ÁLGEBRA NO ENSINO BÁSICO

João Pedro da Ponte

Neusa Branco

Ana Matos

Setembro de 2009

Índice

1. Introdução

A presente brochura constitui um material de apoio ao trabalho dos professores no âmbito do *Programa de Matemática do Ensino Básico*[1]. A Álgebra é um dos quatro grandes temas que, a par com as Capacidades Transversais, são considerados fundamentais, ao longo dos três ciclos. Embora não surja como tema independente no 1.º ciclo, são diversos os aspectos de carácter algébrico que são trabalhados logo nos primeiros anos: a exploração de sequências, o estabelecimento de relações entre números e entre números e operações e o estudo de propriedades geométricas. Nos 2.º e 3.º ciclos, a Álgebra surge como um tema matemático individualizado, sendo o seu propósito principal de ensino o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

O capítulo 2 passa em revista os aspectos mais marcantes do desenvolvimento histórico da Álgebra, enquanto grande tema da Matemática, e discute o conceito de pensamento algébrico. O capítulo seguinte foca diversas orientações gerais para o ensino da Álgebra, nomeadamente aspectos de natureza curricular, abordagens didácticas e o papel da tecnologia, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade.

Os restantes capítulos incidem sobre os principais tópicos da Álgebra trabalhados nos diversos ciclos. Em cada um deles é feita uma discussão sobre conceitos fundamentais e aspectos específicos da aprendizagem dos respectivos conceitos. Esta discussão é acompanhada por diversos exemplos de tarefas, alguns deles incluindo produções de alunos portugueses, que ilustram o tipo de trabalho que pode ser realizado na sala de aula. Em cada exemplo são salientados aspectos importantes na exploração de cada tarefa. Em todos os capítulos indicam-se alguns dos erros e dificuldades usualmente sentidas pelos alunos.

Os capítulos 4 e 5 abordam Relações e Sequências e regularidades, dois tópicos que servem de base a muito do trabalho que se faz em Álgebra, mas que nem sempre recebem a necessária atenção. O capítulo 6, Símbolos e expressões algébricas, dá particular relevância aos diversos usos dos símbolos, ao desenvolvimento do sentido de símbolo e à manipulação algébrica com significado.

As Equações, numéricas e literais, são o foco principal do capítulo 7. Em seguida, o capítulo 8 aborda o conceito de Função, dando atenção às diversas formas de representação e analisando, de forma particular, os diversos tipos de funções que são trabalhados ao longo do ensino básico. Por fim, no capítulo 9, são abordados os tópicos Sistemas de Equações, Equações do 2.º grau e Inequações do 1.º grau que constituem o culminar do trabalho em Álgebra neste ciclo.

Esta brochura organiza-se por tópicos da Álgebra e não por ciclos ou anos de escolaridade. Os professores de todos os ciclos encontrarão aspectos de interesse na maioria dos capítulos. Estes podem ser lidos de modo independente mas, por vezes, existe uma ou outra ideia que se relaciona com questões abordadas em capítulos anteriores. Pelo seu conteúdo, os capítulos 2 e 3, que discutem questões de natureza geral, interessam aos professores de todos os ciclos. O mesmo acontece aos capítulos 4 e 5, que abordam questões fundamentais da Álgebra escolar, pertinentes para o trabalho com os alunos do 1.º ao 9.º ano. O capítulo 6 é especialmente importante para os professores dos 2.º e 3.º ciclos e, finalmente, os capítulos 7, 8 e 9 abordam questões próprias do programa do 3.º ciclo.

Os exemplos apresentados estão escritos numa linguagem para o professor e não numa linguagem própria para apresentar aos alunos na sala de aula, que, de resto, varia substancialmente de ciclo para ciclo. Deste modo, se decidir usar na sua prática lectiva algumas das tarefas ou exemplos aqui apresentados, o professor terá de os adaptar, em termos de linguagem e da informação disponibilizada, às características dos seus alunos.

Para além da leitura individual por parte dos professores, a brochura presta-se a servir de base a momentos de trabalho colectivo nos grupos disciplinares das escolas e agrupamentos. A leitura e discussão de um capítulo e a resolução das tarefas propostas ajudam a ajustar a planificação das unidades relacionadas com os aspectos discutido. Os professores podem, também, tirar partido da organização da brochura para discutir a articulação dos diversos tópicos do programa entre os três ciclos.

Agradecemos vivamente a todos os professores que nos deram sugestões tendo em vista o aperfeiçoamento deste documento e esperamos que possa ser útil para todos aqueles que procuram interpretar e pôr em prática as orientações do *Programa de Matemática*, nomeadamente na Álgebra.

