura deverão ser trabalhadas. Pelo contrário deverão ser propostas tarefas do tipo das que apresentamos desde o início do estudo dos racionais não inteiros.

Multiplicação

Tarefa 1
Um bilhete para o cinema custa 3,5 euros. Se comprar bilhetes para 4 pessoas quanto vou ter de pagar?

Tarefa 2
A Ana gastou 0,50 da sua mesada na compra de uma prenda para os anos da mãe. Tinha 25 euros, quanto gastou?

Tarefa 3
Inventa um enunciado para as duas seguintes expressões:

a) 5 x 2,5 b) 0,25 x 80

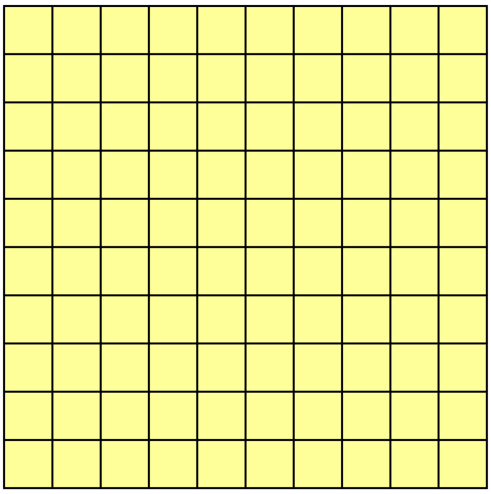
Tarefa 4
4 x 0,25 = 1 qual é o valor de 8 x 0,25?

E qual é o valor de 32 x 0,25?

Tarefa 5
Preenche a seguinte tabela calculando a décima parte dos seguintes números:

	2 0	30	40	50	200	330
0,1 x	2					

Tarefa 6



Pinta uma décima deste quadrado e depois pinta a vermelho duas décimas dessa décima. Que parte do quadrado pintaste de vermelho?

0,2 x 0,1 =

Pinta agora 0,4 x 0,5 (quatro décimas de cinco décimas) do quadrado com uma cor à tua escolha.

Divisão

Tarefa 7
Se deitar 2,5 litros de leite em 5 chávenas com que porção de leite fica cada uma?

Tarefa 8
Um jarro de sumo de laranja tem 6 l. Quantos copos de 0,5 litro posso encher com o sumo?

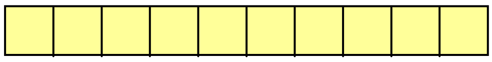
Tarefa 9
E se o jarro tiver 1,5 l?

Tarefa 10
Escreve enunciados para as seguintes expressões:

a) 12,6 : 3 b) 7,5 : 1,5

Tarefa 11
10 : 0,5 = 20 Quanto vale 20 : 0,5 e 50 : 0,5?

Tarefa 12



O rectângulo seguinte está dividido em 10 partes iguais.
Quantas vezes cabe um décima no rectângulo?

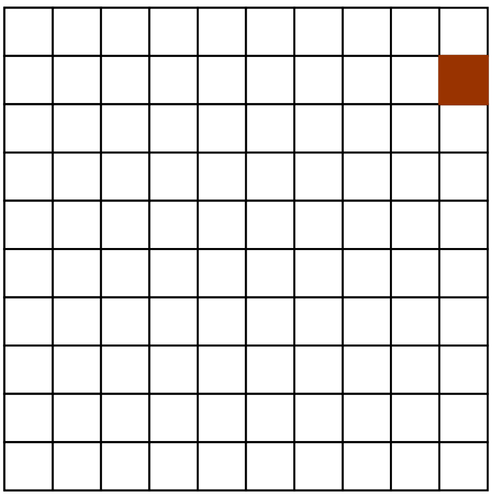
1 : 0,1 =

E em 2 rectângulos, quantas vezes cabe um décima?

2 : 0,1 =

E em 5 ? 5 : 0,1 =

Tarefa 13



1 : 0,01 =?

2 : 0,01=?

5,5 : 0,01=?

NOTAS PARA O PROFESSOR

A multiplicação de números decimais pode ter vários significados, entre eles a soma de parcelas iguais como no caso da **tarefa 1**: 3,5+3,5+3,5+3,5= 14 . Pode também significar um operador, caso da **tarefa 2**. Neste caso *o produto é um número menor do que o multiplicando*. Com os números inteiros o produto é sempre um número maior do que os factores, o que não acontece na multiplicação quando um ou os dois factores são menores que 1. Isto pode ser um obstáculo para os alunos, portanto é importante que os produtos de decimais apareçam contextualizadas em situações significativas até se apresentarem operações somente a nível simbólico. A **tarefa 5** permite que os alunos identifiquem a multiplicação por 0,1 com a divisão por 10. Poder-se-á fazer uma tabela semelhante para que percebam que multiplicar por 0,01 é o mesmo que dividir por 100. Também o recurso à calculadora pode permitir alargar os cálculos a mais números.

