GEOMETRIA E MEDIDA NO ENSINO BÁSICO

Ana Breda

Lurdes Serrazina

Luís Menezes

Hélia Sousa

Paulo Oliveira

Maio de 2011

Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida

Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) em:
http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm

Introdução

A geometria e a medida são duas áreas da Matemática fundamentais para o dia-a-dia dos cidadãos a que a escola, no entanto, não tem dado a devida atenção. A geometria é normalmente deixada para os finais dos anos lectivos e tratada a partir das definições, dando pouco espaço à acção dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos. A medida reduz-se, tradicionalmente, à aplicação de fórmulas e realização de cálculos.

Acompanhando o desenvolvimento dos currículos que tem vindo a acontecer internacionalmente, o actual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007) procurou inverter esta situação propondo como ideia central em geometria, ao longo dos três ciclos, o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. Um outro aspecto a destacar prende-se com a introdução desde o 1.º ciclo das transformações geométricas, inicialmente de modo informal, e depois com uma progressiva formalização até ao 3.º ciclo. Também a noção de simetria de uma figura é clarificada e trabalhada neste programa, ganhando importância na caracterização dos objectos geométricos. Relativamente à medida, embora tenha um peso forte no 1.º ciclo, propõe-se que o tema seja tratado ao longo dos três ciclos, começando por trabalhar as noções de grandeza e de medida de uma grandeza.

A presente brochura desenvolve as orientações metodológicas respeitantes ao tema geometria (e medida) e discute aspectos fundamentais dos conceitos trabalhados no ensino básico, sugerindo tarefas a propor aos alunos e indicando como podem ser concretizadas na sala de aula. Trata-se de um documento destinado a professores e por isso procurou-se incluir uma fundamentação adequada do ponto de vista dos conceitos matemáticos que aqueles devem trabalhar com os alunos.

Não é objectivo desta brochura abordar todos os tópicos relativos a este tema, tendo sido seleccionados aqueles que, na perspectiva dos autores, necessitam de uma clarificação ou são assuntos novos no Programa. Para além das *Orientações gerais* para o ensino do tema e da sua *Abordagem didáctica*, procurou-se clarificar o que se entende por sentido espacial, incluindo-se um conjunto de tarefas a trabalhar com os alunos. Considerou-se importante discutir o tema das *Classificações em geometria* pela sua implicação no estudo das *Figuras Planas e dos Sólidos Geométricos.* Também as *Transformações Geométricas* merecem uma atenção especial nesta brochura, começando-se por clarificar conceitos e propriedades, ilustrar e discutir diversos tipos de simetria servindo-se para isso de frisos e rosáceas. São ainda apresentadas e discutidas tarefas que podem ser adaptadas pelo professor para trabalho de sala de aula.

O último capítulo discute a noção de *Grandeza* e inclui uma abordagem de algumas das grandezas incluídas no PMEB, propondo e discutindo algumas tarefas que podem ser usadas na sala de aula.

O PMEB recomenda que o ensino da geometria no 1.º e 2.º ciclos tenha por base a exploração, manipulação e experimentação de materiais, bem como o estabelecimento de estimativas de medida de grandezas. No 3.º ciclo é recomendada a introdução de pequenas cadeias dedutivas na exploração de problemas geométricos. Alguns exemplos destes problemas são abordados nos capítulos *Paralelismo, Semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e Transformações Geométricas.*

No final, apresentam-se sugestões de recursos que completam e aprofundam esta brochura.

Sentido espacial

O sentido espacial é o "agarrar" o mundo onde a criança vive, respira e se movimenta (Freudhental, 1973). Tal como o sentido de número, o sentido espacial é difícil de definir, tem uma componente intuitiva, que se vai desenvolvendo desde o nascimento. A terminologia utilizada também nem sempre é consensual, havendo quem prefira utilizar termos como orientação espacial, raciocínio espacial ou ainda pensamento espacial.

As crianças adquirem muitas noções acerca de espaço quando se movimentam no seu ambiente natural e interagem com os objectos. As suas experiências iniciais são sobretudo espaciais. É através da experiência e da experimentação em actividades espaciais concretas que o sentido espacial se vai desenvolvendo. Assim, quando chegam à escola as crianças têm já muitas noções intuitivas acerca de espaço e um grande conhecimento das formas, que é preciso continuar a desenvolver. Muitas vezes, a escola em vez de ampliar este conhecimento acaba por voltar a repetir aquilo que as crianças já sabem, como ilustra o exemplo seguinte:

Professor: (mostrando uma figura) Podes dizer-me que tipo de figura é esta?

Aluno: Um quadrado

Professor: Muito bem. É um quadrado.

O que se está a fazer é a repetir um conhecimento já adquirido, em vez de fazer apelo ao raciocínio espacial, isto é, formar novas ideias a partir das relações espaciais entre os objectos. O professor poderia ter optado por apresentar às crianças um conjunto de figuras geométricas e pedir-lhes para seleccionar as que são quadrados, justificando a selecção feita, contribuindo deste modo para o desenvolvimento do seu sentido espacial.

O NCTM (1991) sistematiza esta ideia de sentido espacial nestes termos:

O sentido espacial é um conhecimento intuitivo do meio que nos cerca e dos objectos que nele existem. Para desenvolver o sentido espacial são necessárias muitas experiências que incidam: nas relações geométricas; na direcção, orientação e perspectivas dos objectos; e no modo como uma modificação numa forma se relaciona com uma mudança no tamanho" (p. 61).

As experiências referidas dependem da capacidade de as crianças seguirem directrizes que utilizem palavras como *acima*, *abaixo* e *atrás*. Uma compreensão mais profunda das formas e das suas propriedades é adquirida quando os alunos observam o resultado da combinação de duas formas para formarem uma nova forma, quando prevêem o que acontece quando se altera o número de lados de uma forma, quando desenham uma forma depois de a rodarem de meia volta ou de um quarto de volta, ou quando alteram as suas dimensões.

Diversos autores consideram no sentido espacial três componentes: a visualização espacial, as figuras geométricas e a orientação espacial:

A *visualização espacial* envolve a capacidade de imaginar o movimento de objectos e as formas espaciais, como a construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tri-dimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas (NCTM, 2000, p. 44). A visualização espacial pode ser desenvolvida, inicialmente, por meio da construção e manipulação de representações concretas, utilizando materiais manipuláveis e posteriormente pela representação mental de formas, relações e transformações. Daí a importância do trabalho com *figuras geométricas*, por exemplo, identificando as características de determinada figura ou analisando o que acontece quando se altera apenas uma das propriedades e se mantêm as outras. Os alunos podem recortar figuras em papel e construir novas figuras a partir dos pedaços obtidos. Outras tarefas envolvendo dobragens e recortes podem ser importantes no desenvolvimento da visualização e do sentido espacial. Em suma, desde o início da escolaridade, os alunos devem desenvolver capacidades de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e com as tecnologias, rodando, voltando, deslizando, encolhendo e deformando objectos bi e tri-dimensionais.

Quando se fazem corresponder formas bi e tri-dimensionais às suas representações está-se a trabalhar um outro aspecto da visualização espacial. Nesta perspectiva, os alunos do 1.º ciclo podem construir sólidos a partir das suas planificações e realizar o processo inverso, isto é, partindo de um sólido fazer a sua planificação (por exemplo, utilizando material de encaixe). Podem ainda prever se determinada planificação corresponde a um dado sólido. A interpretação e desenho das vistas de topo ou laterais de objectos constituem o passo seguinte. Mais tarde, pode pedir-se aos alunos para construir um sólido, com o menor número de blocos, que corresponda a determinadas vistas.

O ensino da geometria na escola deve levar os alunos a aprenderem sobre formas e figuras e ajudá-los a tomarem como referência estruturas familiares como o próprio corpo, estruturas geométricas como os mosaicos do chão e padrões geométricos como a configuração dos pontos nas peças de dominós. Tarefas geométricas deste tipo estimulam os alunos a pensar e a expressar-se sobre as suas percepções, o que por sua vez ajuda ao desenvolvimento do sentido espacial e das capacidades de raciocínio.

A *orientação espacial* é uma outra componente importante do sentido espacial, fundamental para se compreender a posição relativa das formas e dos objectos bem como a relatividade dos seus tamanhos. Deste modo, os alunos aprendem a orientar-se a partir de diferentes perspectivas e são capazes de descrever caminhos e de compreender formas, figuras, proporções e relações entre os objectos. As crianças possuem muitas competências necessárias à orientação espacial antes de iniciarem a sua escolaridade formal, como o evidenciam investigações realizadas com crianças de quatro e cinco anos.

Um aluno com sentido espacial é capaz de, entre outros aspectos:

- concluir que justapondo dois cubos, com as mesmas dimensões, de modo a que duas das suas faces coincidam, obtém um paralelepípedo;
- concluir que numa pirâmide as faces laterais são todas triangulares, pois todas as arestas laterais concorrem num único vértice;
- construir um sólido a partir da sua planificação e vice-versa;
- determinar a soma da amplitude dos ângulos internos de um polígono a partir da justaposição de triângulos nele inscritos;
- descrever uma figura ou um sólido geométrico a partir da sua observação;
- percepcionar que as faces laterais de um prisma são necessariamente paralelogramos e que se o prisma for recto esses paralelogramos são rectângulos.

Matos e Gordo[1], partindo de vários contributos da investigação, apresentam a visualização espacial como um conjunto de sete capacidades:

- *Coordenação visual motora.* Isto é, a capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Esta capacidade começa a ser desenvolvida desde muito cedo, em particular quando as crianças desenvolvem actividades como comer, vestir, jogar, etc. Também quando os alunos têm de procurar um caminho, pintar um desenho ou reproduzir uma figura dada.
- *Memória visual.* A capacidade de recordar objectos que já não estão à vista. Esta capacidade desenvolve-se quando se pede aos alunos para copiarem figuras complexas em papel ponteado ou no geoplano.
- *Percepção figura-fundo.* A capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação, envolvendo a mdança de percepção de figuras contra fundos complexos. Esta capacidade desenvolve-se quando se procuram figures imersas noutras.
- *Constância perceptual.* Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diferentes posições, tamanhos e contextos. Uma tarefa que se pode incluir no desenvolvimento desta capacidade é a de procurar todos os quadrados não congruentes num geoplano 5x5.

[1] Ver Matos e Gordo (1993)

- *Percepção da posição no espaço.* Aptidão para distinguir figuras iguais quando colocadas em posições diferentes. Por exemplo, saber distinguir o p do b do d e do q.

- *Percepção das relações espaciais.* Capacidade de ver ou imaginar dois objectos em relação consigo próprios ou em relação com o observador. Por exemplo, a capacidade de relacionar objectos geométricos com as suas vistas e as suas planificações.

- *Discriminação visual.* Capacidade de identificar semelhanças e diferenças entre figuras. Esta capacidade está presente quando se propõe aos alunos que efectuem classificações e ordenações de formas geométricas.

Este conjunto de capacidades está relacionado com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos.

Orientações gerais para o ensino da Geometria

Introdução

Para descrever, analisar e compreender o mundo físico recorremos muitas vezes à geometria. Ao confrontar os alunos com fenómenos geométricos como as reflexões, e deixando-os resolver problemas geométricos simples, estes aprendem a compreender melhor o mundo à sua volta. De início, há necessidade de realizarem experiências concretas de manipulação e observação, mas, progressivamente, a ênfase deve ser colocada no raciocínio espacial e no desenvolvimento da capacidade de visualização espacial. Segundo o NCTM (2000), as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas e a geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos. As crianças estão melhor preparadas para todas as tarefas escolares quando adquirem instrumentos de pensamento e competências geométricas e espaciais.

A geometria propicia um contexto favorável para que os alunos se envolvam em actividade matemática e desenvolvam a comunicação matemática. Permite estabelecer conexões entre diferentes áreas da Matemática, por exemplo, as representações geométricas poderão ajudar a dar significado a diferentes conceitos como o de área ou de fracção e são úteis na compreensão, por exemplo, dos histogramas ou dos gráficos de dispersão. O sentido espacial é importante, por exemplo, na leitura e utilização de mapas, no planeamento de itinerários e na construção de plantas e também na criação artística.

Quando as crianças chegam à escola possuem já muitos conceitos rudimentares de forma e espaço que devem constituir a base para o conhecimento geométrico e raciocínio espacial a desenvolver ao longo da escolaridade. O programa de Matemática para o ensino básico (PMEB) reconhece a importância da geometria e dedica-lhe um lugar central no currículo de Matemática.

Conceitos fundamentais do currículo

Nos primeiros anos, os alunos começam por trabalhar os aspectos relativos à posição relativa de dois ou mais objectos, mas também a identificar pontos de referência e a construir itinerários. A partir da realidade que os rodeia, começam a descrever e a identificar uma variedade de formas e vão descobrindo as suas propriedades, começando por fazê-lo em figuras tridimensionais passando depois para as bidimensionais.

O conhecimento informal e as noções intuitivas desenvolvidas no 1.º ciclo são objecto de análise cuidadosa e aprofundada nos outros dois ciclos. Os alunos começam por elaborar descrições, definições e esquemas de classificação tendo em conta múltiplas propriedades, como o comprimento, a área e o volume ou a amplitude de ângulos. A partir destas características, os alunos elaboram as suas classificações, até chegar, por exemplo, a uma classificação de quadriláteros, onde a classe dos quadrados seja considerada uma subclasse da dos rectângulos ou da dos losangos. Ao mesmo tempo, desenvolvem a sua capacidade de comunicação e a sua compreensão de modo a serem capazes de usar que todos os quadrados são rectângulos mas nem todos os rectângulos são quadrados. Uma tarefa interessante a realizar no 2.º ou no 3.º ciclo é a de identificar quais as propriedades de determinadas figuras que são necessárias e suficientes para definir uma dada classe.

Em geometria, os alunos usam a visualização, o raciocínio espacial e o conhecimento geométrico para resolver problemas. A comunicação é uma capacidade transversal importante, permitindo que os alunos sejam capazes de interpretar, explicar e representar o processo em termos matemáticos.

Sentido espacial, um sentir intuitivo para forma e espaço, inclui a capacidade de reconhecer, visualizar, representar e transformar formas geométricas, mas também inclui modos menos formais de olhar para o espaço bi e tri-dimensional como as dobragens, as transformações, as pavimentações, etc. A geometria está à volta de nós na arte, na natureza e nas coisas que fazemos. Os alunos em geometria podem aplicar o seu sentido espacial e conhecimento das propriedades das formas ao mundo real.

Como o sentido de número, também o sentido espacial não é ensinado num dado momento mas deve ser desenvolvido ao longo da escolaridade básica proporcionando aos estudantes o envolvimento em actividades adequadas. Um exemplo de uma rotina simples que pode promover o sentido espacial é a seguinte, designada por desenho rápido:

No início da aula, durante três segundos, o professor mostra um *slide* com uma figura geométrica. Pede depois aos alunos para desenharem em papel branco a figura que viram. Depois dos desenhos estarem prontos, a imagem é de novo mostrada e discutida. Neste processo surgem diversos desenhos e diversas interpretações da figura, criando-se assim um ambiente onde comunicar matematicamente se torna uma actividade importante. À medida que o trabalho progride, podem apresentar-se desenhos mais complexos, estimulando a comunicação, pelo recurso a vocabulário geométrico mais sofisticado e rigoroso. Nos primeiros anos, os alunos utilizam o seu próprio vocabulário para fazerem a descrição das figuras e discutirem as suas semelhanças e diferenças. Gradualmente, os professores introduzem a terminologia e notação da geometria, estabelecendo assim as bases para a aprendizagem com um grau de formalização crescente à medida que avançam na escolaridade.

A geometria contribui com um vocabulário geométrico que se vai adquirindo, mas, a par disso, espera-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão dos conceitos e suas relações, da análise da informação, de resolução de problemas, de comunicação, mas também de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações.

A geometria é, por excelência, o tema matemático que permite que os alunos aprendam a ver a estrutura e simetria presentes no mundo à sua volta, nomeadamente nos monumentos históricos ou na própria natureza, e também em outros temas da própria Matemática, aprendendo dessa forma a valorizar o seu valor estético.

O sentido espacial é fundamental para elaborar e usar representações de modo a registar ideias matemáticas. A capacidade de raciocínio desenvolvida pelos alunos permite-lhes investigar problemas geométricos de crescente complexidade e, ao mesmo tempo, desenvolver clareza na descrição das propriedades das figuras geométricas a par com o desenvolvimento da comunicação matemática.

O estudo das *figuras no plano e no espaço* começa no 1.º ciclo, considerando-as inicialmente de modo global, identificando propriedades das mesmas; no 2.º ciclo, os alunos são chamados a relacionar as suas propriedades e no 3.º ciclo surgem situações de raciocínio hipotético-dedutivo, proporcionando-lhes um primeiro contacto com este modo de pensamento.

Uma alteração importante no PMEB, em relação ao programa anterior, é o estudo, logo desde o 1.º ciclo, de diversas *transformações geométricas*, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização. As isometrias, nomeadamente as reflexões, rotações, translações e reflexões deslizantes, são introduzidas de modo informal através da exploração e construção de frisos e rosáceas. As semelhanças aparecem no 3.º ciclo a partir do estudo de figuras semelhantes.

Abordagem didáctica

Introdução

Na aprendizagem da Matemática e, em particular na geometria, devem ser usados diversos recursos, tais como, régua, esquadro, compasso e transferidor e outros materiais manipuláveis. Como vivemos num mundo de padrões, formas e movimentos, isto é, num mundo geométrico, antes de chegarem ao 1.º ciclo os alunos já viveram muitas experiências onde exploraram relações espaciais e geométricas, onde tiveram oportunidade de comparar objectos, de classificá-los e agrupá-los de acordo com atributos como tamanho e forma, de explorar padrões geométricos e explorar relações de tamanho, direcção e posição no espaço. O sentido espacial envolve capacidades perceptuais que são importantes para o sucesso no início da escolaridade.

Na representação de objectos geométricos, a utilização do computador e em particular dos programas de geometria dinâmica é recomendada.

A informalidade deve ser um aspecto essencial nas primeiras experiências em geometria. Desde o nascimento, as crianças tiveram muitas experiências geométricas e adquiriram ideias geométricas que devem ser exploradas e validadas. Para isso, é necessária uma variedade de experiências de investigação e discussão de conceitos geométricos em diferentes contextos.

A aprendizagem da Geometria

A *teoria de van Hiele* e os estudos que têm sido realizados a partir daí proporcionam-nos perspectivas como analisar e planificar o progresso na aprendizagem da geometria. Trata-se de uma teoria onde foram definidos um conjunto de níveis de aprendizagem, mas simultaneamente se afirma que a progressão através dos níveis se faz através do ensino. Isto é, é através das experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos que estes progridem na sua aprendizagem. Os van Hiele e outros investigadores que os seguiram[2] estabeleceram um conjunto de níveis de aprendizagem dos quais se destacam:

Nível 0 – *Pré-reconhecimento* – os alunos neste nível dão atenção apenas a parte das características visuais de uma figura, são incapazes de identificar muitas figuras comuns.

Nível 1 – *Visual* – os alunos identificam, descrevem e raciocinam acerca das figuras e outras configurações geométricas de acordo com a sua aparência como um todo visual. Os seus raciocínios são dominados pela percepção visual e imagética e não por uma análise das propriedades geométricas. Quando identificam figuras, os alunos usam muitas vezes protótipos visuais, por exemplo, dizendo que uma figura é um rectângulo porque "se parece com uma porta".

Nível 2 – Descritivo/Analítico – os alunos reconhecem e caracterizam figuras pelas suas propriedades geométricas, isto é, explicitamente focando e descrevendo relações entre as partes de uma figura. Na transição do Nível 1 para o Nível 2, os alunos descrevem partes e propriedades das figuras informalmente, de modo impreciso e muitas vezes incompleto; eles não possuem as conceptualizações formais que os tornam capazes de precisar propriedades específicas. Por exemplo, um aluno pode descrever um rectângulo como uma figura que tem dois lados compridos e dois curtos. À medida que os alunos vão adquirindo conceptualizações formais que podem ser usadas para fazer sentido e descrever relações espaciais entre as partes de uma figura, eles usam uma combinação do formal e do informal para a descrição dessa figura. Finalmente, quando raciocinam no Nível 2 usam explícita e exclusivamente linguagem e conceitos geométricos formais para descrever e conceptualizar figuras de um modo que corresponda a um conjunto suficiente de propriedades para especificar essas figuras. Por exemplo, podem pensar num rectângulo como uma figura que tem lados opostos iguais e paralelos e quatro ângulos rectos, ou seja, uma figura é identificada pelas suas propriedades.

Nível 3 – Ordenação - Neste nível os alunos compreendem as relações entre as propriedades. As definições são significativas, isto é, os alunos compreendem que um quadrado é um rectângulo porque tem todas as propriedades do rectângulo. Um aluno neste nível pode deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras, seguir argumentos formais, mas não vê como alterar a ordem lógica duma demonstração, nem como construir uma demonstração partindo de premissas diferentes ou não familiares.

Os van Hiele definiram ainda mais dois níveis: Dedução, onde a geometria é entendida como um sistema axiomático e o de Rigor.[3]

Partindo da teoria de van Hiele e conjugando com outras perspectivas[4], Parzysz (2006) definiu um quadro teórico com quatro paradigmas:

[2] Ver Clements e Battista (1992)
[3] Ver Matos (1992)
[4] Ver Houdement & Kusniak (2003) e Henry (1999)

	Geometrias não axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Concreta (G0)	Espaço-gráfica (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objectos	Físicos		Teóricos	
Modo de Validação	Perceptivo-dedutivos		Hipotético-dedutivos	

Os elementos em que se baseia este modelo sintético são, por um lado, a natureza dos objectos em jogo (físico versus teórico), e por outro, os modos de validação (perceptivo versus hipotético-dedutivo). Partindo da "realidade", ou ainda do "concreto" (G0) que, para este autor, não é ainda geométrico pois os seus objectos são realizações materiais com todas as suas características (matéria, cor, etc), confronta-se de um lado uma geometria não axiomática, que se apoia em situações concretas que são idealizadas para constituir o "espaço-gráfico" (G1), e de outro lado, uma geometria axiomática, a axiomatização, podendo ser explicitada completamente (G3) ou não (G2), sendo a referência ao "real" facultativa para a primeira (mas não para a segunda); no último caso, falamos de geometria proto-axiomática. Para Parzysz, o grande objectivo na escolaridade obrigatória é a articulação entre G1 e G2. No paradigma G1 (espaço-gráfico) os objectos em jogo são físicos (modelos, diagramas, imagens de computador...) e as provas são de natureza perceptiva (visão, comparação, medida, etc.). Em G2 (proto-axiomático), os objectos em jogo são conceptuais – linha, recta, ... (a sua existência procede de axiomas e teoremas) e as provas são teóricas (movendo-se de facto do perceptivo para o hipotético-dedutivo quando aumenta o conhecimento geométrico dos alunos). Nos dois paradigmas, os diagramas têm um papel fundamental na resolução de problemas, mas o seu estatuto é diferente. Em G1, uma construção consiste em fazer um diagrama utilizando materiais e uma propriedade é verificada por observação ou medida. Em G2, uma construção consiste em definir novos objectos por palavras e a única maneira de verificar uma propriedade é através de uma demonstração (utilizando raciocínio dedutivo), fazendo uso de definições e teoremas e com a ajuda de um diagrama. Para Parzysz, a linguagem utilizada também varia com o paradigma onde se encontra o aluno: se este descreve mais as acções realizadas do que os objectos geométricos construídos (por exemplo, 'pus a ponta do compasso no ponto A'), pode ser interpretado como indicador de G1; se define directamente os objectos geométricos, apesar dos gestos realizados para os representar fisicamente (por exemplo, 'dado o círculo com centro em A e raio BC') pode ser interpretado como indicador de G2.

Ao longo da escolaridade, os alunos devem ser conduzidos a movimentarem-se gradualmente de G0 para G1 e deste para G2.

Utilização de materiais manipuláveis

Os materiais manipuláveis (como o geoplano, o tangram, formas poligonais, *polydrons* ou cubos encaixáveis) podem ter um papel fundamental como mediadores na aprendizagem dos diversos temas de geometria, para além dos materiais próprios deste tema (como régua, esquadro, compasso, transferidor).

Mas os materiais só por si não conduzem a nenhuma aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental neste processo. Os professores devem disponibilizar os materiais e organizar adequadamente o ambiente de aprendizagem, de modo a encorajar os alunos a explorar as figuras e as suas propriedades. No início do 1º ciclo, os alunos podem comparar blocos e materiais de uso comum, como caixas, identificando as suas semelhanças e as suas diferenças. Fazendo dobragens ou utilizando, por exemplo, o geoplano podem explorar algumas propriedades. É fundamental explorar muitos exemplos (e não exemplos) de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, por exemplo, triângulos posicionados de maneiras distintas e com ângulos de diferente amplitude e outras figuras que se assemelham a triângulos e não o são. Promovendo a discussão na turma à volta de exemplos e contra-exemplos, os conceitos geométricos vão sendo desenvolvidos e aperfeiçoados.

À medida que progridem na escolaridade, devem desenvolver modos mais precisos de descrever formas bi e tri-dimensionais, centrando-se na identificação e na descrição das suas propriedades e nas relações entre elas, usando o vocabulário adequado. Os alunos devem ser encorajados a raciocinar sobre essas propriedades, recorrendo às relações espaciais e usando os argumentos adequados. À medida que os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem ou constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. Em simultâneo, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjecturas sobre essas relações.

Também relativamente às transformações geométricas, os alunos começam por identificar figuras congruentes como aquelas que se podem sobrepor, mas é importante que se vão apropriando de vocabulário correspondente às transformações geométricas e que sejam capazes de descrever o "movimento" correspondente As crianças usam transformações informalmente quando fazem puzzles – rodam as peças, e deslocam-nas para o seu lugar. Deste modo, também aprendem que mudar a posição ou orientação de um objecto não altera a sua forma ou o seu tamanho.

O papel das tecnologias

A utilização das tecnologias é hoje imprescindível quando nos referimos ao ensino da Matemática e, em particular, ao da geometria. A tecnologia não só influencia o modo como a geometria é ensinada e aprendida, como também afecta o momento em que isso acontece e o que se ensina. As ferramentas tecnológicas permitem o acesso a modelos visuais poderosos, a que os alunos, em especial os mais novos, não teriam acesso tão facilmente. Deste modo, a tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações em geometria, ao fornecer um meio de visualizar noções geométricas sobre diferentes perspectivas. Ao trabalhar com programas de geometria dinâmica, a aprendizagem dos alunos é auxiliada pela resposta que a tecnologia pode proporcionar.

Trabalhando com um programa de geometria dinâmica, os alunos podem investigar as propriedades das figuras, desenvolver o conceito de "figura" atendendo às relações subjacentes e não às particularidades de um desenho específico, podem ainda explorar relações e formular e testar conjecturas. Também a compreensão e identificação de invariantes numa classe de figuras pode ser facilitado com o trabalho em geometria dinâmica.

Existem, disponíveis na Internet, pequenos programas interactivos, designados por *applets*, que permitem trabalhar problemas interessantes do ponto de vista da geometria. O trabalho com manipuláveis virtuais, por exemplo, o geoplano virtual, a par do trabalho com o próprio material, permite o alargar de experiências, em particular para os alunos mais novos.

Os alunos poderão, com auxílio dos computadores, proceder a abstracções e generalizações das suas experiências. Por exemplo, os alunos poderão construir um rectângulo no geoplano, medir os respectivos lados e construí-lo depois num programa de computador com as mesmas dimensões relativas, explorando as noções de escala e de semelhança. Também existem disponíveis pequenos programas informáticos que permitem que os alunos percorram labirintos ou mapas. Inicialmente, os alunos tentarão utilizar uma estratégia de tentativa e erro, mas o professor deve encorajá-los a descrever e justificar os movimentos que realizam no computador para percorrer determinado caminho ou para fazer um dado percurso. Deste modo, estão a ser trabalhados diversos conceitos, nomeadamente os de orientação, direcção e medição. Outros jogos de computador como o *Tetris* podem ajudar a desenvolver a orientação espacial e a coordenação visual-motora.

Como qualquer outro instrumento de ensino, a forma como a tecnologia é utilizada depende do professor, podendo ser usada de modo adequado ou não. Embora, por vezes, os alunos pareçam poder trabalhar de modo independente com a tecnologia, esta não substitui o professor. Pelo contrário, o seu papel é essencial desde logo ao definir quando e como deve ser usada a tecnologia, mas também na selecção das tarefas que propõe e na forma como promove a sua realização e o envolvimento dos seus alunos. Também ao observar os alunos a trabalhar com as tecnologias, o professor pode perceber melhor a forma como os alunos são capazes de lidar com os conceitos e temas em jogo, podendo deste modo tomar decisões mais informadas sobre a avaliação formativa dos seus alunos e consequentemente a planificação das suas aulas. A tecnologia pode assim constituir um contexto para discussões entre os alunos e o professor sobre os objectos visualizados no ecrã e os efeitos das diversas transformações proporcionadas pelo *software*, o que para além do desenvolvimento dos conceitos em presença, contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática.

Orientação espacial

Posição e localização

O PMEB (2007) destaca o desenvolvimento do sentido espacial e da visualização como aspectos essenciais, em geometria, que os alunos devem desenvolver ao longo do ensino básico. O tópico *Orientação espacial* e os subtópicos *posição e localização*, *pontos de referência e itinerários* e *mapas, plantas e maquetas*, que surgem logo no 1.º ciclo, envolvem um conjunto de conceitos e ideias geométricas importantes para o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. A realização de tarefas envolvendo a construção, interpretação e utilização de itinerários, de percursos e de labirintos, a interpretação e desenho de plantas, a interpretação e utilização de mapas e a construção de maquetas, recorrendo a pontos de referência diversos, incluindo a noção de que figuras e símbolos (numa planta, num mapa) representam objectos são importantes para o desenvolvimento desses conceitos. Estão também associados outros conceitos e termos matemáticos importantes em geometria, como por exemplo, paralelismo, perpendicularidade, concorrência, ângulo, direcção, orientação, distância e coordenadas.

Sobre os conceitos de posição e localização, nos primeiros anos, os alunos devem compreender que a posição de algo está, muitas vezes, relacionada com a posição do observador e com um dado sistema de referência, podendo este ser definido de acordo com regras que se estabeleçam num dado contexto ou podendo usar-se um sistema de referência convencional. Em qualquer dos casos é importante que numa dada situação todas as pessoas envolvidas saibam qual é o sistema de referência que foi considerado. É habitual, como se define no PMEB, considerar-se que na localização de objectos se utilize o sistema de referência esquerda-direita e horizontal-vertical referido ao próprio corpo.

Tal como se disse, a descrição da posição de um objecto tem, em muitas situações, por referência outro (s) objecto (s). Por isso, noções como em cima, em baixo, à direita ou à esquerda são conceitos relativos. Diz-se, por exemplo: "o rectângulo está à direita do triângulo" ou "o armário está à esquerda da mesa". Estas descrições de posição às vezes envolvem medidas, por exemplo, "o rectângulo está cinco centímetros atrás do círculo"ou relações do tipo: "atrás do círculo, mas à frente do quadrado". Muitas oportunidades para usar vocabulário relacionado com a posição e localização ocorrem naturalmente. Por exemplo, na vida do dia-a-dia dizem-se frequentemente frases do tipo: *vai em frente, volta à direita e depois vira à esquerda.* Na sala de aula, a realização de jogos, simulações e dramatizações que permitam a utilização e apropriação destas noções e destes termos pode ajudar à compreensão dos conceitos e à aquisição do respectivo vocabulário. A literatura infantil, nos primeiros anos, também oferece bons contextos para a exploração destes conceitos, por exemplo, propondo a sua dramatização e solicitando aos alunos que descrevam a localização das personagens.

Se em algumas situações da nossa vida é suficiente uma localização relativa, e usam-se termos que são relativos (esquerda e direita) e subjectivos (perto e longe), há outras situações em que é necessário uma localização mais precisa (absoluta), e nesse caso, é necessário recorrer a um sistema de referência que permita assegurar exactidão na localização. Desde há muitos séculos que o Homem sentiu a necessidade de desenvolver sistemas de referência e instrumentos rigorosos que permitissem determinar posições, localizações e direcções de pessoas, animais e objectos, como são exemplos, respectivamente, a rosa-dos-ventos e a bússola, utilizando-se termos, como norte, sul, este e oeste, entre outros. Existem ainda outros sistemas de referência relacionados com *Orientação* que não cabe aqui tratar, bem como novos instrumentos muito usuais, hoje em dia, como o GPS (Sistema de Posicionamento Global).

Em Matemática, existe um sistema de referência que permite localizar pontos no plano - o referencial cartesiano. Este é constituído por dois eixos, perpendiculares entre si, que se cruzam num ponto a que se chama origem. Cada um desses eixos tem uma orientação, indicada por uma seta, e uma graduação, tal como se vê na figura seguinte.

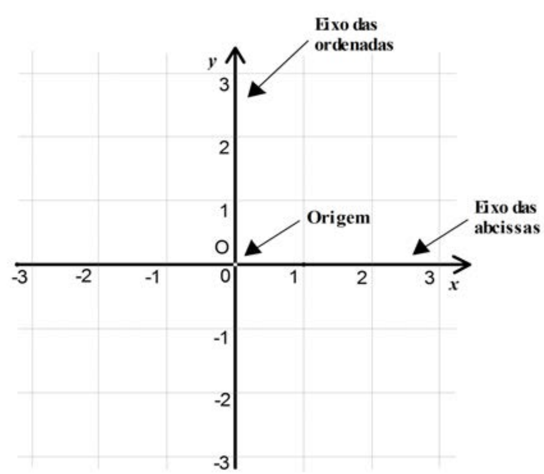


Figura 1: Referencial Cartesiano.

No 1.º ciclo, os alunos podem construir, traçar e descrever caminhos e percursos, determinar distâncias usando quadrículas tomando como unidade de medida, por exemplo, um lado da quadrícula e utilizar sistemas de coordenadas para localizar pontos através de pares de números (letras).

Nos 2.º e 3.º ciclos, estes conceitos devem continuar a ser desenvolvidos e aprofundados. Ideias geométricas de localização e distância podem ser relacionadas com o desenvolvimento de conceitos algébricos, em particular no 3.º ciclo com a representação de funções.

Tarefas com coordenadas

Tarefa 1: Onde estão as figuras?

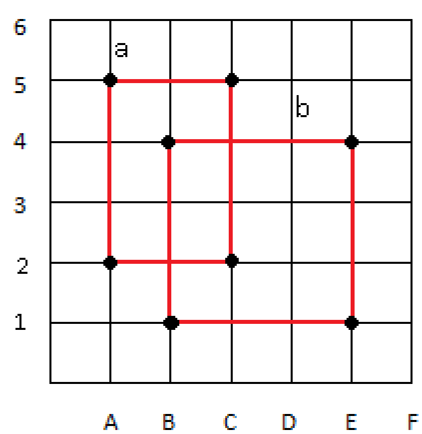


Figura 2: Quadrícula com coordenadas.

Neste exemplo, podemos ver que é possível localizar estas duas figuras (a e b) com exactidão, considerando, os 4 pontos que representam, respectivamente, os seus vértices, do seguinte modo:

Figura a – (A,2) (C,2) (A,5) (C,5)
Figura b – (B,1) (E,1) (B,4) (E,4)

Pode-se propor aos alunos a realização de um jogo (a pares) em que um aluno dita os pontos das figuras e o outro sem ver representa-os numa outra quadrícula igual e com as mesmas coordenadas. No fim, comparam para ver se as figuras ficaram representadas na mesma posição. Depois podem trocar de papel e jogar com outras figuras.

Tarefa 2: Coordenadas

Em cada uma das grelhas de coordenadas estão marcados três pontos.

1. Em qual delas se pode marcar o ponto (G, 8) de modo a que os quatro pontos sejam os vértices de um quadrado? Justifica a tua resposta.

2. Quando é que é possível, marcando um novo ponto, desenhar um quadrado em que os três pontos marcados são vértices? Justifique e indique as coordenadas daquele ponto, em cada caso.

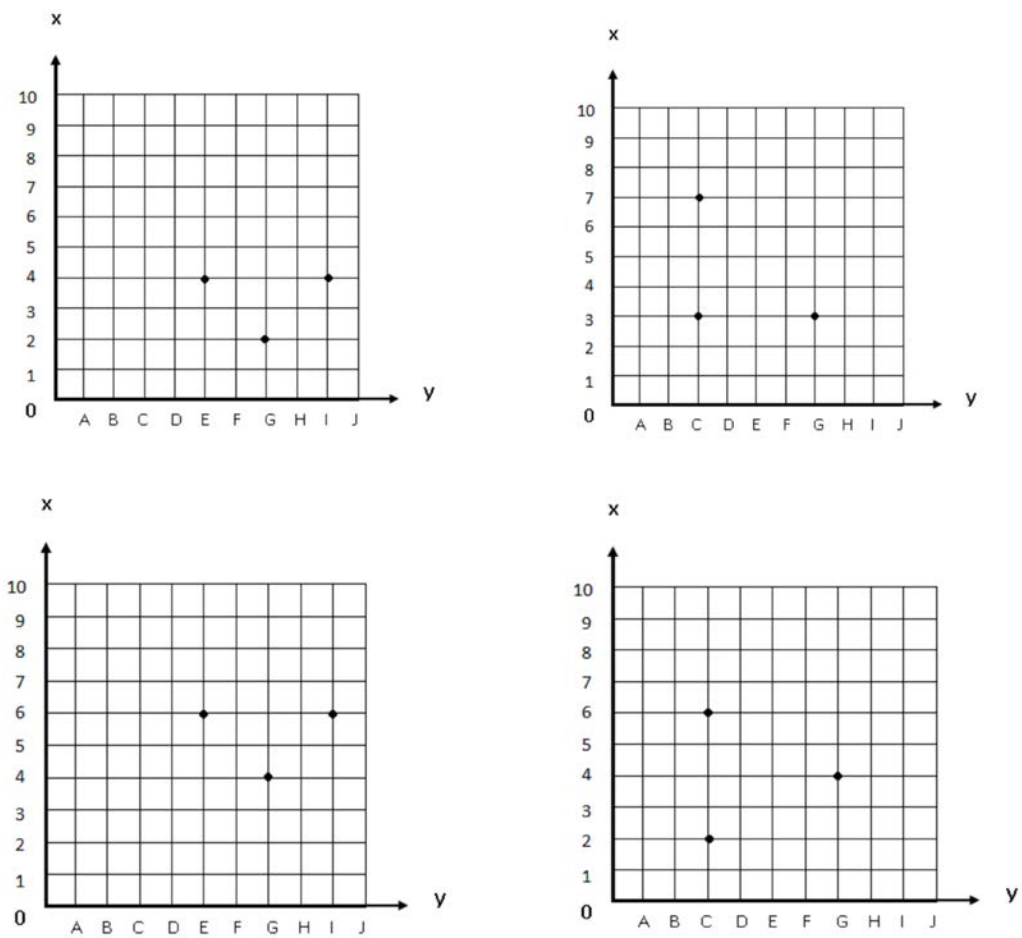


Figura 3: Grelhas de coordenadas.

3. Definir através das coordenadas os pontos que são extremos de segmentos de recta paralelos ou perpendiculares e classificar a partir desses pontos dados os polígonos que se obtêm tendo por lados esses segmentos de recta.

Tarefas envolvendo percursos

Os alunos devem descrever percursos que habitualmente façam, como por exemplo, de casa para a escola, da escola para casa, de casa ao cinema, uma viagem de carro, etc. Nessas descrições surge, naturalmente, o uso de vocabulário relacionado com direcção, sentido, distância, etc. O professor pode escrever no quadro alguns vocábulos ou expressões que considere mais significativos e promover a discussão na turma sobre o seu significado.

Tarefa 3: Qual é o caminho?

Observar o esquema e imaginar que há uma pessoa que não sabe como é que se pode deslocar da sala para a biblioteca. Que indicações lhe podemos dar?

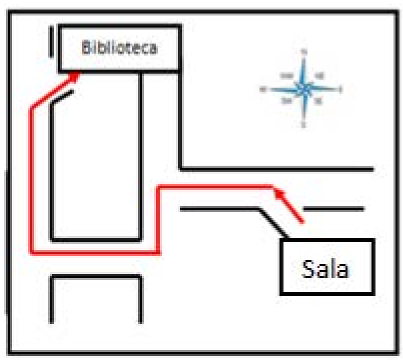


Figura 4: Esquema do caminho.

O professor vai escrevendo no quadro o que os alunos dizem e discutem-se quais são as indicações mais e menos apropriadas.

Exemplo de indicações:

Sair da porta da sala, virar para Oeste até ao fim da rua e virar para Sul. Na esquina voltar para Oeste e caminhar até à próxima esquina, onde deverá voltar para Norte. Seguir e voltar para Este. Está na Biblioteca.

Este tipo de percursos pode ser simulado na sala de aula. Com uma bússola os alunos podem, por exemplo, determinar o Norte, na sala de aula, colocando um cartão com a palavra NORTE num lugar apropriado. O professor pode colocar questões como: *Que outra direcção pode ser usada para descrever outra localização da sala*?

Ou,

Desenhar um esquema com as direcções (rosa-dos-ventos) para mostrar a relação entre os vários pontos cardeais e perguntar aos alunos:

Qual é a parede da sala que está a Norte?; E a Este?

Colocar nas paredes etiquetas com o nome do respectivo ponto cardeal e realizar e descrever percursos entre dois pontos da sala de aula, utilizando vocabulário apropriado.

Tarefa 4: A figura escondida

[5]Dizer aos alunos que há um triângulo escondido na sala que é necessário encontrar. Marcar com um x um ponto no início. Mostrar uma lista com indicações que ajudarão os alunos a descobrirem o triângulo. As instruções devem incluir as direcções a seguir e o número de passos em direcção ao Norte, ao Sul, ao Este e ao Oeste. Os alunos podem tentar dar passos do mesmo tamanho, ou usar uma unidade de medida de tamanho equivalente ao seu passo médio, por exemplo, usando umas tiras de papel com essa medida.

Seleccionar um aluno e dar indicações do tipo das seguintes:

- No ponto de partida x, dar 4 passos para Norte
- Voltar para Este
- Voltar para Sul e dar dois passos
- Voltar para Oeste e dar um passo
- Chegou ao local onde está o triângulo.