2. Álgebra e pensamento algébrico

A Álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática, ao lado da Geometria e da Análise Infinitesimal. Em Portugal, até meados do século XX tinha um lugar incontestado nos programas do ensino básico e secundário. No entanto, após o período da Matemática moderna, desapareceu como grande tema do currículo. Nos últimos anos, porém, começou a falar-se com insistência da sua importância. Subjacentes a estas mudanças estão diferentes visões da Álgebra, do que constitui o pensamento algébrico e do seu papel no ensino. Neste capítulo faz-se uma breve resenha do desenvolvimento da Álgebra, desde as suas origens à chamada Álgebra clássica e desta à Álgebra moderna, e contrastam-se diferentes visões da Álgebra escolar.

2.1. A Álgebra, da antiguidade ao presente

Podemos dizer que as origens da Álgebra situam-se na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas que já são usadas na Antiguidade – no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia. Por exemplo, o célebre papiro de Amhes/Rhind é essencialmente um documento matemático com a resolução de diversos problemas, que assume já um marcado cunho algébrico[2].

Pouco a pouco vai-se definindo o conceito de equação e a Álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações. Um autor da Antiguidade, por alguns considerado o fundador da Álgebra, é Diofanto (c. 200-c. 284), que desenvolve diversos métodos para a resolução de equações e sistemas de equações num estilo de linguagem conhecido como "sincopado". Deste modo, os enunciados dos problemas, que tinham começado por ser expressos em linguagem natural, passam a incluir pequenas abreviações.

O termo "Álgebra" só surge alguns séculos mais tarde, num trabalho de al-Khwarizmi (790-840), para designar a operação de "transposição de termos", essencial na resolução de uma equação[3]. Lentamente vai-se avançando na resolução de equações incompletas e completas dos 1.º e 2.º graus, embora usando formas de representação dificilmente reconhecíveis ao leitor moderno. De equações de grau superior ao 2.º, sabem resolver-se apenas casos particulares.

No século XVI, com François Viète (1540-1603), dá-se uma transformação fundamental, entrando-se numa nova etapa, a da Álgebra simbólica. Nessa mesma época, dão-se grandes progressos na resolução de equações. É Scipione del Ferro (1465-1526) quem primeiro consegue resolver a equação geral do 3.º grau. No entanto, del Ferro não publica os seus resultados, e a mesma descoberta é feita igualmente por Tartaglia (1500-1557) e publicada por Cardano (1501-1576), na sua *Ars Magna*. Finalmente, a equação geral do 4.º grau é resolvida por Ferrari (1522-1565). O sucesso destes matemáticos italianos do Renascimento marca um momento importante na história da Matemática pois, como referem Kolmogorov et al. (1977), é a primeira vez que a ciência moderna ultrapassa claramente os êxitos da Antiguidade. Note-se, também, que são os processos de resolução das equações algébricas do 3.º grau que fazem surgir a necessidade da introdução de um novo tipo de números – os números complexos.

Uma questão central da teoria das equações é a de saber quantas soluções pode ter uma equação de grau n (ou, noutros termos, quantos zeros pode ter uma função polinomial de grau n). Viète indica equações de grau n com n soluções, mas o primeiro matemático a afirmar que uma tal equação tem sempre n soluções é Albert Girard (1595-1632), em 1629, num livro intitulado *Invention nouvelle en l'Algèbre*. Este teorema, actualmente designado como Teorema Fundamental da Álgebra, tem diversas propostas de demonstração, todas elas refutadas, numa história muito interessante em que intervêm matemáticos famosos como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Finalmente, a demonstração é feita de modo considerado satisfatório por Argand (1768-1822) e por Gauss (1777-1855)

Ao mesmo tempo que se desenvolve a teoria das equações algébricas, vai-se desenvolvendo também o conceito de função como uma correspondência entre os valores de duas variáveis. As primeiras funções consideradas são naturalmente as algébricas, ou seja, as funções polinomiais e racionais (que resultam da divisão de um polinómio por outro). No entanto, depressa se passam a considerar funções mais complexas, ditas transcendentes, onde intervêm operações como radiciação e exponenciação, logaritmos e razões trigonométricas, bem como condições de natureza geométrica e mecânica, por exemplo, relativas a movimentos. No desenvolvimento da teoria das funções, os conceitos de infinitésimo e derivada vão ocupar um lugar central, dando origem a um novo ramo da Matemática – a Análise Infinitesimal.

Dois importantes resultados marcam a etapa final do desenvolvimento da teoria das equações algébricas, encerrando o que podemos designar por período da “Álgebra clássica”. O primeiro resultado é prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.º, dada por Abel (1802-1829). O segundo é a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4.º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811-1832). É este matemático quem, num trabalho célebre, considera pela primeira vez a estrutura de grupo.