A divisão aparece em situações de partilha equitativa quando dividimos um número decimal por um inteiro (**tarefa 7**), e em situações de medida quando dividimos um inteiro por um decimal ou então dois decimais (**tarefas 8 e 9**). Também aqui a divisão pode aumentar o resultado em vez de diminuir (caso dos números inteiros). Serão os alunos que chegarão à conclusão que quando o divisor é menor que um, obtêm-se um quociente maior do que o dividendo (1 : 0,1 = 10 - lê-se numa unidade quantas vezes há uma décima?) . Os problemas em contexto deverão ser trabalhados antes da passagem para o formal, porque são eles que irão dar sentido às regras. No 5º ano os alunos retomam o estudo deste assunto, de modo que, os algoritmos da multiplicação e da divisão com decimais não devem ser uma prioridade para alunos do 1º ciclo. É importante que o aluno faça estimativas para obter os resultados que necessita, e se for necessário o resultado exacto sugere-se o recurso à calculadora. A **tarefa 12** permite identificar a divisão por 0,1 como tendo o mesmo resultado do que o produto por 10 .

Estimativas e Cálculo Mental

Tarefa 1

Calcula as seguintes somas e diferenças:

1. 0,75 + 0,25 + 5
2. 0,7 + 0,3 + 5
3. 3,5 + 1,5 + 10
4. 250 – 247,5
5. 35,5 + 0,5 -30

Tarefa 2

Adiciona quinze décimas aos seguintes números. Repara nas regularidades que surgiram. Dialoga com o teu professor e colegas acerca das tuas descobertas.

5,5	6	1,4	3,9
6,5	12	2,4	7,9
7,5	25	6,4	18,9
9,5	44	8,4	27,9
10,5	95	9,4	30,9

- Regista algumas dessas descobertas.

Tarefa 3

Retira 0, 5 a todos os números:

4	2,5	10,8	6,4
7	3,5	15,8	7,4
9	4,5	8,8	13,4
14	5,5	9,8	28,4

Tarefa 4 **Jogo a pares**

Cada jogador escolhe uma lista de 3 números decimais e escreve-os no caderno. Com duas operações no máximo, e à vez, cada um vai transformar cada número do adversário num número da sua lista. Por exemplo com o número 3,7 do meu colega vou subtrair 0,7 e adicionar 2,1 e obtenho o número 5,1 que é um número da minha lista, eliminando-o assim da lista do colega. Podem verificar com a calculadora. Ganha aquele que conseguir eliminar primeiro os números do seu parceiro**.**

Cálculo mental para a multiplicação e para a divisão

Tarefa 5

Calcula mentalmente os produtos seguintes:

1. 0,25 x 4
2. 0,25 x 8
3. 0,25 x16
4. 0,5 x 2
5. 0,5 x 4
6. 0,5 x 40
7. 0,5 x 124
8. 0,1 x 5
9. $\frac{1}{10}$ x 10
10. 3 x 0,2
11. 3 x 0,02
12. 3 x 0,002
13. $\frac{1}{10}$ x 20
14. 0,1 x 20
15. 0,1 x 22
16. 0,01 x 22
17. 0,001 x 22

Tarefa 6

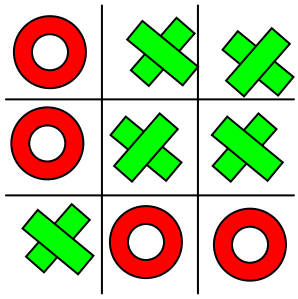
Faz uma lista de 10 números à tua escolha e usa a máquina de calcular para verificares o que acontece quando multiplicas esses números por 0,1.
Regista o que observaste e tira uma conclusão.
E se multiplicares por 0,01? E por 0,001?

Tarefa 7

Calcula $\frac{1}{2}$ dos seguintes números

4,4	20,6	100,6	13
8,4	24,6	10,06	23
10,4	34,6	52,02	45
18,4	44,6	52,06	67

Tarefa 8 **O JOGO DO GALO DA MULTIPLICAÇÃO**



Regras do jogo:

- Cada jogador escolhe o seu símbolo X ou O;
- Cada jogador escolhe dois números da lista abaixo indicada;
- Diz ao seu parceiro a sua escolha;
- Verifica o resultado na calculadora e regista o seu símbolo em cima do produto que está na grelha do jogo;
- Os jogadores jogam alternadamente e se um deles não acertar ou obtenha um resultado já saído, perde a sua vez,
- O primeiro a preencher uma fila, uma coluna ou uma diagonal, ganha.