Depois do triângulo descoberto, o professor promove uma discussão, colocando questões do tipo:

O que ajudou o aluno X a encontrar o triângulo?
Ele podia encontrar o triângulo sem o uso dos termos Norte, Sul, Este e Oeste?
Existem outras maneiras de poder encontrar o triângulo?
As indicações estavam bem dadas? Como sabem?
Porque foi necessário estabelecer as direcções Norte, Sul, Este e Oeste?

Alguns pares de alunos escrevem um conjunto de indicações que podem ajudar outros alunos a encontrar um objecto que tenham escondido. Lembrar os alunos que devem escrever indicações detalhadas. Considera-se que o jogo foi bem sucedido se a figura for encontrada.

[5]Tarefa inspirada em *Navigating through Geometry* in Grades 3-5 (NCTM)

Tarefa 5: Traçar percursos

O Raúl vai sair de casa (ponto A) e deslocar-se para a escola (ponto B).

1. Quantos percursos diferentes pode o Raúl fazer para se deslocar de casa à escola? Considera apenas os percursos mais curtos, tomando como unidade o lado da quadrícula. Explica como pensaste.

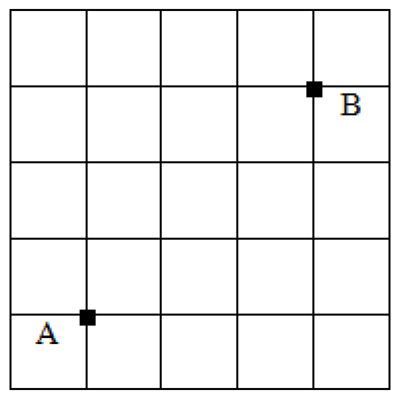


Figura 5: Caminho para a escola.

2. Descreve um dos percursos e lê-o ao teu colega para ele o representar (no papel quadriculado). Compara o teu (percurso) com o do teu colega e verifica se está de acordo com as indicações dadas.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos encontrem diferentes itinerários para ligar dois pontos, neste caso, considerando apenas os itinerários mais curtos e tomando como unidade o lado da quadrícula. Pretende-se, ainda, que os alunos ao explorarem este tipo de situações, percebam que, dado existirem diversas possibilidades que solucionam o problema, é necessário delinear uma estratégia que permita assegurar a sua identificação. Neste caso, os alunos podem usar a estratégia de seguir uma ordem baseada no número de esquinas. Por exemplo, em primeiro lugar, traçam os itinerários que têm apenas uma esquina, depois todos os que têm duas esquinas, e assim sucessivamente, até terem esgotado todas as possibilidades para cada uma das esquinas possíveis.

Numa primeira abordagem, o professor deve deixar os alunos seguirem uma estratégia que lhes pareça adequada. Por vezes, os alunos começam aleatoriamente, por tentativa e erro, mas depois podem começar a seguir alguma orientação, por exemplo, podem visualizar que há itinerários simétricos, e através dessa descoberta chegar a mais alguns itinerários. Posteriormente, no momento da discussão, alguns alunos apresentam os seus itinerários e explicam como chegaram a essas soluções. O professor deve colocar a seguinte questão:

Têm a certeza de que estão todos os itinerários possíveis traçados? Porque é que têm a certeza?

Nestes momentos, em colectivo, e sempre que a discussão esteja associada à observação de figuras, como neste caso, é aconselhável que estas sejam mostradas no retroprojector (caso seja possível). O facto dos alunos as poderem visualizar permite que haja um maior envolvimento, pois podem acompanhar o que se está a discutir. Finalmente, todos os alunos devem verificar que existem 20 possibilidades de itinerários, tendo em conta as condições do problema. Na sistematização das principais ideias que se pretendem com esta tarefa, é ainda importante que haja alguma reflexão sobre as vantagens de se delinear uma estratégia que leve a uma sistematização das soluções e da sua representação, sempre que é necessário ter a certeza de que foram encontradas todas as soluções possíveis para um problema. Este tipo de situações são importantes no desenvolvimento do raciocínio matemático.

A última parte da tarefa, incentiva os alunos a fazerem descrições, que sejam compreendidas por colegas, envolvendo vocabulário adequado. Algumas dessas descrições devem ser objecto de discussão, na turma, em que o professor e os alunos vão aferindo e limando alguns detalhes de linguagem, permitindo que os alunos desenvolvam e aperfeiçoem, cada vez mais, a sua comunicação matemática.

Tarefas sobre vistas de uma figura

Tarefa 6: Diferentes vistas

1. Faz uma construção igual à da figura em baixo.
Quantos cubos foram usados?
Repara que a construção que fizeste pode ser vista de frente, de lado e de cima.

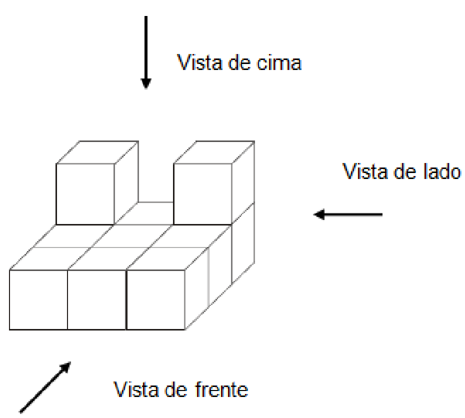
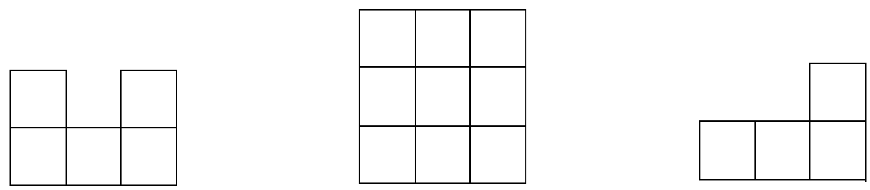


Figura 6: Construção com cubos.

Em baixo estão representadas essas 3 vistas da construção (pode ser usado o papel quadriculado).



Vista de frente | Vista de cima | Vista de lado

Figura 7: Diferentes vistas.

2. A seguir, estão representadas três vistas e o *desenho da base* de uma figura construída com cubos. Constrói essa figura.

Vista de frente | Vista do lado direito | Vista de cima | Desenho da base

Figura 8: Diferentes vistas e desenho da base.

3. Constrói figuras com cubos como as que estão representadas em baixo. Representa no papel ponteado um esboço de uma vista de frente, uma vista do lado direito, uma vista de cima e o desenho da base para cada uma das figuras:

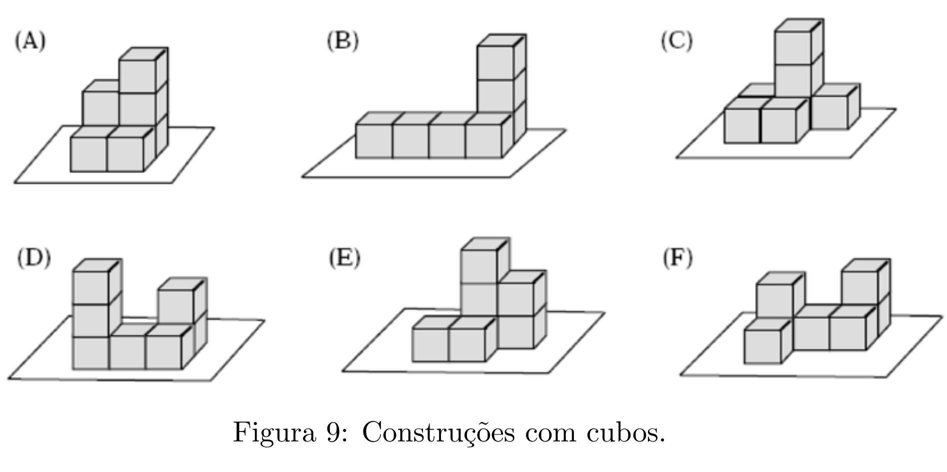


Figura 9: Construções com cubos.

4. As figuras A e B representam cubos em construção formados por cubos pequenos. Quantos cubos pequenos já estão em cada uma das figuras? Explica o processo que usaste para os contares.

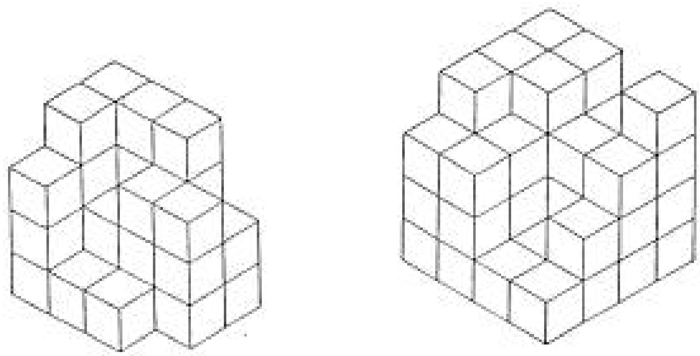


Figura 10: Outras construções com cubos.

A tarefa *Diferentes vistas* é apropriada para os alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade. Esta tarefa permite trabalhar a orientação espacial e tem como principais objectivos que os alunos aprendam a situar-se no espaço em relação aos objectos e a relacionar objectos segundo a sua posição no espaço; a representar objectos; e, a visualizar e descrever as posições de objectos. As capacidades transversais estão presentes nesta tarefa, particularmente, quando os alunos resolvem os problemas que lhes são propostos, expressam ideias e justificam os seus raciocínios. A comunicação matemática tem nesta tarefa, bem como em outras deste tipo, um papel fundamental.

Os materiais utilizados são: cubos e papel quadriculado ou ponteado (ou isométrico). Esta tarefa é indicada para ser resolvida a pares, permitindo o diálogo e a partilha de ideias entre os alunos, embora seja importante cada aluno ter a sua própria folha de registo para realizar as representações das figuras.

Os alunos começam por construir a figura, observá-la e descrevê-la. O professor deve orientar essa observação, dando a indicação de que é importante observar a figura de todas as perspectivas. No caso de ser a primeira vez que os alunos estão a fazer este tipo de trabalho, é aconselhável mostrar aos alunos algumas representações de figuras com diferentes vistas, usando, por exemplo, transparências e o retroprojector.

Exemplo:

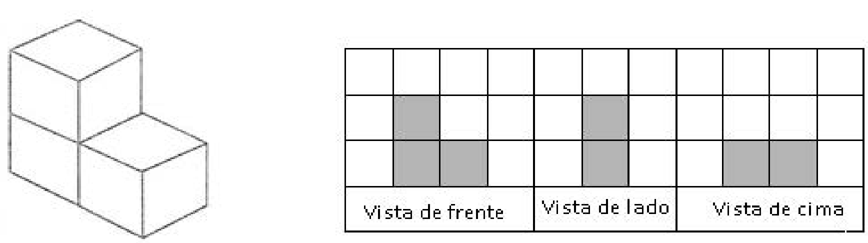


Figura 11: Construção com cubos e respectivas vistas.

O professor deve dialogar com os alunos sobre a dificuldade em se saber ao certo, nalguns casos, qual é a parte da frente de uma figura, bem como as restantes partes correspondentes às diferentes vistas. Por isso, é necessário tomar como referência um lado que se convenciona no grupo ser uma das vistas da figura e todas as outras vistas são depois consideradas e analisadas relativamente a essa. Outra hipótese é considerar-se, por exemplo, que para todos os casos, a vista de frente é aquela que está à frente do observador, mas nesse caso, quando se está a partilhar as observações feitas sobre uma figura, com os colegas da turma, é preciso que todos partilhem do mesmo sistema de referência.

A construção de figuras e o diálogo sobre elas, utilizando o vocabulário específico, é muito importante desde os primeiros anos, bem como a sua representação em papel quadriculado ou ponteado. Também pode ser usado o papel isométrico embora seja mais difícil para alunos mais novos ou que não tenham experiência com esse tipo de registo. O professor também deve mostrar representações da base, de várias figuras, (mostrando o número de cubos em cada posição), para os alunos se familiarizarem com esse tipo de representação.

Na última questão, é pedido aos alunos que contem os cubos que formam cada uma das figuras A e B. Os alunos podem seguir diversas estratégias. É importante que arranjem uma forma organizada de contagem e que sigam uma linha coerente de raciocínio. Por exemplo, podem contar os cubos que visualizam linha a linha, ou coluna ou coluna, contando mesmo com aqueles que estão escondidos mas que necessariamente terão de fazer parte da construção, partindo do princípio de que não são possíveis buracos. Outra estratégia é imaginar que os cubos já estão completos e retirar os cubos pequenos que faltam, fila a fila ou coluna a coluna. Os alunos poderão encontrar ainda outras estratégias.

Classificação em Geometria

De uma forma simples, pode dizer-se que classificar é organizar um conjunto de objectos em classes segundo um critério. Em geometria há uma estreita relação entre a classificação, o estabelecimento de relações entre os objectos, a identificação de características e a construção de definições. Classificam-se os objectos geométricos porque isso ajuda a encará-los organizadamente e a obter e relacionar as suas características.

Para alguns autores, a classificação de diferentes objectos matemáticos de acordo com determinados critérios pode salientar a consciência que se tem dos modos como se relacionam entre si. O processo de classificar exige a identificação de semelhanças e diferenças entre os objectos matemáticos em diversas aspectos, por isso há quem o considere uma *componente básica do raciocínio matemático.*

Segundo Alsina, Burguês & Fortuny (1989), há vários aspectos importantes a ter em conta no trabalho sobre a classificação em Matemática, nomeadamente:

- distinguir critérios que permitem classificar de critérios que não permitem;
- ver como critérios aparentemente distintos dão lugar à mesma classificação;
- deduzir possíveis critérios que tenham dado origem a uma classificação;
- sobrepor classificações, refinando-as;
- classificar pela via das transformações, sendo que estas classificações são consideradas as mais genuinamente geométricas;
- utilizar representações diversas para classificações (recorrendo, por exemplo, a diagramas de Venn ou conjuntos, diagramas de Carroll ou tabelas de dupla entrada, diagramas em árvore).

Apresenta-se a seguir um exemplo de classificação baseado no trabalho de Loureiro (2008):

O conjunto de objectos a organizar é um conjunto de quadriláteros construídos no geoplano de 5 por 5. Este conjunto é obtido com a preocupação de incluir todos os tipos de *quadriláteros convexos e de ter também quadriláteros côncavos. Numa fase prévia à organização podem ser construídos e registados de modo acessível os objectos que serão depois classificados.*

Propõe-se a organização de todos os objectos dados em classes de acordo com um critério e formular esse critério.

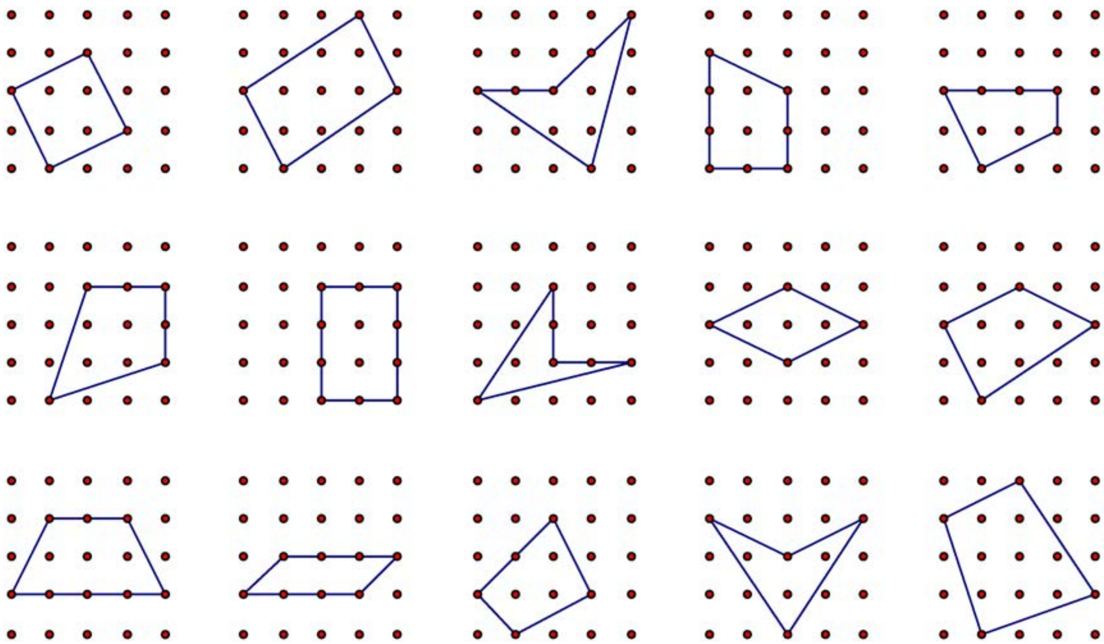


Figura 1: Exemplos de quadriláteros.

Perante este conjunto de figuras, algumas classificações possíveis podem ser feitas com base em diferentes critérios, como por exemplo:

1. Considerar, por um lado, os quadriláteros *côncavos* e por outro os *convexos.*

Define-se polígono convexo como um polígono construído de modo a que considerando dois dos seus pontos, todo o segmento de recta tendo estes dois pontos como extremos, estará inteiramente contido no polígono[6].

2. Apenas para os quadriláteros convexos, pode considerar-se o seguinte critério: *sem lados paralelos*, *com pelo menos um par de lados paralelo*

Neste caso, obtém-se uma *classificação em duas classes*, com e sem pelo menos um par de lados paralelos.

Considerando apenas o conjunto dos quadriláteros que têm pelo menos um par de lados paralelos (trapézios), uma forma de representar esta classificação pode ser um fluxograma como o que se apresenta.

[6]Considerando polígono como a reunião da linha poligonal fechada com o seu interior.

3. Ainda dentro dos quadriláteros convexos pode optar-se por uma classificação em três classes, *sem lados paralelos*, com *um e um só par de lados paralelos* e com *2 pares de lados paralelos*. Esta classificação, que não considera os paralelogramos incluídos na classe dos trapézios encontra-se, por exemplo, em Jacobs (1974, p. 315). Neste caso, um trapézio é definido como um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos.

Alguns exemplos de tarefas para os primeiros anos

Tarefa 1: Comparar figuras

Compara e descreve as figuras seguintes, identificando semelhanças e diferenças entre elas.

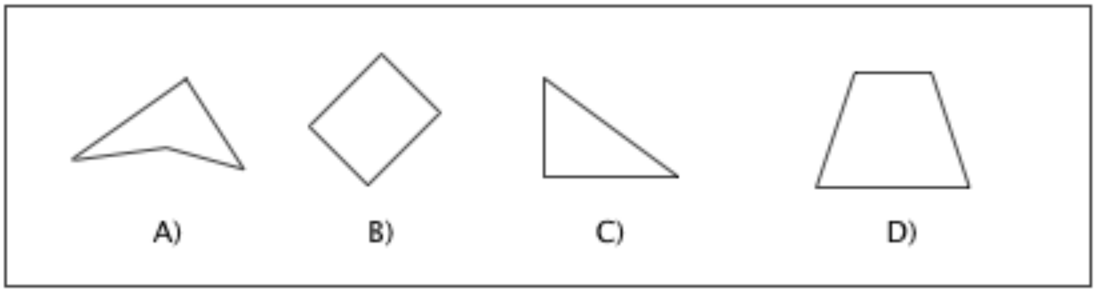


Figura 2: Figuras para comparar.

Os alunos podem começar por referir o número de lados das figuras apresentadas, sendo provável que os alunos dos primeiros anos de escolaridade digam que, neste conjunto de figuras, há duas figuras com quatro lados e duas figuras com três lados, explicando que basta endireitar dois lados da figura A para que essa figura seja um triângulo. No entanto, essa explicação já não deve surgir ao fim de algum tempo, pois à medida que os alunos vão desenvolvendo os seus conhecimentos geométricos devem ter outras explicações baseadas num reconhecimento das propriedades das figuras e, na verdade, a figura A tem quatro lados, enquanto a figura C tem três lados, e porque têm um número de lados diferente essas duas figuras pertencem a classes distintas. Mas, para descreverem estas figuras os alunos ainda podem referir outros aspectos como o comprimento dos lados, o número de vértices, a existência ou não de lados paralelos ou o tipo de ângulos. A referência aos dois últimos aspectos não surge imediatamente, mas à medida que os alunos são confrontados com situações em que têm de analisar figuras, começando deste modo a referir características das figuras que se relacionam com a noção de ângulo e de paralelismo.

É importante que os alunos observem muitos exemplos de figuras correspondentes à mesma classe de figuras, bem como uma variedade de figuras que não sejam exemplo dessa classe. Por exemplo, as figuras que aparecem em seguida podem, em determinada fase, parecer triângulos, mas ao descrever-se as suas propriedades os alunos são levados a concluir que três dessas figuras não podem pertencer a essa categoria.

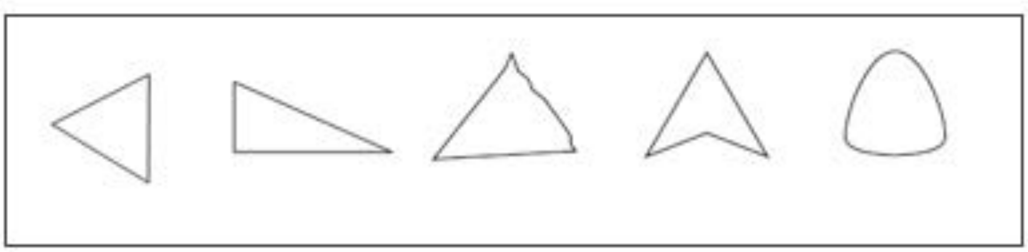


Figura 3: Exemplos de triângulos e não triângulos.

Tarefa 2: Composição e decomposição de figuras

Propor aos alunos que cortem um quadrado de papel a partir das suas diagonais, obtendo quatro figuras iguais (triângulos rectângulos isósceles). Com estes quatro triângulos os alunos devem compor outras figuras, unindo-as pelos lados congruentes. Que figuras podem surgir? Como se podem agrupar?

É possível reconstituir o quadrado ou formar outras figuras, como por exemplo, um triângulo rectângulo isósceles maior, um paralelogramo, um rectângulo e compor outras figuras menos conhecidas. Eis alguns exemplos de composições:

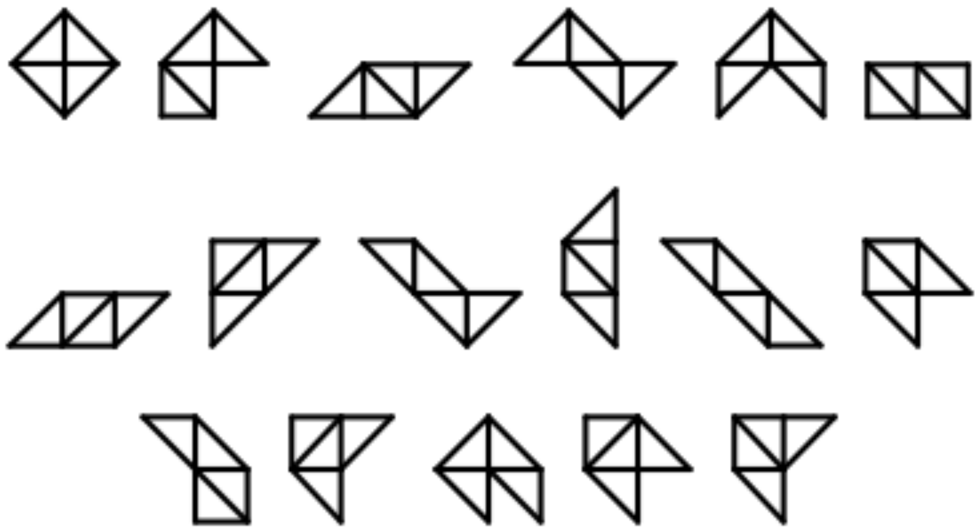


Figura 4: Composições com triângulos.

É importante discutir alguns aspectos com os alunos, a vários níveis, como por exemplo: considera-se a forma como os quatro triângulos estão dispostos na figura? Ou considera-se apenas o contorno da figura resultante, ou seja, o polígono que resulta dessa composição?

As figuras seguintes podem representar a mesma figura se for considerado apenas o seu contorno, mas terão que ser consideradas duas figuras distintas se atendermos à composição, ou seja, a forma como os triângulos estão dispostos na composição da figura. Este aspecto é importante ser discutido e, em alguns casos estão implícitos os conceitos de reflexão e rotação que podem ser considerados a propósito da exploração das figuras formadas.

Figura 5: Figuras com a mesma forma.

As figuras seguintes são congruentes e se for considerado apenas o contorno pode considerar-se a mesma figura que pode ser verificado pela sua sobreposição, mas se atendermos à composição da figura, verifica-se que uma pode ser vista como a imagem da outra por reflexão.

A representação tem nesta tarefa um papel importante. Os alunos podem fazer o registo das figuras compostas de maneiras diferentes. Podem ter vários triângulos já cortados que vão colando numa folha à medida que descobrem uma figura diferente ou ter à sua disposição quadrados de papel e vão decompondo o quadrado, compondo as figuras e colando-as numa

Figura 6: Figuras congruentes.

folha. Podem, ainda, ter esses quatro triângulos em cartão e à medida que vão compondo as figuras, vão registando-as por contorno. Uma outra possibilidade de representação das figuras passa por utilizar o geoplano e o papel ponteado.

Quando os alunos tiverem já descoberto várias figuras (compostas pelos quatro triângulos justapostos pelos lados congruentes), os registos podem ser afixados no quadro para que os alunos as visualizem e discutam se existem ou não figuras congruentes (iguais), justificando as suas afirmações.

Ao pedir aos alunos que agrupem as figuras compostas significa que se pretende que os alunos as categorizem e para isso é necessário que sejam consideradas propriedades das figuras. Neste caso, é a classificação que está em causa e que é preciso dar atenção.

A classificação de polígonos considerando o número de lados é muito comum. Por exemplo, as figuras seguintes têm quatro lados e, por isso, pertencem à classe dos quadriláteros.

Figura 7: Exemplos de figuras com 4 lados.

Já as figuras seguintes são hexágonos pois todas têm seis lados. Neste caso, todos eles são polígonos côncavos.

Figura 8: Exemplos de figuras com 6 lados.

Mas, se considerarmos outros critérios é possível constituir outras subclasses. Por exemplo, quanto ao paralelismo dos lados? Será que estas figuras têm alguns lados paralelos? Podem existir figuras que não tenham lados paralelos, que tenham um par de lados paralelos ou que tenham mais do que um par de lados paralelos. É óbvio que nos primeiros anos, os alunos ainda estão a adquirir uma noção informal e restrita de paralelismo, mas esta noção mesmo informal é importante na classificação de figuras. Embora seja um pouco difícil de verificar esta propriedade com rigor matemático, há algumas formas de contornar a situação. Por exemplo, pode ter-se preparado uma folha de acetato com várias linhas paralelas representadas que os alunos podem ter sempre à mão para fazerem a verificação ou pedir-se aos alunos que representem as figuras no geoplano o qual permite tirar algumas conclusões com algum rigor.

Assim, das figuras de quatro lados apresentadas acima, podemos agrupar as seguintes adoptando o critério "ter dois pares de lados opostos paralelos".

Figura 9: Figuras com dois pares de lados opostos paralelos.

E apenas a figura seguinte pelo critério "um par de lados paralelos", a qual se pode denominar trapézio.

Figura 10: Figura com um par de lados paralelos.

Das quatro figuras que foram agrupadas por terem dois pares de lados paralelos, e que se denominam paralelogramos, pode fazer-se outras organizações tendo em conta outros critérios.

Este trabalho não se esgota nos primeiros anos, mas vai preparando caminho para futuras classificações mais elaboradas.

Paralelismo

Seja Tum triângulo. A um ângulo que tem por lados a semi-recta que contém um dos lados de T e a semi-recta obtida pelo prolongamento do outro lado do triângulo chamamos *ângulo externo* de T

Assim, identificamos em cada triângulo seis ângulos externos. Estes ângulos formam três pares de ângulos congruentes pois são verticalmente opostos relativamente a cada um dos vértices do triângulo.

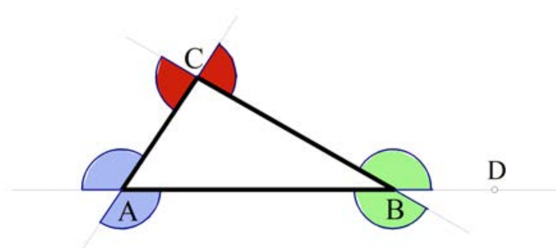


Figura 1: Ângulos externos de um triângulo.

No triângulo $T = [ABC]$, os ângulos $\angle CAB$ e $\angle ACB$ são chamados *ângulos internos não adjacentes* ao ângulo externo $\angle CBD$

Vejamos que *em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida dos ângulos internos não adjacentes a esse ângulo.*

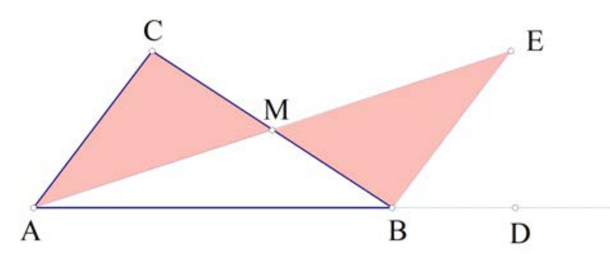


Figura 2: Relação entre ângulos.

Sem perda de generalidade, consideremos no triângulo $T = [ABC]$ o ângulo externo $\angle DBC$. Sejam M o ponto médio do segmento de recta $[BC]$ e E o ponto da semi-recta

$\dot{A}M$ tal que $\overline{AM} = \overline{ME}$

Uma vez que $\overline{AM} = \overline{ME}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e $\angle AMC \cong \angle BME$, pelo critério LAL de congruência de triângulos podemos concluir que os triângulos de vértices A, C, M e E, B, M são congruentes. Consequentemente, $\angle ACB \cong \angle EBC$. Como E pertence ao interior do ângulo $\angle DBC$ tem-se D$\hat{\text{B}}$C = D$\hat{\text{B}}$E + E$\hat{\text{B}}$C. Donde, D$\hat{\text{B}}$C > A$\hat{\text{C}}$B

De modo semelhante se pode mostrar que D$\hat{\text{B}}$C > B$\hat{\text{A}}$C.

O resultado acabado de estabelecer é conhecido por **Teorema do Ângulo Externo** (TAE). A importância deste teorema pode ser constatada enunciando alguns teoremas que podem ser obtidos a partir dele, como os a seguir listados:

1. *Um triângulo rectângulo tem necessariamente dois ângulos agudos;*

2. *Se r e s são rectas distintas e perpendiculares a uma outra recta, t, então r e s são paralelas;*

3. *Se duas rectas intersectadas por uma secante formam ângulos alternos internos congruentes então as rectas são paralelas;*

4. *Se duas rectas intersectadas por uma secante formam ângulos correspondentes congruentes então as rectas são paralelas.*

Vejamos que podemos efectivamente obter estes resultados utilizando o TAE.

Relativamente ao primeiro teorema listado, basta observar que sendo $T = [ABC]$ um triângulo rectângulo em B, e sendo D um ponto tal que B está entre A e D (ver figura 3), o teorema do ângulo externo permite concluir que a medida do ângulo $\angle DBC$ é maior do que a do ângulo $\angle BAC$ e a do ângulo $\angle ACB$.

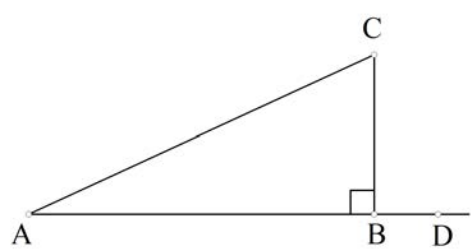


Figura 3: Triângulo rectângulo.

O segundo teorema pode demonstrar-se por redução ao absurdo. Tomemos r e s duas rectas distintas perpendiculares a uma recta t (ver figura 4). Se r e s não fossem paralelas intersectar-se-iam num ponto, digamos, C (ver figura 5). Então, o triângulo $T = [ABC]$ teria dois ângulos rectos, com vértices em A e B, o que é absurdo pelo teorema anterior. Portanto, r e s são paralelas.

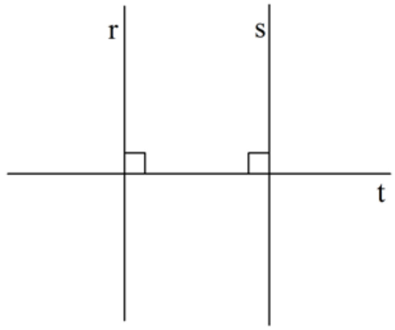


Figura 4: Rectas distintas perpendiculares a uma terceira recta.

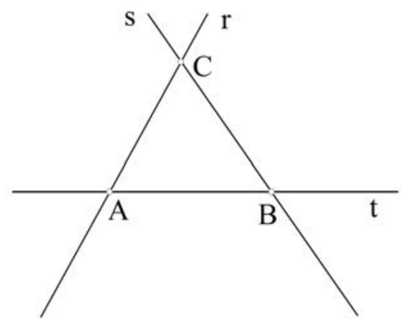


Figura 5: Triângulo $T = [ABC]$.

Demonstremos o terceiro teorema também por redução ao absurdo. Sejam r e s rectas intersectadas por uma secante t nos pontos R e S, respectivamente. Sejam, ainda, R' um ponto de r e S' um ponto de s em lados opostos de t (ver figura 6). Se r e s não fossem paralelas intersectar-se-iam num ponto, digamos, P (ver figura 7).

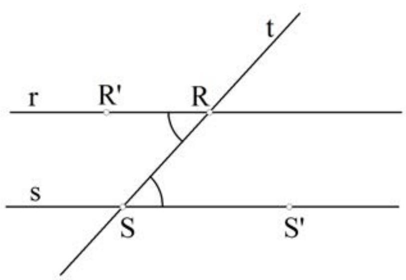


Figura 6: Rectas intersectadas por uma secante formando ângulos alternos internos congruentes.

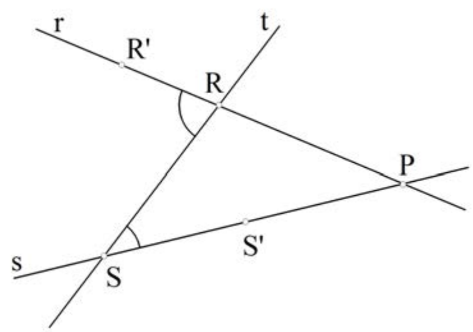


Figura 7: Triângulo $T = [RSP]$.

Ora, pelo TAE, sabemos que $R'\hat{R}S > R\hat{S}P$. Mas, isto é absurdo porque $\angle R'RS \cong \angle RSP$ por hipótese. Logo, as rectas r e s são paralelas.

Para a demonstração do teorema 4, tomemos r e s rectas intersectadas por uma secante t nos pontos R e S (respectivamente) e os ângulos alternos internos α e β (ver figura 8). Estamos a supor que os ângulos correspondentes α e γ são congruentes. Se r e s não fossem paralelas intersectar-se-iam num ponto, digamos, P (ver figura 9). Pelo TAE, a medida de β é maior que a medida de α. Por outro lado, como as medidas de α e γ são iguais por estes serem ângulos congruentes, a medida de β seria maior que a medida de γ. Mas isto é absurdo porque β e γ são ângulos verticalmente opostos logo têm a mesma medida. Então, as rectas r e s são paralelas.

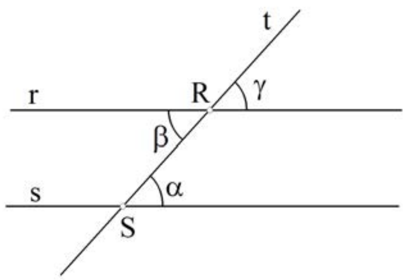


Figura 8: Rectas intersectadas por uma secante formando ângulos correspondentes congruentes.

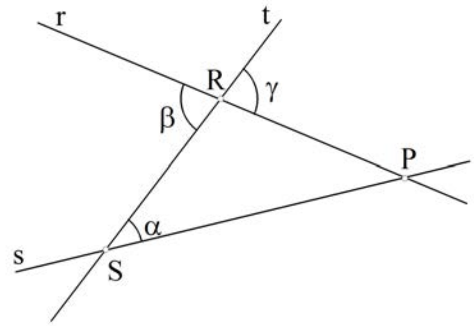


Figura 9: Triângulo $T = [RSP]$.

Postulado das Paralelas

Para demonstrar os recíprocos dos dois últimos teoremas é necessário usar o chamado *Postulado das Paralelas* (PP) que Euclides tomou com um dos pressupostos da sua obra *Elementos*. Este postulado tem várias formulações equivalentes. Aqui adoptamos a seguinte: *Por um ponto não pertencente a uma recta passa uma e uma só recta paralela a essa recta*

Vejamos, então, o recíproco do teorema 3, designadamente, *se duas rectas paralelas são intersectadas por uma secante então os ângulos alternos internos formados por estas rectas são congruentes.*

Tomemos duas rectas paralelas r e s intersectadas pela secante t nos pontos R e S, respectivamente (ver figura 10). Suponhamos, com vista a um absurdo, que os ângulos alternos internos α e β não são congruentes. Neste caso, podemos tomar uma recta, digamos u, que passa por R de tal modo que os ângulos alternos internos α e γ são congruentes (ver figura 11). Logo, as rectas u e s são paralelas. Mas, por hipótese, r também passa por R e é paralela a s, o que é absurdo pelo Postulado das Paralelas. Então, r e s são paralelas.

O recíproco do teorema 4 garante que *se duas rectas paralelas são intersectadas por uma secante então os ângulos correspondentes formados por estas rectas são congruentes.*

Esta propriedade pode ser demonstrada por um processo análogo ao anterior. Para tal basta tomar duas rectas paralelas, r e s, intersectadas pela secante t nos pontos R e

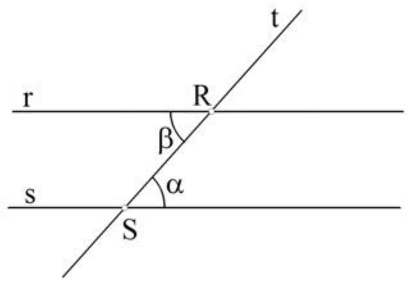


Figura 10 : Rectas paralelas intersectadas por uma secante.

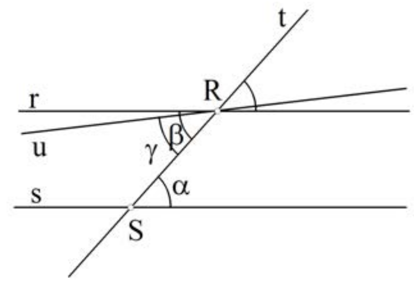


Figura 11 : Ângulos alternos internos (α e γ) congruentes.

S respectivamente (ver figura 12). Admitamos, com vista a um absurdo, que os ângulos correspondentes α e γ não são congruentes. Neste caso, existe uma recta, digamos u, que passa por R de tal modo que os ângulos correspondentes α e β são congruentes (ver figura 13). Logo, as rectas u e s são paralelas. Mas, por hipótese, r também passa por R e é paralela a s, o que é absurdo pelo Postulado das Paralelas. Então, r e s são paralelas.

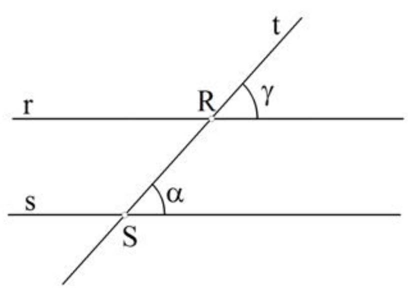


Figura 12: Rectas paralelas intersectadas por uma secante.

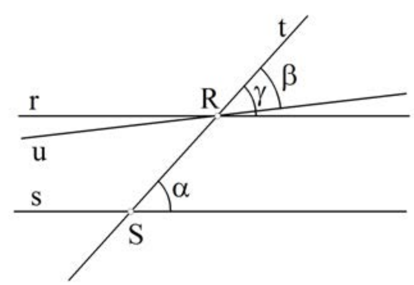


Figura 13: Ângulos correspondentes (α e β) congruentes.

O Postulado das Paralelas também é fundamental na demonstração de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. A demonstração clássica consiste em tomar uma recta paralela a um dos lados do triângulo que passa pelo vértice oposto a esse lado e usar duas vezes a propriedade da congruência de ângulos alternos internos.

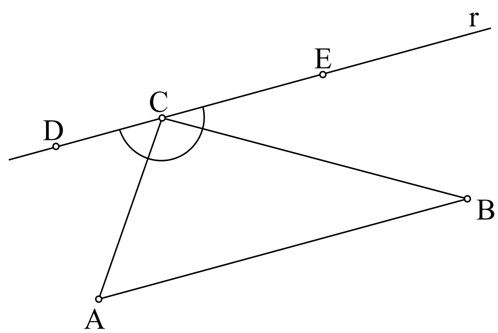


Figura 14: Recta paralela a um dos lados de um triângulo que passa pelo vértice oposto a esse lado.

Mais concretamente, dado o triângulo $T = [ABC]$, basta tomar a recta r, paralela ao lado $[AB]$, que passa por C (ver figura 14). Tomemos em r os pontos D e E de modo que C esteja situado entre D e E. Sendo assim, $A\hat{C}D + A\hat{C}B + B\hat{C}E = 180^o$. Ora, a recta AC é secante a r e a AB. Então, como r é paralela a AB os ângulos alternos internos $\angle ACD$ e $\angle BAC$ são congruentes. Analogamente, atendendo a que BC também é secante a r e AB, os ângulos alternos internos $\angle BCE$ e $\angle ABC$ são congruentes. Conclusão: $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^o$

Tarefa 1: Relação entre as medidas dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo

Deduz que os ângulos agudos de um triângulo rectângulo são complementares, admitindo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

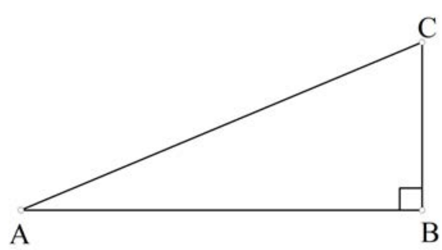


Figura 15: Triângulo $T = [ABC]$ rectângulo em B.

Basta considerar um triângulo $T = [ABC]$, rectângulo em B (ver figura 15). Como $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^o$ e $A\hat{B}C = 90^o$ concluímos que $B\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^o$. Ou seja, $\angle BAC$ e $\angle ACB$, os ângulos agudos do triângulo $T = [ABC]$, são complementares.

Tarefa 2: Relação entre as medidas de um ângulo externo e dos ângulos internos não adjacentes num triângulo

Deduz que a medida de um ângulo externo num triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, novamente admitindo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^{o}.