A partir de meados do século XIX a Álgebra conhece uma evolução profunda. O estudo das equações algébricas esgota-se com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos algébricos gerais para a resolução de equações de grau superior ao 4.º. A partir dessa altura, a atenção dos matemáticos volta-se cada vez mais para o estudo de equações não algébricas, ou seja, para o estudo de equações diferenciais, tanto ordinárias como com derivadas parciais e para o estudo de equações envolvendo objectos matemáticos como funções. Outros matemáticos dedicam-se a partir daí ao estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel e corpo, temas que passam a constituir o núcleo central da “Álgebra moderna”.

2.2. Diferentes perspectivas da Álgebra e da Álgebra escolar

Em termos epistemológicos, a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objectos com que esse campo trabalha mais directamente. Podemos então perguntar: Quais são os objectos fundamentais da Álgebra? Há trezentos anos a resposta seria certamente: “expressões e equações”. Hoje em dia, essa resposta já não satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

No entanto, a visão da Álgebra como consistindo no trabalho com expressões continua a persistir. A perspectiva prevalecente dos que estudaram este tema é que se trata de um conjunto de *regras de transformação de expressões* (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais…) e processos de resolução de equações do 1.º e 2.º grau e de sistemas de equações. Esta perspectiva é perfeitamente coerente com a terminologia usada nos programas da década de 1990 que, em vez de falarem em "Álgebra", falavam apenas em "cálculo" ou "cálculo algébrico"[4]. Trata-se de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período "clássico" da Álgebra (estudo de funções).

Uma perspectiva assumida por alguns autores, e que não se diferencia muito da anterior, é a de que o objecto central da Álgebra são os *símbolos*. Este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica. Deste modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas. Esta perspectiva não anda longe da concepção formalista da Matemática – bem popular no início do século XX, com o logicismo de Gottlob Frege e Bertrand Russell e o formalismo de David Hilbert – segundo a qual a Matemática é essencialmente um jogo de símbolos sem significado.

A verdade é que não podemos minimizar a importância dos símbolos. Esta importância é reconhecida, por exemplo, pelo matemático americano Keith Devlin quando defende que "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria"[5]. A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas.

No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstracto, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios, como sucedeu no movimento da Matemática moderna.

Este movimento foi fortemente criticado por Hans Freudenthal[6], fundador da corrente da Educação Matemática Realista. Na sua perspectiva, na escola, os símbolos literais devem ter algum significado, pelo menos numa fase inicial, por analogia com o que sucedeu no desenvolvimento histórico da Álgebra. Além disso, Freudenthal interpreta a linguagem algébrica como um sistema regido por um vasto conjunto de regras sintácticas que permitem desenvolver alguma acção. Compara a linguagem corrente com a linguagem algébrica e sublinha a complexidade desta e a quantidade de interpretações incorrectas que podem surgir na sua aprendizagem. Com esta ênfase na linguagem algébrica e nos símbolos, numa fase inicial associados a referentes, continua a dar uma importância primordial ao simbolismo e à progressiva formalização, mas apresenta já uma outra concepção da Álgebra.

Mais recentemente, principalmente desde a década de 80 do século passado, tem vindo a emergir uma outra visão da Álgebra. Muitas discussões realizadas desde então procuram delimitar o que deve ser incluído neste campo e, em particular, na Álgebra que se ensina na escola básica e secundária. Dessas discussões surgiu igualmente o interesse pela caracterização do *pensamento algébrico*. Um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput[7], para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Num texto mais recente, de 2008, Kaput[8] refere de novo estes cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como "aspectos nucleares" (*core aspects*) da Álgebra, e considerando os três últimos como "ramos" (*strands*) deste domínio com expressão na Matemática escolar.

Podemos então dizer que o grande objectivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso. Esta é a perspectiva que está subjacente ao *Programa de Matemática*[9]. É também a perspectiva que o NCTM[10] apresenta quando diz que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções,
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos,
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas,
- Analisar a variação em diversos contextos.

Deste modo, o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido de símbolo" (*symbol sense*), como diz Abraham Arcavi[11], que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objectos. Ou seja, no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objectos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objectos.

A perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico acima apresentada reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas.

Podemos dizer que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas (Quadro 1). A primeira vertente – representar – diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objectos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objectos). Tal como nos outros campos da Matemática, um aspecto importante do raciocínio algébrico é o deduzir. Finalmente, na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objectos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

3. Orientações para o ensino da Álgebra

As orientações curriculares e didácticas para o ensino da Álgebra têm mudado profundamente nos últimos anos. Neste capítulo mostramos como, por um lado, o foco da atenção se tem deslocado de uns objectos para outros: expressões, equações, funções, estruturas matemáticas. Por outro lado, indicamos como tem também variado a perspectiva sobre onde se deve centrar a actividade do aluno na aprendizagem deste tema. E, finalmente, mostramos que, tal como tem acontecido noutras áreas do currículo, o desenvolvimento de novas tecnologias tem colocado novos desafios ao ensino-aprendizagem da Álgebra.