Jogo 1

Factores: 0,1 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 12

20	0,5	5
0,2	1	10
2	0,1	60

Jogo 2

Factores: 0,25 ; 0,5 ; 16 ; 50 ; 100

1600	8	12,5
0,125	50	5000
4	800	25

Jogo 3

Factores: 0,02 ; 0,9 ; 1,5 ; 2,5 ; 23 ; 99 ; 200

4600	89,1	0,05	500
180	1,35	2277	4
19800	0,03	20,7	57,5
3,75	0,018	0,46	180

NOTAS PARA O PROFESSOR

Tarefas de cálculo mental e de estimativas são essenciais no percurso do desenvolvimento do sentido do número e das operações. Muitas vezes a ênfase é dada nos algoritmos, que pelo facto de serem processos já muito condensados, não ajudam o aluno a compreender esses procedimentos nem tão pouco o significado das operações a que dizem respeito.

Quando os alunos resolvem tarefas como **as tarefas 1, 2, 3 e 4** por exemplo, não precisam de usar a regra "vírgula debaixo de vírgula" para obter a resposta correcta. Aliás muitas vezes essa regra conduz a erros tais como 3,5 + 2 = 3,7, pois como 2 não tem vírgula os alunos colocam o 2 debaixo das décimas. Este erro muito comum é revelador da ausência de compreensão do sistema de numeração decimal e da falta de sentido dos números e das operações.

O recurso à máquina de calcular pode permitir a resolução de tarefas cujo objectivo é precisamente o desenvolvimento da noção de número e de competências de cálculo. Por exemplo nos jogos **(tarefa 4 e tarefa 5**) a máquina de calcular facilita o desenvolvimento do jogo, visto que o seu uso serve somente para confirmar resultados.

Anexos

O CONCEITO DE UNIDADE

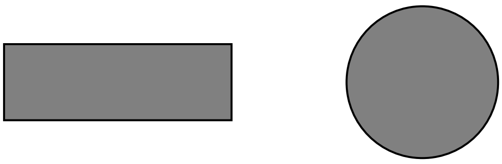
No universo dos números o conceito de **unidade** tem um papel fulcral. Usualmente a palavra **um** serve para designar a unidade mais simples de um número. Por exemplo, 23 lê-se vinte e três unidades. Na vida do dia a dia, quando alguém se refere a 23 unidades, sabemos que se está a referir a 23 unidades simples. No entanto, há outras unidades no sistema de numeração decimal, que resultam de se agruparem conjuntos de 10 unidades; vinte e três também pode ser referido como duas dezenas e três unidades. No sistema de numeração decimal a dezena é uma unidade formada por 10 unidades simples, a centena é uma unidade que resulta de agrupar 10 dezenas e assim sucessivamente. O número 1456 tem 1456 unidades simples, logo tem 145 dezenas, 14 centenas e uma unidade de milhar.

Há pois, além de unidades simples, unidades compostas. Uma dúzia de ovos é uma unidade composta pois resulta de se agrupar um conjunto discreto de objectos. Neste caso podemos considerar 12 unidades simples ou uma unidade composta, a dúzia, ou ainda duas meias dúzias, se pensarmos na meia dúzia como unidade de referência.

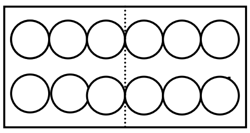
Diferentes categorias de unidades

A figura em baixo permite visualizar diferentes categorias de unidades. A unidade contínua refere-se normalmente a um segmento de recta ou a uma superfície ou às grandezas associadas respectivamente, comprimento e área.

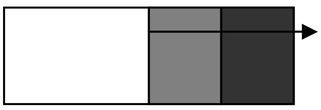
Contínua



Discreta



uma dúzia de ovos
duas 1/2 dúzias de ovos
12 ovos



nova unidade

$\frac{1}{2}x(de)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ **da primeira unidade**

Neste último caso, quando calculamos a metade de uma unidade e depois a metade dessa metade, a unidade de referência muda e, quando dizemos que temos um quarto, estamos novamente a referirmo-nos à primeira unidade**.** No cálculo da décima da décima (0,1x0,1) uma das parte em que a unidade é dividida (a décima) funciona agora como um novo tipo de unidade, diferente da inicial.

Podemos ainda considerar as unidades que se formam a partir do fraccionamento de outras em partes iguais; por exemplo, a décima parte do metro é o decímetro, que por sua vez pode ser considerado uma unidade; 0,5 do metro são 5 decímetros.