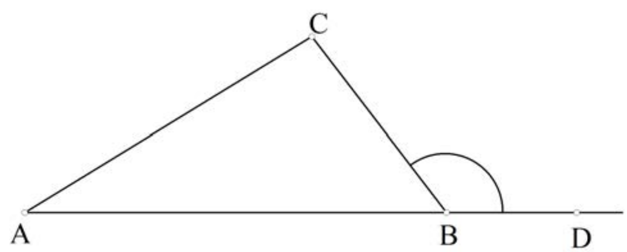


Figura 16: Ângulo externo de um triângulo.

Sendo $\angle DBC$ um ângulo externo de um triângulo $T = [ABC]$ (ver figura 16), tem-se $A\hat{B}C + D\hat{B}C = 180^o$. Como $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^o$, igualando estas expressões e simplificando, conclui-se que $D\hat{B}C = B\hat{A}C + A\hat{C}B$.

Segmentos congruentes sobre secantes

Se uma secante t intersecta duas rectas r e s em pontos R e S, diz-se que r e s determinam o segmento $[RS]$sobre a secante (ver figura 17).

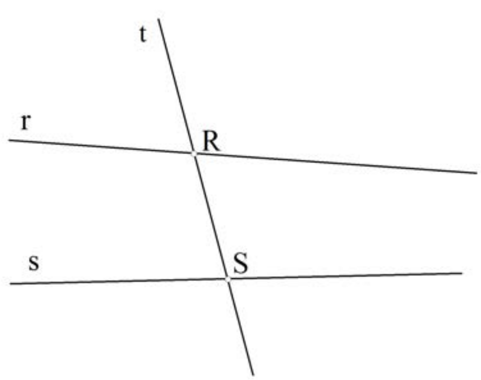


Figura 17 : Segmento $[RS]$ sobre a secante t determinado pelas rectas r e s .

Quando uma secante t intersecta três rectas r, s e u em três pontos R, S e U, respectivamente, e $\overline{RS} = \overline{SU}$ diz-se que as rectas determinam segmentos congruentes sobre a secante (ver figura 18).

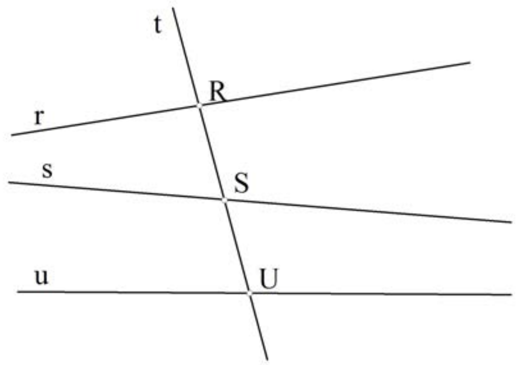


Figura 18: Segmentos congruentes sobre uma secante.

Naturalmente, o facto de três (ou mais) rectas determinarem segmentos congruentes sobre uma secante, não significa que determinem segmentos congruentes sobre qualquer outra secante. A figura 19 pretende ilustrar isso. Na verdade, apesar de as rectas r, s e t determinarem os segmentos congruentes $[RS]$ e $[SU]$ na secante t não determinam segmentos congruentes $[R'S']$ e $[S'U']$na secante t'.

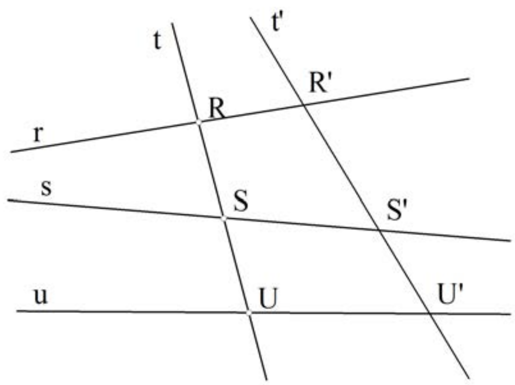


Figura 19 : Segmentos congruentes sobre uma transversal e segmentos não congruentes sobre outra transversal.

No entanto, *se três (ou mais) rectas que determinam segmentos congruentes sobre uma secante forem paralelas, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra secante.*

Teorema Fundamental da Proporcionalidade [TFP]

Este importante teorema garante que *se uma recta paralela a um dos lados de um triângulo intersecta os outros dois lados então divide-os na mesma razão.*

Consideremos o triângulo $T = [ABC]$. Admitamos que a recta r, paralela ao lado $[AB]$ do triângulo, intersecta os lados $[AC]$ e $[BC]$ nos pontos P e Q, respectivamente (ver figura 20).

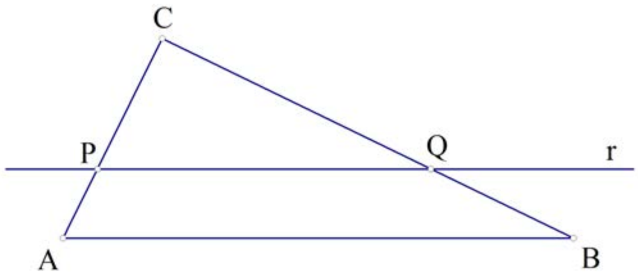


Figura 20: Recta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta os outros dois lados.

Vejamos que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}}$, considerando o caso em que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}}$ é um número racional, ou seja, quando os segmentos $[CA]$ e $[CP]$são comensuráveis.

Neste caso, existem $n, m \in \mathrm{N}$ tais que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \frac{n}{m}$. Existe um segmento de comprimento k tal que $\overline{CA} = nk$ e $\overline{CP} = mk$. Como $\overline{CP} < \overline{CA}$ tem-se $m < n$. Tomemos na semi-recta $\dot{C}A$ os $n+1$ pontos P_0, P_1, P_2, ..., P_m, ..., P_{n-1}, P_n de tal modo que $\overline{P_jP_{j+1}} = k \quad (j = 0, 1, 2, ..., n-1)$, $P_0 \equiv C$, $P_m \equiv P$ e $P_n \equiv A$ (ver figura 21).

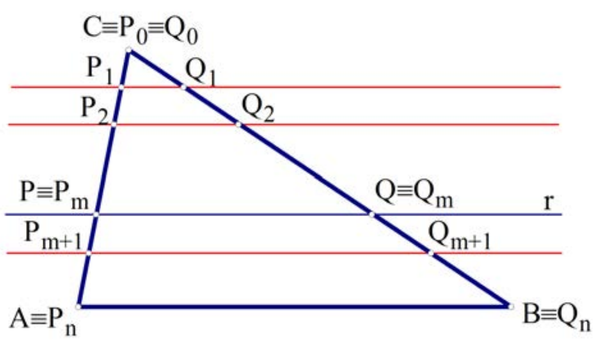


Figura 21: Pontos P_0, P_1, ..., P_n na semi-recta $\dot{C}A$.

Tracemos rectas paralelas a $[AB]$ que passem pelos pontos P_1, P_2, ..., P_m, ..., P_{n-1}. Estas rectas intersectam o lado $[BC]$ em $n-1$ pontos, digamos Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}. Então, existe um número real positivo p de tal modo que $\overline{Q_jQ_{j+1}} = p \quad (j = 0, 1, 2, ..., n-1)$, em que $Q_0 \equiv C$, $Q_m \equiv Q$ e $Q_n \equiv B$.

Logo, $\overline{CB} = np$ e $\overline{CQ} = mp$. Donde se conclui que $\frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}} = \frac{np}{mp} = \frac{n}{m} = \frac{nk}{mk} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CP}}$.

Recíproco do Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Assim como o TFP assume o paralelismo para garantir a proporcionalidade, o recíproco assume a proporcionalidade para garantir o paralelismo. Mais especificamente, este teorema estabelece que *se uma recta intersecta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão então a recta é paralela ao terceiro lado.*

Seja $T = [ABC]$ um triângulo, P um ponto entre A e C, e Q um ponto entre B e C, de modo que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}}$ (ver figura 22).

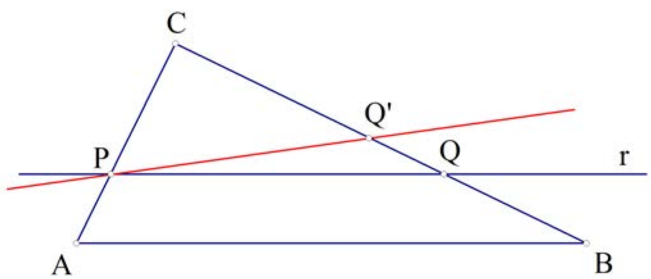


Figura 22: Recta que intersecta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão.

Donde, $\overline{CQ} = \overline{CB} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$. Seja PQ' a recta paralela a $[AB]$ que passa por P e intersecta $[BC]$ no ponto Q'. Pelo TFP temos que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ'}}$. Donde, $\overline{CQ'} = \overline{CB} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$. Logo, $\overline{CQ'} = \overline{CQ}$ pelo que $Q \equiv Q'$ o que nos permite concluir que a recta PQ é paralela a $[AB]$.

Teorema de Tales

Uma importante consequência do TFP é o chamado Teorema de Tales: *Se duas rectas são secantes a um conjunto de rectas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra.*

Semelhança de triângulos

Triângulos semelhantes

Pensemos numa correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança e dizemos que os *triângulos são semelhantes.*

Para indicar que os triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [A'B'C']$ (ver figura 1) são semelhantes escrevemos $\Delta\,[ABC] \cong \Delta\,[A'B'C']$. Os vértices correspondentes nestes triângulos são A e A', B e B', e C e C'.

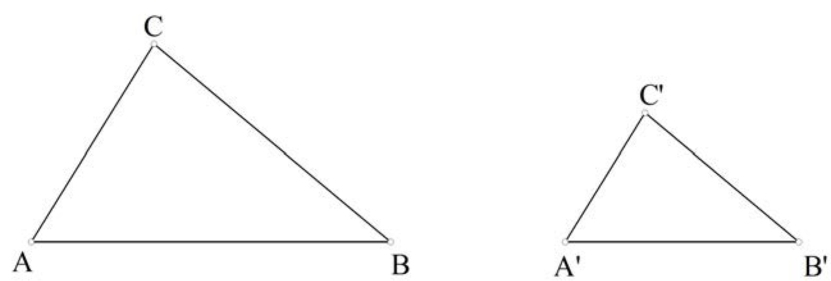


Figura 1: Triângulos semelhantes $T = [ABC]$ e $T' = [A'B'C']$.

Da definição de semelhança decorre que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ e também que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ e $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Ao quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes do triângulo chamamos *razão de semelhança* ou razão de proporcionalidade. No caso em que esta razão é igual a 1 os triângulos são congruentes.

Alguns critérios de semelhança de triângulos

Provar que dois triângulos são semelhantes simplesmente à custa da definição não é um procedimento eficaz já que é necessário garantir a congruência de três pares de ângulos (correspondentes dois a dois) e a proporcionalidade de três pares de segmentos de recta (correspondentes dois a dois). No entanto, podemos estabelecer a semelhança de dois triângulos recorrendo a critérios que envolvem menos condições em termos de lados e/ou ângulos desses triângulos.

Critério de Semelhança AAA. Este critério envolve apenas ângulos: dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes forem congruentes. Podemos demonstrar este critério a partir dos critérios ALA e LAL de congruência de triângulos bem como do Teorema Fundamental da Proporcionalidade [TFP].

Consideremos os triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [A'B'C']$ com $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ e $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$.

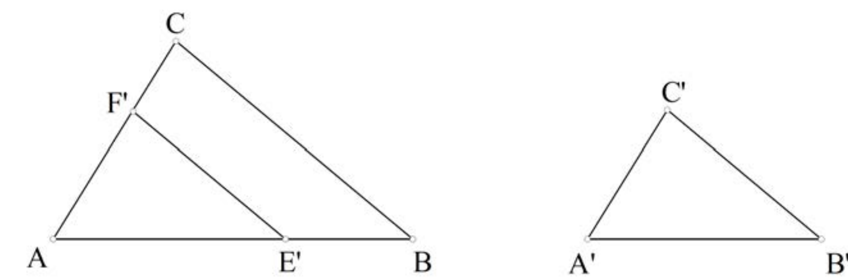


Figura 2: Triângulos congruentes $T'' = [AE'F']$ e $T' = [A'B'C']$.

Tomemos pontos E' e F' nos lados, respectivamente, $[AB]$ e $[AC]$ de T de tal modo que $\overline{AE'} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AF'} = \overline{A'C'}$ (1). Os triângulos $T'' = [AE'F']$ e $T' = [A'B'C']$ são congruentes, pelo critério de congruência LAL (ver figura 2). Como $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (por hipótese) e $\angle AE'F' \cong \angle A'B'C'$ (pela congruência dos triângulos T' e T'') então $\angle ABC \cong \angle AE'F'$. Por conseguinte, os segmentos de recta $[E'F']$ e $[BC]$ são estritamente paralelos ou coincidentes.

Se $[E'F']$ e $[BC]$ são estritamente paralelos, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF'}}$, pelo TFP. Mas, atendendo a (1), obtemos $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$. Por um processo análogo poder-se-ia mostrar que $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. Como os ângulos correspondentes são congruentes (por hipótese) e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, os triângulos T e T' são semelhantes.

Se $[E'F']$ e $[BC]$ são coincidentes, os triângulos T e T' são congruentes (critério de congruência ALA) logo semelhantes.

Atendendo ao critério de semelhança AAA e a que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, basta garantir que dois ângulos correspondentes de dois triângulos são congruentes para garantir a semelhança desses triângulos. Obtemos assim o que se designa como *Critério de Semelhança AA*.

Tarefa 1: Decomposição do triângulo rectângulo pela altura correspondente à hipotenusa

Recorrendo ao critério de semelhança AA demonstra que a altura correspondente à hipotenusa de um triângulo rectângulo o decompõe em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial.

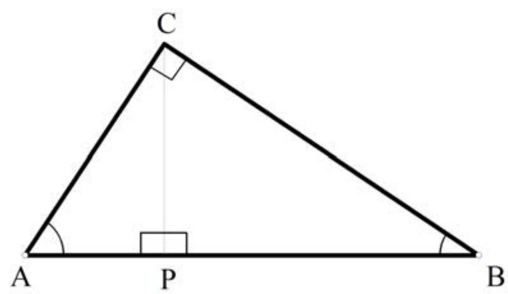


Figura 3: Altura do triângulo $T = [ABC]$ relativamente à hipotenusa.

Considerando o triângulo $T = [ABC]$, rectângulo em C, e $\overline{CP}$ a altura do triângulo correspondente à hipotenusa (ver figura 3), o critério AA de semelhança de triângulos garante que $\Delta\,[ACP] \cong \Delta\,[ABC]$ (triângulos rectângulos com um ângulo comum) e $\Delta\,[CBP] \cong \Delta\,[ABC]$ (mesmo argumento). Por outro lado, por hipótese, $A\hat{C}P + P\hat{C}B = 90^o$. Como o ângulo $\angle APC$ é recto concluímos que $P\hat{A}C + A\hat{C}P = 90^o$. Da comparação destas relações resulta que $\angle PAC \cong \angle PCB$. Logo, $\Delta\,[ACP] \cong \Delta\,[CBP]$, novamente pelo critério de semelhança AA.

Resumindo: Com (pelo menos) dois pares de ângulos congruentes em dois triângulos podemos garantir a sua semelhança. Claro que se dois triângulos tiverem apenas um par de ângulos congruentes não são semelhantes.

Na figura 4 estão representados os triângulos $T = [ADB]$ e $T' = [ACB]$, não semelhantes, apesar de se verificar a congruência dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle CAB$.

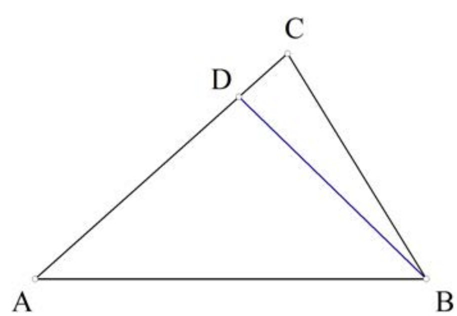


Figura 4: Triângulos $T = [ADB]$ e $T' = [ACB]$ não semelhantes.

Se à congruência de um par de ângulos correspondentes em dois triângulos acrescentarmos a proporcionalidade de dois pares de lados correspondentes nesses triângulos não temos ainda condições suficientes para garantir a semelhança dos triângulos. A figura 5 ilustra essa situação. Foram construídos os triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [ADC]$ a obedecer às seguintes condições: $\angle CAB \cong \angle CAD$, $\overline{AB} = 2 \times \overline{AD}$ e $\overline{BC} = 2 \times \overline{CD}$. A construção foi feita utilizando o software *Geogebra* e as suas funcionalidades. Como $[AC]$ é um lado comum aos dois triângulos, os seus lados correspondentes não são proporcionais. Donde, os triângulos não são semelhantes.

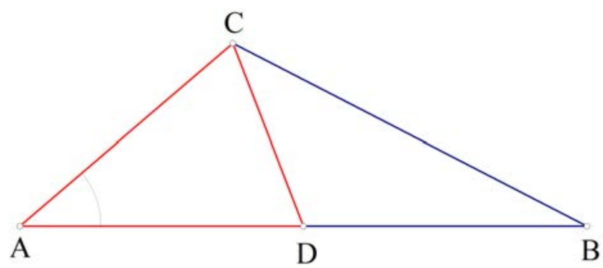


Figura 5: Triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [ADC]$ não semelhantes.

Critério de Semelhança LAL. Se o par de ângulos congruentes nos dois triângulos for formado pelos dois pares de lados correspondentes proporcionais, os triângulos são semelhantes. Vejamos uma demonstração deste critério que assenta no critério LAL de congruência de triângulos, no critério AA de semelhança de triângulos e no recíproco do TFP.

Sejam dados os triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [DEF]$ em que $\angle CAB \cong \angle FDE$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. Tomemos os pontos E' e F' nos lados $[AB]$ e $[AC]$, respectivamente, de tal modo que $\overline{AE'} = \overline{DE}$ e $\overline{AF'} = \overline{DF}$. Logo, os triângulos $T'' = [AE'F']$ e $T' = [DEF]$ são congruentes, pelo critério de congruência LAL (ver figura 6).

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ (por hipótese) tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF'}}$. Pelo recíproco do TFP, os segmentos $[E'F']$ e $[BC]$ são paralelos. Donde, $\angle AE'F' \cong \angle ABC$ e $\angle AF'E' \cong \angle ACB$ porque duas rectas paralelas ($E'F'$ e BC) cortadas por uma secante (AB no primeiro caso e AC no segundo) formam pares de ângulos correspondentes congruentes.

Ora, a congruência dos triângulos $T'' = [AE'F']$ e $T' = [DEF]$ permite-nos concluir que $\angle AE'F' \cong \angle DEF$. Como, por outro lado, $\angle AE'F' \cong \angle ABC$ então $\angle ABC \cong \angle DEF$. Mas, por hipótese, $\angle CAB \cong \angle FDE$. Logo, pelo critério AA concluímos que $\Delta\,[ABC] \cong \Delta\,[DEF]$.

Critério de Semelhança LLL. Dois triângulos são semelhantes se os seus lados correspondentes forem proporcionais. Vejamos como deduzir este critério a partir do critério LLL de congruência de triângulos, do critério AA de semelhança de triângulos e do recíproco do TFP.

Sejam dados os triângulos $T = [ABC]$ e $T' = [DEF]$ em que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ (ver

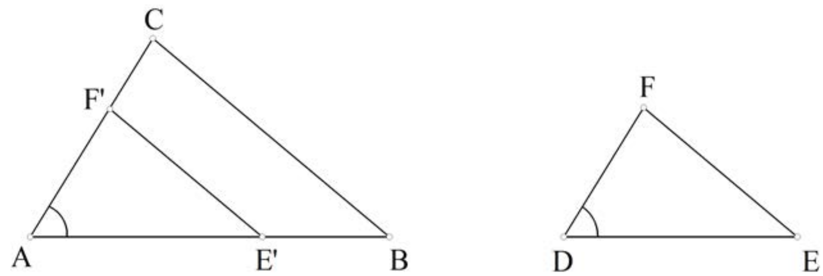


Figura 6: Triângulos $T'' = [AE'F']$ e $T' = [DEF]$ congruentes.

figura 7). Tomemos os pontos E' e F', respectivamente, nos lados $[AB]$ e $[AC]$, de tal modo que $\overline{AE'} = \overline{DE}$ e $\overline{AF'} = \overline{DF}$.

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ (por hipótese) tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF'}}$. Pelo recíproco do TFP, os segmentos $[E'F']$ e $[BC]$ são paralelos. Donde, $\angle AE'F' \cong \angle ABC$ e $\angle AF'E' \cong \angle ACB$ porque duas rectas paralelas ($E'F'$ e BC) cortadas por uma secante (AB no primeiro caso e AC no segundo) formam pares de ângulos correspondentes congruentes.

O critério AA garante que os triângulos $T = [ABC]$ e $T'' = [AE'F']$ são semelhantes pelo que $\frac{\overline{E'F'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}}$; donde $\overline{E'F'} = \overline{BC}.\frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}} = \overline{BC}.\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$ (1). Ainda por hipótese sabemos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, pelo que $\overline{EF} = \overline{BC}.\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$ (2). Comparando (1) e (2) conclui-se que $\overline{E'F'} = \overline{EF}$. Portanto, os triângulos T' e T'' são congruentes (critério de congruência LLL), o que implica que os triângulos T e T' são semelhantes (critério de semelhança AA).

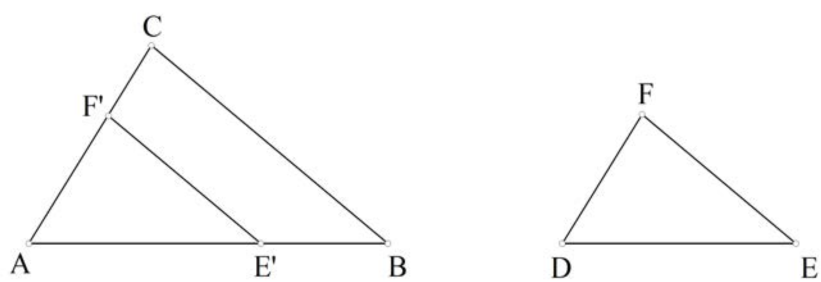


Figura 7: Triângulos $T'' = [AE'F']$ e $T' = [DEF]$ congruentes.

Medições indirectas usando semelhança de triângulos

Os critérios de semelhança de triângulos mencionados podem ser usados pelos alunos para fazerem medições de objectos inacessíveis (por exemplo, edifícios, árvores, etc.). Vejamos alguns exemplos de tarefas que podem ser propostas aos alunos com as necessárias adaptações.

Tarefa 2: Túnel de Samos

Efectua uma pesquisa sobre a construção de um túnel no monte Castro, na ilha de Samos.

A pesquisa efectuada pelos alunos pode ser complementada pelo visionamento do filme *Túnel de Samos* (ver referências). A pesquisa dos alunos e o visionamento do filme constituem um bom ponto de partida para a análise da contribuição da semelhança de triângulos para a resolução deste problema de engenharia.

De acordo com o historiador grego Heródoto, no ano 530 a.C. Eupalino, a mando do tirano Polícrates, construiu um túnel que atravessa o monte Castro. O túnel foi escavado em duas frentes, com cerca de 800 metros de distância, tendo sido cometido um erro inferior a 1% na escavação. Vejamos, resumidamente, a estratégia que Eupalino utilizou (segundo alguns historiadores da Matemática).

Duas equipas de trabalhadores escavam a montanha em dois pontos (E e E' no esquema da figura 8). Em torno da montanha é traçada uma linha poligonal aberta $[EABCDFGE']$ de modo que segmentos adjacentes formem ângulos rectos.

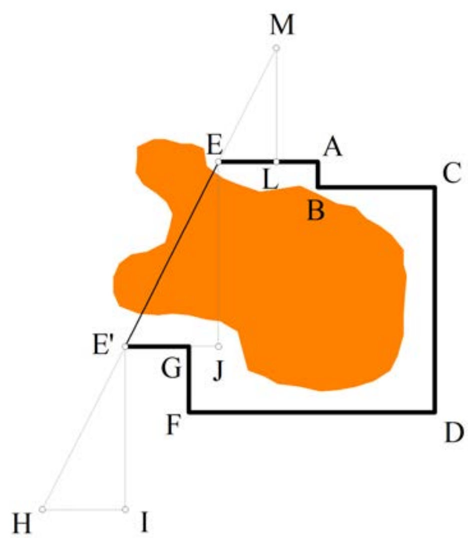


Figura 8: Esquema da construção do túnel de Samos.

Tendo em conta os comprimentos de cada um dos segmentos da linha poligonal, obtêm-se os comprimentos dos segmentos $[E'J]$ e $[EJ]$, catetos do triângulo rectângulo $[E'JE]$ com J a pertencer à recta determinada por E' e G. De facto,

$\overline{EJ} = \overline{AB} + \overline{CD} - \overline{GF}$ e $\overline{E'J} = \overline{E'G} + \overline{FD} - \overline{EA} - \overline{BC}$.

Por construção, o triângulo $\Delta\,[EE'J]$ é rectângulo. Em cada um dos pontos em que a montanha foi inicialmente escavada (E' e E) constroem-se dois triângulos auxiliares (não únicos), a saber, $\Delta\,[E'HI]$ e $\Delta\,[MEL]$ rectângulos em I e L (respectivamente) de modo que $\frac{\overline{HI}}{\overline{IE'}} = \frac{\overline{EL}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{E'J}}{\overline{JE}}$. Note-se que a razão $\frac{\overline{E'J}}{\overline{JE}}$ é conhecida.

Nestas condições, os triângulos $\Delta\,[E'HI]$, $\Delta\,[EE'J]$ e $\Delta\,[MEL]$ são semelhantes (critério LAL) pelo que $\angle IHE' \cong \angle JE'E \cong \angle LEM$ e $\angle HE'I \cong \angle E'EJ \cong \angle EML$. Logo, $[EM]$ dá a direcção correcta para a escavação na entrada E e $[E'H]$para a entrada E'.

Tarefa 3: Ecrãs de televisão e filmes

Pretende passar-se um filme na razão 2:1 numa televisão com ecrã 4:3. Nesta situação, ou o filme é 'cortado' ou não é utilizado todo o ecrã. Calcula a proporção do ecrã do televisor não utilizado neste formato de filme bem como a proporção de filme cortado relativamente à área total de filme.

Os ecrãs de televisão podem ser representados por rectângulos em que a razão entre os lados é 4:3 (caso *standard*) ou 16:9 (chamado *widescreen*). No caso dos filmes existe uma grande variedade de razões entre os lados dos rectângulos que os representam. Por exemplo: 1,85:1 ou o *Cinemascope* 2,35:1. Quando os rectângulos que representam o ecrã do televisor e o filme não são semelhantes, isto significa que existe 'ecrã a mais' ou 'filme a menos'!

Na figura 9 está ilustrada a situação em que há 'ecrã a mais'. O filme, rectângulo $[EFGH]$, não preenche completamente o ecrã do televisor, rectângulo $[ABCD]$.

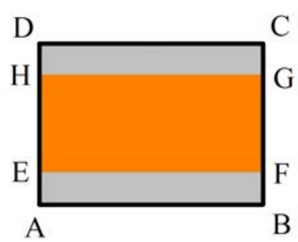


Figura 9: Situação em que há 'ecrã a mais'.

A situação em que o filme é 'cortado', é ilustrada na figura 10. Repare-se que o filme, rectângulo $[EFGH]$, não cabe no televisor, rectângulo $[ABCD]$.

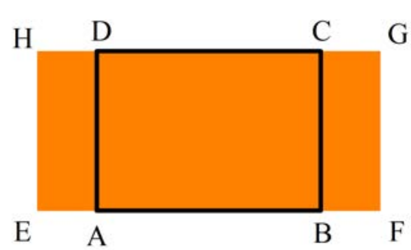


Figura 10: Situação em que há 'filme a mais'.

Suponhamos que se pretende passar um filme na razão 2:1 numa televisão com ecrã *standard*, isto é, 4:3. Em qual das situações é menor a proporção do que se perde, seja ecrã ou filme? Mais especificamente:

1. Na situação de 'ecrã a mais', qual é a proporção de ecrã que não é usado relativamente à área total do ecrã?

Admitindo que $\overline{AB} = 42\,cm$, como por hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{4}{3}$, temos que $\overline{AD} = 31,5\,cm$ Logo, a área total do ecrã é $\overline{AB} \times \overline{AD} = 1323\,cm^2$.

Por outro lado, por hipótese, $\frac{\overline{EF}}{\overline{EH}} = \frac{2}{1}$. Também $\overline{EF} = \overline{AB} = 42\,cm$. Então, a área do filme é dada por $\overline{EF} \times \overline{EH} = 42 \times 21 = 882\,cm^2$.

Deste modo, a área de ecrã não utilizada é $441\,cm^2$. A proporção de ecrã não utilizado relativamente ao ecrã total é $\frac{441}{1323} = \frac{441}{3\times 441} = \frac{1}{3}$.

2. Na situação de 'ecrã a mais', qual é a proporção de filme que não é exibido relativamente à área total de filme? Como vimos, a área do ecrã do televisor é $\overline{AB} \times \overline{AD} = 1323\,cm^2$.

A área do filme é $\overline{EF} \times \overline{EH} = 63 \times 31,5 = 1984,5 cm^2$. Note-se que $\overline{EH} = \overline{AD} = 31,5\,cm$ e como $\frac{\overline{EF}}{\overline{EH}} = \frac{2}{1}$ tem-se $\overline{EF} = 63\,cm$.

Por conseguinte, a área de filme não exibido é $1984,5 - 1323 = 661,5\,cm$. Logo, a proporção entre a área de filme não exibido relativamente à área total do filme é dada por $\frac{661,5}{1984,5} = \frac{661,5}{3\times 661,5} = \frac{1}{3}$.

O facto das 'proporções de perda' obtidas serem iguais pode generalizar-se a outras razões. Para mostrarmos que é assim, admitamos que a razão entre as dimensões do ecrã é $\frac{a}{b}$ e que no caso do filme é $\frac{c}{d}$.

Então, a área total do ecrã é $\overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}$ porque $\overline{AB} = \overline{AD} \times \frac{a}{b}$.

A área do filme é $\overline{EF} \times \overline{EH} = \overline{AB}^2 \times \frac{d}{c}$ porque $\overline{EH} = \overline{EF} \times \frac{d}{c}$ e $\overline{AB} = \overline{EF}$.

Então, a proporção entre a área de ecrã não utilizado e a área total do ecrã é dada por $\frac{\overline{AD}^2 \times \frac{a}{b} - \overline{AB}^2 \times \frac{d}{c}}{\overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}}$. Simplificando sucessivamente esta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\overline{AB}^2 \times \frac{d}{c}}{\overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}} &= 1 - \frac{\left(\overline{AD} \times \frac{a}{b}\right)^2 \times \frac{d}{c}}{\overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}} = \\ &= 1 - \frac{\overline{AD}^2 \times \left(\frac{a}{b}\right)^2 \times \frac{d}{c}}{\overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}} = \\ &= 1 - \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

Vejamos agora o caso em que parte do filme é 'cortado'. A área total do filme é dada por $\overline{EF} \times \overline{EH} = \overline{AD}^2 \times \frac{c}{d}$ visto que $\overline{EF} = \overline{EH} \times \frac{c}{d}$ e $\overline{AD} = \overline{EH}$. Logo, considerando que a área do ecrã do televisor é $\overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AD}^2 \times \frac{a}{b}$, a proporção entre a área de filme 'cortado' e a área total do filme é dada por $\frac{\overline{AD}^2\times\frac{c}{d}-\overline{AD}^2\times\frac{a}{b}}{\overline{AD}^2\times\frac{c}{d}}$. Simplificando esta expressão obtemos $1-\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=1-\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

Teorema de Pitágoras

De entre todas as proposições da geometria Euclidiana, o Teorema de Pitágoras tem um destaque muito particular, tanto pelas imensas e diversificadas aplicações como pelas centenas de demonstrações que dele se conhecem. Em 1927, Elisha Loomis publicou um livro (*The Pythagorean Proposition*) que reunia 371 demonstrações do teorema! Desde então, foram acrescentadas algumas dezenas a este número. Seguidamente vamos revisitar algumas dessas demonstrações.

Algumas demonstrações por decomposição e usando semelhanças

A demonstração seguinte é atribuída a Euclides (alguns matemáticos consideram mesmo que esta foi a sua única contribuição original para a sua obra *Elementos*) e envolve semelhança de triângulos. Consideremos o triângulo $\Delta\,[ABC]$, rectângulo em C, em que $\overline{CP}$ é a altura do triângulo correspondente à hipotenusa (ver figura 1). Como os triângulos $\Delta\,[ACP]$ e $\Delta\,[ABC]$são semelhantes,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AP}.$$

Uma vez que os triângulos $\Delta\,[CBP]$ e $\Delta\,[ABC]$ são também semelhantes,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{BP}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB} \times \overline{AP} + \overline{AB} \times \overline{BP} = \\ &= \overline{AB} \times \left(\overline{AP} + \overline{BP}\right). \end{aligned}$$

Como $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB}$ podemos concluir que $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

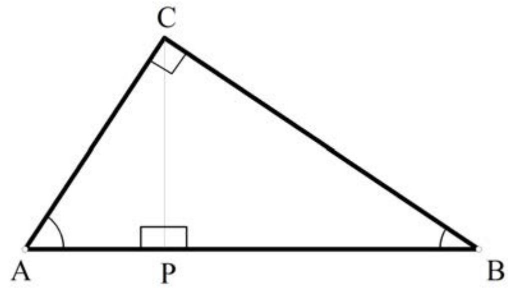


Figura 1: Decomposição de um triângulo rectângulo pela altura correspondente à hipotenusa.

Uma outra demonstração deste teorema é atribuída a James Garfield que tomou posse em 1881 como 20.º presidente dos EUA. Calculando a área do trapézio $[ABCD]$ (ver figura 2) obtemos $A_t = \frac{a+b}{2} \times (a+b)$.

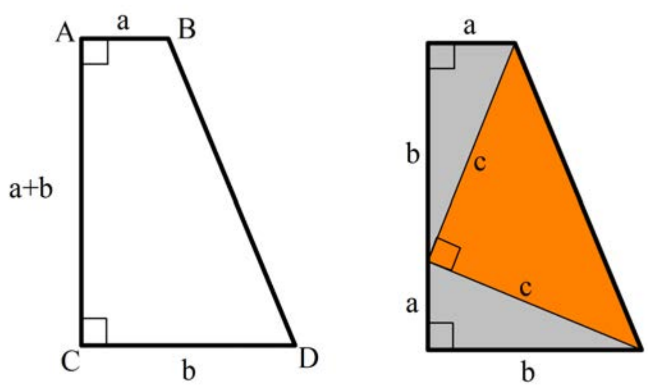


Figura 2: Decomposição de um trapézio em três triângulos rectângulos.

Por outro lado, decompondo o trapézio em três triângulos rectângulos e calculando a soma das respectivas áreas, temos que $A_t = ab + \frac{c^2}{2}$. Igualando as duas expressões e simplificando tem-se que $a^2 + b^2 = c^2$.

Uma outra prova, adaptada de um autor chinês anónimo (cerca de 200 a.C.), que pode propor-se aos alunos, é baseada na equivalência das áreas da figura 3.

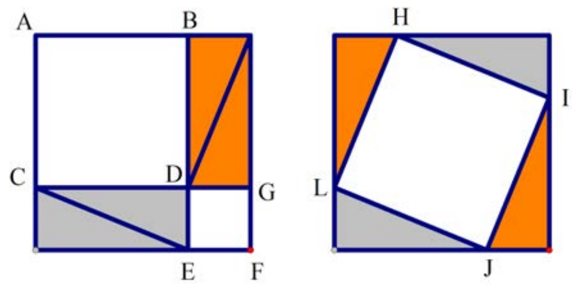


Figura 3: A área do quadrado $[HIJL]$ é igual à soma das áreas dos quadrados $[ABCD]$ e $[DEFG]$.

A demonstração, atribuída ao matemático inglês Henry Dudeney (1917), decorre, como no exemplo anterior, da equivalência de áreas (ver figura 4).

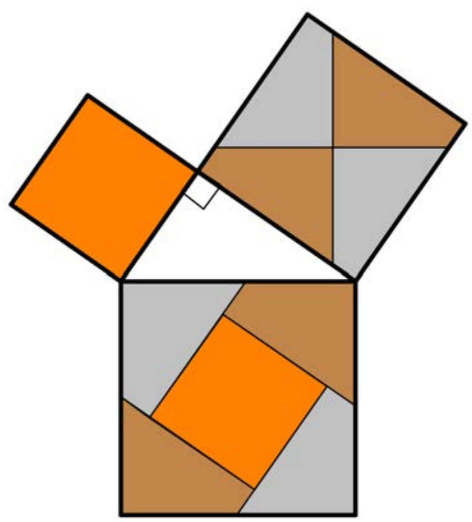


Figura 4: Área do quadrado 'grande' igual à soma das áreas dos quadrados 'pequenos'.

A quinta demonstração que apresentamos, atribuída a Michael Hardy, envolve tal como no caso da demonstração de Euclides, semelhança de triângulos. Da construção ilustrada na figura 5 tem-se $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$ pelo que $(c+a)(c-a) = b^2$, ou seja $a^2 + b^2 = c^2$.

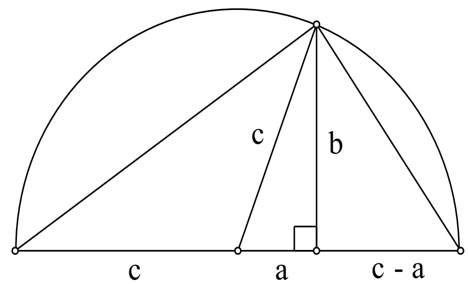


Figura 5: Triângulo inscrito numa semicircunferência.

Tarefa 1: Relação entre as medidas da hipotenusa e do lado do triângulo rectângulo isósceles

Encontra uma relação entre os comprimentos do lado e da hipotenusa de um triângulo rectângulo isósceles.

Partindo de casos particulares, os alunos induzem facilmente que $h = l\sqrt{2}$, sendo h e l as medidas da hipotenusa e do lado do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras a um triângulo rectângulo isósceles de lado l e hipotenusa h, confirmam que a relação encontrada em casos particulares é válida em geral. Os alunos devem ser encorajados a redigir essa relação,

Tarefa 2: Relação entre catetos do triângulo rectângulo com ângulos de 30º e 60º

Encontra uma relação entre os comprimentos dos catetos de um triângulo rectângulo com ângulos agudos que medem 30º e 60º.

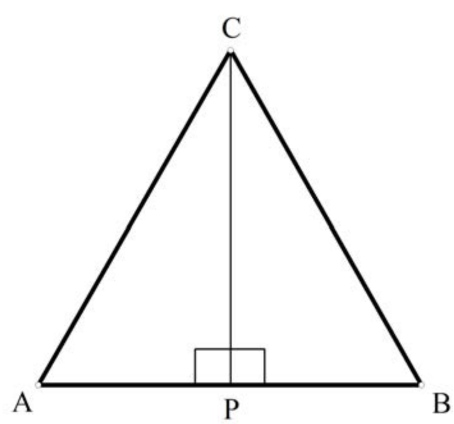


Figura 6: Construção de um triângulo rectângulo com ângulos de 30º e 60º.

Partindo de um triângulo equilátero $T = [ABC]$, considere-se $\overline{CP}$ a altura baixada do vértice C sobre o lado $[AB]$. Então, o triângulo $\Delta\,[PBC]$, rectângulo em P, tem ângulos agudos que medem 30^o (ângulo $\angle PCB$) e 60^o (ângulo $\angle PBC$). Os alunos podem considerar primeiramente alguns casos particulares, tomando para medida do lado do triângulo $\Delta\,[ABC]$, por exemplo, $a = 4$ ou $a = 10$. A análise de casos particulares sugere que se o cateto menor medir $\frac{a}{2}$, o que corresponde a um triângulo equilátero de lado a, o cateto maior mede $\overline{CP} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Esta relação pode ser facilmente comprovada pela aplicação do Teorema de Pitágoras. De facto, basta ver-se que $\overline{BC}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{BP}^2 \Leftrightarrow a^2 = \overline{CP}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{CP}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{CP}^2 = \frac{3a^2}{4}$. O que permite concluir que $\overline{CP} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Recíproco do Teorema de Pitágoras

Alguns historiadores da matemática supõem que os agrimensores do Antigo Egipto (conhecidos como 'esticadores de corda') recorreram ao recíproco do Teorema de Pitágoras para repor os limites dos terrenos após as cheias anuais do rio Nilo, bem como para a construção das pirâmides. Alguns túmulos antigos mostram trabalhadores levando cordas com nós igualmente espaçados. Por exemplo, se a corda estivesse dividida em 13 nós igualmente espaçados teria 12 comprimentos iguais (ver figura 7).

Figura 7: Esquema da corda com 13 nós igualmente espaçados.

Se uma pessoa juntasse os nós 1 e 13 e outras duas pessoas segurassem a corda pelos nós 4 e 8 e a esticassem bem, teriam criado um triângulo rectângulo 3–4–5 (ver figura 8).

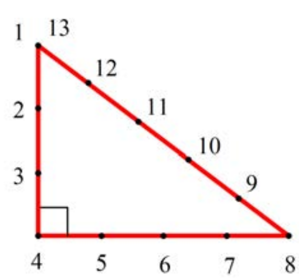


Figura 8: Esquema da corda depois de dobrada e esticada.

Consideremos um triângulo $T = [ABC]$ em que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

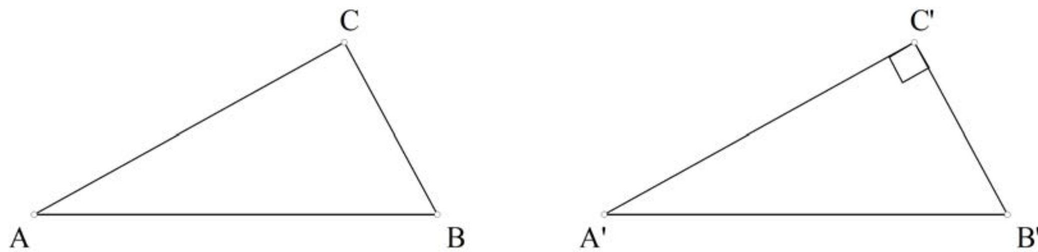


Figura 9: Triângulo $T = [ABC]$ que verifica a relação de Pitágoras e triângulo rectângulo $T' = [A'B'C']$ cujos catetos têm as mesmas medidas dos catetos do triângulo T.