3.1. Conceitos fundamentais do currículo

Os elementos centrais na abordagem curricular têm variado ao longo dos tempos e, ainda hoje, variam de país para país. Considerando os conceitos fundamentais na Álgebra clássica, distinguimos três grandes temas. O primeiro é a manipulação de expressões algébricas, envolvendo, nomeadamente monómios, polinómios, fracções algébricas e radicais. O segundo é a resolução de equações, inequações e sistemas, incluindo equações numéricas e literais dos 1.º e 2.º graus, inequações dos 1.º e 2.º graus e sistemas de equações e inequações. Finalmente, o terceiro é o trabalho elementar com funções, sem recorrer ao conceito de derivada[12], onde se incluem as funções linear e afim (não linear)[13] de proporcionalidade inversa, quadrática, homográfica e funções irracionais. Notemos que as equações, sistemas e desigualdades são casos especiais de expressões, onde intervêm situações de igualdade ou desigualdade e que, além disso, a noção de função se relaciona estreitamente com a noção de equação ($y = f(x)$ é uma equação que representa uma função). Há cerca de um século, os manuais davam grande destaque às expressões, que eram estudadas em detalhe antes do início do estudo das equações, estando as funções remetidas para um lugar secundário. Nos nossos dias, cada vez mais se dá destaque ao conceito de função, tendo as expressões que são apresentadas aos alunos conhecido uma grande simplificação. Alguns autores defendem que o papel das funções devia ser ainda mais reforçado do que aquilo que já é habitual nos nossos dias[14].

Note-se, ainda, que as estruturas algébricas, tema fundamental do período da Álgebra moderna, foram muito valorizadas no movimento da Matemática moderna. Estudavam-se, de forma implícita, diversas estruturas algébricas (grupo aditivo dos inteiros, corpo dos racionais, grupo das rotações em torno de um dado ponto, espaço vectorial dos vectores livres no plano, etc.), verificando a natureza fechada das operações, a existência de elemento neutro, de inverso para cada elemento e das propriedades comutativa, associativa e distributiva. Estudavam-se mesmo algumas estruturas de forma explícita, como grupóide, grupo, anel e corpo. O balanço negativo que se fez deste movimento levou a secundarizar estes conceitos no currículo escolar. No entanto, como vimos no capítulo anterior, a ideia de dar novamente ênfase às relações e estruturas tem vindo a ganhar terreno. Será necessário, no entanto, não repetir os erros cometidos nos anos de 1960-70, que tornaram o estudo das estruturas muito pouco interessante para os alunos.

Hoje em dia, símbolos, expressões algébricas, equações, sistemas, inequações e funções continuam a ter um papel central no currículo da Álgebra escolar. No entanto, não surgem necessariamente do mesmo modo do que no passado, pois verifica-se uma maior ênfase na noção de função e alguma simplificação na natureza das expressões algébricas e equações com que se trabalha. Além disso, surgem agora com maior ênfase o estudo de sequências e as actividades de modelação. Existe, também, um movimento no sentido de promover uma iniciação ao pensamento algébrico desde os 1.º e 2.º ciclos, preparando o terreno para as aprendizagens posteriores.

3.2. Abordagens didácticas

Em estreita ligação com a questão dos conceitos centrais no ensino-aprendizagem deste tema surgem as abordagens didácticas. A este respeito, devemos notar que o ensino da Álgebra elementar tem conhecido mudanças significativas através dos tempos.

A primeira corrente corresponde à *visão letrista*, na expressão de Rómulo Lins e Joaquin Giménez[15], que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão "pobre", em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos apenas por treino e prática, e tem uma versão "melhorada" segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos como modelos analógicos, de carácter geométrico (como figuras, objectos) ou físico (como a balança[16]). Com estes apoios intuitivos procura dar-se significado às manipulações, o que raramente se consegue, dada a preocupação central com os aspectos sintácticos. Esta perspectiva assume que a Álgebra constitui um instrumento técnico para a resolução de problemas mais poderoso que a Aritmética e coloca a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões – actividade que Dario Fiorentini, Ângela Miorim e António Miguel[17] designam de *transformismo algébrico*. O pressuposto é que se o aluno dominar essas regras, posteriormente é capaz de as aplicar a situações concretas.

Nesta abordagem, as situações extra-matemáticas têm um papel secundário. Nos manuais de há um século tais situações apenas surgem nos capítulos de "Problemas" dos 1.º e 2.º graus, sendo consideradas como simples campo de aplicação. Nos manuais actuais estas situações têm uma presença muito mais significativa, servindo muitas vezes de ilustração na apresentação dos conceitos.