A décima, a centésima, a milésima são consideradas novas unidades que derivam de considerarmos uma unidade simples dividia em 10, 100 ou 1000 partes iguais. Assim, a décima é uma nova unidade que, quando comparada com uma unidade simples, vale dez vezes menos do que ela. Estas unidades estão todas relacionadas entre si e principalmente a uma unidade de referência.

Esta unidade de referência pode ser aquela que decidirmos ou que convém escolher. Provavelmente, para medirmos uma distância entre duas cidades escolhemos o quilómetro, mas se pretendermos medir o comprimento de um lápis usamos o centímetro. Quando nos referimos à décima ou à centésima parte do metro, também podemos dizer 1 decímetro ou 1 centímetro, respectivamente. Por exemplo, ao considerar, no material MAB, a placa como valendo uma unidade, cada "cubinho" vale uma centésima, e cada fila uma décima, mas se considerarmos como unidade de referência a barra, já é o "cubinho" desta que vale uma décima.

Um quarto de hora, tendo como unidade a hora, passa ao número inteiro 15 se a fizermos equivaler a 60 minutos: $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} \times 60 = 15$

No universo dos números inteiros a noção de número está directamente relacionada com a contagem, ou seja, com o cardinal de um conjunto. O sistema de numeração decimal e o valor de posição, que são ensinados na escola portuguesa desde muito cedo, permitem à criança perceber que se pode representar números agrupando em grupos de dez e posicionando os algarismos correspondentes consoante a ordem dos agrupamentos. Há países, como por exemplo a Holanda, onde o número é ensinado como um todo, sem a preocupação de o reorganizar em ordens e classes, o que pode permitir desenvolver mais facilmente o sentido de um número, remetendo para mais tarde a reconceptualização da unidade através dos agrupamentos.

O estudo das estruturas multiplicativas tem como base conceptual a relação entre grupos de objectos e o número de objectos que cada um contém, o que implica alargar o conceito de unidade. É pois uma relação entre dois tipos de unidades diferentes. Assim, se tiver três caixas de garrafas de leite, cada uma delas com 6 garrafas, para calcular o número total de garrafas, tenho uma relação entre cada grupo (uma caixa) e o número de garrafas de leite de cada caixa.

Neste alargamento do conceito de unidade, a complexidade aumenta quando os alunos são confrontados com os números racionais não inteiros. Na verdade, quando começamos a trabalhar com as crianças, partes de unidades, sejam elas simples ou compostas, percebemos a diferença conceptual que daí advém, precisamente devido ao tipo de unidade que estamos a considerar. Temos agora uma *relação entre uma parte e um todo.* Metade de uma folha A4 não é o mesmo que metade de um folha A3, nem 1/4 de 8 berlindes é o mesmo que 1/4 de 16 berlindes. Como vimos, a décima no sistema métrico depende da unidade de referência.

Os erros mais comuns dos alunos prendem-se, muitas vezes, com a conceptualização da unidade, nomeadamente no conjunto dos números racionais não inteiros. Quando se pergunta qual dos números é maior, se 0,15 ou 0,5, a resposta 0,15, que é muitas vezes dada até por alunos do 3º ciclo, evidencia a dificuldade em compreender a subdivisão da unidade em décimas e centésimas. Neste caso, o facto de se dizer zero vírgula quinze e zero vírgula cinco, em vez de quinze centésimas e cinco décimas pode levar à resposta errada. Também, quando se pergunta qual das fracções é maior, se 1/4 ou 1/3, a resposta 1/4 é justificada pelos alunos pelo facto de 4 ser maior de 3.

A análise das dificuldades dos alunos na conceptualização da unidade e das unidades provenientes de agrupamentos ou de fraccionamentos é principalmente importante quando se inicia o estudo dos números racionais não inteiros. Por vezes, quando se trabalha as fracções ou os decimais, não há uma alusão clara à unidade de referência que serve de contexto, isto é ao todo, o que pode trazer, como consequência, mal entendidos, principalmente quando o ensino assenta em procedimentos, menosprezando abordagens conceptuais. A fracção 3/4 ou a dízima 0,75 podem ter vários significados, consoante os contextos onde são aplicados ou, quando se pede a soma de 1/3 com 1/4 pode não estar indicada a unidade a que se referem estes símbolos. Podemos trabalhar somente a nível simbólico, mas até chegar a essa fase é muito importante que os alunos dêem significado aos símbolos. Isto faz-se através de problemas ou situações que façam sentido para os alunos.