Então $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$. Seja ainda $T' = [A'B'C']$ um triângulo rectângulo em que os catetos medem $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (ver figura 9). Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo T', temos que $h^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, onde h designa a hipotenusa de T' . Assim, $h = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$ ou seja $h = \overline{AB}$. Pelo critério LLL, os triângulos T e T' são congruentes pelo que o triângulo T é rectângulo em C. Mostrámos assim que se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados então o triângulo é rectângulo sendo o ângulo recto o oposto ao primeiro lado.

Transformações geométricas

Introdução

Nos Elementos de Euclides (séc. III a.C) a geometria é apresentada, pela primeira vez, sob a forma de uma estrutura axiomática, com um conjunto de teoremas logicamente dedutíveis a partir de um certo número de princípios e postulados. É com os Gregos que a geometria se eleva a uma ciência que estuda entidades abstractas, deixando definitivamente a sua origem empírica. A dedução lógica passa a estar no centro do processo de raciocínio. Mas, como refere Harel[7], as entidades abstractas criadas pelas gregos tinham um só modelo em mente, o modelo de idealizações de realidades do espaço físico.

Seriam necessários mais de 20 séculos, para que a noção moderna de sistema axiomático fosse desenvolvida, abrindo caminho às chamadas geometrias não euclidianas. Uma das diferenças cruciais entre a actual noção de axiomatização e a de Euclides reside no facto dos termos primitivos (*ponto*, *recta*,...) serem, presentemente, tratados como variáveis, livres de qualquer referência real ou imaginária, em contraste com a concepção grega onde estes eram criados numa dependência clara com o objecto físico (real) que lhe deu origem.

Com o desenvolvimento dos métodos algébricos surge, com René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665), a geometria analítica, na qual coordenadas numéricas e equações algébricas nessas coordenadas são usadas para a obtenção de resultados geométricos. Desde então, a geometria foi perdendo progressivamente o cariz genuinamente geométrico dos seus objectos, conceitos e relações em detrimento das suas traduções algébricas.

O século XIX, designado pelo historiador Carl Boyer (1906-1976) como o século épico da geometria, teve em Felix Klein (1849-1925) um dos seus expoentes máximos. Obteve, com apenas 23 anos, um lugar de professor na Universidade de Erlangen onde, na lição inaugural, descreve um novo princípio unificador para a classificação das várias geometrias, conhecido como *Programa de Erlangen*.

[7] G. Harel, Toward Comprehensive Perspectives on the learning and Teaching of Proof,To appear in L. Lester [Ed.], Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, National Council of Teachers of Mathematis.

Os conceitos basilares subjacentes ao estabelecimento desse princípio são o de *grupo* (de transformações) e o de *invariância*. É claro que os grupos de transformações eram já usados em geometria, mas a originalidade de Klein residiu em os elevar ao estatuto de objectos principais de interesse, fazendo-os operar em diferentes espaços e analisando que tipo de relações e que propriedades eram preservadas. Sob o seu ponto de vista, para fazer geometria basta seleccionar um conjunto de pontos e um grupo de transformações, e identificar as propriedades ou relações que se mantêm invariantes sob a acção desse grupo, isto é, identificar as propriedades e relações que permanecem válidas após a aplicação de um qualquer elemento desse grupo. Variando o conjunto ou o grupo obtêm-se diferentes geometrias.

Transformações Geométricas

Quando movimentamos um objecto, sem o deformar, a distância entre quaisquer dois pontos do objecto, antes e depois do movimento, permanece a mesma, embora a localização dos pontos possa ser diferente. Por exemplo, se deslocamos um palito poisado numa mesa para outro local da mesa, a distância entre as suas extremidades antes e após a movimento é a mesma. A extensão da noção de invariância da distância, entre pontos de um objecto, para invariância da distância entre quaisquer dois pontos do plano, após uma acção (movimento) que os envolva, pode ser modelada em termos matemáticos por transformações a que chamamos isometrias.

As isometrias não são o único tipo de transformações geométricas interessantes, estas podem ser vistas como um subconjunto de um universo de transformações mais amplo, as semelhanças. Estas transformações mantêm invariante (constante) a razão das distâncias entre os pontos e os seus transformados, e têm aplicação em variadíssimas áreas como é o caso, por exemplo, da computação gráfica e da cartografia.

Uma *aplicação* do plano no plano é uma correspondência f que a cada ponto P do plano associa um e um só ponto $P' = f(P)$ do plano. O ponto P' é designado por *transformado* ou *imagem* de P por f.

Observe-se que, nem toda a correspondência do plano é uma aplicação. Por exemplo, sejam P um ponto fixo do plano e $C(P, 1)$ a circunferência de centro em P e raio 1, a correspondência do plano no plano que ao ponto P associa o mesmo ponto P e que a cada ponto Q do plano, distinto de P, faz corresponder os pontos que pertencem simultaneamente à circunferência $C(P, 1)$ e à recta determinada por P e Q, não é uma aplicação. A qualquer ponto Q, distinto de P, estão associados não um, mas dois pontos, situação ilustrada na Figura 1 (a).

Figura 1: Correspondências do plano no plano.

No entanto, considerando em vez da recta determinada por P e Q, a semi-recta com origem em P e que passa por Q, passamos a ter uma aplicação do plano no plano, situação ilustrada na Figura 1 (b).

Um outro exemplo de uma transformação do plano no plano é a *aplicação identidade*, id, que associa cada ponto P do plano a si mesmo ($id(P) = P$).

A partir de uma ou mais aplicações podemos gerar novas aplicações. Uma forma de o fazer é através da composição de aplicações.

Sejam f e g duas aplicações do plano e P um ponto arbitrário. Designemos por Q a imagem de P por f e por T a imagem de Q por g. A correspondência que associa P a T é designada por *aplicação composta* de g após f e representa-se por $g \circ f$.

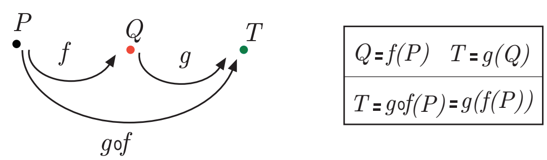


Figura 2: Composta de g após f

Vejamos o exemplo seguinte. Seja O um ponto fixo do plano e considerem-se as aplicações f e g definidas do modo seguinte:

- f fixa o ponto O ($f(O) = O$) e transforma cada ponto P, distinto de O, no ponto $P' = f(P)$, ponto médio do segmento de recta $[OP]$, ver Figura 3 (a).
- g fixa também o ponto O e transforma cada ponto P, distinto de O, no ponto $P^\star = g(P)$, intersecção da circunferência $C(O, 1)$ de centro em O e raio 1 com a semi-recta com origem em O e que passa por P, ver Figura 3 (b).

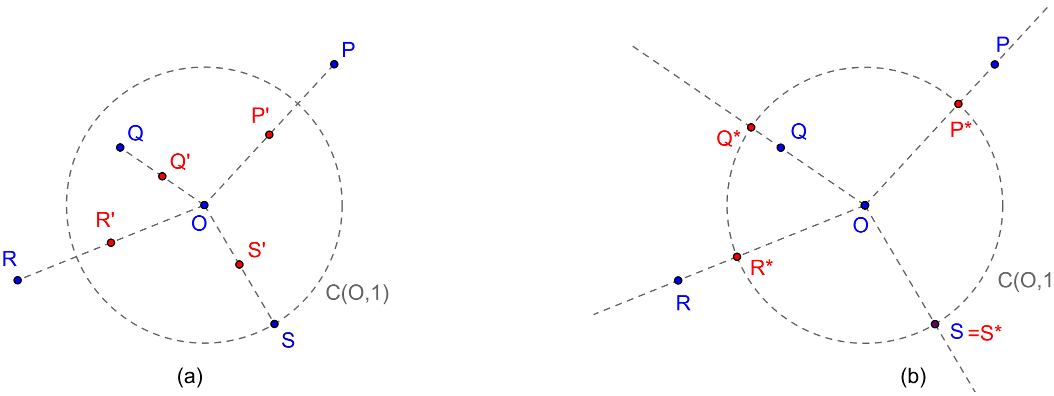


Figura 3: Transformados, por f e por g, de um mesmo conjunto de pontos.

Qual é o transformado, pela aplicação composta $g \circ f$ (g após f), dum ponto P do plano?

Se P for o ponto O, como as aplicações f e g fixam O, também a aplicação composta, $g \circ f$, fixa O,

$$g \circ f(O) = g(f(O)) = g(O) = O.$$

Suponhamos agora que P é um ponto distinto de O.

Atendendo ao modo como está definida a aplicação f o transformado de P por f é P', ponto médio do segmento de recta $[OP]$. Assim, o transformado de P por $g \circ f$ é o transformado de P' por g ($g \circ f(P) = g(f(P)) = g(P')$) ou seja, é o ponto P'' que se obtém intersectando a circunferência $C(O, 1)$ com a semi-recta com origem em O e que passa por P', ver Figura 4 (a).

Observar que tanto a aplicação g como a aplicação composta $g \circ f$ transformam um qualquer ponto do plano, distinto de O, num ponto da circunferência $C(O, 1)$.

Em relação à aplicação composta $f \circ g$ (f após g), esta fixa também o ponto O e transforma um ponto P, distinto de O, no ponto $P^{\star\star}$ que pertence simultaneamente à semi-recta com origem em O e que passa por P e à circunferência, $C(O, \frac{1}{2})$, de centro em O e raio $\frac{1}{2}$.

De facto, sendo P um ponto distinto de O, o seu transformado por g é o ponto $P^{\star}$, ponto intersecção da semi-recta com origem em O e que passa por P com a circunferência $C(O, 1)$. Como a imagem de $P^{\star}$ por f é o ponto $P^{\star\star}$, ponto médio do segmento de recta $[OP^{\star}]$, este pertence simultaneamente à semi-recta com origem em O e que passa por P e à circunferência $C(O, \frac{1}{2})$, ver Figura 4 (b).

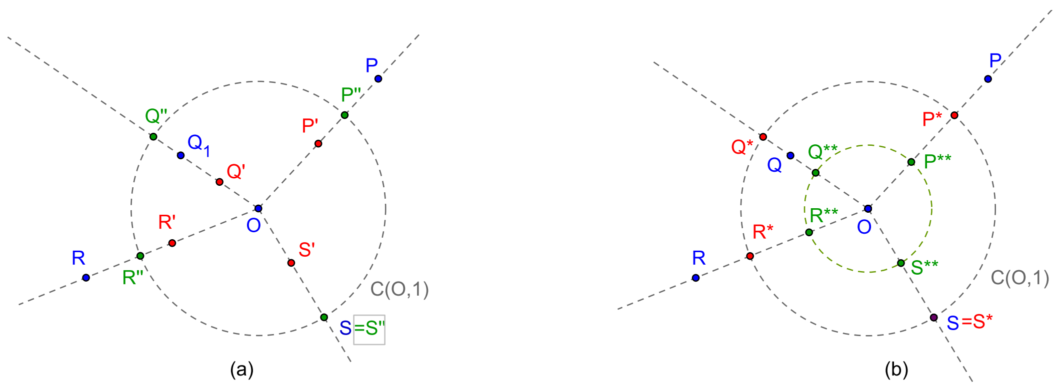


Figura 4: Transformados, por $g \circ f$ e por $f \circ g$, de um mesmo conjunto de pontos.

Com este exemplo podemos constatar que a operação composição de funções não é uma operação comutativa. É, contudo, uma operação associativa.

Uma *transformação* do plano é uma *aplicação* (ou *função*) do plano no plano que é *bijectiva*.

Por outras palavras, uma transformação é uma aplicação, f, do plano no plano que tem a propriedade de qualquer ponto Q ser o transformado por f de *um e um só* ponto P, ou o que é equivalente, f transforma pontos distintos em pontos distintos e o conjunto de todos os seus transformados cobre o plano.

Um exemplo, trivial, de uma transformação é a aplicação identidade.

É claro que nem toda a aplicação é uma transformação. A aplicação ilustrada na Figura 1 (b) não é uma transformação, basta observar que os pontos R e S têm a mesma imagem, R'. Aliás, todos os pontos distintos de P que pertençam a uma mesma semi-recta com origem em P têm por imagem o mesmo transformado.

Seja f uma transformação do plano. A aplicação que a cada ponto P do plano associa um ponto Q do plano tal que $f(Q) = P$ é uma transformação, que se designa por *transformação inversa* de f e representa-se por f^{-1} .
Por outras palavras,

$$f^{-1}(P) = Q \text{ se e somente se } f(Q) = P.$$

Facilmente se constata que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$. Assim, P é ponto fixo de f se e somente se P é ponto fixo de f^{-1}. De facto,

$$f(P) = P \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \circ f(P) = f^{-1}(P) \quad \Leftrightarrow \quad P = f^{-1}(P).$$

Vamos ilustrar esta definição com um exemplo utilizando uma das aplicações já definidas. A aplicação f definida anteriormente e ilustrada na figura 3 a) é uma transformação.

Qual é a aplicação inversa de f?

Uma vez que f fixa o ponto O, também f^{-1} fixa O. Já conhecemos, portanto, o transformado do ponto O por f^{-1} que é precisamente O. Vamos agora considerar um ponto X, distinto de O, e averiguar qual é o seu transformado por f^{-1}.

Atendendo á definição de inversa de uma transformação, $f^{-1}(X)$ é o ponto Y tal que $f(Y) = X$. Mas afirmar que $f(Y) = X$ é o mesmo que afirmar que X é o ponto médio do segmento de recta $[O, Y]$, o que equivale a dizer que Y é o ponto da semi-recta OX que está a uma distância de O dupla da distância a que está X de O. Temos assim caracterizada a função f^{-1}, ver Figura 5 (b).

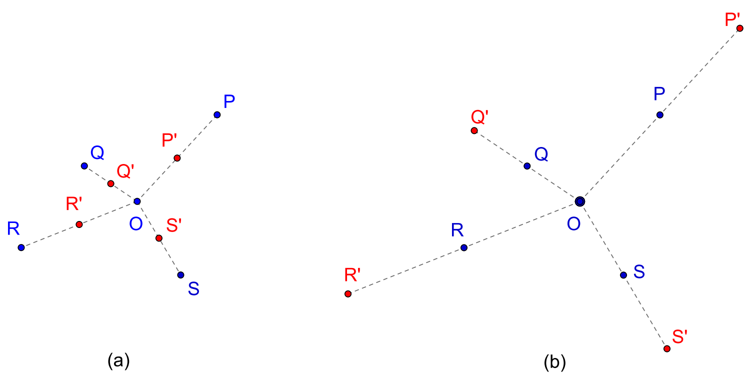


Figura 5: Transformados, por f e por f^{-1}, de um mesmo conjunto de pontos.

Designemos o conjunto de todas as transformações do plano no plano por $\mathcal{T}$.
Uma vez que:

(a) a aplicação identidade pertence a $\mathcal{T}$

(b) se f e g pertencem a $\mathcal{T}$ a composição $f \circ g$ pertence a $\mathcal{T}$, e

(c) se f pertence a $\mathcal{T}$ também f^{-1} pertence a $\mathcal{T}$,

a operação composição confere a $\mathcal{T}$ uma estrutura de grupo, dito *grupo de transformações* do plano.

Sejam Ω um conjunto de pontos do plano e f uma transformação do plano. Dizemos que f *fixa* Ω se $f(\Omega) = \Omega$, ou seja f transforma pontos de Ω em pontos de Ω. Convém observar que o facto de f fixar Ω não significa que f fixe cada ponto de Ω, quando tal acontece dizemos que f *fixa pontualmente* Ω.

Dizemos que uma propriedade ou relação é *invariante* sob a acção de uma transformação ou que é *preservada* pela transformação se essa propriedade ou relação continua a ser verificada após a transformação ter sido aplicada. Nesse caso, dizemos, também, que a transformação *preserva* a relação ou a propriedade. Uma figura geométrica $\mathcal{F}$ é *invariante* à acção de uma transformação f, se f fixa $\mathcal{F}$, isto é, se $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Uma *transformação de semelhança* é uma transformação do plano no plano que preserva a razão das distâncias entre quaisquer dois pontos (distintos) do plano e os respectivos transformados. Por outras palavras, se f é uma transformação de semelhança, as distâncias entre P e Q e entre $f(P)$ e $f(Q)$ são directamente proporcionais, ou seja, existe uma constante positiva k (dita *razão de semelhança*) tal que, quaisquer que sejam os pontos P e Q do plano,

$$d(f(P), f(Q)) = k\, d(P, Q),$$

onde d designa a distância (Euclidiana) usual entre pontos do plano.

Designemos o conjunto de todas as semelhanças do plano por $\mathcal{S}$. Dado que:

(a) a transformação identidade, id, é uma transformação de semelhança (de razão 1);

(b) sendo f e g transformações de semelhança do plano (de razões, respectivamente, k_1 e k_2) a transformação $g \circ f$ é também uma transformação de semelhança (de razão $k_1 \times k_2$); e

(c) sendo f uma transformação de semelhança (de razão k) também f^{-1} é uma transformação de semelhança (de razão $\frac{1}{k}$);

a operação composição confere a $\mathcal{S}$ uma estrutura de grupo, dito *grupo das transformações geométricas* (ou *grupo de semelhanças*) do plano.

Uma das relações importantes que podemos estabelecer entre pontos distintos de uma recta é a relação "*estar situado entre*". Se A, B e C são três pontos distintos de uma recta l, dizemos que B *está situado entre* A e C e escrevemos $A \star B \star C$ se $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

De entre as diversas propriedades das transformações de semelhança destacamos as que a seguir se indicam.

Propriedades: As transformações de semelhança,

1. preservam a relação "estar situado entre", o que permite concluir, de imediato, que preservam a colinearidade de pontos;
2. preservam amplitudes de ângulos;
3. transformam:
   3.1. rectas em rectas, são por isso, *colineações*; semi-rectas em semi-rectas; segmentos de recta em segmentos de recta; triângulos em triângulos semelhantes[8];
   3.2. rectas paralelas em rectas paralelas;
   3.3. rectas perpendiculares em rectas perpendiculares.

[8] Ver capítulo "Semelhança de triângulos".

Isometrias

Uma *isometria* do plano é uma transformação de semelhança do plano de razão 1. É, portanto, uma transformação que preserva a distância entre quaisquer dois pontos do plano.

Assim a transformação f é uma isometria se e somente se

$$d(P,Q) = d(f(P), f(Q)), \text{ para quaisquer pontos } P \text{ e } Q \text{ do plano.}$$

Tendo em conta que a transformação identidade é uma isometria, a composição de duas isometrias é uma isometria e a transformação inversa de uma isometria é uma isometria, podemos concluir que o subconjunto do conjunto das transformações geométricas constituído por todas as isometria do plano, munido da operação composição de funções, é um grupo, *o grupo das isometrias* do plano, que é um subgrupo do grupo de semelhanças.

Propriedades:
Pelo facto de serem transformações de semelhanças e por preservarem distâncias entre pontos, as isometrias

1. preservam a colinearidade de pontos e a amplitudes de ângulos;
2. transformam:
   - 2.1. rectas em rectas; semi-rectas em semi-rectas; segmentos de recta em segmentos de recta congruentes[9]; triângulos em triângulos congruentes[10]
   - 2.2 rectas paralelas (respectivamente, perpendiculares) em rectas paralelas (respectivamente, perpendiculares).

O que podemos dizer em relação ao *número de pontos fixos por uma isometria*?

Uma vez que toda a isometria é uma colineação, se uma isometria fixar dois pontos, A e B, esta fixa, necessariamente a recta AB. Mais, fixa-a ponto a ponto, uma vez que há preservação da distância entre pontos.

Então e se uma isometria, digamos f, fixar três pontos não colineares A, B e C? Neste caso, as rectas AB, AC e BC são fixas pontualmente pela isometria e por conseguinte também o triângulo ΔABC o é. Vejamos agora que qualquer ponto P do plano que não pertença ao triângulo ΔABC é também um ponto fixo de f. De facto, designando por M o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, a recta que passa por P e M intersecta o triângulo ΔABC em dois pontos M e, digamos, S. Como M e S são pontos do triângulo ΔABC, estes são pontos fixos de f e portanto f fixa pontualmente a recta MS o que nos permite concluir que $f(P) = P$, ou seja f é a aplicação identidade. Acabamos de ver que:

[9]Dois segmentos de recta são congruentes quando e só quando têm o mesmo comprimento.

[10]Dois triângulos ΔABC e ΔXYZ são congruentes se e somente se $\overline{AB} = \overline{XY}$; $\overline{AC} = \overline{XZ}$; $\overline{BC} = \overline{YZ}$; e os correspondentes ângulos internos têm igual amplitude.

Se uma isometria fixar dois pontos (distintos) de uma recta, então fixa-a pontualmente e se fixar três pontos não colineares é a transformação identidade.

Decorre de imediato, que se A, B e C são pontos não colineares e f e g são duas isometrias tais que $f(A) = g(A),\ f(B) = g(B)$ e $f(C) = g(C)$ então $f = g$. Por outras palavras, *uma isometria fica univocamente determinada pelo conhecimento dos transformados de três pontos não colineares.*

Como se comportam as isometrias perante ângulos orientados?

Se uma isometria transformar um ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado positivamente (negativamente) então transforma qualquer ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado positivamente (negativamente) e neste caso diz-se uma isometria *directa.*

Se uma isometria transformar um ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado negativamente (positivamente) então transforma qualquer ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado negativamente (positivamente) e neste caso a isometria diz-se *inversa* ou *oposta.*

Segue-se de imediato que:

1. A composição de isometrias directas é uma isometria directa;
2. A composição de um número ímpar de isometrias opostas é uma isometria oposta
3. A composição de um número par de isometrias opostas é uma isometria directa.

Uma das isometrias fundamentais do plano é a reflexão. São as reflexões que geram todas as isometrias do plano. Por outras palavras, podemos obter qualquer isometria do plano por composição de reflexões. Como veremos mais adiante, qualquer isometria é a composição de no máximo três reflexões.

Reflexão

Seja l uma recta do plano. A *reflexão* de eixo l, R_l, é a transformação do plano no plano que:

a) fixa cada ponto de l, isto é, $R_l(P) = P$ para todo o ponto P em l, e
b) transforma cada ponto Q que não pertence a l num ponto Q' tal que l é a mediatriz do segmento de recta que une Q a Q', ou seja, transforma Q num ponto Q' (distinto de Q) situado na recta perpendicular a l que passa por Q e que está a uma distância do ponto de intersecção das duas rectas igual à distância a que Q está desse mesmo ponto.

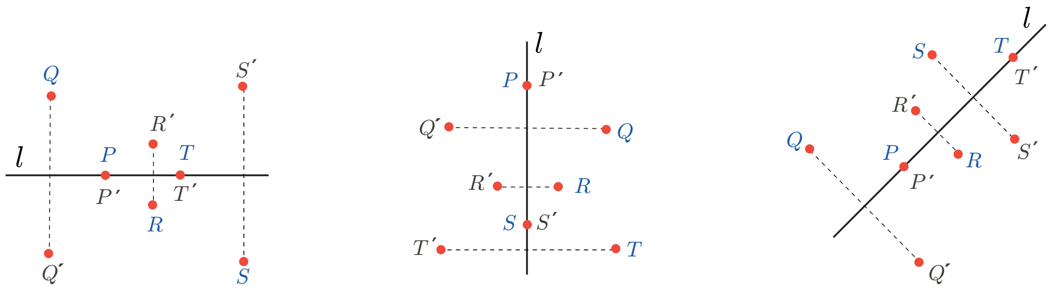


Figura 6: Pontos do plano e seus transformados por reflexões

Uma reflexão deixa invariante uma recta, *a recta de reflexão*. Os pontos que não pertencem a essa recta mudam de semi-plano. A recta de reflexão comporta-se com um espelho de dupla face, Figura 7.

Figura 7: Reflexão, espelho de dupla face

Propriedades:

1. As reflexões são transformações do plano que preservam distâncias sendo, portanto, isometrias.
2. As reflexões são transformações involutivas, isto é, dada uma recta l do plano,
   $$R_l^2(P) = R_l(R_l(P)) = P,$$
   para todo o ponto P do plano.

   A reflexão de eixo l e a sua inversa coincidem ($R_l = R_l^{-1}$).
3. Por serem isometrias, as reflexões preservam rectas, semi-rectas, segmentos de recta, amplitudes de ângulos e as relações de paralelismo e perpendicularidade entre rectas.
4. As reflexões fixam pontualmente o eixo de reflexão e fixam, embora não pontualmente, qualquer recta perpendicular ao eixo de reflexão.
5. As reflexões são isometrias opostas. Transformam ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados negativamente (positivamente).

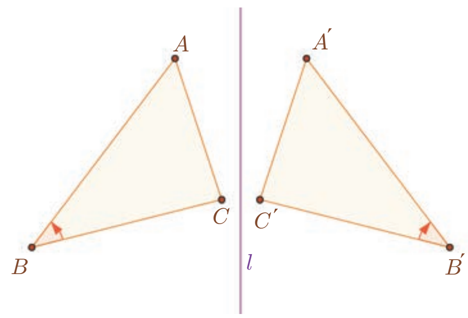


Figura 8: A reflexão é uma isometria oposta.

Como a composição de duas isometrias opostas é uma isometria directa podemos de imediato concluir que a composição de duas reflexões nunca é uma reflexão e por conseguinte a operação composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões uma estrutura de grupo.

Uma questão natural a colocar é a seguinte:

Dados dois pontos distintos do plano, A e B, quais são as isometrias que os fixam?

É claro que a aplicação identidade e a reflexão R_l de eixo na recta l que passa por A e B satisfazem a esse requisito, mas haverá mais alguma?

Suponhamos que f é uma isometria que fixa os pontos A e B e que f não é a aplicação identidade, então existe um ponto C tal que $f(C) \neq C$. Mas se f fixa os pontos A e B fixa pontualmente a recta $l = AB$ e portanto o ponto C não pertence a l. Por outras palavras, os pontos A e B e C não são colineares. Seja $C' = f(C)$. Como f é uma isometria, $d(A, C) = d(A, C')$ e $d(B, C) = (B, C')$ o que significa que a recta l é a mediatriz do segmento de recta $[CC']$, isto é, C' é o transformado do ponto C pela reflexão R_l. Como os transformados dos pontos não colineares A, B e C por f e R_l coincidem, então $f = R_l$.

Acabamos de mostrar que:

As isometrias que fixam dois pontos distintos são a identidade e a reflexão de eixo l onde l designa a recta que passa por esses dois pontos.

Decorre de imediato que *se uma isometria fixar dois ou mais pontos e for oposta, então essa isometria é uma reflexão.*

A questão que agora se levanta é a seguinte: *Existe alguma isometria que fixe um e um só ponto? Se existe, qual é?*

Suponhamos que f representa uma isometria que fixa um só ponto, digamos C, ($f(C) = C$). Consideremos um ponto do plano arbitrário P, distinto de C, e seja $P' = f(P)$. Como f fixa um só ponto, $P' \neq P$.

Seja l a mediatriz do segmento de recta $[PP']$. Uma vez que $d(C, P) = d(f(C), f(P)) = d(C, P')$, C pertence à recta l, e por conseguinte a reflexão R_l, de eixo l, fixa C.

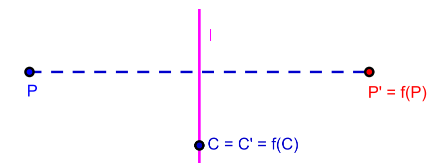


Figura 9: C pertence à recta l, mediatriz de $[PP']$.

A aplicação $h = R_l \circ f$, é uma isometria, pois é a composição de duas isometrias. Mais, h fixa os pontos, distintos, C e P. De facto,

$$h(C) = R_l \circ f(C) = R_l(C) = C, \quad \text{e}$$
$$h(P) = R_l \circ f(P) = R_l(P') = P.$$

Consequentemente, ou h é a aplicação identidade ou h é a reflexão de eixo m, onde m designa a recta que passa pelos pontos P e C.

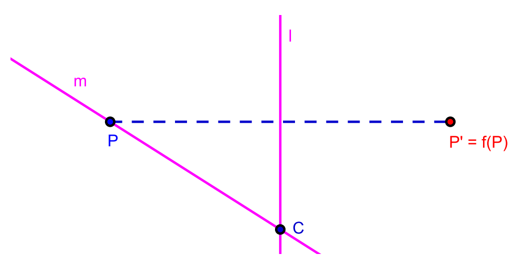


Figura 10: As rectas l e m.

Mas se a isometria $h = R_l \circ f$ fosse a aplicação identidade então $f = R_l$ e teria mais de que um ponto fixo. Donde,

$$h = R_l \circ f = R_m \quad \text{ou seja} \quad f = R_l \circ R_m.$$

Podemos então concluir que:

Se uma isometria fixar um só ponto então é a composição de duas reflexões.

Conjugando este resultado com o facto de uma isometria que fixe (pelo menos) dois pontos ser ou uma reflexão ou a aplicação identidade, deduz-se que *uma isometria que fixe pelo menos um ponto é o produto de no máximo duas reflexões.*

Vejamos agora que *qualquer isometria é a composição de no máximo três reflexões.*

Seja f uma isometria. Se f é aplicação identidade, a asserção é trivialmente verificada, pois $R_l \circ R_l = id$, qualquer que seja a recta l.

Suponhamos que f não é a aplicação identidade. Então, existe um ponto P do plano tal que $Q = f(P) \neq P$.

Seja l a mediatriz do segmento de recta $[PQ]$. A isometria $h = R_l \circ f$ fixa P. De facto,

$$h(P) = R_l \circ f(P) = R_l(f(P)) = R_l(Q) = P.$$

Consequentemente, h é a composição de no máximo duas reflexões, digamos R_s e R_m. Por conseguinte, $f = R_l \circ h = R_l \circ R_s \circ R_m$. Independentemente de haver ou não rectas coincidentes, podemos concluir que f é no máximo a composição de três reflexões. ■

Uma vez que as isometrias transformam triângulos em triângulos congruentes, uma questão natural é a seguinte:

> *Sabendo que o triângulo Δ_1 de vértices A, B e C e o triângulo Δ_2 de vértices, correspondentes, P, Q e R são congruentes, existirá uma isometria f, que transforme Δ_1 em Δ_2?*

O que podemos, desde já, afirmar é que se uma tal isometria existir, ela é única. Mas existe? Sim, existe e pelo que acabamos de ver essa isometria é a composição de no máximo 3 reflexões. Vejamos como podemos proceder para identificar a isometria em causa.

Suponhamos, então, que os pontos não colineares A, B e C (vértices de Δ_1) são transformados nos pontos P, Q e R (vértices correspondentes de Δ_2).

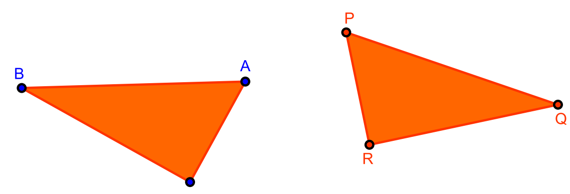


Figura 11: Triângulos congruentes.

1. Vamos começar por considerar uma isometria, g_1, que transforme o ponto A em P.
   - Se $A = P$, consideramos $g_1 = id$;
   - se $A \neq P$, tomamos para $g_1 = R_m$, reflexão de eixo na mediatriz m do segmento de recta $[A, P]$. Deste modo, $g_1(A) = P; g_1(B) = B'$ e $g_1(C) = C'$.

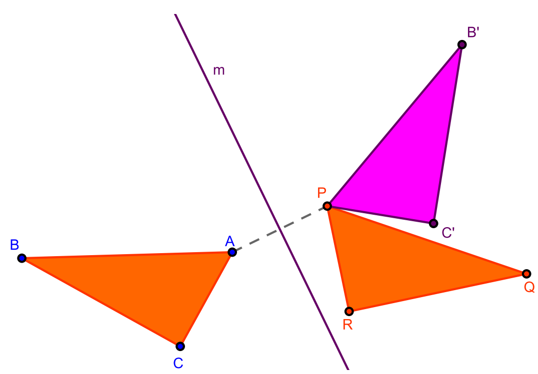


Figura 12: Os triângulos congruentes Δ_1, Δ_2 e $R_m(\Delta_1)$.

2. Vamos agora determinar uma isometria g_2, que fixe P e transforme B' em Q.
   - Se $B' = Q$, consideramos $g_2 = id$;
   - Se $B' \neq Q$, tomamos $g_2 = R_n$, reflexão de eixo na mediatriz n do segmento de recta $[B', Q]$.

     Obviamente que $R_n(B') = Q$ e como $d(P, B') = d(A, B) = d(P, Q)$, P pertence a n e é, portanto, um ponto fixo de R_n. Assim, $(g_2 \circ g_1)(A) = P$; $(g_2 \circ g_1)(B) = Q$ e $(g_2 \circ g_1)(C) = C''$.

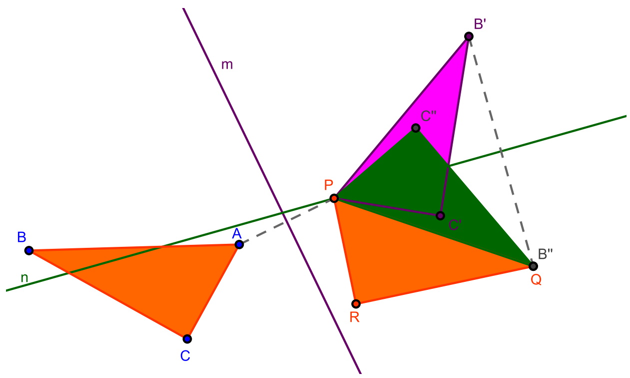


Figura 13: Os triângulos Δ_1, Δ_2, $R_m(\Delta_1)$ e $R_n \circ R_m(\Delta_1)$.

3. Por fim, vamos determinar uma isometria, g_3, que fixe P e Q e transforme C'' em R.
   - Se $C'' = R$, façamos $g_3 = id$;
   - Se $C' \neq R$, tomamos para g_3 a reflexão R_t de eixo na mediatriz do segmento de recta $[C'', R]$.

     Claramente, $R_t(C'') = R$. Dado que, $d(P, R) = d(A, C) = d(P, C'')$ e $d(Q, R) = d(B, C) = d(Q, C'')$, P e Q pertencem à recta n, e por conseguinte $R_t(P) = P$ e $R_t(Q) = Q$. Consequentemente, $(g_1 \circ g_2 \circ g_3)(A) = P$, $(g_1 \circ g_2 \circ g_3)(B) = Q$ e $(g_1 \circ g_2 \circ g_3)(C) = R$.

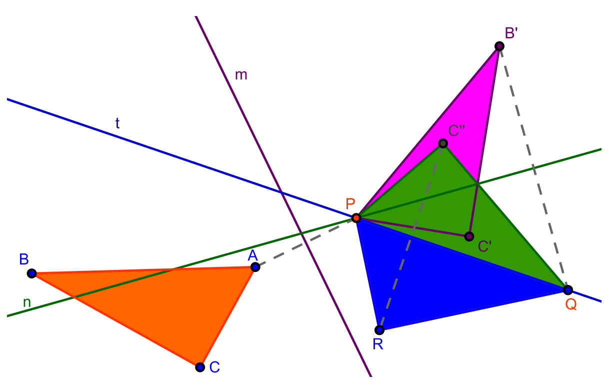


Figura 14: Os triângulos Δ_1, $R_m(\Delta_1)$, $R_n \circ R_m(\Delta_1)$ e $R_t \circ R_n \circ R_m(\Delta_1) = \Delta_2$.

Como vimos, uma isometria ou é uma reflexão, ou é a composição de duas reflexões ou é a composição de três reflexões.

Vamos começar por analisar o caso em que a isometria é composição de duas reflexões.

Composição de duas reflexões

Sejam R_m e R_n duas reflexões de eixos m e n, respectivamente e $f = R_n \circ R_m$ a aplicação composta de R_n após R_m.

Se $m = n$, a isometria $f = R_n \circ R_m$ é a aplicação identidade.

Suponhamos, agora, que $m \neq n$. Neste caso, as rectas m e n ou são concorrentes ou são paralelas (estritamente).

Vamos abordar, em primeiro lugar, o caso em que as rectas m e n se intersectam num ponto, O.

Neste caso, $f = R_n \circ R_m$ fixa o ponto O. Qual será o transformado de um ponto P distinto de O por f?

Seja $\beta \in]-90, 90[$ a medida de um dos dois ângulos orientados de m para n.

Sejam M um ponto de m, distinto de O, e N o ponto de n que pertence à circunferência de centro em O e raio $r = d(O, M)$, tal que a medida do ângulo orientado da semi-recta $\dot{O}M$ para a semi-recta $\dot{O}N$ é precisamente β.

Uma vez que a reflexão R_m fixa pontualmente qualquer ponto de m, R_m fixa O e fixa M. O transformado do ponto M por $f = R_n \circ R_m$ é, então, o transformado de M por R_n,

$$f(M) = R_n \circ R_m(M) = R_n(R_m(M)) = R_n(M).$$

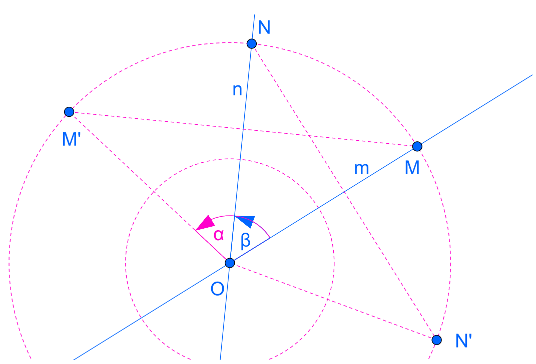


Figura 15: A transformação $R_n \circ R_m$.

Dado que reflexão R_n fixa também O, R_n transforma M no ponto $M' = R_n(M)$, que pertence à circunferência de centro em O e raio $r = d(O, M)$, e em que a mediatriz do segmento de recta $[MM']$ é precisamente n.

Como a medida do ângulo orientado α, da semi-recta $\dot{O}M$ para a semi-recta $\dot{O}M'$, é 2β, podemos concluir que f transforma o ponto M da recta m no ponto M'.

Observar que o ponto M' se obtém fazendo rodar M em torno de O do ângulo orientado α, de medida dupla da do ângulo orientado de m para n.

Seja $N' = R_m(N)$. Então m é a mediatriz do segmento de recta $[N, N']$, pelo que a medida do ângulo orientado de $\dot{O}N'$ para $\dot{O}N$ é 2β.

Mas, $f(N') = R_n \circ R_m(N') = R_n(R_m(N')) = R_n(N) = N$, ou seja f transforma o ponto N' no ponto N.

Observar que, de novo, o transformado por f de N' se obtém fazendo rodar N' em torno de O e de amplitude $\alpha = 2\beta$.

Uma vez que dispomos do conhecimento das imagens por $f = R_n \circ R_m$ de três pontos não colineares (O, M e N'), a isometria f está determinada. A esta transformação chamamos rotação de centro O e amplitude α.

Rotação

A rotação, que surgiu como composição de duas reflexões de eixos concorrentes, pode ser definida, de um modo autónomo.

A *rotação de centro no ponto O e ângulo orientado α* é a transformação do plano, R_O^α, que, fixa O, isto é, $R_O^\alpha(O) = O$, e transforma cada ponto P, distinto de O, num ponto $P' = R_O^\alpha(P)$, situado na circunferência de centro O e raio $d(O, P)$, tal que a medida do ângulo orientado $\angle POP'$, que tem por lado-origem a semi-recta $\dot{O}P$ e lado-extremidade a semi-recta, $\dot{O}P'$, é a amplitude de α.

Usaremos indistintamente as designações *rotação de ângulo orientado α* e *rotação de amplitude α*.

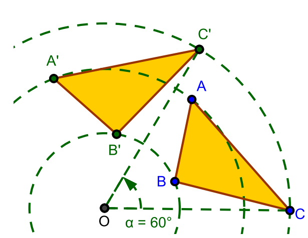


Figura 16: O transformado do triângulo $\triangle ABC$ pela rotação $R_O^{60^o}$

Propriedades:

1. A rotação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria.

2. Uma rotação, distinta da transformação identidade, fixa um e um só ponto e fixa uma recta (não pontualmente) se e somente se a sua amplitude for de 180^o e o centro da rotação pertencer à recta. As rotações de amplitude 180^o são usualmente designadas por *meias voltas*.

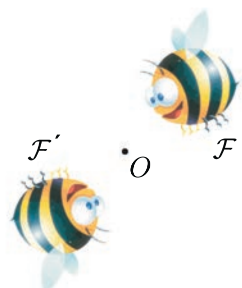


Figura 17: O transformado de $\mathcal{F}$ pela meia volta de centro em O.

3. Uma rotação fixa circunferências com centro no centro da rotação, embora não pontualmente. Apenas a (rotação) identidade fixa pontualmente circunferências.

4. A rotação é uma isometria directa, isto é, transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados positivamente (negativamente).

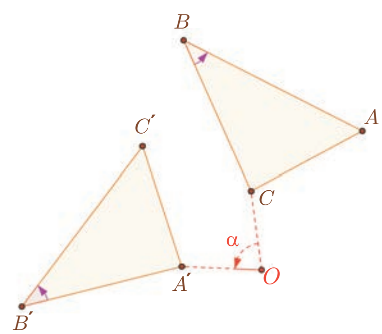


Figura 18: A rotação é uma isometria directa.

5. A transformação inversa da rotação de centro em O e ângulo α é a rotação com o mesmo centro e ângulo $-\alpha$,

$$(R_O^\alpha)^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

6. A composição de duas rotações de centro no ponto O e de amplitudes, respectivamente, α e β, é comutativa, e, é uma rotação de centro em O e de amplitude $\alpha + \beta$,

$$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}.$$

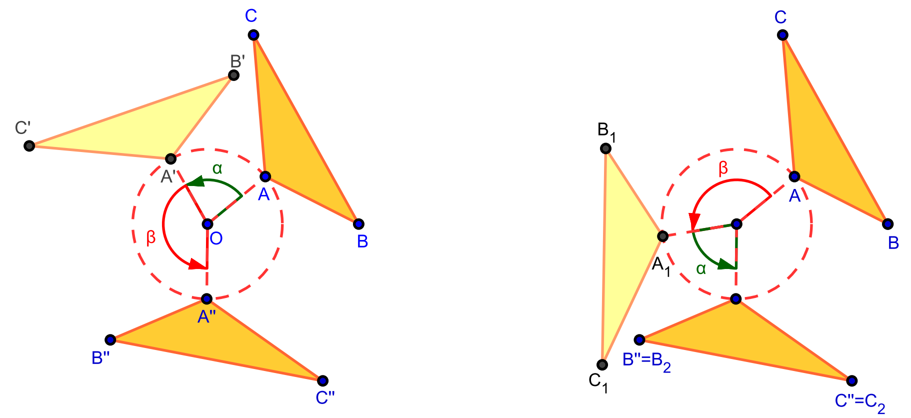


Figura 19: O transformado do triângulo $\triangle ABC$ pelas rotações $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ e $R_O^\alpha \circ R_O^\beta$.