A segunda corrente corresponde à *visão estruturalista* subjacente ao movimento da Matemática moderna. Para esta tendência, a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou das transformações geométricas. No trabalho com expressões algébricas e equações, dá-se especial atenção às propriedades estruturais para fundamentar e justificar as transformações a efectuar. Tal como no caso anterior, as situações extra-matemáticas têm um papel secundário, de simples ilustração ou aplicação.

Finalmente, uma terceira corrente procura ultrapassar as limitações das duas anteriores, preservando, no entanto, os respectivos contributos. Assim, procura recuperar-se o valor instrumental da Álgebra, mas sem a reduzir à resolução de problemas susceptíveis de serem resolvidos através de uma equação ou um sistema de equações. Procura dar-se ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos levando os alunos a "pensar genericamente", percebendo regularidades e explicitando essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas e a "pensar funcionalmente", estabelecendo relações entre variáveis. Procura agora valorizar-se a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. Trata-se, no fundo, de promover o *desenvolvimento do pensamento algébrico*, tal como referimos no capítulo anterior. Esta perspectiva traduz-se num movimento que se desenha desde o início da década de 1980 que visa a revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar. Isso passa por entender a Álgebra de uma forma ampla e multifacetada, valorizando o pensamento algébrico e tornando-o uma orientação transversal do currículo, tal como acontece desde há largas dezenas de anos com o pensamento geométrico. Tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo significa, como sugerem James Kaput e Maria Blanton[18]:

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;
- Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objectos formais para o pensamento algébrico;
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º ciclo.

Esta terceira corrente é a que informa o *Programa de Matemática*. Nela, as situações extra-matemáticas têm um papel importante como ponto de partida para a construção de modelos e exploração de relações. Mais do que simples ilustração ou aplicação, é nelas que os alunos encontram os elementos com os quais constroem representações e modelos para descrever fenómenos e situações, que estão na base de novos conceitos e relações matemáticas. Esta corrente favorece uma iniciação ao pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, através do estudo de sequências e regularidades (envolvendo objectos diversos), padrões geométricos, e relações numéricas associadas a importantes propriedades dos números[19].

Uma questão que atravessa todas as correntes anteriores é a actividade que os alunos realizam. Nas duas primeiras correntes, esta actividade traduz-se essencialmente na resolução de exercícios e eventualmente, alguns problemas. O que varia é o foco das tarefas propostas – expressões, equações e funções, no primeiro caso, conjuntos, grupos, espaços vectoriais, no segundo. Na terceira corrente, a actividade a realizar pelo aluno assume necessariamente outra natureza, desenvolvendo-se a partir de tarefas de cunho exploratório ou investigativo, seja em contexto matemático ou extra-matemático. É esta perspectiva que procuramos ilustrar nos capítulos seguintes desta brochura.

3.3. Papel da tecnologia

Outra questão, ainda, diz respeito ao papel da tecnologia, nomeadamente calculadoras e computadores. Os alunos devem poder usar calculadora simples no seu trabalho em Álgebra? Devem poder usar algum tipo de *software*? Se sim, com que objectivos? Com que cuidados?

Um dos tipos de *software* mais usados no ensino da Álgebra é a folha de cálculo (como o Excel). A folha de cálculo é um programa relativamente simples, podendo ser usada por alunos dos 2.º e 3.º ciclos, tal como indica o *Programa de Matemática*. Permite criar com facilidade tabelas com valores que seguem uma determinada lei de formação, a começar pela sequência dos números naturais, e permite relacionar valores em diferentes linhas (ou colunas). Permite, ainda, criar representações gráficas de conjuntos de valores. No entanto, usa uma representação algo distante da habitual na Matemática escolar, pois as fórmulas ou expressões têm um aspecto diferente das que usualmente encontramos nos livros ou escrevemos com papel e lápis. Além disso, estas expressões ficam remetidas para segundo plano, não aparecendo directamente visíveis nas suas células. Diversas investigações mostram que o uso da folha de cálculo ajuda os alunos a interiorizar a noção de variável e a desenvolver a sua capacidade de resolver certos tipos de problemas. No entanto, para alguns aspectos da aprendizagem da Álgebra, como a resolução de equações, a folha de cálculo não parece ter um efeito visível[20].

A calculadora gráfica tem características próximas da folha de cálculo. No entanto, enquanto a folha de cálculo dá especial saliência às tabelas e valores numéricos, a calculadora gráfica dá especial saliência aos gráficos de funções. Trata-se de uma ferramenta que pode ser muito útil para estudar as funções lineares, afins (não lineares), de proporcionalidade inversa e quadráticas simples, previstas no programa, sendo, no entanto, necessário ter especial cuidado na definição das janelas de visualização.