Sugere-se que os professores apresentem aos alunos tarefas onde intencionalmente apareçam diferentes tipos de unidades, e onde seja realçado o todo em relação ao qual se pretende determinar a parte. Por exemplo o problema seguinte permite a discussão da unidade em causa: "Se a Maria gastou 0,1 da sua mesada na compra de livros e o João gastou 0,3 da sua mesada também na compra de livros, quem gastou mais? Quando se passa para situações onde se pede somente para comparar 0,3 e 0,1, já se pressupõe que a unidade subjacente é a mesma. Outro tipo de actividade que pode favorecer o desfazer de mal-entendidos é a reconstrução da unidade a partir de uma parte desta; por exemplo, se 12 cromos for a quarta parte de uma colecção, quantos cromos tem a colecção completa. Ou, se uma quadrícula do teu caderno é a décima parte de uma unidade, qual é essa unidade? Neste caso podem surgir várias respostas dependendo do modo como vão desenhar os 10 quadrados.

Os números só têm existência própria, quando nos despojamos de contextos e os trabalhamos como entes matemáticos, o que não é possível numa primeira fase com crianças pequenas.

Acontece que, numa grande parte das sala de aula do ensino básico, a ênfase é nas representações formais dos números, descontextualizados, ou onde a contextualização é breve e redutora (caso da divisão onde os contextos são de partilha, desprezando-se os contextos de medida e de razão). Há um entendimento generalizado, por parte dos professores, que o objectivo do ensino da Matemática no ensino básico é o ensino do cálculo baseado em treino de procedimentos. As abordagens em contexto permitem abordagens conceptuais, mas que são pouco trabalhadas, ou então não é feita a ligação necessária entre a resolução de problemas e o trabalho simbólico. Pode ser neste campo que reside uma das causas para o insucesso nesta disciplina.

Cecília Monteiro, 2005

Os Números Reais

Números naturais e números inteiros

Os números estão ligados ao desenvolvimento dos povos e relacionados com as condições da sua vida económica. À medida que as trocas económicas iam evoluindo maior ia sendo o conhecimento dos números e foram necessários muitos séculos para se chegar às diferentes ideias associadas aos números que hoje temos. Os números naturais, aqueles que provêm da contagem, existem desde que o homem existe. Como afirma Bento de Jesus Caraça, a ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência, os homens não criaram os números naturais para depois contarem, pelo contrário os números naturais surgiram naturalmente do processo de contagem.

O homem primitivo contava os animais, os dias, servindo-se de pedras ou outras marcas para identificar o resultado da contagem, tendo só muito mais tarde começado a encontrar símbolos para os representar. Foi então construindo sistemas mais ou menos eficazes para contar grupos de objectos. Na Índia, por volta do século V da era cristã, os sistemas de representação dos números tiveram grande desenvolvimento e a descoberta do zero permitiu que hoje a humanidade tenha um sistema eficaz para representar qualquer número inteiro, por muito grande que seja. Os indianos unificaram noções filosóficas de vazio, nada, ausência, nulidade, etc., tendo agrupado estes conceitos numa única palavra "Shûyata" que significa o vazio. Assim, um espaço vazio correspondia à ausência das unidades de uma certa ordem na numeração decimal de posição. O grande avanço conceptual, o zero, permitiu pois a invenção do sistema de numeração decimal e a escrita posicional. Estes "achados" demoraram mais de cinco séculos para que fossem transmitidos à Europa, onde chegaram no século XI. Foram os sábios árabes e muçulmanos que veicularam a ciência indiana e tiveram um papel fundamental como intermediários entre os dois mundos. Os símbolos que hoje usamos, os algarismos, foram um legado dos árabes e é com eles que conseguimos representar qualquer número. Os números naturais[4] são os números **1,2,3,4,5,6,...,n,...** O zero não é um número natural, na medida em que não é necessário para a contagem, que se processa fazendo corresponder a cada símbolo um objecto através de uma correspondência biunívoca (um a um).

Os números inteiros[5] (uma extensão dos números naturais) são os números **0,1,2,3,4,5,6,7,...,n,...** Os números inteiros tornaram-se uma ideia liberta já do processo de contagem e através do pensamento, já fora das coisas reais, ela permite a existência de um conjunto de números infinito, na medida em que é sempre possível pensar num número que se segue a outro

---

[4] O conjunto dos números naturais costuma designar-se por N

[5] O conjunto dos números inteiros costuma designar-se por N^0

e assim sucessivamente, não sendo possível conceber um número maior do que todos. Surge então a ideia de infinito. É esta ideia magnífica que nos permite verificar que há tantos números inteiros quantos números pares, visto que é sempre possível estabelecer uma correspondência um a um entre os dois conjuntos. Na verdade se fizermos a seguinte correspondência, verificamos que é possível continuá-la sempre...