7. A composição de duas rotações de centros distintos não é comutativa.

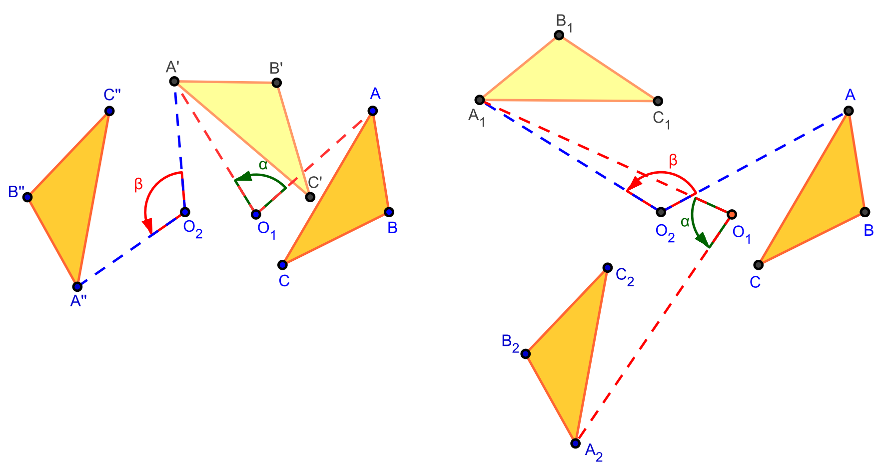


Figura 20: $R_{O_2}^\beta \circ R_{O_1}^\alpha \neq R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta$.

As propriedades 1, 5 e 6 conferem ao conjunto das rotações com um mesmo centro uma estrutura de subgrupo comutativo (abeliano) do grupo das isometrias do plano, para o operação composição usual de funções, a que chamamos *grupo das rotações* do plano.

Vamos agora analisar o caso referente à composição $R_m \circ R_n$ de duas reflexões R_m e R_n de eixos, m e n paralelos (no sentido estrito). Para sabermos qual o efeito da isometria $R_m \circ R_n$ sobre um qualquer ponto, bastará observar o transformado de três pontos não colineares.

Seja T um triângulo de vértices A, B e C. Qual é o transformado do vértice A por $R_m \circ R_n$?

O ponto $A' = R_n(A)$ é um ponto que pertence à recta l, perpendicular a n, que passa por A e que está à mesma distância, a, de n a que está o ponto A. O ponto $A'' = R_m(A')$

pertence à recta s, perpendicular a m, que passa por A' e está á mesma distância, b, de m a que está o ponto A'. Sendo n e m rectas paralelas, também l e s o são. Como A' pertence simultaneamente a l e a s, estas rectas coincidem.

Assim, A, A' e A'' são colineares, pertencem a uma recta perpendicular a n e m, e $d(A, A'') = 2(a + b)$.

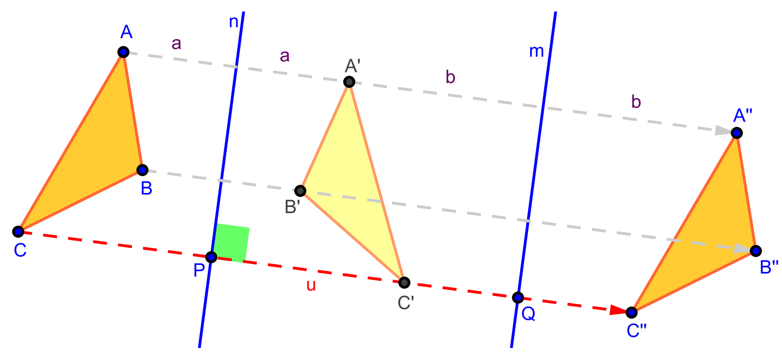


Figura 21: O transformado do triângulo $\triangle ABC$ pela isometria $R_m \circ R_n$.

Utilizando o mesmo tipo de argumentação para os outros dois vértices, podemos concluir que B, B' e B'' bem como C, C' e C'' pertencem a rectas perpendiculares a n e $d(B, B'') = d(C, C'') = 2(a + b)$.

Por outras palavras cada um dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ sofre, sob a acção de $R_m \circ R_n$, um deslocamento na direcção perpendicular à direcção dos eixos, de comprimento igual ao dobro da distância entre os dois eixos, e no sentido de n para m.

A uma isometria deste tipo chamamos translação segundo o vector $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{PQ}$, com P um ponto arbitrário da recta n e Q o ponto de intersecção da recta m com a recta perpendicular a n que passa por P.

Analogamente ao caso da rotação, também a translação pode ser definida sem termos de recorrer à composição de reflexões.

Translação

Chamamos *translação* segundo o vector $\vec{u}$ à transformação, $T_{\vec{u}}$, que a cada ponto P do plano associa o ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$. Por outras palavras,

$$T_{\vec{u}}(P) = Q \quad \text{se e somente se} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{u}.$$

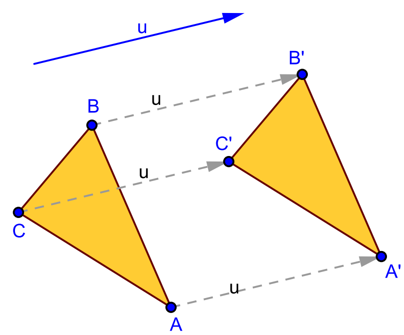


Figura 22: O transformado do triângulo $\triangle ABC$ pela translação $T_{\vec{u}}$

Vimos, anteriormente, que a composição de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação. Vamos agora mostrar que o recíproco também se verifica, isto é, toda a translação é composição de duas reflexões de eixos paralelos.

Seja $T_{\vec{u}}$, uma translação. Se $\vec{u} = \vec{0}$, $T_{\vec{u}}$ é a isometria identidade que pode ser vista como composição de duas reflexões de eixos coincidentes e portanto paralelos (em sentido lato).

Suponhamos agora que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Sejam A e B pontos do plano tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Ora, $T_{\vec{u}}$ é precisamente a composição $R_n \circ R_m$, onde m e n designam as rectas perpendiculares à recta AB e que passam, respectivamente, por A e M, ponto médio do segmento de recta $[AB]$.

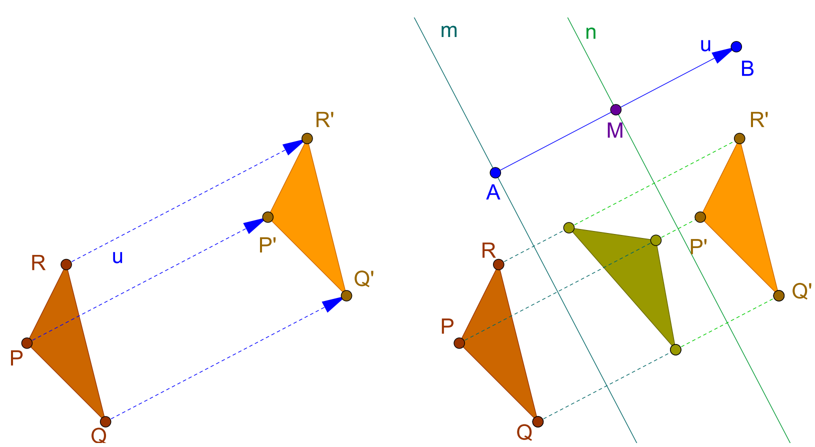


Figura 23: A translação $T_{\vec{u}}$ como composição de duas reflexões

Propriedades:

1. A translação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria.
2. Uma translação, distinta da transformação identidade, não tem pontos fixos.
3. A translação, $T_{\vec{u}}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, fixa qualquer recta com a direcção de $\vec{u}$ (embora não pontualmente) e transforma cada recta numa recta que lhe é paralela. Por outras palavras, a *translação preserva direcções.*

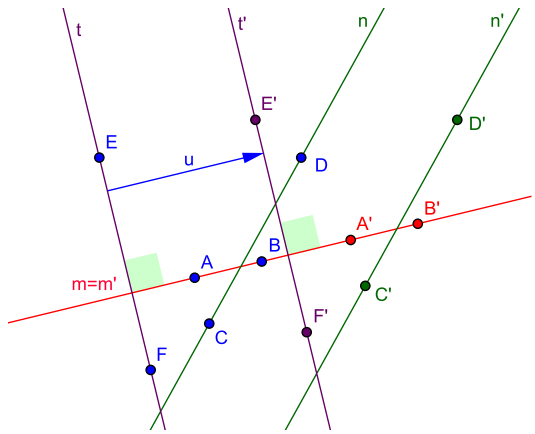


Figura 24: A translação preserva direcções.

4. A translação é uma isometria directa. Transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados positivamente (negativamente).

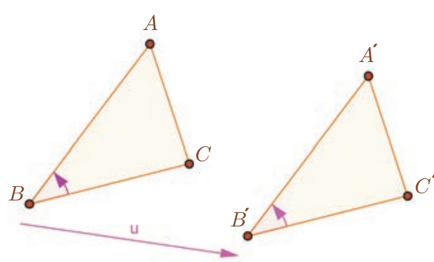


Figura 25: A translação é uma isometria directa.

5. A transformação inversa da translação, $T_{\vec{u}}$ segundo o vector $\vec{u}$ é a translação, $T_{-\vec{u}}$ segundo o vector $-\vec{u}$.
6. A composição de duas translações segundo os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, é comutativa, e é a translação segundo o vector $\vec{u} + \vec{v}$.

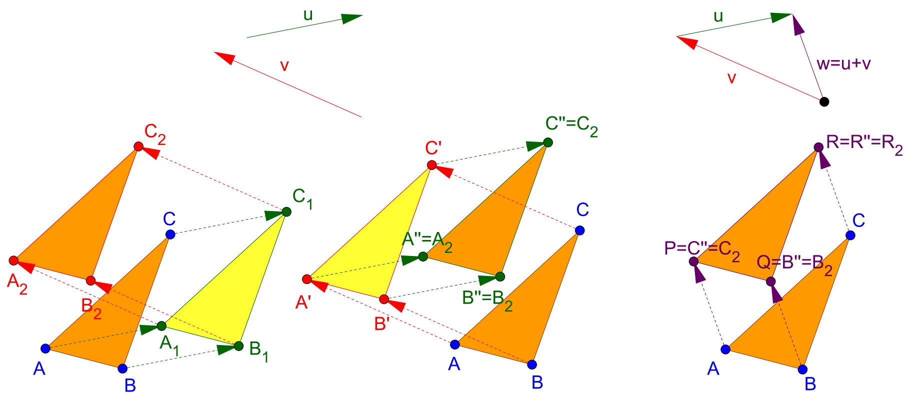


Figura 26: $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{w}}$ com $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

7. As propriedades 1, 5 e 6 conferem ao conjunto das translações uma estrutura de subgrupo comutativo (abeliano) do grupo das isometrias do plano, para o operação composição usual de funções, a que chamamos *grupo das translações* do plano.

Para completarmos o estudo das isometrias, falta apenas considerar as que se obtém por composição de 3 reflexões. A isometria resultante de uma tal composição depende, naturalmente, da posição relativa dos eixos (rectas) dessas reflexões.

Vejamos o caso em que duas das rectas, digamos, l e m são distintas e perpendiculares à outra recta, que vamos designar por n.

Como vimos anteriormente, $R_m \circ R_l = T_{\vec{u}}$ para um dado vector $\vec{u}$ com direcção perpendicular a l. Por conseguinte, $R_n \circ R_m \circ R_l = R_n \circ T_{\vec{u}}$, com a direcção de $\vec{u}$ coincidente com a direcção de n. Estamos em presença de um novo tipo de isometria a que chamamos reflexão deslizante. Na figura 27 podemos observar o transformado de um triângulo de vértices P, Q e R, por uma reflexão deslizante.

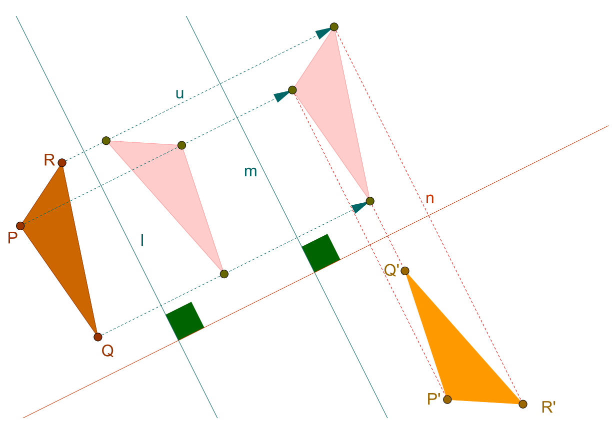


Figura 27: $R_n \circ R_m \circ R_l = R_n \circ T_{\vec{u}}$.

Reflexão Deslizante

Chamamos *reflexão deslizante* de eixo n, à transformação do plano, $D_{(n,\vec{u})}$, que se obtém por composição de uma reflexão de eixo n com uma translação segundo um vector $\vec{u}$ (não nulo) com a direcção de n.

Dado que R_n fixa a recta n, $T_{\vec{u}} \circ R_n$ transforma a recta n numa recta t que lhe é paralela. Mais, as rectas t e n coincidem quando e só quando $\vec{u}$ tem a direcção de n. Este facto permite-nos concluir que, para $\vec{u} \neq \vec{0}$, $R_n \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ R_n$ quando e só quando n e $\vec{u}$ têm a mesma direcção.

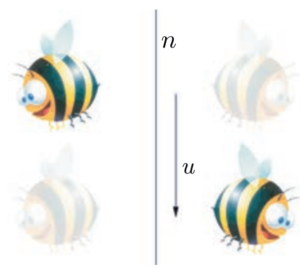


Figura 28: $R_n \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ R_n$.

Propriedades:

1. A reflexão deslizante preserva distâncias sendo portanto uma isometria.
2. A reflexão deslizante, não tem pontos fixos.
3. A reflexão deslizante de eixo n fixa n (embora não pontualmente).
4. Se P é um ponto do plano e P' é o seu transformado por uma reflexão deslizante, então o ponto médio do segmento de recta $[P, P']$ pertence à recta n.

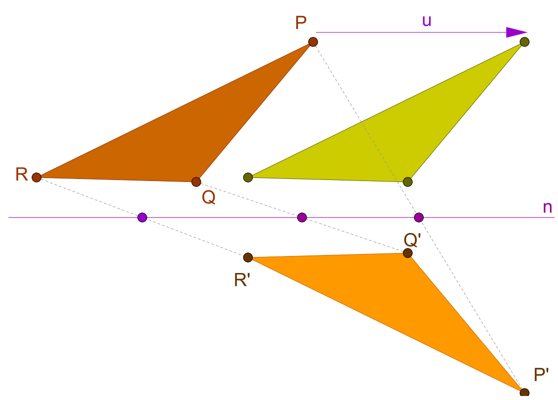


Figura 29: Visualização gráfica da propriedade 4.

5. A reflexão deslizante é uma isometria oposta. Transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados negativamente (positivamente).

6. A composição de duas reflexões deslizantes não é uma reflexão deslizante, pelo que a operação composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões deslizantes uma estrutura de grupo.

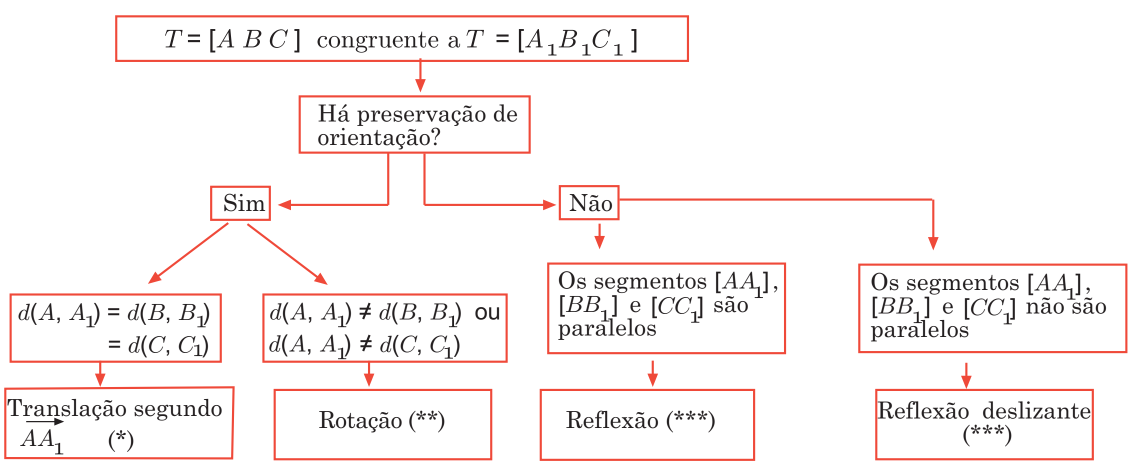
O estudo exaustivo das diversas posições relativas das rectas l, m e n conduzir-nos-iam a uma reflexão ou a uma reflexão deslizante, o que nos permite concluir que uma isometria do plano ou é uma reflexão ou uma rotação ou uma translação ou uma reflexão deslizante.

No quadro seguinte apresentamos a classificação das isometrias do plano tendo em consideração o número de pontos que fixam e o seu comportamento quanto à preservação ou inversão de ângulos orientados.

Pontos fixos	**Orientação**	**Classificação**
pelo menos 2	Preserva	*Identidade*
pelo menos 2	Inverte	*Reflexão*
1 e 1 só	Preserva	*Rotação* (distinta da identidade)
0	Preserva	*Translação* (distinta da identidade)
0	Inverte	*Reflexão Deslizante*

Observar que não existem isometrias opostas com 1 e 1 só ponto fixo.

Suponhamos que o triângulo $T = [A, B, C]$ é congruente ao triângulo $T_1 = [A_1, B_1, C_1]$. Com base nas propriedades das isometrias que enunciamos, vamos descrever um algoritmo simples que nos permite identificar a isometria que transforma T em T_1.



(*): No caso de $A = A_1$ também $B = B_1$ e $C = C_1$. A isometria é a aplicação identidade.

(**): Se $A = A_1$ (resp. $B = B_1$ ou $C = C_1$) então A (resp. B ou C) é o centro da rotação. Se nenhum dos vértices de T coincide com o seu transformado, então as mediatrizes de

$[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ intersectam-se num ponto O que é o centro da rotação. A amplitude do ângulo de rotação é a do ângulo $\angle AOA_1$ orientado de $\dot{O}A$ para $\dot{O}A_1$ e que é igual às dos ângulos $\angle BOB_1$ e $\angle COC_1$ orientados, respectivamente de $\dot{O}B$ para $\dot{O}B_1$ e de $\dot{O}C$ para $\dot{O}C_1$.

(***): Se não há preservação de orientação então pelo menos um dos vértices de T não é ponto fixo (não esquecer que A, B e C são não colineares).

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $A \neq A_1$.

Se $A \neq A_1$ mas $B = B_1$ e $C = C_1$, estamos em presença de uma reflexão de eixo BC coincidente com a mediatriz de $[AA_1]$.

Caso $A \neq A_1$ mas $B = B_1$ (resp. $C = C_1$) e $C \neq C_1$ (resp. $B \neq B_1$), a isometria que transforma T em T_1 é a reflexão de eixo na mediatriz de $[AA_1]$.

Nos outros casos estamos em presença ou de uma reflexão ou de uma reflexão deslizante. Se os segmentos $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ são paralelos, a isometria em causa é a reflexão de eixo m, onde m designa a mediatriz de $[AA_1]$ e coincide com as mediatrizes de $[BB_1]$ e $[CC_1]$. Se os segmentos $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ não são paralelos a isometria que transforma T em T_1 é a reflexão deslizante de eixo s, recta que passa pelos pontos médios de $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$, e segundo o vector $\overrightarrow{A'A_1}$ com $A' = R_s(A)$.

Exemplo: Considere os triângulos congruentes ilustrados na Figura 30. identifique as isometrias que transformam o triângulo $[A, B, C]$ no triângulo

(a) $[A_1, B_1, C_1]$; (b) $[A_2, B_2, C_2]$; (c) $[A_3, B_3, C_3]$; (d) $[A_4, B_4, C_4]$.

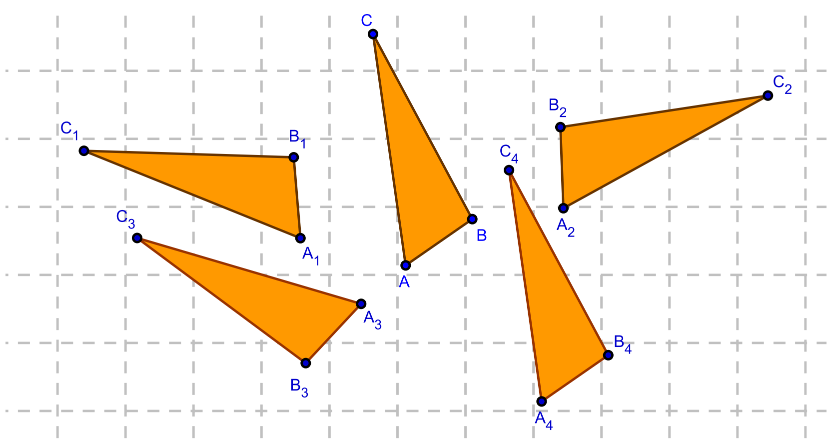


Figura 30: Triângulos congruentes

Vejamos como podemos facilmente identificar as isometrias pretendidas.

(a) A isometria que transforma $T = [A, B, C]$ em $T_1 = [A_1, B_1, C_1]$ preserva a orientação de ângulos. O ângulo $\angle BAC$ orientado no sentido directo, de $\dot{A}B$ para $\dot{A}C$ é transformado no ângulo orientado, $\angle B_1A_1C_1$, de $\dot{A}_1B_1$ para $\dot{A}_1C_1$ mantendo o sentido da orientação.

Assim, a isometria pretendida ou é uma rotação ou é uma translação. Como a distância de A a A_1 não é a mesma que a de B a B_1. A isometria é necessariamente uma rotação.

O centro da rotação é obtido intersectando as mediatrizes de, por exemplo, $[A, A_1]$ e $[B, B_1]$. O ângulo de rotação é o ângulo orientado, no sentido directo, de $\dot{O}A$ para $\dot{O}A_1$ ou de $\dot{O}B$ para $\dot{O}B_1$ ou ainda de $\dot{O}C$ para $\dot{O}C_1$ (Figura 31).

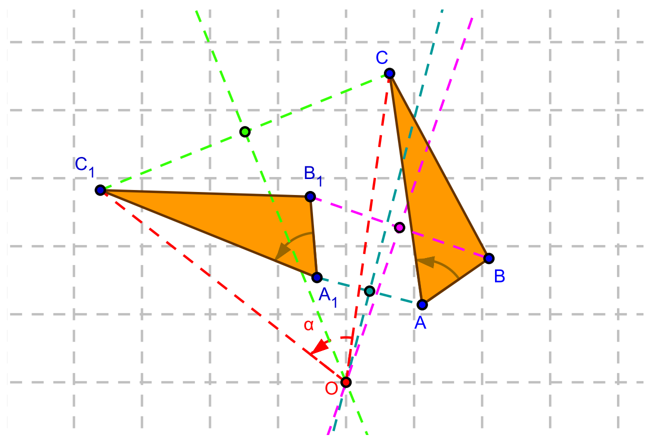


Figura 31: A rotação que transforma T em T_1

.

(b) A isometria que transforma $T = [A, B, C]$ em $T_2 = [A_2, B_2, C_2]$ não preserva a orientação de ângulos. O ângulo $\angle BAC$ orientado no sentido directo de $\dot{A}B$ para $\dot{A}C$ é transformado no ângulo $\angle B_2A_2C_2$ orientado no sentido horário de $\dot{A}_2B_2$ para $\dot{A}_2C_2$.

Deste modo, a isometria em causa ou é uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Para desfazer a dúvida vamos verificar se a mediatriz de $[AA_2]$ intersecta perpendicularmente, por exemplo, $[CC_2]$.

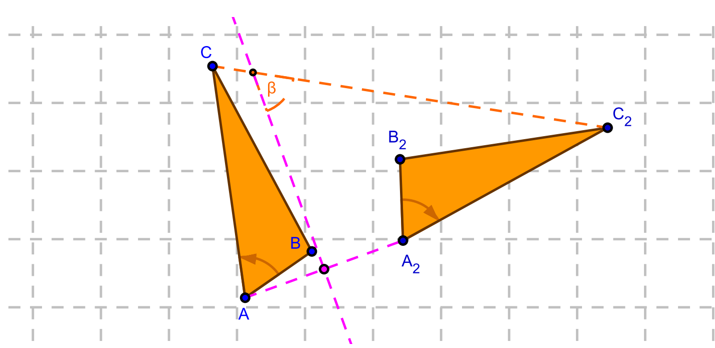


Figura 32: Reflexão ou reflexão deslizante?

Facilmente se constata que tal não acontece. Estamos, portanto, em presença de uma reflexão deslizante. Para a caracterizarmos precisamos de indicar o eixo e o vector a ela associados.

Pelo exposto anteriormente, a recta s que passa pelos pontos médios de $[AA_2]$, $[BB_2]$ e $[CC_2]$ define o eixo, e o vector é precisamente $\overrightarrow{A'A_2}$ onde A' designa o transformado de A pela reflexão de eixo s, ver Figura 33.

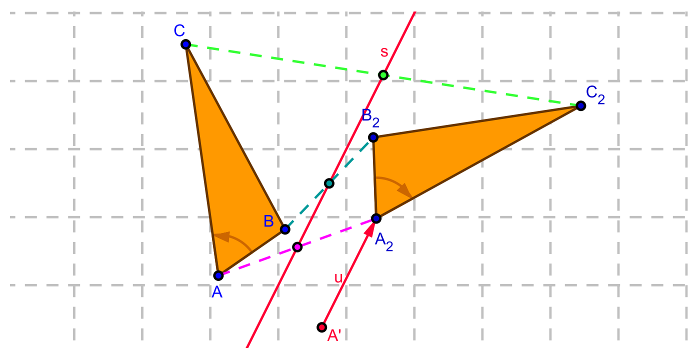


Figura 33: A reflexão deslizante que transforma T em T_2

(c) A isometria que transforma $T = [A, B, C]$ em $T_3 = [A_3, B_3, C_3]$ não preserva a orientação de ângulos. O ângulo $\angle BAC$ orientado no sentido anti-horário de $\dot{A}B$ para $\dot{A}C$ é transformado no ângulo $\angle B_3A_3C_3$ orientado no sentido horário de $\dot{A}_3B_3$ para $\dot{A}_3C_3$.

Uma vez que a mediatriz m de $[AA_3]$ é perpendicular a $[CC_3]$, podemos concluir que a transformação em causa é uma reflexão de eixo m, ver Figura 34.

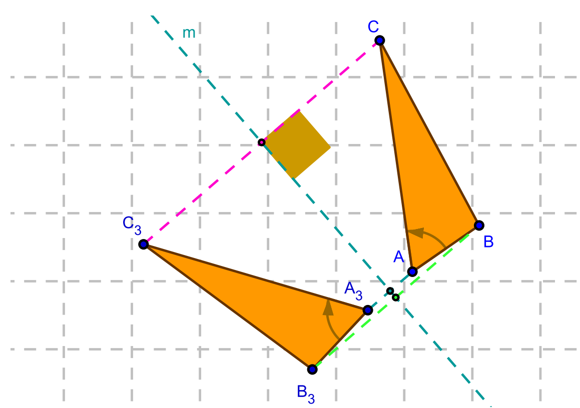


Figura 34: A reflexão que transforma T em T_3

(d) Dado que o ângulo $\angle BAC$ orientado positivamente de $\dot{A}B$ para $\dot{A}C$ é transformado no ângulo $\angle B_4A_4C_4$ orientado, no sentido directo de $\dot{A}_3B_3$ para $\dot{A}_3C_3$, a isometria que transforma $T = [A, B, C]$ em $T_4 = [A_4, B_4, C_4]$ preserva a orientação de ângulos.

Tendo em conta que $d(A, A_4) = d(B, B_4) = d(C, C_4)$, podemos concluir que T é transformado em T_4 através da translação segundo o vector $\overrightarrow{AA_4}$.

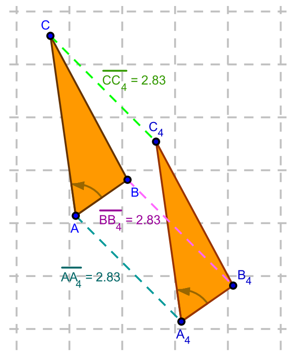


Figura 35: A translação que transforma T em T_4

Simetria

Dizemos que uma isometria f é uma *simetria* para a figura $\mathcal{F}$ se f fixa (deixa invariante) essa figura, isto é, se $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Uma vez que a composição de duas simetrias de uma dada figura $\mathcal{F}$ é ainda uma simetria de $\mathcal{F}$ e que a transformação inversa de uma simetria de $\mathcal{F}$ é ainda uma simetria de $\mathcal{F}$, o conjunto constituído por todas as simetrias de $\mathcal{F}$ munido da operação composição de funções, é um grupo, *o grupo das simetrias* de $\mathcal{F}$.

Quando a reflexão numa recta l faz parte do grupo de simetrias de uma dada figura dizemos que esta possui *simetria axial* e que l é um *eixo de simetria* dessa figura.

À nossa volta podemos encontrar diversas formas vivas e inanimadas com simetria axial.

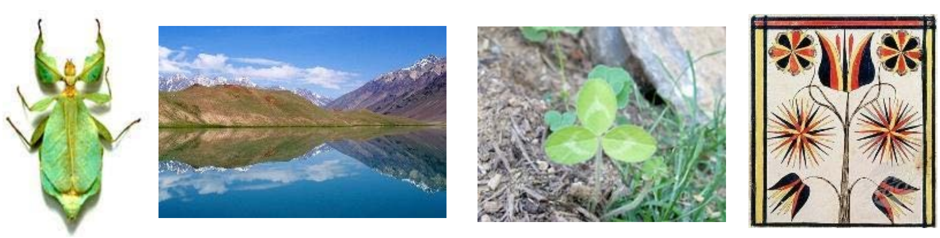


Figura 36: Simetria axial

Para além da simetria axial existem outros tipos de simetrias, nomeadamente, a simetria rotacional e, como caso particular desta, a simetria central.

Dizemos que uma dada figura possui *simetria rotacional de ordem* $n, n > 1$ quando o grupo de simetrias dessa figura possui n rotações com centro num mesmo ponto, O, e de amplitudes, $\frac{360^o \times k}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Uma figura possui *simetria central* se a rotação de amplitude 180^o faz parte do grupo de simetrias que essa figura possui.

Toda a figura com simetria central é, obviamente, uma figura com simetria rotacional. Existem, contudo, figuras com simetria rotacional que não têm simetria central. Tal como no caso da simetria axial, as simetrias rotacional e central abundam no nosso meio.

Figura 37: Simetrias rotacional e central

Das figuras geométricas básicas o círculo destaca-se pela elevada simetria que apresenta. De facto, qualquer rotação de centro no centro do círculo é uma simetria e as rectas que passam pelo seu centro são eixos de simetria.

Que simetrias tem um quadrado? E um rectângulo não quadrado? Existem figuras que não tenham qualquer simetria para além da transformação identidade?

Na figura 38 estão representados um quadrado, um rectângulo não quadrado e um trapézio escaleno.

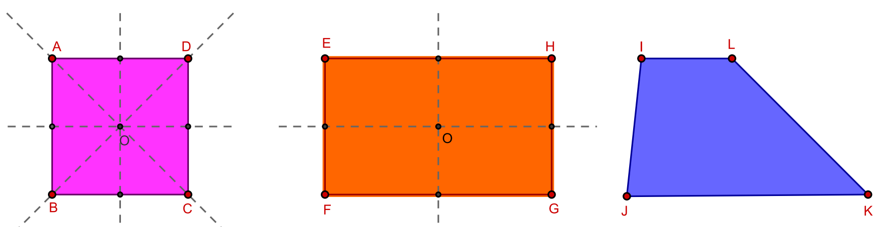


Figura 38: Representação dos eixos de simetria e dos centros de simetria rotacional.

Facilmente se constata que as reflexões em rectas que passam por cada par de vértices opostos e em rectas que passam pelos pontos médios de lados não consecutivos são simetrias do quadrado. São ainda simetrias do quadrado as rotações de centro em O (ponto de intersecção das suas diagonais) e amplitudes 90^o, 180^o, 270^o, e 360^o. Haverá mais alguma? Porquê?

Suponhamos que existia uma outra simetria do quadrado para além das que acabamos de citar. Designemos essa isometria por σ. Ora, qualquer simetria do quadrado transforma vértices em vértices, lados em lados, diagonais em diagonais e fixa o seu centro, $\sigma(O) = O$. Assim ou σ fixa (não necessariamente ponto a ponto) o segmento de recta $[AC]$ ou o transforma no segmento de recta $[BD]$.

Assumindo que σ fixa a diagonal $[AC]$. Então ou σ fixa A ou transforma A em C. Se

σ fixa o ponto A, como também fixa O, σ fixa pontualmente a diagonal $[AC]$. Consequentemente, σ ou é a reflexão na recta AC ou é a aplicação identidade.

Suponhamos agora que σ transforma A em C então transforma o ponto C no ponto A, pelo que ou σ é a reflexão na recta BD, recta perpendicular a AC, ou é a rotação de centro em O e de amplitude 180^o. Em qualquer dos casos estudados σ corresponde a uma das simetrias já previamente enunciadas.

A análise referente ao caso em que σ transforma $[AC]$ em $[BD]$ é semelhante permitindo-nos concluir que o conjunto das 8 isometrias anteriormente descritas (4 reflexões e 4 rotações) constitui o grupo das simetrias do quadrado.

Como vimos, o quadrado possui simetria rotacional, central e axial (4 eixos).

E o rectângulo não quadrado?

No caso do rectângulo não quadrado facilmente se constata que as reflexões nas rectas que passam pelos pontos médios de lados não consecutivos e as rotações de centro em O (ponto de intersecção das suas diagonais) e de amplitudes, respectivamente, 180^o e 360^o são simetrias. Utilizando um raciocínio análogo ao feito para o quadrado podemos mostrar que o conjunto destas 4 isometrias (2 reflexões e 2 rotações) munido da operação composição usual de funções constitui o grupo das simetrias do rectângulo não quadrado.

O rectângulo não quadrado possui simetria central e simetria axial (2 eixos). Quanto ao trapézio escaleno, para além da aplicação identidade não possui qualquer outra simetria.

Que tipo de simetrias têm os triângulos equilátero, isósceles e escaleno?

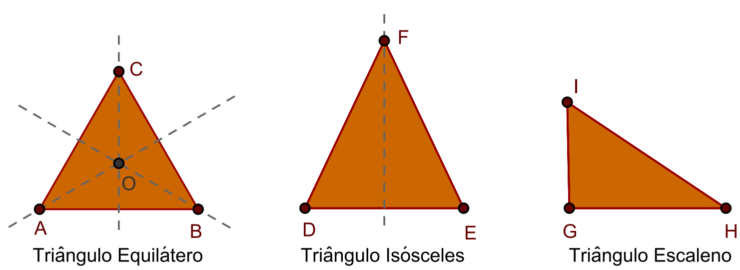


Figura 39: Representação dos eixos de simetria e do centro de simetria rotacional.

O triângulo equilátero tem as três mediatrizes como eixos de simetria. As reflexões nestes 3 eixos e as 3 rotações de centro no circuncentro O e amplitudes, respectivamente, 120^o, 240^o e 360^o constituem as suas simetrias.

O triângulo isósceles tem um e um só eixo de simetria, a bissectriz do ângulo não congruente aos outros dois. A reflexão neste eixo e a transformação identidade são as suas únicas simetrias.

Para além da transformação identidade, o triângulo escaleno não tem qualquer outra simetria.

Como acabámos de ver, o conhecimento do grupo de simetrias de um triângulo permite a sua classificação. Contudo, com a família de quadriláteros não se passa o mesmo. Basta observar, por exemplo, que o rectângulo e o losango não quadrados têm exactamente o mesmo grupo de simetrias.

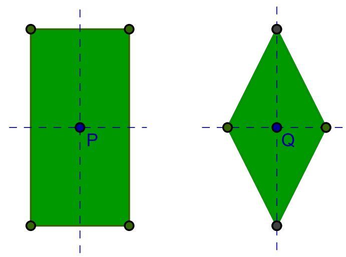


Figura 40: Representação dos eixos de simetria e dos centro de simetria rotacional.

Utilizando uma argumentação análoga à feita para o caso do quadrado pode mostrar-se que o grupo das simetrias de um polígono regular de $n, n \geq 3$ lados é o grupo diedral, D_n, constituído por n reflexões e n rotações com centro no *centro do polígono*[11]. Os eixos das n reflexões passam por *vértices diametralmente opostos*[12] no caso de n ser par e no caso de n ser ímpar são as mediatrizes dos lados que o compõem.

Frisos e Rosáceas

Uma *rosácea* é uma figura que tem por grupo de simetrias o grupo diedral D_n, $n \geq 1$ (n reflexões e n rotações) ou o grupo cíclico $C_n, n \geq 1$ (n rotações).

Os polígonos regulares são exemplos de rosáceas com grupo de simetria diedral. Exemplos de rosáceas com grupo de simetria C_2, C_3 e C_{12} são ilustradas na Figura 41.

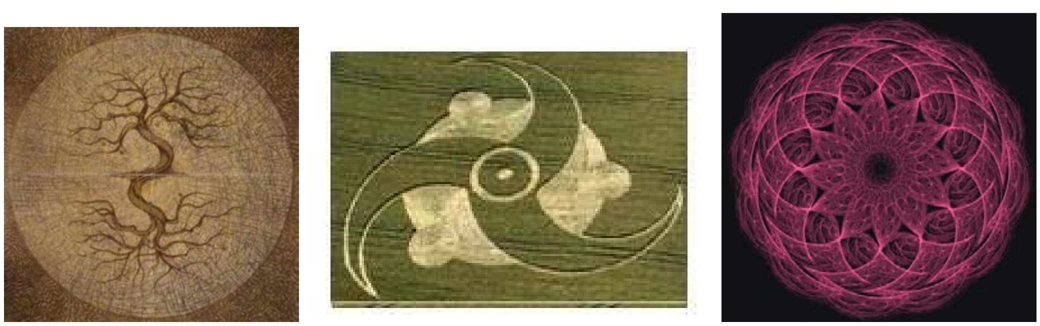


Figura 41: Rosáceas com grupo de simetrias cíclico.

Construção de uma rosácea com grupo de simetrias cíclico

Uma forma simples de obter uma rosácea com grupo de simetrias cíclico C_n é partir da divisão de um círculo em n sectores congruentes. Colocando uma configuração (que não

[11]Centro da circunferência inscrita no polígono

[12]Dois vértices de um polígono dizem-se diametralmente opostos se a recta que os une passa pelo centro do polígono

possua qualquer simetria, para além da identidade) num dos sectores e considerando as imagens desta configurações pelas rotações de centro no centro do círculo e de amplitudes $\frac{360^o}{n}k,\ k=1,2,...,n$, obtém-se o pretendido, ver figura 42.

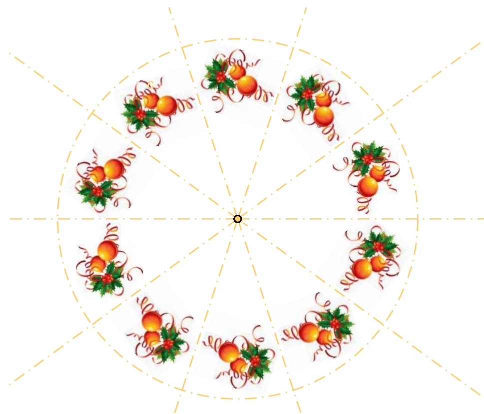


Figura 42: Uma rosácea com grupo de simetria C_{10}.

Construção de uma rosácea com grupo de simetrias diedral

Para a construção de uma rosácea que tenha por grupo de simetrias o grupo diedral D_n vamos partir de um círculo "dividido"em $2n$ sectores congruentes. Etiquetando, de forma circular (consecutiva), as $2n$ semi-rectas fronteira destes n sectores, por $s_1, s_2, ..., s_{2n}$ e designando por l_i a recta que contém a semi-recta s_i, obtém-se a rosácea requerida, procedendo do modo seguinte:

1. Colocar uma configuração $\mathcal{F}$ (que não possua qualquer simetria, para além da identidade) num dos sectores, por exemplo no sector que tem s_1 e s_2 por fronteira;
2. Reflectir $\mathcal{F}$ segundo a recta l_1;
3. Reflectir a cópia de $\mathcal{F}$ obtida e reflecti-la segundo a recta l_2;
4. Repetir este procedimento utilizando todas as rectas.

Na Figura 43 ilustramos este processo de construção, tomando $n=5$.

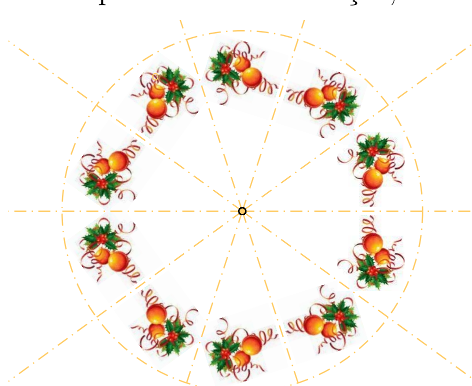


Figura 43: Uma rosácea com grupo de simetria D_5.

Observamos figuras com simetria rotacional e simetria axial. Que tipo de figuras admitem translações como simetrias?

De entre este tipo de figuras encontram-se os *frisos*, figuras cujo grupo de simetrias é um *grupo de frisos*. Por outras palavras, um friso é uma figura que tem por grupo de simetrias um conjunto de isometrias do plano que fixam uma recta, dita *centro do friso*, e em que as translações deste grupo constituem um subgrupo cíclico infinito, ou seja as translações têm todas a mesma direcção.