Recentemente, surgiram novos programas que combinam potencialidades para o trabalho em Álgebra e Geometria, como o *GeoGebra*[21]. Estes programas, tal como a calculadora gráfica, permitem relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráfica e em tabela e apresentam os objectos matemáticos numa representação mais próxima da usual. Têm, por isso, grandes potencialidades para o trabalho a realizar no 3.º ciclo do ensino básico.

Existem também programas específicos, para trabalhar este ou aquele tópico ou conceito, de que os exemplos mais conhecidos são os *applets*, muitos dos quais disponíveis na Internet. Estes programas, que por vezes assumem a forma de jogos, são muitas vezes muito úteis para promover a aprendizagem de aspectos específicos da Álgebra.

Finalmente, é de referir a existência de programas de cálculo simbólico ou Álgebra computacional[22] (como o DERIVE). Estes programas permitem fazer todo o tipo de manipulação algébrica, desde a simplificação de expressões, à resolução de equações e sistemas, bem como cálculos mais avançados, como derivação e integração de funções e têm sido usados em diversos países com alunos dos ensinos superior e secundário e, por vezes, até com alunos mais novos.

Estas tecnologias favorecem o trabalho com diferentes formas de representação – promovendo o desenvolvimento da noção de variável e a visualização das formas simbólicas das funções. Representam, por isso, recursos de grande valor para a aprendizagem da Álgebra. No entanto, só por si, o seu uso não garante a aprendizagem dos alunos. Por isso, é necessário saber quando e como devem estes usar a tecnologia. Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos "métodos tradicionais", baseados no papel e lápis, ou devem aprendê-los, desde o início, usando estes instrumentos? E com que propósito devem usar a tecnologia – para confirmar os resultados já obtidos com métodos de 'papel e lápis' ou como instrumento de exploração?

A resposta a estas questões depende muito da situação – da familiaridade que os alunos têm com os instrumentos tecnológicos, própria do seu meio cultural, dos seus interesses e preferências, mas também dos recursos existentes na escola e da experiência do próprio professor. Com as mudanças aceleradas que ocorrem na sociedade, muitos professores reconhecerão que uma boa resposta hoje, para uma certa turma, pode não o ser amanhã, para outra turma. O recurso ao 'papel e lápis' também tem os seus pontos fortes – nomeadamente a possibilidade de visualizarmos em simultâneo uma variedade de registos. Por isso, o uso de calculadoras e de *software* matemático não deve significar menosprezo por este suporte de trabalho. A calculadora comum pode ser muito útil no estudo de regularidades numéricas, em especial em situações de iteração de uma operação. A calculadora gráfica, pelo seu lado, pode ser muito útil no estudo de diversos tipos de funções. A folha de cálculo e programas como o *GeoGebra* podem servir de base à resolução de problemas e modelação de situações, constituindo importantes suportes para a aprendizagem.

Deve notar-se que a tecnologia tem muitas potencialidades mas também tem os seus problemas. Por exemplo, uma potencialidade importantíssima da calculadora gráfica é o facto de relacionar expressões e gráficos, o que pode dar aos alunos *feedback* visual ilustrando vários aspectos de um mesmo objecto. Outra potencialidade não menos importante é que a calculadora realiza o trabalho mecânico e favorece a realização de explorações e investigações. Estas potencialidades têm um reverso problemático: as representações gráficas não são transparentes, por isso, compreendê-las e usá-las pressupõe uma aprendizagem não trivial – por exemplo, reconhecendo que as escalas dos dois eixos de coordenadas podem ter ou não a mesma unidade e que o aspecto de um gráfico depende muito da janela de visualização utilizada. Outro exemplo, ainda, refere-se ao facto já aludido dos instrumentos tecnológicos usarem uma forma de representar as expressões algébricas e equações diferente da usual, o que cria aos alunos dificuldades acrescidas de interpretação. Finalmente, o facto do *software* e da calculadora terem a sua sintaxe e regras de processamento próprios é também um factor potencial de dificuldades e incompreensões dos alunos, se o professor não se assegurar de que estes conhecem efectivamente o modo como funcionam os instrumentos que têm à sua disposição. Assim, parte destas dificuldades resultam da tensão entre o currículo usual e a tecnologia[23], e outra parte resulta do facto do professor muitas vezes não assumir que ensinar os alunos a usar correctamente a tecnologia que usam na aula de Matemática faz parte integrante do seu papel profissional.