1	2	3	4	5	6	7	...
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	
2	4	6	8	10	12	14	...

O infinito associado aos números inteiros e dos números pares é do tipo **infinito numerável** (porque há outros, o da recta, por exemplo, que é do tipo contínuo, e que veremos à frente).

Também nos referimos ao conjunto dos números inteiros como um **conjunto discreto**, visto que entre dois números inteiros quaisquer não há uma infinidade de outros números inteiros, o que já não acontece, por exemplo, no conjunto dos números decimais.

Os números racionais

As fracções, conhecidas desde a Antiguidade, surgiram com a necessidade de traduzir o resultado de uma medição. Quando se mede uma grandeza com uma determinada unidade de medida, há por vezes a necessidade de subdividir essa unidade num certo número de partes iguais, de modo a exprimir numericamente a medida dessa grandeza. Por exemplo, se tivermos de medir um comprimento $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$, esta pode caber um número inteiro de vezes no comprimento a medir, ou não. Neste caso precisamos de dividir $\overline{CD}$ em partes tais, que um certo número dessas partes caiba exactamente na parte que ficou por medir. Admitamos que a unidade de medida cabia 4 vezes "mais um bocado" no comprimento $\overline{AB}$, dividindo a unidade em partes iguais verificámos que a terça parte dessa unidade resolvia a situação, então a medida de $\overline{AB}$ equivale a 4 unidades mais 1/3 ou seja $\overline{AB} = 4\frac{1}{3}\ \overline{CD}$. A origem dos números racionais também está ligada à necessidade de partilhar quantidades em partes iguais. Para representar a quantidade de pão com que cada uma de 4 pessoas fica ao dividir igualmente 3 pães, as fracções foram a representação usada muito antes da representação em numeral decimal.

Os números racionais (expansão do conjunto dos inteiros através dos números fraccionários), podem ser representados por fracções e equivalem exactamente ao quociente entre dois números inteiros (excepto quando o divisor é zero). A expressão simbólica $\frac{m}{n}$ é a representação de um números racional, sempre que **m** e **n** forem números inteiros e desde que $n \neq 0$.

Se dividir 2 por 4 consigo obter a dízima finita 0,5, que representa exactamente esse quociente, mas se dividir 2 por 3 já não consigo obter um quociente exacto, pois obtenho a dízima infinita periódica 0,66666... A fracção $\frac{2}{3}$ possibilita a representação exacta de 2 por 3. Portanto, podemos dizer que todos os números que se podem representar por uma fracção são números racionais[6]. Como consequência, temos que um número inteiro também é um número racional visto que se pode representar por meio de uma fracção (por exemplo 4/2 = 2). O conjunto dos racionais é formado pela reunião de dois conjuntos: o dos números inteiros e o dos números fraccionários.

Este conjunto é ainda um conjunto numerável, isto é, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre esse conjunto e o dos números naturais[7]. É uma ideia aparentemente difícil de aceitar numa primeira abordagem a este assunto, mas que pode ter sentido se pensarmos que são ambos conjuntos infinitos.

Há no entanto uma grande diferença entre o conjunto dos rcionais inteiros e o dos racionais não inteiros. Vimos que não era possível encontrar uma infinidade de inteiros entre dois números inteiros quaisquer, mas é fácil perceber que este facto já não se verifica no conjunto dos números racionais não inteiros – os números fraccionários. Na verdade entre 1/2 e 1/3, por exemplo, há infinitos números, tais como 2/5 ou 14/33 ou, entre 0,1 e 0,2 temos números tais como 1,13 ou 0,116. Por este facto o conjunto dos racionais é um **conjunto denso,** visto que existe sempre uma infinidade de números racionais entre dois números racionais quaisquer

No conjunto dos números racionais (positivos e negativos) fraccionários há dois subconjuntos: os números decimais e os números fraccionários não decimais. Todo os números racionais que se podem representar por uma fracção decimal (cujo denominador é uma potência de 10), ou por uma dízima finita, são números decimais, os outros como por exemplo 2/3 e que são representados por dízimas infinitas periódicas, são números fraccionários não decimais.

$$\text{Números Racionais}\begin{cases}\text{Números Inteiros}\\[1em] \text{Números Fraccionários}\begin{cases}\text{Números decimais}\\[1em] \text{Números não decimais}\end{cases}\end{cases}$$