Figura 44: Exemplo de um friso.

Quais são as isometrias que fixam uma dada recta c? Para além da identidade, as isometrias que têm esta propriedade são as translações com a direcção de c, as reflexões de eixo c ou perpendicular a c, as rotações de centro em pontos situados no centro do friso e de amplitude 180^o e as reflexões deslizantes com a direcção de c.

Existem exactamente 7 grupos com estas características e por conseguinte existem exactamente 7 classes de frisos designados por 4 letras justapostas, $pxyz$, do seguinte modo:

1. a primeira letra é sempre p;
2. $x = m$, se o grupo de simetrias do friso contém uma reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso, e,
   $x = 1$, nos outros casos;
3. $y = m$, se o grupo de simetrias do friso contém a reflexão de eixo no centro do friso,
   $y = g$, se o grupo de simetrias do friso contém uma reflexão deslizante mas não contém nenhuma reflexão de eixo no centro do friso, e,
   $y = 1$ nos restantes casos;
4. $z = 2$ se o grupo de simetrias do friso contém uma rotação de ordem 2, i.e., se contém uma rotação de amplitude 180^o, e,
   $z = 1$ nos outros casos.

Deste modo, as designações para os 7 grupos de frisos são:

$$p111, \quad p112, \quad p1g1, \quad p1m1, \quad pmm2, \quad pm11, \quad pmg2.$$

Vejamos como construir um representante para cada uma destas classes.

Para isso, vamos partir da configuração, J, representada na figura 45, que não contém qualquer outra simetria para além da identidade.

Figura 45: Configuração J.

Construção de um friso da classe $p111$

Para construirmos um friso da classe $p111$ basta tomar um vector (não nulo) $\overrightarrow{u}$ e considerar a figura que contém as imagens de J pela translação $T_{\overrightarrow{u}}$, pela translação $T_{\overrightarrow{-u}}$ e por todas as translações obtidas por composição destas, ver figura 46.

Figura 46: Friso da classe $p111$.

O grupo de simetrias do friso $p111$ é o grupo, $< T_{\overrightarrow{u}} >$, gerado pela translação $T_{\overrightarrow{u}}$, ou seja, é o conjunto constituído por $T_{\overrightarrow{u}}$, por $T_{\overrightarrow{-u}}$ e por todas as translações obtidas por composição destas.

Construção de um friso da classe $p112$

Para construirmos um friso da classe $p112$ basta tomar uma recta, c, que será o centro do friso. Nessa recta escolham-se dois pontos P e Q e tomem-se as imagens de P por translações sucessivas de $T_{\overrightarrow{PQ}}$ e de $T_{\overrightarrow{QP}}$. O ponto P e os seus transformados vão ser tomados para centros de rotações de amplitude 180^o. Estes pontos pertencem todos à recta c, ver Figura 47.

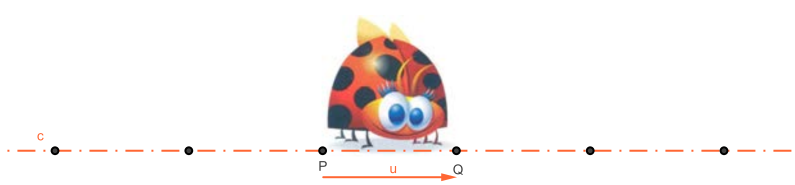


Figura 47: Centros das rotações de um friso da classe $p112$.

O que temos agora a fazer é simples. Posicionando a configuração J entre dois centros de rotação consecutivos consideramos J e os transformados de J pelas duas rotações de centro nesses pontos e de amplitude 180^o. Agora utilizando, sucessivamente, o mesmo processo para as cópias de J obtidas, obtemos um friso da classe p112.

Observar que a translação que gera o subgrupo das simetrias deste friso, constituído apenas por translações, não é $T_{\overrightarrow{PQ}}$ mas sim $T_{2\overrightarrow{PQ}}$.

O grupo de todas as simetrias do friso $p112$ é o grupo $< T_{2\overrightarrow{PQ}}, R_P^{180^o} >$ gerado pela translação $T_{2\overrightarrow{PQ}}$ e pela rotação $R_P^{180^o}$ de centro em P e amplitude 180^o.

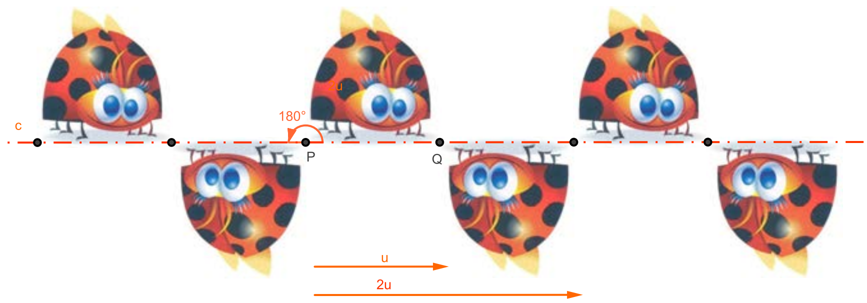


Figura 48: Friso da classe p112.

Construção de um friso da classe $p1g1$

Para construirmos um friso da classe $p1g1$ vamos fixar uma recta, c, que será o centro do friso e considerar um vector arbitrário, não nulo, $\overrightarrow{u}$ com a direcção de c.

Partindo da configuração J consideramos os seus transformados pelas reflexões deslizantes de eixo c e segundo os vectores $\overrightarrow{u}$ e $-\overrightarrow{u}$, respectivamente (ver Figura 49).

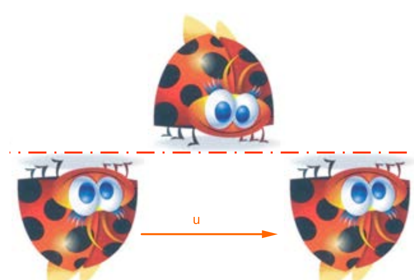


Figura 49: Construção de um friso da classe p1g1.

Façamos agora o mesmo com as cópias de J obtidas. Repetindo sucessivamente este processo obtemos um friso da classe p1g1, ver Figura 50.

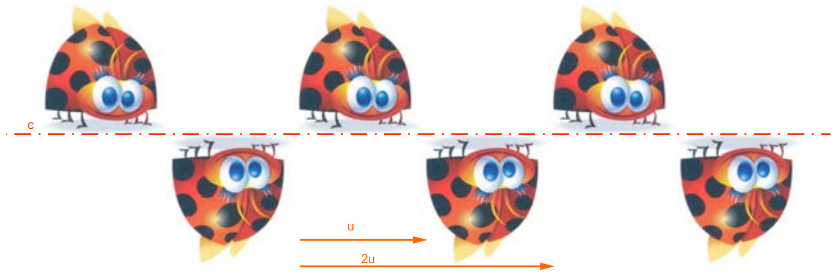


Figura 50: Friso da classe $p1g1$.

O grupo de simetrias do friso $p1g1$ é o grupo $< D_{(c,\overrightarrow{u})} >$ gerado pela reflexão deslizante $D_{(c,\overrightarrow{u})}$ de eixo c e segundo $\overrightarrow{u}$. Observar que o subgrupo das simetrias deste friso constituído apenas por translações não é gerado por $T_{\overrightarrow{u}}$ mas sim por $T_{2\overrightarrow{u}}$.

Construção de um friso da classe $p1m1$

Para construirmos um friso da classe $p1m1$ vamos, como no caso anterior, fixar uma recta, c, o centro do friso, e considerar um vector arbitrário, não nulo, $\overrightarrow{u}$ com a direcção de c.

Partindo da configuração J, consideremos a figura bloco B constituída pela união de J com o seu transformado J' pela reflexão de eixo c, ver Figura 51.

Figura 51: Bloco de um friso da classe p1m1.

Considerando, para além do bloco B, os seus transformados pelas translações $T_{\overrightarrow{u}}$, $T_{\overrightarrow{-u}}$ e por todas as translações que são composição destas obtém-se um friso da classe p1m1, ver Figura 52.

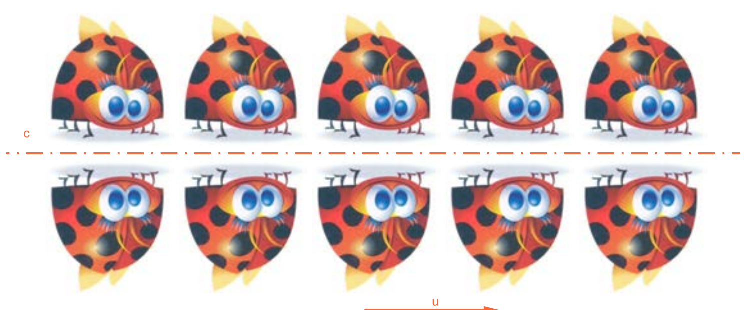


Figura 52: Friso da classe $p1m1$.

O grupo de simetrias do friso $p1m1$ é o grupo $< T_{\overrightarrow{u}}, R_c >$ gerado pela translação $T_{\overrightarrow{u}}$ e pela reflexão R_c de eixo no centro do friso.

Construção de um friso da classe $pmm2$

Para construirmos um friso da classe $pmm2$ vamos fixar uma recta c, centro do friso, uma recta l perpendicular a c e um vector, não nulo, $\overrightarrow{u}$ com a direcção de c. Seja P o ponto de intersecção das rectas c e l.

Sejam B_1 o bloco constituído pela união de J com a sua imagem pela reflexão de eixo c e B o bloco constituído pela união de B_1 com a sua imagem pela reflexão de eixo l, ver Figura 53.

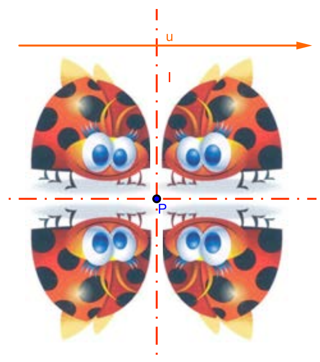


Figura 53: Bloco B de um friso da classe pmm2.

Obtém-se um friso da classe $pmm2$ considerando as imagens do Bloco B pelas translações $T_{\overrightarrow{u}}$, $T_{-\overrightarrow{u}}$ e pelas translações que são composição destas, ver Figura 54.

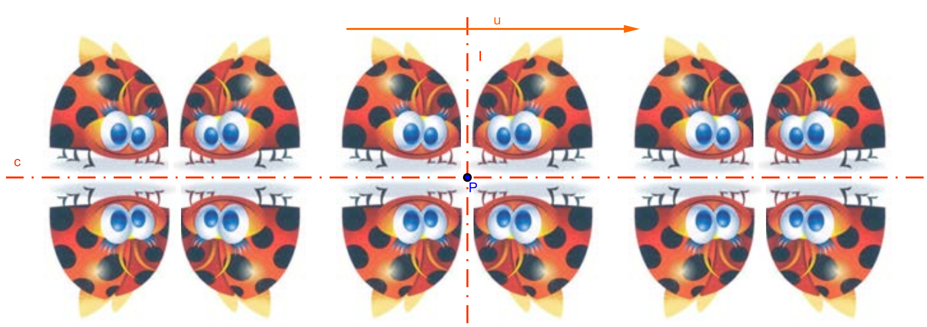


Figura 54: Friso da classe $pmm2$.

O grupo de simetrias do friso $pmm2$ é o grupo $< T_{\overrightarrow{u}}, R_c, R_l >$ gerado pela translação $T_{\overrightarrow{u}}$ e pelas reflexões R_c e R_l. As isometrias que fazem parte deste grupo são $T_{\overrightarrow{u}}$, $T_{-\overrightarrow{u}}$, R_c, R_l e todas as obtidas por composição destas.

Observar que do grupo de simetrias deste friso fazem parte rotações de amplitude 180^o (meias voltas).

Construção de um friso da classe $pm11$

Para construirmos um friso da classe $pm11$ vamos fixar um vector não nulo $\overrightarrow{u}$ e uma recta l com direcção perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

Partindo da configuração J, consideremos a figura bloco B constituída pela união de J com o seu transformado J' pela reflexão de eixo l, ver Figura 55.

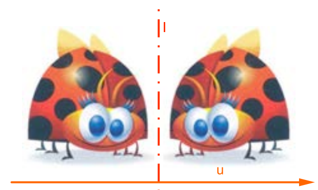


Figura 55: Bloco de um friso da classe $pm11$.

Obtém-se um friso da classe $pm11$ considerando as imagens do Bloco B pelas translações $T_{\overrightarrow{u}}$, $T_{-\overrightarrow{u}}$ e pelas translações que são composição destas, ver Figura 56.

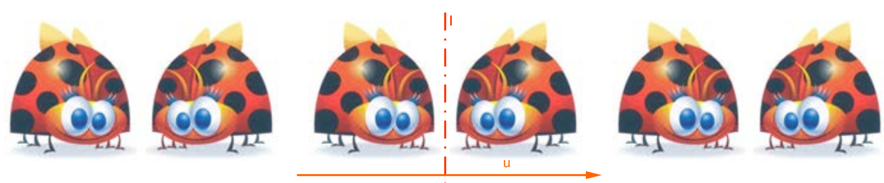


Figura 56: Friso da classe pm11.

O grupo de simetrias do friso $pm11$ é o grupo, $< T_{\overrightarrow{u}}, R_l >$, gerado pela translação $T_{\overrightarrow{u}}$ e pela refelxão R_l. Assim as simetrias de $pm11$ são para além da reflexão R_l e das translações $T_{\overrightarrow{u}}$ e $T_{-\overrightarrow{u}}$ todas as isometrias que são composição destas.

Construção de um friso da classe $pmg2$

Para construirmos um friso da classe $pmg2$ vamos fixar uma recta c, centro do friso e dois pontos distintos P e Q de c. Seja M o ponto médio do segmento de recta $[PQ]$.

Construa-se a figura bloco $B1$ constituída pela união da configuração J com o seu transformado J' pela rotação de centro em M e amplitude 180^o (Figura 57).

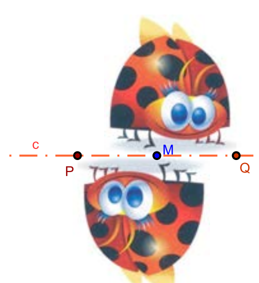


Figura 57: Bloco $B1$ de um friso da classe $pmg2$.

Seja l a recta perpendicular a c que passa por Q.

Construa-se agora a figura bloco B constituída pela união de $B1$ com o seu transformado pela reflexão R_l.

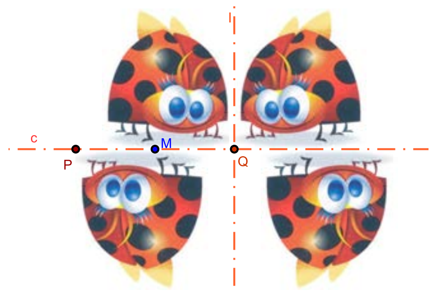


Figura 58: Bloco B de um friso da classe $pmg2$.

Obtém-se um friso da classe $pmg2$ considerando as imagens do Bloco B pelas translações $T_{2\overrightarrow{PQ}}$, $T_{-2\overrightarrow{QP}}$ e pelas translações que são composição destas, ver Figura 59.

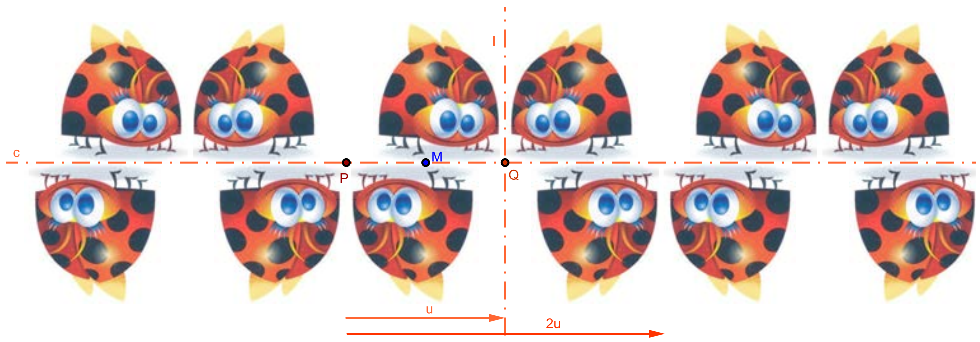


Figura 59: Friso da classe $pmg2$.

O grupo de simetrias do friso $pmg2$ é o grupo, $< T_{2\overrightarrow{PQ}}, R_M^{180^o}, R_l >$, gerado pela translação $T_{2\overrightarrow{PQ}}$, pela rotação $R_M^{180^o}$ e pela reflexão R_l.

As simetrias de $pmg2$ são, para além da reflexão R_l, da rotação $R_M^{180^o}$ e das translações $T_{2\overrightarrow{PQ}}$ e $T_{-2\overrightarrow{PQ}}$, todas as isometrias que são composição destas quatro isometrias.

Tarefas

No *Programa de Matemática do Ensino Básico* as isometrias são trabalhadas no 1.º ciclo em associação com a simetria de figuras e não como transformações do plano no plano com um determinado número de propriedades que as caracterizam. Os objectivos específicos situam-se, para este ciclo, na identificação de simetrias (axial, rotacional e translacional) e na construção de figuras que possuam um determinado tipo ou tipos de simetria.

A partir do 2.º ciclo, as isometrias aparecem já como objectos matemáticos independentes, trabalhadas per si. Numa primeira etapa, trata-se a reflexão e a rotação e numa etapa posterior, a translação e a reflexão deslizante. Dos objectivos específicos para o 2.º ciclo fazem parte, para além da construção e identificação de figuras com um determinado conjunto (grupo) de simetrias, a identificação, previsão e descrição da isometria que transforma um dado objecto num que lhe é congruente, estando reservado ao 3.º ciclo o reconhecimento das propriedades comuns das isometrias.

As tarefas seguintes contemplam as isometrias do plano, permitindo aos alunos dos diferentes anos de escolaridade a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e integrada, contribuindo para o aprofundamento da sua compreensão e desenvolvimento da sua capacidade de visualização e do seu raciocínio geométrico.

A abordagem de aspectos históricos, artísticos e culturais relacionados com a simetria entusiasma e favorece a exploração, sob o ponto de vista matemático, de conceitos com ela relacionados. A tarefa, que a seguir se apresenta, parte da observação da decoração de tapetes de arraiolos, destina-se a alunos do 3.º ciclo, e envolve a identificação e compreensão das propriedades das reflexões, rotações, translações e reflexões deslizantes e a construção de figuras com simetria axial e/ou rotacional. A adequação desta tarefa a alunos dos outros dois ciclos pode ser feita, bastando, para o efeito, utilizar tapetes com decorações menos complexas e escolhendo questões (possivelmente adaptadas) consonantes com os conteúdos programáticos dos ciclos a que se destinam.

Tarefa 1: Simetria em tapetes de arraiolos

Os tapetes de arraiolos, característicos da vila alentejana de Arraiolos, são tapetes de serapilheira bordados em ponto de arraiolos (ponto cruzado oblíquo) com lã de diversas cores. Não se sabe ao certo quando se iniciou a sua confecção. A primeira referência a este tipo de tapetes data de 1598 e foi obtida por Jorge Fonseca durante a organização do Arquivo Municipal da vila de Arraiolos.

Para além da diversidade das cores e do ponto utilizado, o que torna especial este tipo de tapetes é a organização pré-decorativa que possuem. Num tapete de arraiolos podemos distinguir três regiões: o centro, o campo e a barra. O campo do tapete é decorado de modo a que as rectas (*eixos do tapete*) que passam pelos pontos médios dos lados da forma rectangular que o delimita sejam eixos de simetria.

Convém referir que o campo do tapete não contém o centro, campo e centro são regiões disjuntas.

Considera o tapete de arraiolos ilustrado na Figura 60.

Figura 60: O centro, o campo e a barra de um tapete de arraiolos

1. Que simetrias possui o tapete? E o centro do tapete, que simetrias tem?
2. Considera agora os frisos F_1 e F_2, construídos com base na decoração da barra do tapete, do modo seguinte:
   - F_1 obtido por translações sucessivas segundo os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{-u}$, do motivo M_1;
   - F_2 obtido por translações sucessivas segundo os vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{-v}$, do motivo M_2.

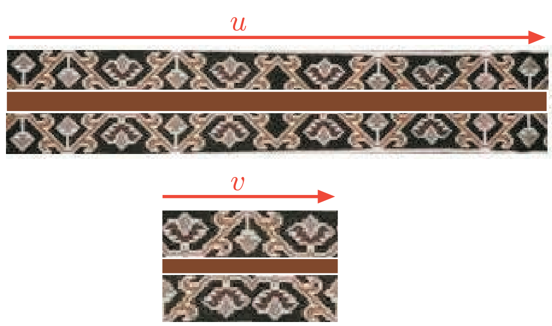


Figura 61: Os motivos M_1 e M_2.

   Que simetrias possui o friso F_1? E o friso F_2?
3. Qual é o número máximo de eixos de simetria que pode ter um tapete de arraiolos? Constrói um tapete de arraiolos quadrangular com quatro eixos de simetria tendo como centro uma roseta de tipo D_8.

Nesta tarefa, a identificação da reflexão segundo cada um dos eixos do tapete e da rotação de meia volta em torno do centro da forma rectangular que o delimita como simetrias do tapete e o reconhecimento de que o centro possui a estrutura de uma rosácea de tipo D_4, constitui a questão inicial desta tarefa.

A questão seguinte, lida com frisos fazendo intervir de imediato a translação como uma das isometrias necessariamente presentes no conjunto de simetrias.

O facto de F_1 ter o centro do friso e rectas perpendiculares ao centro do friso como eixos de simetria (o que leva a que rotações de amplitude 180 ^{o} surjam como simetrias de F_1) permite a identificação de F_1 como um friso de tipo $pmm2$.

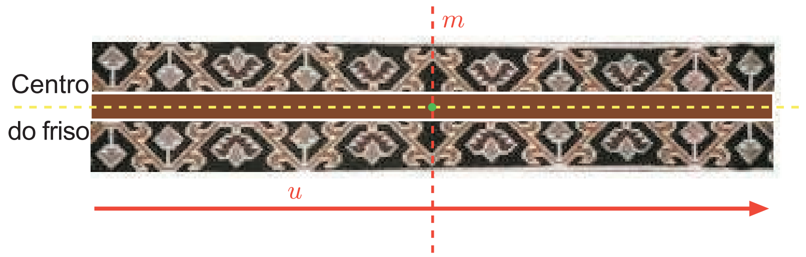


Figura 62: F_1 friso de tipo $pmm2$.

Quanto a F_2, a reflexão de eixo no centro do friso não é uma simetria do friso, contudo as reflexões em rectas perpendiculares ao centro do friso são simetrias. A identificação da reflexão deslizante $R_{c,\overrightarrow{w}}$, onde c designa o centro do friso e $\overrightarrow{w}$ o vector determinado pelos pontos A e B, (ver Figura 63) como simetria de F_2 e as rotações de meia volta (pontos representados por círculos a verde na figura seguinte) constitui a questão chave na identificação de F_2 como um friso de tipo $pmg2$.

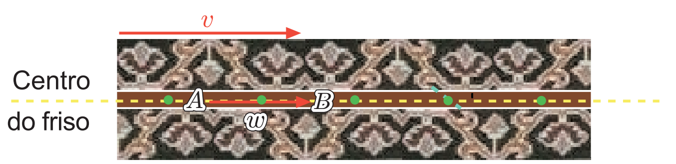


Figura 63: F_2 friso de tipo $pmg2$.

A última questão envolve a construção de uma dada figura (tapete) com um dado conjunto de simetrias e coloca uma discussão em torno do número máximo de eixos de simetria que um tapete de arraiolos pode ter. A pré-organização do tapete de arraiolos tem um papel crucial nesta discussão.

Dada a forma rectangular do tapete, este não pode ter mais simetrias que as simetrias de um rectângulo. Como a questão que se coloca é em termos da simetria axial, mais especificamente em termos do número máximo de eixos de simetria que um tapete de arraiolos pode ter, podemos desde já afirmar que esse número é inferior ou igual a 4. Poderá um tapete de arraiolos (rectangular) ter 4 eixos de simetria? Ora, dois destes eixos passam pelos pontos médios das arestas da forma rectangular que delimita o tapete e os outros dois, pelos vértices não consecutivos dessa forma.

Como a pré-organização do tapete determina a existência de uma barra (ou bordadura) no tapete, se os eixos que passam pelos vértices não consecutivos forem eixos de simetria do tapete (englobando portanto as 3 regiões, campo, centro e barra) tê-lo-ão que ser, também para a barra, o que só acontece quando a forma rectangular é quadrangular.

Assim, o número máximo de eixos de simetria para um tapete de arraiolos é 2 se o tapete é rectangular não quadrangular e 4 se for quadrangular.

A próxima tarefa destina-se a alunos dos dois primeiros ciclos, podendo ser adaptada a alunos do 3.º ciclo. Envolve itinerários e descrições destes por intermédio de rotações e translações (deslocamentos).

Tarefa 2: Itinerários

Supondo que te encontras na quadrícula C1 da grelha ilustrada na Figura 65, segue, utilizando um espelho colocado em posição apropriada, as instruções do itinerário 1. Identifica a quadrícula referente à posição que ocupas depois de efectuares este itinerário.

Supõe agora que partes da posição C6, que posição ocupas depois de teres seguido as instruções do itinerário 2?

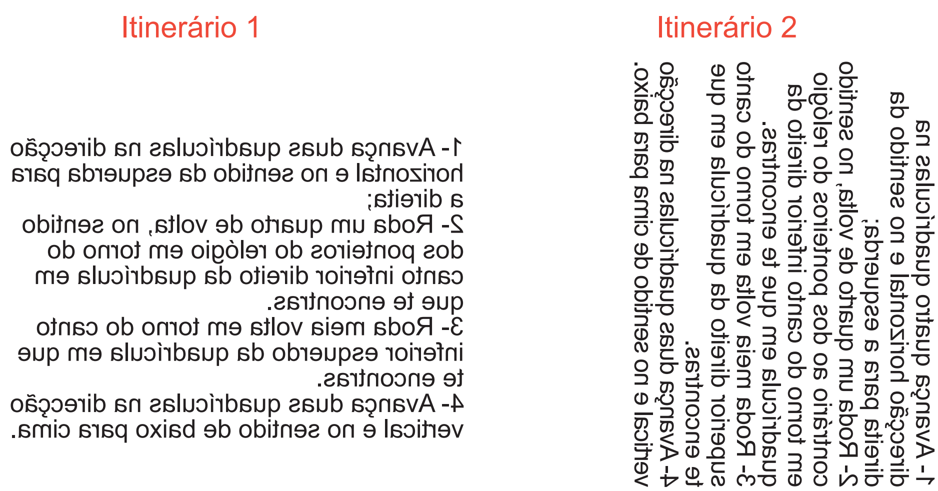


Figura 64: Instruções para os itinerários 1 e 2.

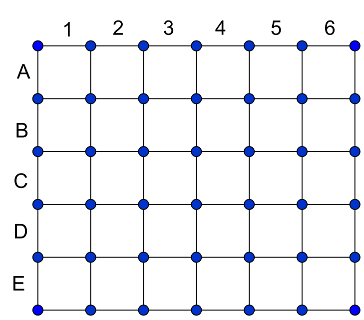


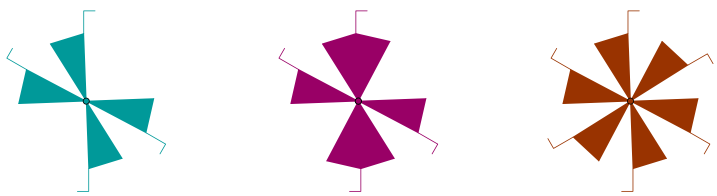
Figura 65: Grelha.

Tarefa 3: Figuras com simetria rotacional

A primeira questão desta tarefa envolve a identificação de figuras com simetria rotacional e está apropriada a alunos do 2.º ciclo podendo ser também utilizada por alunos do 1.º ciclo, escolhendo adequadamente a amplitude do ângulo de rotação.

A segunda questão envolve a composição de rotações, destina-se a alunos do 3.º ciclo e pode ser adaptada a alunos do 2.º ciclo, bastando para isso considerar rotações com o mesmo centro de rotação.

1. As figuras abaixo ilustradas possuem simetria rotacional não trivial? Em caso afirmativo, assinala os centros e indica as amplitudes dos ângulos de rotação.



(A)

(B)

(C)

Figura 66: Simetria rotacional.

2. Considera o triângulo $T = [ABC]$. Esboça T_1 e T_2 sabendo que:

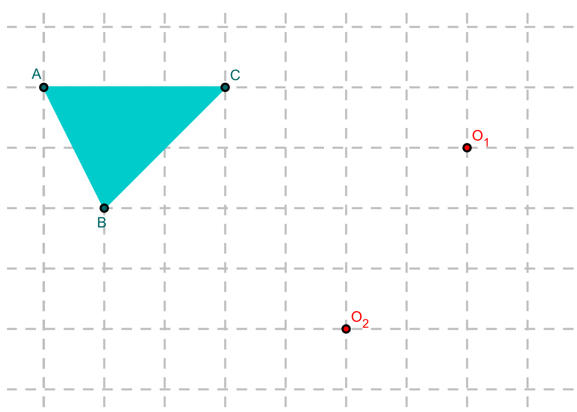


Figura 67: O triângulo $T = [ABC]$.

- T_1 é o transformado de T pela rotação de centro em O_1 e amplitude 30^o, e,
- T_2 é o transformado de T_1 pela rotação de centro em O_2 e amplitude -90^o.

  Podemos obter T_2 a partir de T por intermédio de uma única rotação. Identifica o centro e a amplitude dessa rotação.

Pavimentações uniformes do plano

Uma *pavimentação do plano* é uma cobertura do plano por figuras planas a que chamamos *células* ou *ladrilhos* que não se sobrepõem nem deixam espaços vazios.

A partir de agora vamos centrar a nossa atenção em *pavimentações poligonais*, isto é, em pavimentações do plano por polígonos.

À intersecção, não vazia, de três ou mais células de uma pavimentação poligonal, chamamos *vértice da pavimentação* e à intersecção, de interior não vazio, de duas células chamamos *lado* ou *aresta da pavimentação*.

Que relação existe entre os vértices de uma pavimentação poligonal e os vértices dos polígonos que a formam? Na verdade, nada podemos concluir uma vez que podem ocorrer situações como as que a seguir se indicam e ilustram.

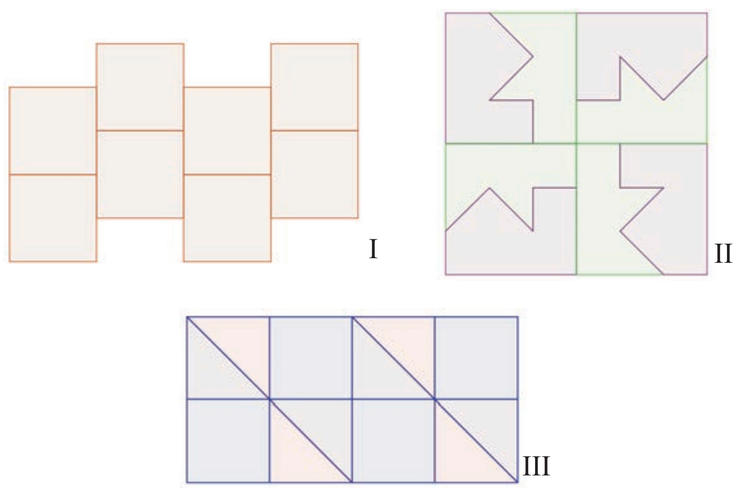


Figura 68: Pavimentações poligonais

Na Figura 68. I pode observar-se uma configuração retirada de uma pavimentação poligonal em que qualquer vértice do polígono que a constitui é vértice dessa pavimentação e sem que qualquer vértice da pavimentação seja vértice para os três polígonos que o definem.

Na Figura 68. II encontra-se parte de uma pavimentação onde se podem visionar vértices de polígonos que não são vértices da pavimentação.

Na Figura 68. III encontra-se parte de uma pavimentação poligonal onde todo o vértice da pavimentação é vértice dos polígonos que o definem e onde todo o vértice do polígono é vértice da pavimentação.

Uma pavimentação poligonal diz-se *lado a lado* se os lados da pavimentação são lados dos polígonos que as definem. É o caso da pavimentação ilustrada na figura 68 III.

Quando os polígonos que constituem a pavimentação são congruentes, a pavimentação diz-se *monoedral* ou *monoédrica*. Um exemplo é ilustrado na figura 69.

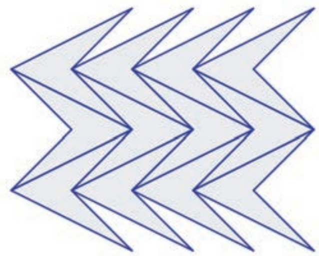


Figura 69: Pavimentação monoédrica

Uma pavimentação do plano por polígonos regulares, lado a lado diz-se *regular* se for monoédrica. No caso de não ser monoédrica mas a disposição dos polígonos regulares que a compõem em torno de cada vértice (sentido directo ou retrógrado) for a mesma diz-se *semi-regular*. A pavimentação do plano por triângulos equiláteros e hexágonos regulares ilustrada na Figura 70 não é semi-regular por não ter todos os vértices circundados (no sentido directo ou retrógrado) da mesma forma.

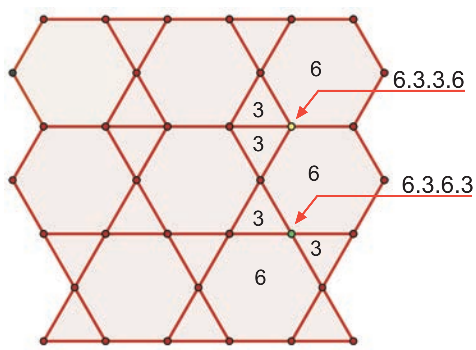


Figura 70: Os vértices assinalados são circundados de forma diferente

Uma isometria f do plano é uma simetria para uma pavimentação $\mathcal{P}$ do plano se a mantém invariante, isto é, $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Se f é uma simetria para $\mathcal{P}$, f transforma vértice de $\mathcal{P}$ em vértices de $\mathcal{P}$ e arestas de $\mathcal{P}$ em arestas de $\mathcal{P}$.

Chamamos *pavimentação uniforme do plano* a uma pavimentação do plano regular ou semi-regular, com a seguinte propriedade: *dados quaisquer dois vértices da pavimentação, existe uma simetria da pavimentação que transforma um vértice no outro.*

As tarefas seguintes que podem ser, como se indica, adaptadas aos diversos ciclos do Ensino Básico, envolvem a determinação de todas as pavimentações uniformes do plano, desenvolvem o raciocínio geométrico e propiciam momentos para diferentes métodos de demonstração.

Tarefa 4 : Pavimentações Uniformes Regulares do Plano

1. Que polígonos regulares podem ser utilizados na construção de pavimentações lado a lado, monoedrais, do plano? Porquê?
2. Com recurso a software de geometria dinâmica, considera uma cópia de cada um desses polígonos e utilizando apenas transformações geométricas constrói as pavimentações regulares do plano. Explica, devidamente, o raciocínio efectuado e confronta o teu método com o dos teus colegas.
3. Considera a pavimentação triangular, regular,$\mathfrak{T}$, do plano.

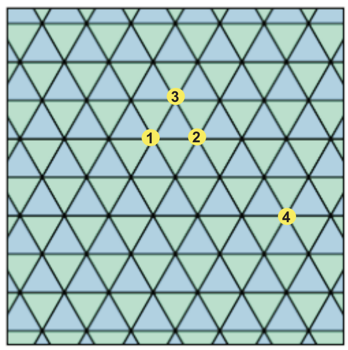


Figura 71: Pavimentação triangular regular do plano, $\mathfrak{T}$.

Identifica, justificando, uma simetria de $\mathfrak{T}$, caso exista, que transforme:

3.1 o vértice 1 no vértice 2 e preserve a orientação,

3.2 o vértice 1 no vértice 3 e inverta a orientação,

3.3 o vértice 1 no vértice 4, preserve a orientação e não tenha pontos fixos.

3.4 o vértice 1 no vértice 2, o vértice 2 no vértice 3 e o vértice 3 no vértice 4.

3.5 o vértice 1 no vértice 2, o vértice 2 no vértice 3 e preserve a orientação.

3.6 o vértice 1 no vértice 2, o vértice 2 no vértice 3 e inverta a orientação.

3.7 Podemos transformar o vértice 1 num qualquer outro vértice da pavimentação, usando uma simetria da pavimentação? Porquê?

3.8 A pavimentação triangular do plano é uniforme? Porquê?

4. As pavimentações regulares do plano são uniformes? Porquê? Justifica devidamente as tuas afirmações.

Nesta tarefa é útil o recurso a materiais manipuláveis -polígonos regulares (triângulos, quadrados, pentágonos..., dodecágonos) e a software de geometria dinâmica.

A questão inicial quando explorada por alunos dos dois primeiros ciclos deve permitir a manipulação de várias cópias (congruentes) de polígonos regulares. A justificação esperada será baseada, naturalmente, na observação que fazem e que acompanha as diversas tentativas que vão executando.

Quando consideram o pentágono regular, os alunos são confrontados ou com uma sobreposição ou com um não preenchimento de espaço, facto que se mantém para qualquer polígono regular com um número de lados superior a 6, mas não com o hexágono regular. Porque será?

O facto de terem usado, antes de chegarem a um beco sem saída, três cópias no caso do pentágono e duas cópias no caso de um qualquer polígono regular com um número de lados superior a 6, será com certeza um alerta para conjecturarem que, *quanto maior é o número de lados de um polígono maior é a amplitude do seu ângulo interno.*

A experiência que realizam ao colocarem 6 triângulos equiláteros, 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares, à volta de um mesmo vértice, permite que alunos dos 3.º e 4.º anos possam comparar os ângulos internos de cada um destes polígonos com os ângulos recto e giro. No caso de alunos do 2.º Ciclo, estes podem determinar a amplitude dos ângulos internos de cada um destes polígonos e apresentar estimativas, por exemplo, para o ângulo interno do pentágono regular.

Os alunos do 3.º Ciclo deverão ser capazes de responder a esta questão sem terem de recorrer a materiais manipuláveis. A partir do conhecimento (ou dedução) da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados podem, no caso de polígonos regulares, deduzir a amplitude dos ângulos internos e a partir daí estabelecer o resultado.

Com a segunda questão, os alunos vão escolhendo a transformação de acordo com o transformado que esperam obter. Analisemos algumas das situações que podem ocorrer, partindo por exemplo de um triângulo equilátero T. Um aluno pode usar a rotação de 60^o em torno de um dos seus vértices, obtendo uma cópia T_1 de T. Aplicando de novo a rotação de 60^o em torno do vértice comum a estes dois triângulos, obtém um novo triângulo T_2 e aplicando sucessivamente três vezes mais este processo obtém a configuração, ilustrada na Figura 72 I. Um outro aluno pode a partir de T, usar a rotação de 180^o em torno do ponto médio de uma das suas arestas, obtendo uma cópia T_1' de T. Aplicando de novo a rotação de 180^o em torno do ponto médio da aresta de T_1' que tem em comum com T apenas um vértice,, obtém um novo triângulo T_2'. A aplicação sucessiva, em 3 etapas mais, deste método de justaposição de triângulos, conduz à configuração II. Ao utilizarem processos diferentes de construção vão obtendo uma melhor compreensão das isometrias, adquirindo ferramentas que os ajudam a desenvolver a capacidade de visualização. O recurso a meios computacionais permite em tempo real observar e escrutinar diferentes tipos de construções.

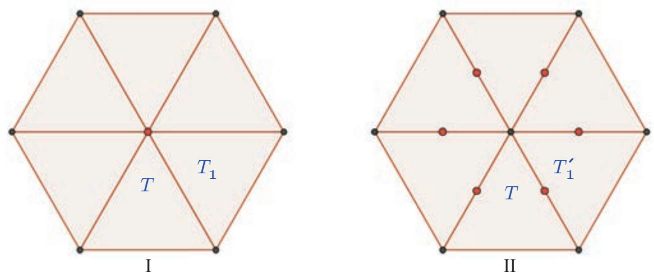


Figura 72: Construções obtidas a partir do triângulo equilátero T

As questões 3.1, 3.2 e 3.3 envolvem a compreensão das propriedades das isometrias e podem ser adaptadas a alunos dos 1.º e 2.º ciclos, bastando para isso omitir a parte referente à preservação/inversão de orientação e/ou pontos fixos.

As questões 3.5 e 3.6 envolvem, também, a compreensão das propriedades das isometrias e podem ser adaptadas a qualquer um dos ciclos. O que diferencia estas duas questões das três anteriores é o facto de se trabalhar com o conhecimento dos transformados de dois pontos em vez de um só!

Quanto à questão 3.4, que pode ser colocada tanto a alunos do 2.º como do 3.º ciclos, envolve, apenas, a noção de isometria requerendo a justificação de que não existe uma isometria nas condições pedidas. A justificação (prova) de que não existe tal isometria, quanto mais uma simetria, deve ser exigida nos dois ciclos.

A questão 3.7 destina-se ao 3.º ciclo e envolve a compreensão das propriedades da translação.

Uma propriedade da pavimentação triangular $\mathfrak{T}$ que agora conhecem é que a partir do vértice 1, conseguem "alcançar"qualquer outro vértice por meio de uma simetria de $\mathfrak{T}$. A questão 3.8 coloca-os agora sobre uma questão (ligeiramente) diferente: *dados dois vértices arbitrários, v e w, de $\mathfrak{T}$ existe uma simetria de $\mathfrak{T}$ que transforme v em w?*.

Esta questão envolve a compreensão da estrutura de grupo do conjunto das simetrias de uma figura (limitada ou não). O facto da composição de simetrias ser uma simetria e a inversa de uma simetria ser também uma simetria, responde de imediato à questão.

O trabalho feito com a pavimentação triangular pode ser agora dirigido (questão 4) para as pavimentações quadrangular e hexagonal.

Pode ir-se mais longe, trabalhando as pavimentações uniforme semi-regulares do plano.

Tarefa 5: Pavimentações Uniformes Semi-Regulares do Plano

Apresentamos de seguida uma colectânea de questões, que podem ser adaptadas a qualquer ciclo de ensino e que indicam um percurso possível para a determinação das pavimentações uniformes semi-regulares do plano.