4. Relações

O trabalho envolvendo relações tem início no 1.º ciclo, no tema Números e operações. Estabelecem-se relações entre números e promove-se a compreensão das operações, das suas propriedades e das relações entre diferentes operações. Nos primeiros anos, os alunos devem descrever e representar as relações que identificam usando linguagem natural e, progressivamente, usando também alguns símbolos matemáticos. Uma importância especial assume, logo desde o início, a noção de igualdade. No 2.º ciclo, procura-se que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar relações e de as descrever recorrendo a linguagem simbólica. Esta primeira abordagem à identificação de relações e à sua representação contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, preparando-os para a compreensão da linguagem algébrica. No 3.º ciclo, trabalha-se com relações matemáticas mais complexas como funções e condições envolvendo expressões algébricas (equações, sistemas de equações e inequações).

4.1. Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

4.1.1. Relação de igualdade e uso do sinal de igual

1. Igualdade numérica. Em Matemática, a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, tendo um significado muito mais próximo de "equivalência" do que de "identidade". Na identidade matemática existe uma coincidência total entre dois objectos – um objecto só é idêntico a si mesmo. Em contrapartida, a igualdade ou equivalência matemática é sempre relativa apenas a uma certa propriedade.

Em termos matemáticos, a relação de igualdade é uma relação de equivalência. Isso quer dizer que é simétrica (se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos *a* e *b*), é reflexiva ($a = a$, para todo o elemento *a*) e é transitiva (se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ para quaisquer elementos *a*, *b* e *c*). Aos poucos os alunos devem conseguir reconhecer e usar estas propriedades. Na expressão numérica $5 + 2 = 7$, os termos à direita ('7') e à esquerda (‘$5+2$’) do sinal de igual são diferentes (não existe identidade entre eles), mas representam o mesmo número (são equivalentes).

Usamos a noção de igualdade com vários objectivos. Um deles é para representar o resultado de uma operação aritmética. Assim, ao dizermos que $5+2=7$, estamos a dizer que se tivermos um conjunto com 5 elementos e o reunirmos com um conjunto com 2 outros elementos obtemos um conjunto com 7 elementos. A expressão numérica $5+2=7$ indica que 7 é o resultado da adição de 5 com 2. Mas também indica que existe o *mesmo número* de elementos na reunião de dois conjuntos, um com 5 e outro com 2 elementos, e num conjunto com 7 elementos. É a propriedade “ter o mesmo número de elementos” que justifica o uso do sinal de igual nesta expressão.

O sentido do sinal de igual como resultado de uma operação é largamente usado nos primeiros anos. No entanto, é fundamental que não se perca o sentido mais geral deste sinal como estabelecendo uma equivalência entre duas expressões numéricas. Os alunos devem, por isso, ser capazes de começar por reconhecer igualdades muito simples. Contudo, o professor deve ter em conta que estas igualdades não devem surgir apenas do modo que é mais habitual, ou seja, na forma $a+b=c$, mas também como $c=a+b$. Os alunos podem, assim, começar por reconhecer diferentes formas de representar 7 através de igualdades numéricas:

$$7=1+6,\ 7=2+5,\ 7=3+4,\ 7=4+3,\ 7=5+2,\ 7=6+1.$$

O reconhecimento do zero leva a juntar novas igualdades à lista anterior:

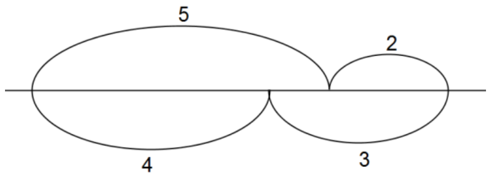
$$7=0+7,\ 7=7+0.$$

Os alunos podem investigar as diferentes decomposições dos números, usando expressões numéricas para as representar e observando a estrutura dessas expressões. Por exemplo:

“Família do 7”: $7+0=6+1=5+2=4+3=3+4=2+5=1+6=0+7$

“Família do 12”: $12+0=11+1=10+2=9+3=8+4=7+5=6+6=5+7$

A utilização da recta não graduada pode ajudar a representar estas relações, como mostra a figura:



Progressivamente, podem trabalhar-se igualdades mais complexas, como, por exemplo:

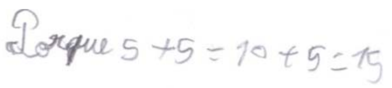
a) Escrever $3+5$ como uma adição de dois números de todas as formas possíveis ($3+5=0+8=1+7=...$);

b) Escrever 9 como uma adição de três números todos diferentes uns dos outros ($9=8+1+0=7+2+0=6+3+0=5+4+0=6+2+1=5+3+1=...$).

Situações análogas envolvendo igualdades podem ser exploradas, a seu tempo, para as operações de multiplicação, subtracção e divisão. Em qualquer caso, o professor deve ser muito cuidadoso com o modo como o sinal de igual é utilizado nestas expressões. Este sinal representa sempre equivalência entre a expressão que "está antes" e a que "está depois". Deste modo, numa expressão ligada por vários sinais de igual, estamos a dizer que o primeiro termo é equivalente ao último termo.