6 O conjunto dos racionais positivos e negativos designa-se por Q

7 Ver em “Conceitos Fundamentais da Matemática”, de Bento de Jesus Caraça

Os números irracionais

No século V a. C, os matemáticos gregos pitagóricos suspeitaram que além dos números inteiros e dos números fraccionários havia outro tipo de números. Verificaram, por exemplo, que a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a uma unidade não é nem um número inteiro nem um número fraccionário. O facto de, até aquela altura estarem convencidos que o universo se regia por números naturais e fraccionários fez com que chamassem a estes novos números, irracionais. Apesar de conhecida s sua existência, só no século XIX foram formalmente estudados. Foi Dedekind, que em 1872, estudou a continuidade da recta (até àquela altura pensava-se que havia uma correspondência biunívoca entre os pontos da recta e os números racionais) e, através da verificação de “lacunas” na recta numérica provou a existência destes números fazendo a correspondência com os pontos da recta.[8]

Os números irracionais não se podem representar como um quociente de dois números inteiros, é o caso dos números que não têm raiz quadrada exacta, por exemplo, o número $\sqrt{2}$. O número π é também um número irracional. Sabemos pelo teorema de Pitágoras que, num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, o que simbolicamente se representa por: $a^2 = b^2 + c^2$, sendo **a** a hipotenusa do triângulo e **b** e **c** os catetos. No exemplo do quadrado de lado igual a 1 metro, temos que $a^2 = 1 + 1$ e portanto a = $\sqrt{2}$. Estes números representam-se por dízimas infinitas não periódicas. Assim, voltando ao exemplo anterior $\sqrt{2}$ = 1,4142735.... Assim como no conjunto dos racionais, podemos considerar também os números irracionais positivos e os negativos. Ao conjunto reunião dos conjuntos dos racionais e dos irracionais chama-se conjunto dos números reais e representa-se por **R.** Este conjunto já não é um conjunto numerável, ele é do tipo **contínuo**, visto que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre cada ponto da recta e cada número real.

O esquema seguinte mostra a relação entre os números reais[9].

- Números Reais
  - Números Racionais
    - Números Inteiros
    - Números Fraccionários
  - Números Irracionais

[8] Ver explicação detalhada em Conceitos Fundamentais da matemática” de Bento de Jesus Caraça

[9] Esta classificação não é única. Em manuais escolares de outros países os números inteiros são considerados números decimais.

As representações dos números

Confunde-se, por vezes, os números com as suas representações. Os números racionais podem ser representados por fracções ou por numerais decimais (dízimas finitas ou infinitas periódicas).

Os números decimais representam-se por fracções com denominador 10 ou uma potência de 10, ou por uma fracção equivalente a estas, ou ainda por uma dízima finita. Portanto os numerais decimais que são representações de números racionais, são dízimas finitas (1,5 por exemplo) ou são dízimas infinitas periódicas (0,3333..., que corresponde a 1/3) ou periódicas mistas (0,3121212...).

Quando o número racional é maior que uma unidade podemos ter a representação na forma de numeral misto, por exemplo $2\frac{1}{4}$, equivale a $\frac{9}{4}$ ou ainda 2,25, evidenciando a parte inteira do número. Há no entanto numerais com vírgula que não representam números racionais, são os que representam número irracionais, as dízimas infinitas não periódicas (1,2563142537... por exemplo).

Curiosidades sobre números

Número primo é o número que só admite dois divisores, ele mesmo e o número 1. Os números 3, 5, 7, 13, por exemplo, são números primos

Número perfeito é o número que é igual á soma dos seus divisores excluído ele próprio. O número 6 = 1+2+3, é um número perfeito.

Número deficiente é o número cuja soma dos seus divisores é menor do que ele, por exemplo o número 10 .

Número abundante é o número cuja soma dos seus divisores é maior do que ele próprio. Exemplo de um número abundante, o 12.

Números amigáveis são dois números cuja soma dos divisores de um resulta no outro e vice versa. Os números 220 e 284 são números amigáveis.

Números primos entre si são os números que admitem unicamente como divisor comum a unidade.

Referências

Bento de Jesus Caraça, 1978. **Conceitos Fundamentais da Matemática**.Lisboa

Georges Ifrah, 1981. **Histoire Universelle des Ciffres**. Ed. Robert Laffont. Paris

Cecília Monteiro

(Documento de trabalho elaborado em Dezembro de 2005)