1. Qual é o maior número de polígonos regulares que podemos colocar à volta de um vértice?

   Sugestão: *Para termos o maior número de polígonos regulares à volta de um vértice, devemos circundá-lo pelos que têm menor ângulo interno.*

2. Existe alguma pavimentação do plano com um vértice circundado por 4 polígonos regulares não congruentes entre si? Porquê?

   Sugestão: *O que acontece quando colocas à volta de um vértice 1 triângulo, 1 quadrado, 1 pentágono e 1 hexágono?*

3. Em vista da questão anterior, se uma pavimentação do plano tiver um vértice circundado com quatro ou mais polígonos regulares, o que podemos afirmar sobre estes polígonos?

4. Qual é o número máximo de polígonos regulares não congruentes à volta de um vértice de uma pavimentação do plano?

5. Apresenta uma conjectura envolvendo pavimentações semi-regulares do tipo $k.n.m$ com $n \neq m$. Demonstra ou refuta a conjectura apresentada.

6. Apresenta uma conjectura envolvendo pavimentações semi-regulares do tipo $3.k.n.m$ com $k \neq m$. Demonstra ou refuta a conjectura apresentada.

A discussão à volta destas 6 questões permite concluir que para a construção de pavimentações regulares ou semi-regulares do plano as seguintes regras têm de ser satisfeitas:

Regra 1: A soma dos ângulos que circundam cada vértice da pavimentação é de 360^o;

Regra 2: À volta de cada vértice de uma pavimentação regular ou semi-regular encontram-se no mínimo **3** polígonos e no máximo **6** no caso regular e **5** no caso semi-regular

Regra 3: Numa pavimentação semi-regular o número de polígonos regulares não congruentes entre si é no mínimo **2** e no máximo **3**.

Regra 4: Os vértices duma pavimentação semi-regular não podem ser do tipo $\mathbf{k.n.m}$ com $\mathbf{k}$ ímpar e $\mathbf{n \neq m}$.

Regra 5: Os vértices duma pavimentação semi-regular não podem ser do tipo $\mathbf{3.k.n.m}$ a menos que $\mathbf{k = m}$.

Estabelecidas estas 5 primeiras regras, a discussão deve agora situar-se na composição poligonal da pavimentação que, pela discussão anterior, sabemos envolver no máximo 3 polígonos não congruentes entre si.

6. Quais são os **pares de polígonos(não congruentes)** regulares que podemos usar para criar uma pavimentação semi-regular do plano?

   Sugestão: - *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a **valência** do vértice é* **3**;

   - *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a **valência** do vértice é* **4**;

   - *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a **valência** do vértice é* **5**

   Com base nas regras já estabelecidas os alunos concluem que os tipos de vértices possíveis são 4.8.8 e 3.12.12 no caso de vértices de valência 3, 3.6.3.6 no caso de vértices de valência 4, 3.3.3.4.4, 3.4.3.3.4 e 3.3.3.3.6 o de valência 5.

7. Constrói as pavimentações semi-regulares do plano por pares de polígonos não congruentes.

   Para a construção das pavimentações correspondentes aos tipos de vértices encontrados deve ser usado um software de geometria dinâmica.

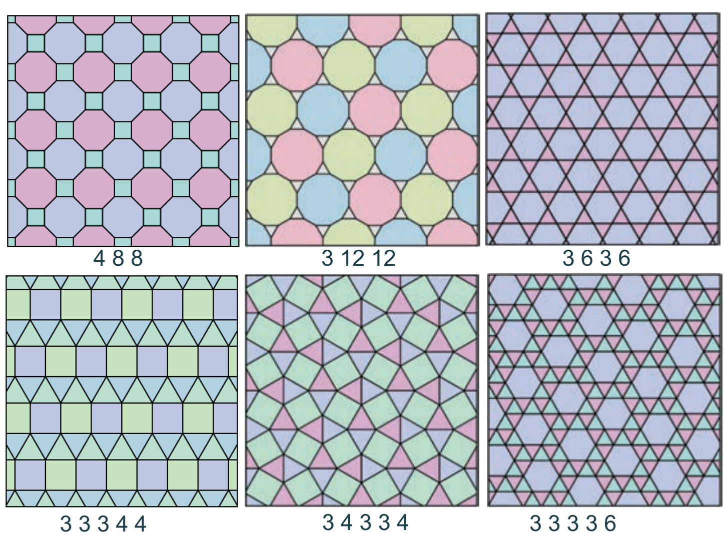


Figura 73: Pavimentações semi-regulares do plano por pares de polígonos.

8. Quais são os **triplos de polígonos(não congruentes entre si)** regulares que podemos usar para criar uma pavimentação semi-regular do plano?

Sugestão: - *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a* ***valência*** *do vértice é* **3**;

- *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a* ***valência*** *do vértice é* **4**;

- *Analisa os tipos de vértices possíveis quando a* ***valência*** *do vértice é* **5**.

Recorrendo uma vez mais às regras estabelecidas os alunos podem concluir que, neste caso, a possibilidade de uma configuração trivalente é dada por vértices do tipo 4.6.12. Configurações de valência 4 só podem ser obtidas por vértices do tipo 4.3.4.6 e que não existem configurações de valência 5.

9. Constrói as pavimentações semi-regulares do plano por pares de polígonos não congruentes.

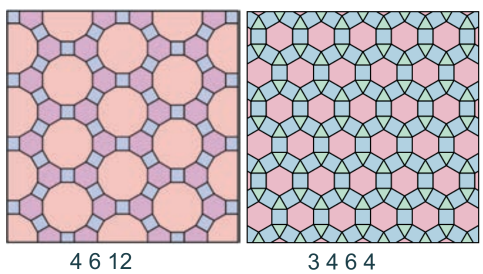


Figura 74: Pavimentações semi-regulares do plano por triplos de polígonos.

10. As pavimentações semi-regulares do plano são uniformes? Porquê? Justifica devidamente as tuas afirmações.

Grandezas e Medida

O conceito de grandeza

O que é uma grandeza? Para responder a esta questão, consideremos atributos de objectos que sejam mensuráveis. Por exemplo, se considerarmos uma peça de madeira de forma prismática, podemos medir o comprimento das suas arestas, a área das suas faces, o seu volume, mas não a cor e a textura do material de que é feito. Tomando em conta esses primeiros atributos podemos efectuar sobre uma colecção de objectos operações de classificação e de ordenação. Por exemplo, se tivermos um conjunto de objectos e os compararmos quanto ao seu comprimento – usando como critério de comparação "ter o mesmo comprimento" – observamos que o conjunto inicial é desdobrado em diversos subconjuntos cujos elementos "têm o mesmo comprimento". O conjunto inicial é particionado em subconjuntos, ou seja, obtêm-se subconjuntos, não vazios, disjuntos dois a dois e cuja união origina o conjunto inicial. Cada um desses subconjuntos constitui uma classe de equivalência e é formado pelos elementos que têm em comum o mesmo comprimento. Neste exemplo, ao contrário do que acontece numa partição em que o critério é "ter a mesma cor", após o procedimento de classificação é possível o de ordenação, ou seja, é possível ordenar as diferentes quantidades usando o critério "é mais comprido que".

No conjunto de todas as quantidades de uma grandeza é possível definir uma lei de composição interna, denominada adição, ou seja, pode-se adicionar duas quantidades da mesma grandeza – adicionando, por exemplo, duas quantidades de comprimento, o resultado é sempre uma quantidade de comprimento, ou, de um modo mais simples, adicionando dois comprimentos o resultado é sempre um comprimento. Essa operação de adição é comutativa, associativa e possui elemento neutro.

Assim, uma grandeza G é um conjunto C de classes de equivalência, no qual está definida uma operação adição (+), conferindo a (C, +) a estrutura de semigrupo comutativo, e onde está igualmente definida uma relação de ordem – os elementos de C chamam-se *quantidades da grandeza.*

Mais à frente, abordaremos as diversas grandezas que estão contempladas no Programa de Matemática do Ensino Básico, as primeiras sete logo desde o 1.º ciclo e a última desde o 2.º Ciclo: comprimento, área, volume, capacidade, massa, tempo, dinheiro, amplitude de ângulos.

A operação de medição

Em que consiste a medição? Podemos dizer que a medição é uma operação que consiste na comparação de uma certa quantidade de grandeza com outra quantidade da mesma grandeza que estabelecemos como unidade, ou seja, é a comparação de duas grandezas da mesma espécie (Caraça, 1989). Essa comparação é uma razão, ou seja, um número real que representa o número de unidades que "cabem" na quantidade de grandeza que pretendemos medir. Por exemplo, se pretendemos medir o comprimento de um segmento de recta [AB] usando para isso um outro segmento de recta [CD] como unidade, a comparação passa por colocar o segundo segmento sobre o primeiro, fazendo coincidir dois extremos destes segmentos (por exemplo, A e C ou B e D). Depois, repete-se o procedimento, deslocando-se [CD], sendo o número de vezes que este segmento cabe em [AB] a medida de [AB] tomando [CD] como unidade.

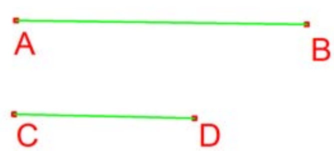


Figura 1: Comparação de segmentos de recta.

Na medição, a comparação pode ser *directa* ou *indirecta* (Ponte e Serrazina, 2000). Na primeira, é possível manipular os dois objectos – o que se pretende medir e aquele que serve de unidade de medida. É o que acontece no exemplo apresentado anteriormente da medição do comprimento do segmento de recta AB ou quando queremos, por exemplo, medir a área do tampo de uma mesa e recorremos a um quadrado de cartolina. Na medição *indirecta* não é possível comparar directamente as duas quantidades de grandeza, ou porque os objectos não estão em presença um do outro ou porque essa operação é pouco cómoda ou simplesmente porque não é fisicamente possível fazê-lo. Exemplos disso ocorrem quando queremos comparar a altura de dois arranha-céus ou as áreas de dois terrenos. A comparação indirecta tem subjacente a transitividade da relação de igualdade, uma vez que, por exemplo, se uma figuraF_1 tem a mesma área que uma figura F_2 e essa figura F_2 tem a mesma área que a figura F_3, então as áreas das figuras F_1 e F_3 são iguais.

Assim, medir é uma síntese das operações de mudar de posição e de subdividir, e pode ser realizada comparando directamente dois objectos ou recorrendo a um terceiro (Ponte e Serrazina, 2000).

Unidades e instrumentos de medida

Como vimos antes, a unidade de medida é uma quantidade de grandeza que é usada na comparação com outras quantidades que se pretendem medir. As unidades de medida têm mudado ao longo do tempo e também consoante as tradições culturais dos povos. Apesar de todo o esforço de normalização que foi desenvolvido em França a partir do século XVIII para implementar o sistema métrico decimal, sabemos que ainda na actualidade diversos países, especialmente de origem anglófona, como por exemplo os Estados Unidos da América e o Reino Unido, não o utilizam de forma generalizada. A coexistência de diversas unidades de medida coloca problemas de equivalência e pode tornar-se até num obstáculo à comunicação.

Na escola, antes de os alunos serem colocados perante as unidades padrão devem fazer todo um caminho de utilização de outras unidades de medida que eles próprios escolhem consoante a grandeza com que estão a trabalhar e a quantidade dessa grandeza. Neste processo de aquisição do conceito de unidade de medida, que está intimamente ligado ao desenvolvimento dos conceitos de grandeza e medida, Ponte e Serrazina (2000) identificam cinco passos: (i) ausência de unidade; (ii) unidade ligada ao objecto; (iii) unidade ligada à situação; (iv) unidade figural, (v) unidade propriamente dita.

O primeiro passo corresponde à comparação directa de objectos, sem o aparecimento de uma unidade exterior a eles. Esta medida é essencialmente visual e intuitiva, fazendo com que os alunos digam, comparando dois objectos, que um é mais comprido do que o outro ou que um é maior do que outro.

No passo seguinte, os alunos já utilizam a unidade, mas ela está ligada a um único objecto e claramente relacionada com o que deve medir-se, ou seja, se se pretende medir, por exemplo, o comprimento de um lápis a unidade a ser utilizada será necessariamente outro lápis.

No terceiro – *unidade ligada à situação* – a unidade depende fortemente do objecto a medir mas pode mudar de um objecto para outro sempre que para cada um se realize a medição e se conserve uma certa relação, pelo menos na ordem de grandeza, entre as unidades respectivas.

Na unidade *figural*, a unidade vai perdendo a sua relação com o objecto a medir, permanecendo ainda uma certa tendência para medir objectos grandes com unidades grandes e objectos pequenos com unidades pequenas.

Na *unidade propriamente dita* a unidade é totalmente livre da figura ou objecto considerado, sobressaindo a medida como o número que resulta da comparação.

Área de figuras planas

A ideia de área de uma figura está ligada às primeiras manifestações do pensamento matemático, sendo também comum no quotidiano das pessoas. Quando povos antigos, como os egípcios, reconstituíam os limites dos seus terrenos após as cheias do rio Nilo, estavam a lidar com a ideia de área. Da mesma forma, quando um operário da construção civil tem a tarefa de pavimentar o chão de uma divisão de uma casa, dispondo para isso de mosaicos de determinadas formas e dimensões, também ele está a lidar com a noção de área.

Muitas vezes, quando se fala de área de uma figura, rapidamente se associa um número real positivo a essa figura, a sua medida. Área e medida da área não são conceitos equivalentes. A área é uma grandeza geométrica e como tal pode ser medida, recorrendo-se a unidades de medida adequadas. A medida da área de uma figura é, precisamente, o número real positivo que resulta da comparação entre a figura que se pretende medir e a figura tomada como unidade.

Euclides introduz, nos *Elementos*, uma ideia de "igualdade entre figuras" que corresponde a "igualdade entre áreas", ou seja, ao que designamos por *equivalência* de figuras. Substanciando, duas figuras, independentemente da sua forma, com a mesma área dizem-se equivalentes. Um caso particular da equivalência é a congruência[13] de figuras, aquelas que se podem fazer coincidir

Um triângulo, juntamente com o seu interior, constitui uma região poligonal triangular[14]. Uma região poligonal é uma figura plana que pode ser obtida pela união de um número finito de regiões triangulares.

A figura 2 ilustra exemplos de figuras poligonais.

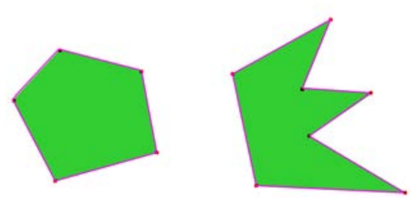


Figura 2: Exemplos de regiões poligonais.

[13]Duas figuras dizem-se congruentes quando existe uma isometria que aplica uma na outra (ver secção desta brochura relativa a isometrias).

[14]Neste texto usaremos a terminologia "triângulo" tanto para designar a linha como a região poligonal.

É claro que não existe uma única maneira de decompor uma região poligonal em regiões triangulares. Por exemplo, um paralelogramo e o seu interior podem ser decompostos em regiões triangulares de muitas formas, ver figura 3.

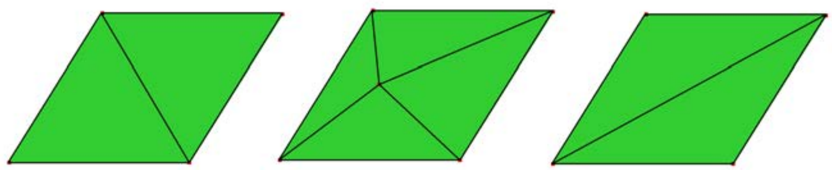


Figura 3: Triangulações do paralelogramo.

Designemos o conjunto das regiões poligonais do plano Euclidiano por R.

Podemos definir uma função α: R $\rightarrow$ IR$^+$, a que chamamos (medida) de área, que a cada região poligonal faz corresponder um número real positivo, satisfazendo as seguintes condições:

(i) (*axioma da invariância da área*) regiões poligonais congruentes têm a mesma área;

(ii) (axioma *da adição da área*) se duas regiões poligonais não se intersectam ou se se intersectam pelos lados ou pelos vértices, então a área da união destas regiões é igual à soma das áreas de cada uma delas;

(iii) (*axioma da normalização*) a área de uma região poligonal quadrada de lado a é a^2.

Com base na definição de área, podemos estabelecer o seguinte resultado:

A área de uma região rectangular é o produto da base pela sua altura[15].

Dada uma região rectangular A, de base b e altura h, construa-se o quadrado de lado (b+h), como na figura seguinte:

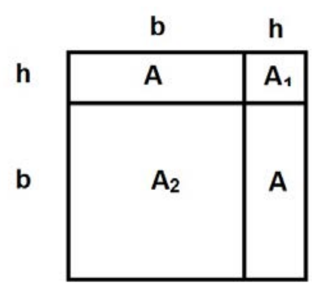


Figura 4: Composição de rectângulos.

15 Por uma questão de simplificação do texto, usaremos algumas vezes a designação de uma dada grandeza em vez de "medida" dessa grandeza. Por exemplo, escrevemos "a área" em vez de "a medida da área".

A área do quadrado de lado b+h é $(b+h)^2$. O quadrado de lado b+h pode ser decomposto em dois quadrados A_1 e A_2 de lados, respectivamente, b e h, e em dois rectângulos de lados b e h. Assim temos:

$(b + h)^2 = b^2 + h^2 + 2$(área de A),

ou seja, $b^2 + h^2 + 2bh = b^2 + h^2 + 2$(área de A).

Donde, área de A = b h.

Vamos agora mostrar que:

A área do triângulo rectângulo é metade do produto das medidas dos seus catetos.

Considere-se o triângulo [ABC], com ângulo recto em C. Construa-se o rectângulo [ABCD] de base e altura iguais às do triângulo rectângulo [ABC].

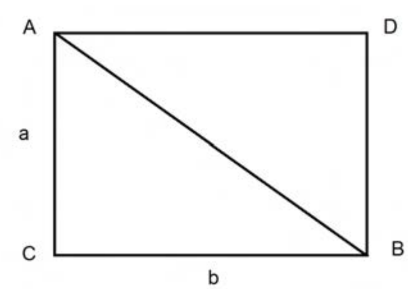


Figura 5: Construção de um rectângulo a partir de um triângulo rectângulo.

Os triângulos [ABC] e [ABD] são congruentes, pelo que a área do rectângulo [ABCD] é igual à soma das áreas destes dois triângulos. Por outras palavras, α ([ABCD]) = 2 α ([ABC]).

Como medida da área do rectângulo [ABCD] é dada por ab, a medida da área do triângulo rectângulo [ABC] é $\frac{1}{2}$ab, como se queria provar.

Vamos agora determinar a área de um triângulo quando este é obtusângulo ou acutângulo. Suponhamos inicialmente que o triângulo [ABC] é acutângulo, ver Figura 6.

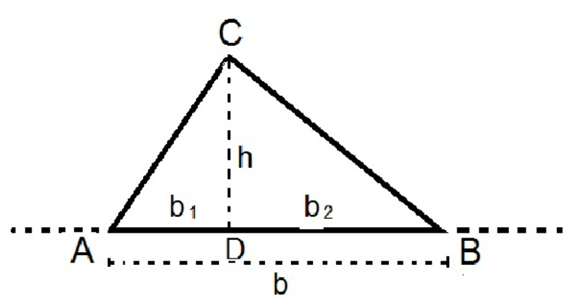


Figura 6: Triângulo acutângulo.

No caso de um triângulo acutângulo, a altura, a partir de qualquer um dos seus vértices, pertence sempre ao seu interior (com excepção dos pontos inicial e final) e decompõe-no em dois triângulos rectângulos.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, a altura h do triângulo [ABC] a partir de C. A altura h determina os triângulos rectângulos [ACD] e [BCD], com D a pertencer ao interior de [AB].

Ora, α([ABC]) = α ([ACD]) +α ([BCD]).

Como os triângulos [ACD] e [BCD] são rectângulos,

$$\alpha([ACD]) = \frac{\overline{AD}\times h}{2} \text{ e } \alpha([BCD]) = \frac{\overline{BD}\times h}{2}$$

pelo que,

$$\alpha([ABC]) = \alpha([ACD]) + \alpha([BCD]) = \frac{(\overline{AD}+\overline{BD})\times h}{2} = \frac{\overline{AB}\times h}{2}$$

Suponhamos agora que o triângulo [ABC] é obtusângulo com ângulo obtuso em A. Como a altura do triângulo [ABC] a partir de A pertence ao interior de [ABC] (com excepção dos pontos inicial e final), o raciocínio feito para a dedução da área de um triângulo acutângulo pode ser feito do mesmo modo para o triângulo obtusângulo [ABC].

Vejamos agora o que acontece se considerássemos a altura de [ABC] a partir de B ou de C. Observar que em qualquer dos casos a altura não pertence (com excepção do ponto B ou C) ao triângulo [ABC].

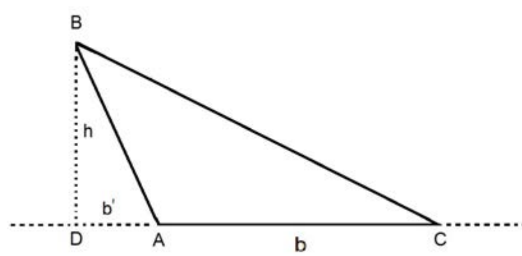


Figura 7: Triângulo obtusângulo.

Sem perda de generalidade, vamos considerar a altura do triângulo [ABC] a partir de B, ver Figura 7. Seja D o ponto determinado por h no prolongamento da base [AC].

Ora, α([BCD]) = α([ABD])+α([ABC]). Sendo os triângulos [ABD] e [BCD] rectângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{DC}\times h}{2} = \frac{\overline{DA}\times h}{2} + \alpha([ABC]).$$

Donde

$$\alpha([ABC]) = \frac{\overline{DC}\times h}{2} - \frac{\overline{DA}\times h}{2} = \frac{\overline{AC}\times h}{2}.$$

Acabámos de mostrar que:

A área do triângulo é metade do produto das medidas de qualquer base pela medida da altura correspondente.

Com base neste resultado e decompondo, por uma das diagonais, um paralelogramo em dois triângulos, Figura 8, deduz-se que:

A área do paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.

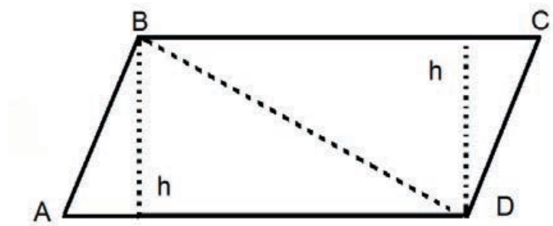


Figura 8: Decomposição de um paralelogramo por uma das suas diagonais.

No caso de um trapézio pode deduzir-se facilmente a sua área decompondo-o, também, por uma das suas diagonais, em dois triângulos, ver Figura 9. Assim,

A área do trapézio é o produto de metade da altura pela soma das bases.

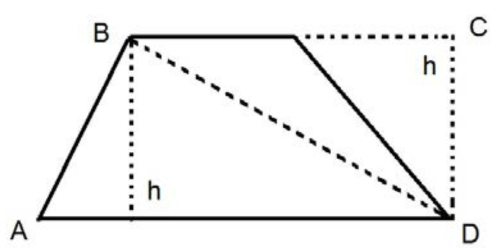


Figura 9: Decomposição de um trapézio por uma das suas diagonais.

Um processo para determinar a área de outras regiões poligonais é proceder à sua decomposição em regiões poligonais cuja área se sabe calcular. Observe-se que foi desta forma que deduzimos as áreas do rectângulo, triângulo, paralelogramo e trapézio.

A área da região poligonal [ABCDEF] pode obter-se pela soma das regiões poligonais de que sabemos determinar a área, ver figura 10.

α ([ABCDEF]) = α ([ABG]) + α ([GBCH]) + α ([HCDJ]) + α ([JDE]) + α ([IEF]) +gα ([AIF])

Estendendo a função área a regiões não poligonais, mantendo as mesmas propriedades, foquemo-nos no estudo do círculo. Decompondo o círculo em n sectores circulares, a área do círculo aproxima-se, para n suficientemente grande, da soma das n áreas poligonais

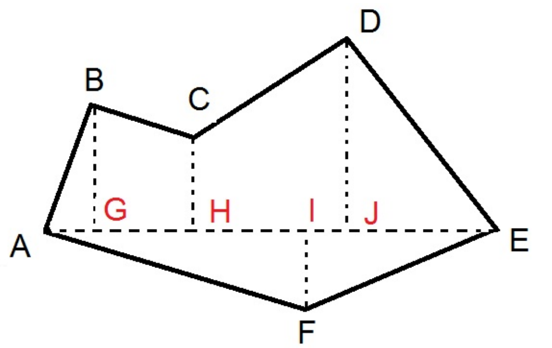


Figura 10: Decomposição de um trapézio por uma das suas diagonais.

triangulares com vértices no centro da circunferência e nos pontos extremos de cada um dos arcos de circunferência definidores dos sectores. Por outras palavras, a área A de um círculo C de raio r é,

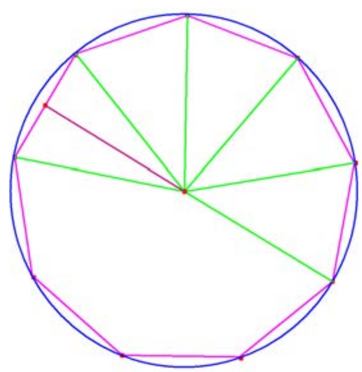


Figura 11: Decomposição do círculo em sectores circulares.

$$\text{A=} \quad (T1 + T2 + \ldots + Tn) = \frac{per\acute{i}metro\, de\, C \times r}{2} = \frac{2\pi r 2}{2} = \pi \times r^2$$

Como medir áreas de figuras geométricas? O primeiro passo é definir a unidade de área. É importante ter em conta que a unidade de área é da mesma natureza da área que se pretende medir, ou seja, para medir áreas de figuras utilizam-se áreas de figuras. Essa unidade está relacionada com a área que se pretende medir. Como facilmente os alunos compreendem, a unidade para medir, por exemplo, a área de um selo postal não é a mesma que se utiliza para medir as áreas de um tampo de uma secretária ou de um campo de basquetebol. Para além disso, a medição de áreas deve começar pela utilização de uma diversidade de unidades, quadradas e não quadradas, padronizadas e não padronizadas, recorrendo a processos informais e depois a processos formais.

Tarefas sobre área e perímetro

Em seguida, apresentam-se quatro tarefas em que se explora a grandeza área e também a grandeza comprimento, esta a propósito da determinação de perímetros de figuras geométricas. Estas tarefas, que podem ser usadas em diferentes anos de escolaridade, desde que devidamente adequadas, fazem uso de diversos materiais didácticos, em particular, os manipuláveis e os tecnológicos.

Tarefa 1: Áreas e perímetros no geoplano

Determinar as medidas da área e do perímetro das figuras traçadas no geoplano, tomando como unidades, respectivamente, uma quadrícula e o seu lado:

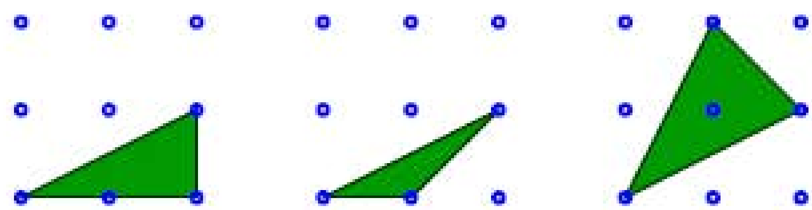


Figura 12: Triângulos no geoplano.

A tarefa visa desenvolver a capacidade de resolução de problemas envolvendo perímetro e área. Esta tarefa pode ser apresentada em qualquer um dos três ciclos do ensino básico, dependendo disso a natureza que pode assumir e as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos. Para os alunos do 1.º ciclo, a tarefa tem uma natureza mais problemática comparativamente com o que acontece com os alunos dos outros dois ciclos. Para além disso, à medida que se avança no ciclo de ensino, os alunos diversificam o seu leque de estratégias de resolução. Neste caso, os alunos do 3.º ciclo podem recorrer também a estratégias de resolução de natureza mais formal.

Os alunos, principalmente os mais novos, são tentados a pensar que a diagonal de um quadrado tem o mesmo comprimento que o seu lado. No caso de isso acontecer, é necessário encontrar formas de mostrar aos alunos que essa relação de igualdade não se verifica, podendo para isso recorrer-se a dobragens de quadrados de papel. Os alunos dos 1.º e 2.º ciclos apresentam estimativas do perímetro das figuras. Já os do 3.º ciclo são chamados a determinar o valor das diagonais dos rectângulos que são lados dos triângulos das figuras, recorrendo ao teorema de Pitágoras, calculando assim o perímetro.

Para o cálculo da medida da área é necessário clarificar a unidade utilizada, a quadrícula. Os alunos, quando são confrontados pela primeira vez com a tarefa, admitem com frequência que algumas quadrículas estão divididas ao meio quando efectivamente não estão. Por exemplo, no triângulo da esquerda da figura 12, é comum os alunos contarem como $\frac{1}{2}$ a parte colorida do quadrado inferior direito. Esta ideia errada deve ser discutida, podendo-se sugerir que os alunos sobreponham à figura, com elásticos, metade desse quadrado; no caso de se estar a usar papel ponteado, colorir metade desse quadrado. Em ambos os casos, os alunos compreendem que terão que encontrar estratégias que lhes permitam determinar a medida da área. Este trabalho, principalmente com os alunos dos 1.º e 2.º ciclos, deve ser precedido da determinação de áreas de figuras em que os seus lados são lados ou diagonais de quadrículas.

Para a resolução do problema é importante que os alunos compreendam que devem relacionar as áreas das três figuras com as áreas de outras figuras que as contêm. Por exemplo, no triângulo da esquerda (figura 12), os alunos identificam o triângulo rectângulo como sendo metade do rectângulo que tem a mesma base (2) e a mesma altura (1). Assim, tiram partido das propriedades das diagonais dos paralelogramos. Podem também recorrer, a partir do 2.º ciclo, à fórmula da área do triângulo – este segundo método deve ser extensível aos outros triângulos, tirando partido dos conhecimentos que os alunos vão adquirindo ao longo do ensino básico.

Tarefa 2: Figuras no tangram

Com todas as peças do tangram, construir as figuras a negro. O que têm essas figuras em comum? Constrói outras figuras utilizando todas as peças do tangram.

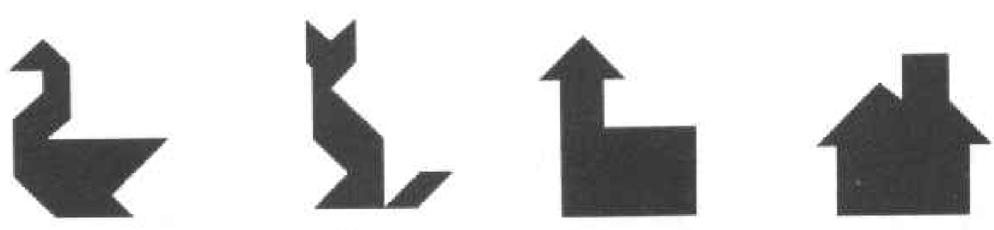


Figura 13: Figuras com o tangram.

Esta tarefa, de natureza exploratória e com um carácter lúdico, permite tirar partido do tangram, que é um bom recurso para trabalhar a grandeza área, especialmente, mas não exclusivamente, no 1.º ciclo do ensino básico. Construir figuras recorrendo às sete peças (sem sobreposição) permite explorar o conceito de equivalência de figuras geométricas. Os alunos compreendem que todas as figuras têm a mesma área porque cada uma delas é formada pelas mesmas sete peças do tangram.

A tarefa permite igualmente discutir o conceito de congruência de figuras, uma vez que a figura construída é geometricamente igual à dada, ou seja, existe uma isometria que aplica uma na outra. Esta tarefa, para além destes conceitos relativos à grandeza área, proporciona um bom contexto para os alunos desenvolverem a visualização espacial.

Tarefa 3: Áreas com o tangram

Determinar a medida da área do quadrado vermelho, tomando como unidade de medida: (i) o triângulo pequeno; (ii) o triângulo grande; (iii) o quadrado grande.

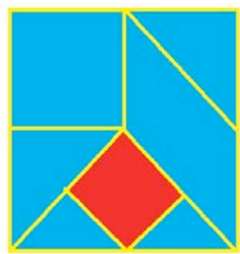


Figura 14: Decomposição do quadrado.

A tarefa visa levar os alunos a compreender os conceitos de unidade de medida e de medição de área, uma vez que são utilizadas diferentes unidades, não convencionais, quadradas e não quadradas, obtendo-se como resultado diferentes valores.

Em termos de estratégias de resolução, os alunos do 1.º ciclo são tentados a sobrepor a unidade de medida escolhida ao quadrado vermelho (o que lhes colocará algumas dificuldades em ii) e iii)), enquanto que os alunos mais velhos determinarão o valor da medida da área por observação das figuras e uso das suas propriedades.

A determinação da medida da área do quadrado vermelho, quando a unidade de medida é o triângulo grande, beneficia da resolução da primeira parte da tarefa. Por isso, é natural que os alunos concluam que o quadrado e o triângulo grande são figuras equivalentes, porque, por sobreposição, observam que cada uma delas tem de área 2 triângulos pequenos.

Na terceira parte da tarefa, os alunos continuam a estabelecer relações entre as áreas das figuras. Assim, concluem que sendo o triângulo grande metade do quadrado grande, a medida da área do quadrado vermelho é $\frac{1}{2}$ da do quadrado grande.

Os alunos do 3.º ciclo podem fazer outro tipo de explorações. Por exemplo, na segunda parte da tarefa, podem ser questionados sobre a relação existente entre as medidas das áreas de um quadrado e de um triângulo rectângulo quando a hipotenusa deste é o dobro da medida do lado do quadrado e a altura respectiva é igual ao seu lado. Em iii), pode pedir-se para se generalizar a relação entre as áreas de dois quadrados em que, por exemplo, a medida do lado de um é igual, metade ou $\frac{1}{4}$ do valor da diagonal do outro.

Dada a natureza desta tarefa, ela permite que os alunos trabalhem as três capacidades transversais (resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemáticos), sendo a comunicação matemática particularmente importante no momento da discussão dos resultados.

Tarefa 4: Áreas e perímetros de rectângulos

Investigar o que acontece à medida da área de um rectângulo quando se alteram as suas dimensões (comprimento e largura) mas não se altera o perímetro.

Os conceitos de área e de perímetro são, por vezes, confundidos pelos alunos. Por isso, esta tarefa tem como objectivo levar os alunos a distinguir e, sobretudo, a relacionar as duas grandezas num contexto de resolução de problemas. Na tarefa questiona-se o efeito na medida da área de um rectângulo quando se fazem variar as suas dimensões, mantendo constante o seu perímetro. A tarefa, tal como está, é dirigida aos alunos do 2.º Ciclo. Contudo, pode também ser apresentada aos alunos dos outros dois ciclos. No caso de ser apresentada a alunos do 1.º ciclo, é conveniente fechar mais um pouco a tarefa, fixando, por exemplo, uma medida para o perímetro ou apresentando alguns exemplos.

Na realização da tarefa, os alunos devem poder fazer experiências recorrendo a recursos diversificados como o papel quadriculado, o geoplano, a calculadora ou *software* de geometria dinâmica, fixando o valor do perímetro e fazendo variar a medida da área. Caso os alunos não utilizem instrumentos de cálculo, é natural que restrinjam as suas experiências a valores naturais para as medidas das dimensões do rectângulo, especialmente os do 2.º ciclo.

Os alunos começam por fixar uma medida para o perímetro. Caso não o façam, é importante o professor dar essa sugestão, especialmente para os alunos do 1.º ciclo. Por exemplo, os alunos podem observar, com auxílio da folha de cálculo, que para um rectângulo de perímetro igual a 20 unidades de medida de comprimento, a área pode variar de acordo com o quadro seguinte:

Comprimento	**Largura**	**Área**
9,5	0,5	4,75
9	1	9
8,5	1,5	12,75
8	2	16
7,5	2,5	18,75
7	3	21
6,5	3,5	22,75
6	4	24
5,5	4,5	24,75
5	5	25
4,5	5,5	24,75
4	6	24
3,5	6,5	22,75
3	7	21
2,5	7,5	18,75
2	8	16
1,5	8,5	12,75
1	9	9
0,5	9,5	4,75

Em resultado do seu trabalho, os alunos compreendem que quanto maior é a diferença entre os valores das duas dimensões do rectângulo menor é a medida da área. Quando essa diferença tende para metade do perímetro, ou seja, quando a medida da largura do rectângulo se aproxima de zero, a medida da área do rectângulo também se aproxima de zero. Os alunos conjecturam que a área é máxima quando as medidas das dimensões valem um quarto da medida do perímetro, ou seja, quando o rectângulo é um quadrado.

Tarefa 5: Investigar áreas de rectângulos

Investigar o que acontece à medida da área de um rectângulo quando se duplicam as medidas das suas dimensões (comprimento e largura).

Esta tarefa tem como objectivo resolver problemas que envolvam o conceito de área, num contexto exploratório ou investigativo, consoante o nível de ensino para que é proposta. Os alunos do 1.º ciclo realizam a tarefa com um cunho exploratório, assente na determinação de casos particulares. Por exemplo:

Os alunos dos 2.º e 3.º ciclos, podem também começar por realizar experiências com papel e lápis, registando os resultados numa tabela como a que se apresenta a seguir:

Rectângulos	**Comp.**	**Largura**	**Área**
Situação inicial	2	3	6
Dimensões anteriores multiplicadas por 2	4	6	24
Dimensões anteriores multiplicadas por 2	8	12	96

Os alunos rapidamente passam para a expressão geral do cálculo da área do novo rectângulo:

A=c×l

A'=2×c ×2×l

A'= 4×c×l

A'=4×A

Com os alunos do 3.º Ciclo, é possível generalizar este resultado para o cálculo de medidas de áreas de outras figuras geométricas, como o triângulo, o paralelogramo ou o trapézio, sempre que as suas dimensões são duplicadas, realizando demonstrações simples das conjecturas formuladas.

Volume

O volume é uma grandeza que tem subjacente a ideia de "espaço" ocupado por um corpo. Vamos definir sobre o conjunto de todos os subconjuntos de pontos do espaço (V) uma função volume(v):

v: V $\rightarrow$ IR_0^+, satisfazendo as seguintes condições:

(i) Todo o conjunto convexo de pontos do espaço está em V.

(ii) Se M e N pertencem a V, então M∪N, M∩N e M/N também pertencem a V.

(iii) Se M e N pertencem a V e M⊂N, então v(M) $\leq$ v(N).

(iv) Se M e N pertencem a V e v(M∩N)=0, então v(M∪N)= v(M) +v(N).

(v) A medida do volume de um paralelepípedo é o produto das medidas da área da base e da altura.

(vi) (Princípio de Cavalieri) Sejam K e K' elementos de V, com a mesma altura relativa a um plano dado (E_0). Se todo o plano E, paralelo a E_0, secciona K e K' segundo figuras com a mesma área, então v(K)= v(K').

Com base na definição de volume, podemos estabelecer os seguintes resultados relativamente aos volumes de prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas.

Seja K um prisma recto, de altura h e base triangular T. Então, o volume do prisma recto é igual ao produto da altura pela área da base: v(k)=h×α (T).

Construamos um outro prisma recto K', com base T', de modo que T∪T' é um paralelogramo e K∪K' é um paralelepípedo (ver figura 15):

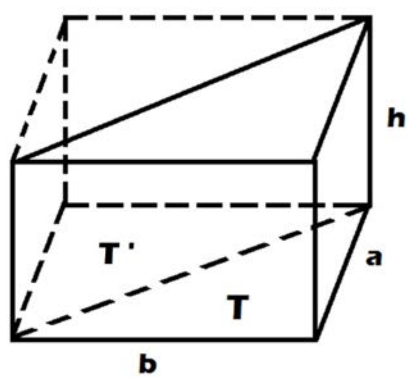


Figura 15: Composição do paralelepípedo.

A medida do volume do paralelepípedo é o produto das medidas das três dimensões:

$$v(\text{K}\cup\text{K'})=\text{abh}$$

Pelo princípio de Cavalieri

$$v(\text{K})= v(\text{K'})$$

Como volume v(K∩K')=o

$$v(\text{K}\cup\text{K'})= \text{v(K)}+ \text{v(K')}=2\text{v(K)}$$

Assim

$$v(\text{K})= \tfrac{1}{2}v\ (\text{K}\cup\text{K'})=\tfrac{1}{2}\text{abh}= \text{h}\times\alpha\ (\text{T}).$$

Como se queria provar.

Vamos agora mostrar que:

O volume de um prisma qualquer K (recto ou não) é o produto da altura pela área da base.

Consideremos K' um prisma recto com a mesma base e a mesma altura de K, ver figura 16.

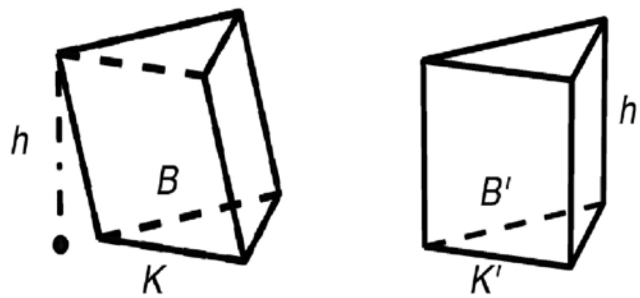


Figura 16: Prisma com a mesma base e a mesma altura.

Pelo resultado anterior

$$v(\text{K'}) = \text{h} \times \alpha\ (\text{B'}) = \text{h} \times \alpha\ (\text{B})$$

Pelo princípio de Cavalieri

$$v(\text{K'}) = v(\text{K})$$

Logo

$$v\ \text{K}) = \text{h} \times \alpha\ (\text{B})$$

Vejamos agora o volume do cilindro.

O volume de um cilindro qualquer K, de base circular de raio r, é o produto da área da base pela altura: $v(K) = \pi r^2 h$.

Consideremos um prisma recto C, com área da base πr^2 e altura h. Logo:

$$v\ (\text{C}) = \pi \text{r}^2 \text{h}$$

Pelo princípio de Cavalieri

$$v\ (\text{K}) = v(\text{C})$$

Logo

$$v(\text{K}) = \pi \text{r}^2 \text{h}$$

Como se queria provar.

O volume de uma pirâmide qualquer K é um terço do produto da área da base pela altura: $v(K) = \frac{1}{3}\ ah$

Consideremos primeiro um prisma P, com a mesma base e a mesma altura da pirâmide K. O prisma pode ser decomposto em três pirâmides com a mesma base e altura que o prisma, ver figura 17:

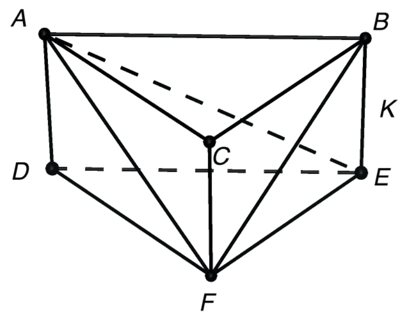


Figura 17: Decomposição do prisma triangular.

Assim

$$v(\mathrm{P}){=}3v(\mathrm{K})$$
$$v(\mathrm{P}){=}\mathrm{ah}$$
$$v(\mathrm{K}){=}\quad \tfrac{1}{3}\ \mathrm{ah}$$

Se usarmos o princípio de Cavalieri, a fórmula da medida do volume do cone vem trivial. Considerando um cone de área da base $\pi \mathrm{r}^2$ e altura h e uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura, podemos concluir:

O volume de um cone qualquer K , de raio da base r, é um terço do produto da área da base pela altura: $v(K){=}\ \frac{1}{3}\pi r^2\, h$

Para encontrar a medida do volume da esfera K, de raio r, comecemos por inscrevê-la num cilindro, ver figura 18:

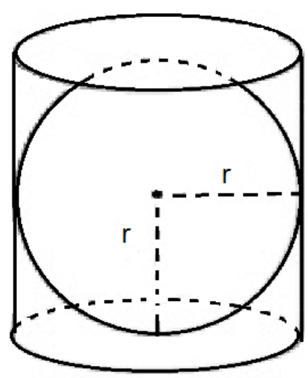


Figura 18: Circunscrição da esfera no cilindro.

Seja C o cilindro circunscrito e L a parte do cilindro exterior à esfera. Assim

$$\mathrm{C}{=}\mathrm{K} \cup \mathrm{L}$$
$$\mathrm{e}$$
$$v(\mathrm{K}) = v(\mathrm{C}) \text{ - } v(\mathrm{L})$$

Sabemos determinar o volume de C:

$$v(\mathrm{C}) = \pi \mathrm{r}^2.2\mathrm{r}{=}2\pi \mathrm{r}^3$$

Para determinar v (L) recorramos ao princípio de Cavalieri. Procuremos uma figura, de que saibamos calcular o volume, com a mesma área da secção a uma altura k, ver figuras 19 e 20:

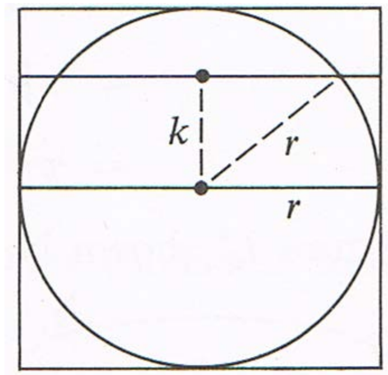


Figura 19: Secção vertical.

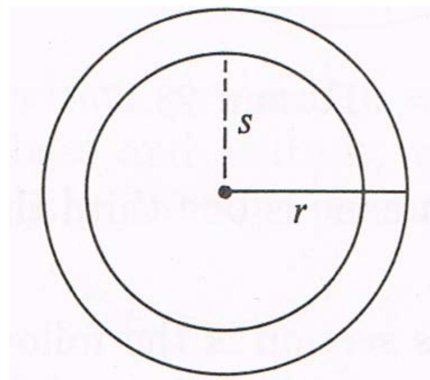


Figura 20: Secção horizontal.

Vem

$$\mathrm{s}=\sqrt{r^2-k^2}$$

Assim, a área da secção de L a uma altura k é:

$$\begin{aligned} \mathrm{A_k} &= \pi \mathrm{r}^2 - \pi \mathrm{s}^2 \\ &= \pi((\mathrm{r}^2 \text{ - } \mathrm{s}^2) \\ &= \pi[\mathrm{r}^2 - (\mathrm{r}^2 \text{ - } \mathrm{k}^2)] \\ &= \pi \mathrm{k}^2 \end{aligned}$$

Consideremos agora uma figura L' (ver figura 21), que apresenta do lado direito uma secção de um corte vertical da da esquerda:

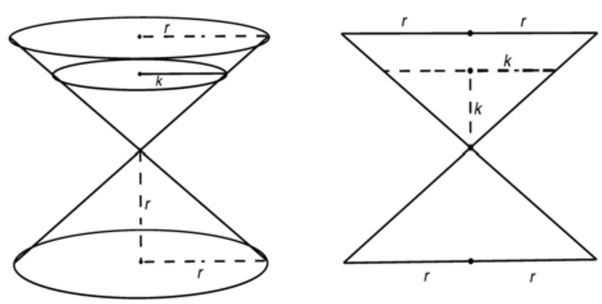


Figura 21: Figura e secção vertical de L'.

A secção de L' a uma altura k é um círculo de raio k e área $\mathrm{a_k}$:

$$\mathrm{a_k} = \pi \mathrm{k}^2.$$

Logo

$$v(\mathrm{L}) = v(\mathrm{L'})$$

Mas

$$v\ (\mathrm{L'}) = 2\ .\ \tfrac{1}{3}\pi \mathrm{r}^2 .\ \mathrm{r}$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi \mathrm{r}^3$$

Logo

$$\mathrm{v(L)} = \tfrac{2}{3}\pi \mathrm{r}^3$$

Então o volume da esfera vem

$$v(\mathrm{K}) = v(\mathrm{C}) \text{ - } \mathrm{v(L)}$$
$$= 2\pi \mathrm{r}^3 - \tfrac{2}{3}\pi \mathrm{r}^3$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3$$

A medida do volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Tarefas sobre volume

Em seguida, apresentam-se quatro tarefas em que se explora a grandeza volume. Estas tarefas podem ser desenvolvidas, com as devidas adaptações, nos três ciclos de ensino.

Tarefa 6: Volumes com cubinhos

Se quiseres construir um cubo cuja aresta dobra a aresta do cubo da figura 22, quantos cubinhos vais precisar? E se duplicares novamente a aresta?

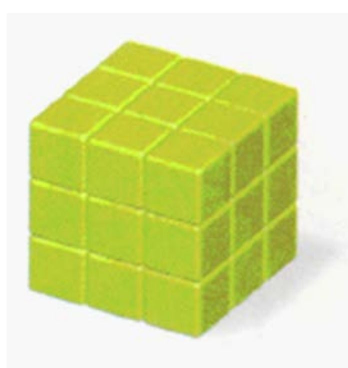


Figura 22: Construindo cubos.

Esta tarefa, de natureza investigativa, pode ser realizada tanto no 1.º como no 2.º ciclo. No caso do 1.º ciclo, os alunos realizam experiências visando compreender como podem calcular o volume (expresso em número de cubinhos) quando se faz variar a aresta. Concluem que em cada "camada do cubo", o número de cubinhos é dado pelo quadrado da medida do comprimento da aresta (3×3). Como o cubo tem 3 dessas "camadas", a medida do volume é dada pelo produto de três factores iguais (3×3×3). Os alunos do 2.º ciclo devem ser capazes de utilizar com destreza a fórmula do volume do cubo, calculando a medida do volume de diversos cubos. Dessa forma, desde que façam registos adequados (por exemplo, em tabelas), poderão conjecturar que duplicando a medida da aresta, o volume aumenta 8 vezes (2^3):

Medida da aresta	Medida do volume
1	1
2	8
3	25
4	64
5	125
6	216

Os alunos do 3.º ciclo serão capazes de fazer uma prova simples dessa conjectura, recorrendo à manipulação de expressões algébricas.

Tarefa 7: Pilhas de moedas

A imagem da figura 23 representa duas pilhas de moedas de um euro. Qual das pilhas de moedas tem maior volume?

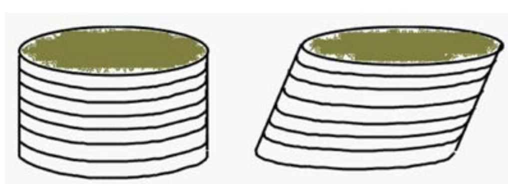


Figura 23: Pilhas de moedas.

Tal como a anterior, esta tarefa pode ser desenvolvida por alunos dos diversos ciclos. Os alunos mais novos concluirão que as duas pilhas de moedas têm o mesmo volume porque são constituídas pelo mesmo número de moedas.

Os alunos do 2.º ciclo devem concluir que o volume se mantém porque as pilhas têm a mesma base (um círculo) e a mesma altura (mesmo número de moedas sobrepostas). Para isso, na pilha da esquerda, os alunos podem calcular o volume do cilindro formado pelas moedas e na pilha da direita calcular o volume de cada uma das moedas e multiplicar o valor obtido pelo número de moedas.

Os alunos do 3.º ciclo podem generalizar a relação, mostrando que esta igualdade é sempre válida para quaisquer duas pilhas de moedas, desde que formadas pelo mesmo número de moedas iguais.

Tarefa 8: Pirâmide no cubo

A imagem da figura 24 representa um cubo de vidro, de medida de aresta 5 cm, em que está inscrita a pirâmide [ABCDE]. Qual é a medida do volume da porção do cubo não ocupado pela pirâmide? Que relação há entre esta medida e a medida do volume da pirâmide?

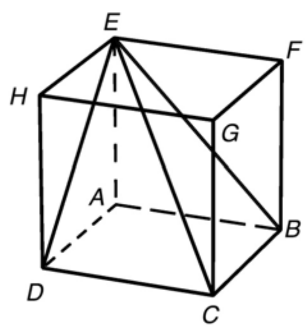


Figura 24: Pirâmide inscrita no cubo.

Esta tarefa pode ser realizada recorrendo à aplicação das fórmulas do volume (do cubo e da pirâmide). Dessa forma, os alunos concluem que ambos os sólidos têm a mesma base (um quadrado) e a mesma altura (uma vez que o vértice E da pirâmide existe na face [HEFG] do cubo).

Os alunos mais novos poderão fazer conjecturas sobre essa relação de 1 para 3 recorrendo à via experimental, utilizando sólidos de enchimento ou modelos de sólidos geométricos nas condições do enunciado da tarefa.

Tarefa 9: Volumes da pirâmide e do cubo

Considere um cubo com uma certa medida de aresta (ver figura 25). No seu interior encontra-se uma pirâmide em que o vértice A é o centro do cubo (ponto de intersecção das diagonais do cubo). Qual a relação entre os volumes da pirâmide e o do cubo? E entre os volumes da pirâmide e da esfera circunscrita ao cubo?

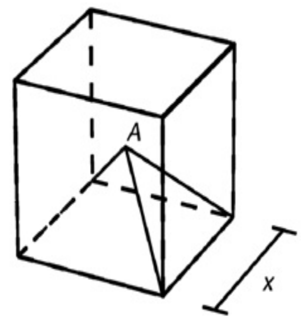


Figura 25: Pirâmide no interior do cubo.

Este problema é proposto para alunos do 3.º ciclo. O trabalho pode iniciar-se com a elaboração de conjecturas, que podem resultar de algumas experiências com casos particulares. Depois, os alunos deverão ser capazes de calcular o volume de qualquer pirâmide inscrita num cubo e relacioná-lo com o volume desse cubo.

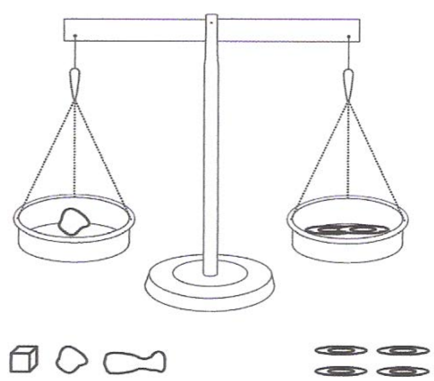
Massa

A grandeza massa é muitas vezes confundida com a grandeza peso, embora sejam duas grandezas distintas. A massa é uma grandeza escalar, cuja unidade de medida padrão é o quilograma (Kg) e o peso é uma grandeza vectorial que se exprime em newton (N) ou kilograma-força. A operação de determinação do valor da grandeza massa designa-se por pesagem e, por isso, no dia-a-dia é comum falar-se em peso, mesmo quando se está a referir a massa. Porém, enquanto a massa de um corpo é invariante em relação ao lugar onde se situa, o seu peso pode variar de acordo com o lugar. Por exemplo, na Lua o peso de um corpo é cerca de 6 vezes inferior ao obtido na Terra. A confusão na utilização dos termos também pode estar relacionada com o instrumento de medida usado, pois apesar de se poderem utilizar balanças nas duas grandezas, elas são diferentes na forma como funcionam e, por vezes, utilizam-se tipos de balanças que funcionam como dinamómetros.[16]

Para que as crianças se apropriem da noção de massa é importante que realizem experiências que envolvam a comparação e ordenação de objectos quanto à sua massa. Desde o 1.º ano, as crianças devem realizar explorações relacionadas com esta grandeza. Por exemplo, podem começar por comparar objectos com a mesma forma e tamanho e decidir qual é mais pesado, mais leve ou se têm igual peso, ou comparar objectos que tenham

[16]Um dinamómetro é um aparelho que permite medir a intensidade de uma força. É constituído por uma mola elástica que se deforma sob o peso do corpo que nele se suspenda. Essa mola está presa a uma escala graduada, em Newtons (N) ou em quilograma-força (Kgf). Como a deformação da mola é directamente proporcional á intensidade da força aplicada na mola, podemos conhecer a intensidade dessa força.

tamanhos diferentes, mas em que o maior é mais leve do que o mais pequeno. Estas experiências começam por proporcionar um sentido intuitivo da grandeza. Por exemplo, as crianças seguram nas mãos os objectos e fazem comparações entre eles, ordenando-os, tendo em conta os julgamentos que fazem acerca do seu peso. Podem também comparar o peso de um dado objecto com o peso de 1 quilo usando, por exemplo, um pacote de açúcar ou de farinha. Podem ainda procurar na sala de aula objectos que julguem ser mais pesados, mais leves ou de igual peso tendo como referência esse pacote. Primeiro, os alunos seguram nos objectos e estimam o seu peso. Descrições como: "quase tão pesado como um quilo", "mais pesado, quase dois quilos", "mais leve, talvez dois objectos iguais pesem um quilo", são importantes. Também podem ser propostas experiências em que o objecto de referência pesa, por exemplo, 100 gramas. Neste caso, os alunos podem estimar se os restantes objectos pesam mais ou menos do que esse objecto. Em seguida, podem confirmar este trabalho exploratório utilizando uma balança. Nesta fase, é aconselhável que os alunos trabalhem com uma balança de dois pratos. Com este tipo de balança, os alunos comparam o objecto que querem pesar com um dado produto de referência ou com *pesos* (massas marcadas) que põem no outro prato até equilibrar a balança. Neste caso, o que se estabelece como referência para equilibrar a balança funciona como unidade de medida. Na figura 26 apresenta-se uma balança de dois pratos em que se utilizam anilhas como unidade de medida para pesar objectos. Na tabela regista-se a massa desses objectos usando uma anilha como unidade de medida.



Objecto	**Número de anilhas**	**Massa (em anilhas)**
Cubo	2	2
Pedra	4	4
Osso	3	3

Figura 26: Balança de dois pratos e tabela de registo.

Neste processo, é importante que os alunos passem progressivamente da utilização de unidades de medida não convencionais para unidades de medida convencionais[17], por facilitar a comunicação de resultados. É ainda importante que se utilizem *pesos* de referência. Perante uma situação concreta, os alunos podem verificar, por exemplo, que um quilo equivale a um *peso* de 500 g, dois *pesos* de 200 g e um *peso* de 100 g. Os *pesos* de 250 gramas, de 200 gramas e de 100 gramas são quantidades de referência muito usuais em produtos do dia-a-dia, como por exemplo, alguns do ramo alimentar. Por comparação, as crianças verificam que quatro pacotes de 250 g ou dois pacotes de 500 g são o mesmo que 1 quilograma, estabelecendo diversas relações, tais como, 5 vezes 100 gramas equivalem a 500 gramas, dez vezes 100 gramas equivalem a um quilograma, etc. Os alunos devem também realizar pesagens com produtos que pesem 10 g, 20 g e 50 g e estabelecer as respectivas relações. Estas experiências contribuem ainda para que os alunos se vão apropriando da ideia que é importante escolher uma unidade de medida adequada à situação.

A utilização de balanças usuais, como a de cozinha ou a de quarto, pode redundar em experiências enriquecedoras no trabalho com esta grandeza. Se com a balança de cozinha se podem trabalhar relações com medidas expressas em gramas, com a balança de quarto podem ser determinados pesos expressos em quilogramas. Com estes valores, os alunos podem elaborar tabelas e gráficos, nos quais os pesos poderão ser organizados por classes, por exemplo, em intervalos de cinco quilos.

Na medida da massa, os alunos devem contactar com diferentes escalas, quer lendo os valores indicados pelos ponteiros, quer resolvendo problemas com diferentes representações de escalas, como as que se apresentam a seguir (figura 27):

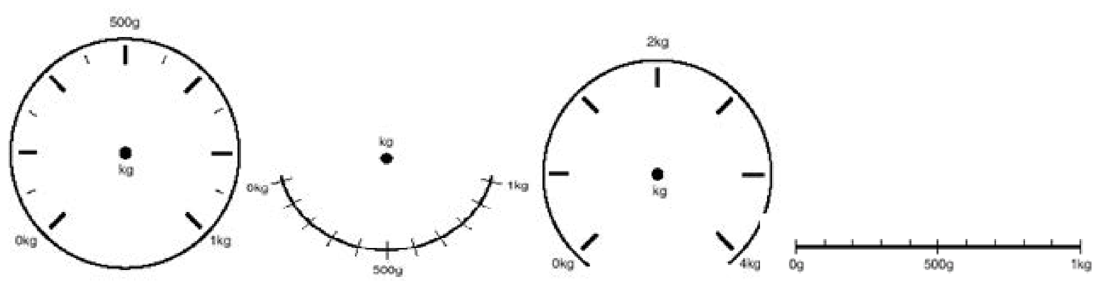


Figura 27: Representações de diferentes escalas usadas em balanças.

Ao realizar medições, o professor deve, por um lado, alertar os alunos para a necessidade

[17] *O sistema internacional de Unidades* (SI) foi criado em 1960 pela 11ªConferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) e adoptado em Portugal pelo Decreto-Lei n.°427/83, de 7 de Dezembro, revisto posteriormente pelo Decreto-Lei nº 238/94, de 19 de Setembro e pelo Decreto-Lei nº 254/2002, de 22 de Novembro, como o sistema legal de unidades de medida.

de tomarem determinados cuidados (nomeadamente, olhar a direito e ter atenção à escala utilizada) para que o resultado dessas medições seja rigoroso e, por outro lado, prevenir os alunos para a existência de erro inerente à medição e que qualquer valor de medida é sempre aproximado. Nesta fase da aprendizagem dos alunos, as balanças automáticas e as digitais, embora mais usuais no dia-a-dia, são as que têm menos interesse no trabalho escolar, principalmente nos primeiros anos, quando os alunos ainda estão a adquirir a noção da grandeza.

É fundamental proporcionar aos alunos oportunidades para estabelecerem relações entre as diferentes quantidades trabalhadas e as unidades usadas, para estimarem e considerarem, também, valores aproximados, de acordo com a situação.

Todo este trabalho contribui para o desenvolvimento, nos alunos, da compreensão da grandeza massa e da sua medida, mas também do sentido de número, dadas as relações numéricas que esse trabalho proporciona.

Tempo

A necessidade de 'contar' o tempo é muito antiga e terá surgido quando os primeiros agricultores verificaram a importância do conhecimento das estações do ano para o sucesso das suas plantações. Os diversos sistemas de contagem do tempo, fundamentados em maior ou menor grau em diferentes fenómenos astronómicos, são chamados de 'calendários'. Pode então dizer-se que o calendário[18] corresponde a um sistema de registo do tempo que estabelece o início, a duração e as divisões de um ano, tomando como unidade básica o dia.

O tempo, tal como as outras grandezas, tem uma dimensão subjectiva, que se traduz na forma como cada sujeito se relaciona e lida com ele. Por exemplo, para uma criança (e também para um adulto) uma hora pode parecer que 'voa' se estiver a fazer algo de que goste muito, enquanto cinco minutos podem parecer uma 'eternidade' se, pelo contrário, estiver a fazer uma coisa de que não goste. Ficar dois minutos em silêncio pode ser muito tempo para uma criança, por vezes, impossível de se conseguir, mas não será muito para um adulto. Assim, a noção do que é muito ou pouco tempo é algo que tem uma dimensão subjectiva e circunstancial, que cria a necessidade da sua medida.

O tempo é uma grandeza contínua, ou seja, não se pode dizer que dois 'instantes' são consecutivos, pois entre dois instantes, quaisquer que sejam, existe uma infinidade de outros instantes intermédios. Trata-se de uma grandeza, contrariamente à maioria das outras grandezas, em que não é possível fazer medições por comparação directa, sendo apenas possível fazê-lo de forma indirecta. No desenvolvimento da noção de tempo são

[18] Ver Fernando Nunes (2006).

importantes noções como: a passagem do tempo, intervalo de tempo e instante de tempo, antes de saber ler/ver as horas. Por vezes, na escola dá-se mais atenção à medida da grandeza tempo antes ainda de os alunos terem desenvolvido satisfatoriamente a sua noção de tempo. Esta noção vai-se desenvolvendo de modo progressivo, através da vivência de várias experiências intuitivas e formais. Simultaneamente, os alunos vão aprendendo a medir o tempo e a usar os respectivos instrumentos de medida. De notar que, expressões como "tanto tempo quanto", "mais tempo que" ou "menos tempo que" fazem parte do vocabulário e das experiências do dia-a-dia das crianças desde cedo, sendo este um contexto que lhes é familiar, embora não seja simples. É importante que os alunos entendam a regularidade que existe na passagem do tempo, ou seja, a sequência sucessiva dos dias, das semanas, dos meses e dos anos, bem como o carácter cíclico de muitos fenómenos naturais e acontecimentos sociais, e de algumas rotinas da vida do seu dia-a-dia, como levantar, tomar o pequeno-almoço e ir para a escola, ou outras sequências, como por exemplo, a sequência de acontecimentos de uma história. Comparar e ordenar intervalos de tempo, que implica saber determinar a duração de tempo entre dois momentos, é um dos aspectos a desenvolver com os alunos. Por exemplo, usar o cronómetro para determinar o tempo gasto em determinada acção realizada por várias crianças (desde que cada uma começa até que acaba) e depois ordenar e comparar os resultados obtidos. Devem também aprender a determinar instantes de tempo segundo diversas unidades de tempo (segundo, minuto, hora) através do uso de instrumentos de medida de tempo e a estabelecer relações entre as diferentes unidades.

A estimativa relacionada com a medida do tempo, da mesma forma que já foi referido a propósito das outras grandezas, constitui uma capacidade fundamental a desenvolver nos alunos, desde os primeiros anos. Estes podem começar por realizar experiências com unidades e instrumentos de medida alternativos, como por exemplo, a ampulheta, ou contar as gotas que caem de um conta-gotas ou as batidas ritmadas do pé. Pode-se também, por exemplo, medir o tempo necessário para dar a volta ao redor da sala de aula ou qualquer outro circuito no interior da escola, utilizando uma ampulheta e batidas com o pé, se necessário, para completar a medição. É importante que a propósito dessas experiências se façam registos, se comparem os resultados e se tirem conclusões. Os alunos podem verificar, por exemplo, que gastam menos tempo se caminharem depressa e mais tempo caso caminhem mais devagar. O desenvolvimento deste tipo de situações e a discussão sobre o que acontece contribuem para que os alunos compreendam a necessidade das unidades e dos instrumentos de medida convencionais. Assim, a realização de experiências utilizando o cronómetro para medir o tempo de duração (intervalo de tempo) de uma dada tarefa, permitindo que os próprios alunos o utilizem, tem interesse nos primeiros anos. Os alunos podem comparar as suas estimativas com as medidas dadas pelo cronómetro. Como a unidade mais acessível às crianças mais pequenas é o segundo dá-se preferência a tarefas relativamente curtas, medidas em segundos. Posteriormente, propõem-se tarefas mais longas que se medem em minutos e também em minutos e segundos, e trabalha-se, igualmente, com períodos de tempo mais longos. Progressivamente, os alunos conseguem avaliar breves intervalos de tempo e adquirem também as noções de presente, passado e futuro.

A utilização do 'despertador/temporizador' na sala de aula para regular o tempo a gastar na realização de tarefas também ajuda os alunos a desenvolverem o seu conceito de tempo e a adquirirem melhor capacidade de o usarem, relacionando o tempo de que dispõem com o tempo que necessitam para realizarem uma dada tarefa. É ainda importante a existência de um relógio na parede da sala de aula, principalmente nos primeiros anos, facto que permite que os alunos explorem e utilizem esse instrumento.

Os alunos devem aprender a trabalhar com unidades de medida como a hora, a meia-hora e o quarto-de-hora e, progressivamente, a determinar as horas, relacionando diferentes unidades. Os ponteiros do relógio constituem um bom contexto para estabelecer conexões com outros temas matemáticos, como por exemplo, os números racionais associando, por exemplo, o quarto de hora à representação $\frac{1}{4}$ ou a meia-hora a $\frac{1}{2}$. Também a noção e representação de ângulo pode ser abordada a partir da posição dos ponteiros do relógio.

Por vezes, as crianças, no início da escolaridade, ainda não têm a noção de que o dia também inclui a noite, ao longo das 24 horas. Propor aos alunos que descrevam tudo o que fazem desde um determinado instante de um dia até chegar ao dia seguinte, passadas 24 horas pode contribuir para a compreensão dessa noção. O que fazem vários alunos da turma pode ser representado numa tabela. Poder-se-á concluir que há um período, mais ou menos comum, em que todos passam a dormir e que esse período é a noite. Em paralelo, pode fazer-se a associação desses momentos com as respectivas horas indicadas no relógio e verificar que durante essas 24 horas o ponteiro das horas dá duas voltas completas.

As relações entre segundos e minutos assim como entre minutos e horas envolvem o número 60, que podem não ser muito acessíveis numa fase inicial, mas são um contexto rico a explorar no 1.º ciclo. A realização e utilização de quadros e tabelas estruturadas em semanas ou meses para registar, por exemplo, o estado do tempo, as presenças e faltas dos alunos ou as suas tarefas comuns em muitas salas de aula podem ser um contexto interessante, desde que exista um trabalho de síntese e análise desses registos.

A consulta de horários diversos (escolares, televisivos, transportes, etc.) e de calendários, é um outro aspecto a trabalhar. Mas, o tipo de trabalho que se faz com estes instrumentos deve ir evoluindo e complexificando-se ao longo do 1.º ciclo. Enquanto nos dois primeiros anos, os alunos precisam de se familiarizar com este tipo de instrumentos, nos dois últimos anos, já podem resolver problemas que impliquem o seu uso em situações que à partida não sejam evidentes e em que seja necessário, para além da sua consulta, estabelecerem e porem em prática estratégias de resolução que os levem à solução de problemas.

A existência de um ou (mais) calendários na sala de aula permite ainda explorações importantes. Por exemplo, em que dia começa um dado mês e em que dia termina, quantos dias tem, qual o número de semanas completas nesse mês, qual o dia da semana de uma certa data (por exemplo, datas de aniversários dos alunos, do Natal, do dia da visita de estudo), que dia vai ser do dia em que se está a uma semana, etc. A divisão do ano em meses pode ser trabalhada relacionando com as mudanças das estações do ano.

A duração de tempo pode ser representada numa linha de tempo rectilínea, mas também pode ser representada numa linha curva ou circular, expressando o carácter cíclico de muitos processos de tempo.

Dinheiro

Desde cedo que as crianças adquirem a noção de que o dinheiro serve para comprar coisas que são necessárias à vida das pessoas e que existem moedas e notas que se utilizam em troca dessas coisas. No entanto, hoje em dia, as crianças não lidam com dinheiro como lidavam há uns anos atrás. Actualmente, mesmo os adultos efectuam poucos pagamentos com dinheiro, recorrendo ao uso de cartões. Porém, é expectável que os alunos quando chegam à escola já conheçam algumas moedas e notas. É importante que o trabalho escolar envolva os alunos em situações que lhes proporcionem a compreensão de relações entre as moedas e as notas, incluindo saberem quantas moedas (ou notas) de um tipo são equivalentes a outra(s) ou são necessárias para completar um dado valor. Na grandeza dinheiro há muitas possibilidades de estabelecer equivalências entre as moedas e as notas. Por exemplo, para trocar uma nota de 50 € por notas de 10 €, é necessário ter 5 notas para obter o mesmo valor. Mas, para trocar 50 € por notas de 5 €, já implica ter 10 notas. Portanto, 10 notas de 5 € equivalem a 5 notas de 10 €. O valor monetário é igual nos dois casos. Este raciocínio é do mesmo tipo do raciocínio usual na medida, embora noutras grandezas seja mais fácil verificar por comparação directa que uma dada unidade usada cabe um certo número de vezes no que se pretende medir, como é o caso, por exemplo, das grandezas comprimento, área ou volume. Por exemplo, 5 vezes 1 centímetro equivale a 10 vezes 0,5 centímetro. O comprimento é o mesmo nas duas situações. Também nas situações anteriores estamos a referir-nos ao mesmo valor em dinheiro.

É importante proporcionar aos alunos, na sala de aula, situações que envolvam compras e vendas, em que os alunos simulem a realização de pagamentos e efectuem trocos, utilizando, por exemplo, réplicas de moedas e notas.

O dinheiro é um excelente contexto para a resolução de problemas no âmbito dos *Números e operações,* com um grande significado no trabalho com os *Números racionais.*

Nesse sentido, embora nos primeiros anos os alunos possam trabalhar com os euros e cêntimos, representando-os como números inteiros, é importante que a partir do 3.º ano de escolaridade, os alunos utilizem a representação decimal em situações progressivamente mais complexas.

Amplitude de ângulos

Uma das noções fundamentais em geometria é a noção de ângulo. Um *ângulo* não é mais do que a união de duas semi-rectas, digamos $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$, ditas *lados do ângulo*, não contidas numa mesma recta e com origem num mesmo ponto, A, dito *vértice do ângulo*. O ângulo de vértice A e lados $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ será notado por $\angle BAC$ ou por $\angle CAB$.

A cada ângulo, podemos associar duas regiões, o interior do ângulo e o complementar deste.

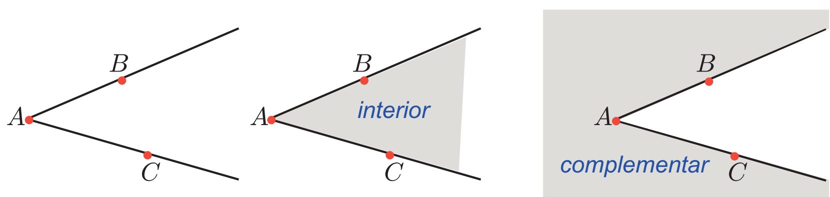


Figura 28: Ângulo, interior do ângulo e seu complementar.

Mais precisamente, dado o ângulo $\angle ABC$, à região obtida pela intersecção do semi-plano (aberto) determinado pela recta AB que contém C com o semi-plano (aberto) determinado pela recta AC que contem B chamamos *interior* do ângulo $\angle ABC$.

A correspondência que a cada ângulo associa o seu interior é uma correspondência unívoca. Deste modo, podemos identificar um ângulo com o seu interior. Sob esta perspectiva, a representação usual de um ângulo é a ilustrada na figura seguinte.

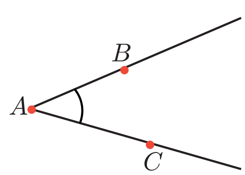


Figura 29: Representação do ângulo $\angle BAC$.

Designemos por $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os ângulos do plano. A medida angular em graus é uma aplicação $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $0 < m(\angle ABC) < 180$, qualquer que seja o ângulo $\angle ABC \in \mathcal{A}$;

(ii) para cada número real $0 < r < 180$ e para cada semi-plano S determinado pela recta AB existe uma e uma só semi-recta $\dot{A}C$ tal que $C \in S$ e $m(\angle BAC) = r$;

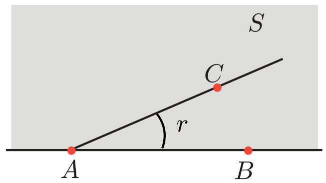


Figura 30: Construção do ângulo $\angle BAC$.

(iii) se D é um ponto interior do ângulo $\angle BAC$ então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$

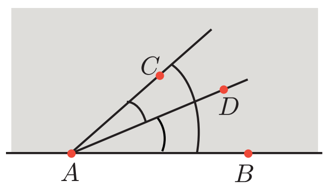


Figura 31: Propriedade aditiva de m.

À semelhança do que fizemos com outras grandezas, podemos definir no conjunto de todos os ângulos do plano a relação "ser congruente a" ou "ser geometricamente igual a" do modo seguinte:

o ângulo $\angle ABC$ é *congruente* ao ângulo $\angle A'B'C'$ e escrevemos $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ se $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$.

Utilizando propriedades das isometrias e a definição de medida angular pode mostrar-se que: *O ângulo $\angle ABC$ é congruente ao ângulo $\angle A'B'C'$ se e somente se existir uma isometria que transforma $\angle ABC$ em $\angle A'B'C'$.*

Se na definição de ângulo relaxarmos a condição de termos duas semi-rectas não contidas numa mesma recta damos lugar a ângulos que são semi-rectas (união de duas semi-rectas coincidentes) e a que chamamos *ângulos nulos* ou rectas (união de duas semi-rectas opostas) e a que chamamos *ângulos rasos*. Nestes casos ampliamos a medida angular que será 0 para os ângulos nulos e 180 para os ângulos rasos.

Uma outra classe de objectos geométricos cruciais ao desenvolvimento da geometria é a dos ângulos orientados que pressupõe a escolha de uma orientação. Um *ângulo orientado* não é mais do que um ângulo onde se identifica o lado origem do ângulo, o lado extremidade do ângulo e a orientação (sentido) escolhida (*positiva* se for a orientação anti-horária, *negativa* se for a orientação horária).

Quando se fala num ângulo orientado sem referirmos a orientação escolhida é pressuposto tratar-se da orientação positiva. Mais, ao usarmos a notação $\angle XYZ$ para ângulo orientado significa de imediato que XY é o lado origem e que YZ é o lado extremidade.

Na figura seguinte estão representados dois ângulos orientados, o ângulo orientado positivamente $\angle BAC$ e o ângulo orientado negativamente $\angle CAB$, que não são iguais.

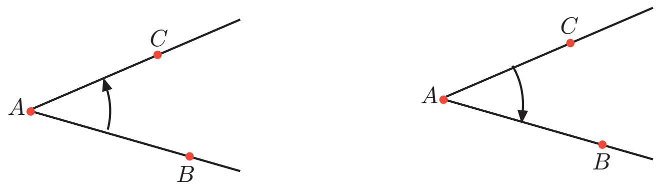


Figura 32: Os ângulos orientados $\angle BAC$ e $\angle CAB$.

Tarefas sobre amplitude de ângulos

Em seguida, apresentam-se duas tarefas em que se explora a grandeza amplitude de ângulos. Esta grandeza só é introduzida explicitamente no 2.º ciclo, embora no ciclo anterior os alunos já trabalhem com ângulos, e de forma intuitiva com a noção de amplitude, quando comparam e classificam ângulos (recto, agudo, obtuso e raso) e identificam ângulos em figuras geométricas. Nestas tarefas, para representarmos a medida do ângulo <AOB, usaremos a notação AÔB.

Tarefa 10: Círculo de papel e amplitude de ângulos

Usando partes de um círculo de papel (sectores circulares, como na figura 33), estima a medida da amplitude de ângulos que podes encontrar em situações do teu quotidiano.

Figura 33: Sectores circulares.

Em muitas situações do nosso dia-a-dia, basta-nos ter o valor aproximado da medida da amplitude de determinados ângulos. Por isso, é necessário apresentar aos alunos situações para estimar a ordem de grandeza da âmplitude de ângulos. Esta tarefa, dirigida a alunos do 2.º ciclo do ensino básico (embora também possa ser adaptada aos do 1.º ciclo), serve de iniciação ao estudo da medida da amplitude de ângulos. Os alunos começam por dobrar um círculo de papel ao meio (ver figura 29). Dessa forma, obtêm um ângulo raso (180°), sendo o prolongamento dos dois raios que formam o diâmetro os lados do ângulo e o centro da circunferência, o vértice do ângulo. Por dobragens sucessivas ao meio, obtêm ângulos com as seguintes medidas de amplitude: 90°(1/4 de círculo), 45°(1/8 de círculo), 22,5°(1/16 de círculo). Com esses valores de referência, os alunos podem fazer estimativas da medida da amplitude de diversos ângulos que surgem em situações do seu quotidiano. Por exemplo, o ângulo formado por: duas varetas consecutivas de um guardachuva; dois raios de uma roda de uma bicicleta; dois dedos consecutivos de uma mão aberta; ponteiros de um relógio; tronco e ramo de uma árvore; duas posições de uma porta que se abre. Os alunos confirmam as estimativas recorrendo ao transferidor. Em complemento a esta tarefa, os alunos podem construir ângulos com determinadas medidas de amplitude e pedir aos colegas para os estimar e também estimar, por exemplo, a medida da amplitude do seu ângulo suplementar.

Tarefa 11: Ângulos internos de um polígono

Investiga se existe alguma relação entre a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono e o seu número de lados.

Esta tarefa, de natureza investigativa, é direccionada aos alunos do 2.º ciclo, tendo como objectivo fazer com que os alunos sejam capazes de resolver problemas que envolvam a medição da amplitude de ângulos e também propriedades de triângulos.

Os alunos iniciam a tarefa por identificar e depois medir a amplitude dos ângulos internos de polígonos que constroem previamente. Os alunos podem realizar este trabalho em papel, recorrendo ao transferidor para a medida das amplitudes dos ângulos, ou a software de geometria dinâmica, como o Geogebra, para a construção dos polígonos e medida dos respectivos ângulos internos.

Neste trabalho de organização da informação recolhida, relativa às medidas das amplitudes dos ângulos internos dos polígonos, é importante sugerir a construção de tabelas, pois dessa forma os alunos encontrarão com mais facilidade uma relação entre o número de lados do polígono e a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos. Por exemplo, podem construir a seguinte tabela:

nome do polígono	n.º de lados do polígono (n)	soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos (s)
triângulo	3	180°
quadrilátero	4	360°=2×180°
pentágono	5	540°=3×180°
hexágono	6	720°=4×180°
heptágono	7	900°=5×180°

Neste trabalho, é natural que os alunos que recorrem ao transferidor para a medição das amplitudes dos ângulos não obtenham medidas exactas. Nesse momento, é importante discutir a questão da precisão dos instrumentos de medida (neste caso, o transferidor) e comparar com estas medidas com as que são obtidas com recurso ao software. A partir da análise da tabela, os alunos podem conjecturar que soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo é múltiplo de 180, resultando do produo do número de lados do polígono menos 2 por 180, ou simbolicamente: $s=(n-2)\times 180$. Esta representação simbólica surge com mais naturalidade no 3.º ciclo, pelo que a tarefa pode ser retomada e ampliada neste ciclo de ensino.

Os alunos, mesmo os do 2.º ciclo, podem fazer uma prova informal desta conjectura. Sabendo que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os alunos concluem que qualquer polígono convexo pode ser dividido num número de triângulos, não sobrepostos, igual ao número de lados do polígono menos duas unidades (uma vez que a partir de qualquer um dos vértices do polígono é possível traçar tantas diagonais quantas o número de lados menos 3 unidades - não é possível traçar uma diagonal unindo ao próprio vértice nem aos dois vértices adjacentes).

Bibliografia

Alsina, C., Burgués, C. e Fortuny, J. M. (1989). *Invitacion a la Didactica de la Geometria.* Madrid: Editorial Sintesis.

Araújo, P. (1998). *Curso de Geometria.* Lisboa: Gradiva.

Caraça, B. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Cederberg, J. N. (2001). *A course in modern geometries.* Springer-Verlag, New York Inc.

Conway, J. H., Burgiel, H. e Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things.* A. K. Peters, Ltd, Wellesley, Massachusetts.

Coxeter, H. (1989). *Introduction to Geometry.* New York, NY: Wiley.

Freudhental, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Gay, David (1998). *Geometry by discovery.* John Wiley & Sons, Inc.

Gavin, M. K., Belkin, L. P., Spinelli, A. M. & St. Marie, J. (2001). *Navigating through Geometry in Grades 3-5.* Reston, Va, National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G. (2007).Toward Comprehensive Perspectives on the learning and Teaching of Proof. F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston, Va, National Council of Teachers of Mathematis.

Henr, M. (1999). L' introduction dês probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géometrie. *Repères IREM, 36,* 15-34.

Houdemet, C. & Kuzniak, A. (2003). Quand deux droits sont "à peu prés" parallèles ou le versant géométriques du 'presque égal". *Revue "Petit X", 61.*Grenoble.

Jacobs, H. R. (1974). *Geometry.* S. Francisco: W. H. Freeman.

Johnston-Wilder, S & Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry.* London:Open University.

Loureiro, C. (2008). *A par e passo*. Dissertação apresentada no âmbito de concurso de provas públicas, não editada.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem.* Princeton: Princeton University Press.

Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry: an introduction to symmetry*. Springer-Verlag, New York Inc.

Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados, *Quadrante*, *1*, 93-112. APM.

Matos, J. M. e Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática, 26*.

Moise, E. (1974). *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Addison-Wesley: London.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (publicado em Inglês em 1989). Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics* (publicado em Português em 2007 pela APM). Reston:NCTM

Oliveira, F. (1995). *Geometria Euclidiana.* Lisboa: Universidade Aberta.

Parzysz; B. (2006). La géométrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi sagit-il?. *"Quaderni di Ricerca in Didattica", n17*, 128-151.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: UA.

Roe, J. (2008). *Elementary Geometry*. Oxford: University Press.

Serra, M. (2008). *Discovering Geometry.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Serra, M. (2003). *Discovering geometry, an investigative approach.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Sítios na Internet

http://www.mathsnet.net/

http://www.historyforkids.org/scienceforkids/math/geometry/

http://www.atractor.pt/

http://www.cut-the-knot.org/

http://nrich.maths.org/public/

http://www.fi.uu.nl/thinklets/

DVD

Apostol, T. *Semelhanças. Teorema de Pitágoras. O Túnel de Samos.* DGIDC e CMAFUL.