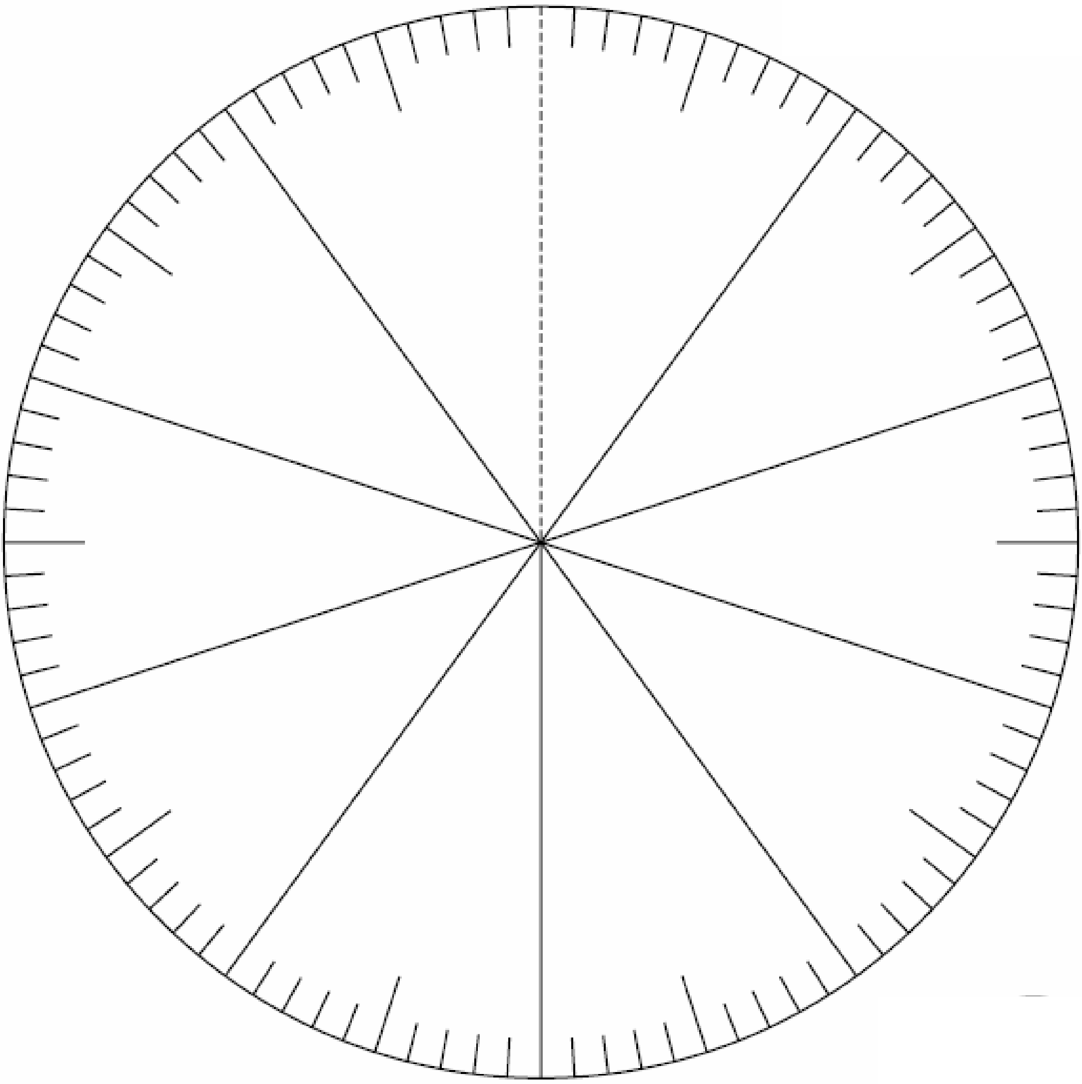
Cartões para o aluno

4 cêntimos € (0,04€)	25 cêntimos € (0,25€)	50 cêntimos € (0,50€)
20 cêntimos € (0,20€)	15 cêntimos € (0,15€)	70 cêntimos € (0,70€)
10 cêntimos € (0,10€)	30 cêntimos € (0,30€)	40 cêntimos € (0,40€)
1 cêntimo € (0,01€)	13 cêntimos € (0,13€)	5 cêntimos € (0,05€)
9 cêntimos € (0,09€)	19 cêntimos € (0,19€)	21 cêntimos € (0,21€)

Cartões para o professor

2,96 euros € (296 cêntimos)	2,75 euros € (275 cêntimos)	2,50 euros € (250 cêntimos)
2,80 euros € (280 cêntimos)	2,85 euros € (285 cêntimos)	2,30 euros € (230 cêntimos)
2,90 euros € (290 cêntimos)	2,70 euros € (270 cêntimos)	2,60 euros € (260 cêntimos)
2,99 euros € (299 cêntimos)	2,87euros € (287 cêntimos)	2,95 euros € (295 cêntimos)
2,91 euros € (291 cêntimos)	2,81 euros € (281 cêntimos)	2,79 euros € (279 cêntimos)

DISCO DAS CENTÉSIMAS



Modelo 10x10