Estes dois modos de encarar o sinal de igual – processual e estrutural – levam Carolyn Kieran[24] a distinguir entre pensamento aritmético e pensamento algébrico. O pensamento aritmético é marcado pelo cálculo – realizam-se operações, procurando saber qual o respectivo resultado. O pensamento algébrico é marcado pela atenção às estruturas e às relações que estão na sua base. Para a autora, os alunos começam por uma concepção processual das operações e relações e podem desenvolver progressivamente uma concepção estrutural dos números, das operações com números e de outros objectos matemáticos. Um aspecto fundamental desta passagem da concepção processual para a concepção estrutural tem a ver com o entendimento do sinal de igual. Este sinal, numa perspectiva processual, indica a realização de uma operação, e, numa perspectiva estrutural, remete para uma relação de equivalência.

De um ponto de vista processual, o sinal de igual assume um significado de operador direccional. Por exemplo, na situação $5+7=12$ o aluno pode dizer "adicionei 5 e 7 e obtive 12" ou, simplesmente, "5 mais 7 dá 12". Este é o principal modo como, nos primeiros anos de escolaridade, se trabalha com este sinal. Com frequência, na resolução de um problema, os alunos realizam operações de um modo sequencial, da esquerda para a direita, usando o sinal de igual tanto como “separador” entre dois raciocínios como para introduzir um novo resultado, a partir de valores numéricos anteriores[25]. A seguinte expressão, escrita por um aluno do 2.º ano, exemplifica esta situação:



Aluno: São quinze pares porque cinco mais cinco é igual a dez e dez mais cinco é igual a quinze.

Representação adequada:

$$5 + 5 = 10$$
$$10 + 5 = 15$$

Karen Falkner, Linda Levi e Thomas Carpenter[26] identificaram, em alunos do 1.º ao 6.º ano, uma fortíssima incidência na perspectiva processual. Os autores questionaram os alunos sobre o número que deveria ser colocado no quadrado de modo a tornar verdadeira a expressão numérica $8 + 4 = \square + 5$. A questão era de escolha múltipla, sendo dadas as possibilidades de resposta 7, 12 e 17. Embora a resposta correcta seja 7, a maioria dos alunos indicou a resposta 12. Na verdade, a resposta correcta foi indicada apenas por 5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos, por 9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos e por 2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos. Estes resultados mostram que a concepção processual do significado do sinal de igual prevalece de maneira extremamente forte na maioria dos alunos dos primeiros anos. É, portanto, necessário propor aos alunos situações que promovam uma compreensão da equivalência entre as expressões de ambos os lados do sinal de igual e a análise e comparação dessas mesmas expressões.

2. Os diversos significados do sinal de igual[27]. Note-se que o significado do sinal de igual depende da situação em que este aparece. Já vimos que, numa perspectiva processual, este sinal pode ter um significado de operador, indicando uma operação a realizar (e o seu resultado). Surge em situações aritméticas como $7 + 5 = 12$ ou $8 \times 3 = 24$ e na simplificação de expressões algébricas, como $3x - 5(2 - x) = 8x - 10$ (lida da esquerda para a direita). Além disso, pode indicar uma equivalência entre dois objectos, que podem ser números ou expressões numéricas, como $8 + 4 = 7 + 5$, ou expressões algébricas como $a - (-b) = a + b$ e $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ (igualdades que são válidas quaisquer que sejam os números a e b).

No entanto, o sinal de igual pode assumir ainda outros significados. Por exemplo, pode surgir em equações, como por exemplo $8 + x = 18$. Aqui, este sinal identifica uma possível equivalência entre expressões para certos casos, ou seja, coloca a pergunta se as expressões dadas nos dois membros "podem ser equivalentes, para algum valor de x". Finalmente, o sinal de igual pode ainda ser usado para definir uma relação funcional, como, por exemplo, em $y = 2x + 7$, sendo x um número natural entre 1 e 10. O sinal de igual assinala aqui a relação de dependência entre duas variáveis.

A natureza da relação algébrica em cada um dos quatro casos indicados é bastante diferente devido à natureza dos objectos que estão relacionados pelo sinal de igual e, principalmente, do objecto global que temos pela frente – um cálculo, a afirmação de uma relação de equivalência, uma pergunta acerca dos objectos que satisfazem uma relação de equivalência, e uma função estabelecendo uma correspondência entre dois conjuntos. Como indicam Jean-Philippe Drouhard e Anne Teppo[28], a discussão acerca dos diferentes significados do sinal de igual pode ajudar os alunos a construir ligações relacionais entre objectos matemáticos e símbolos algébricos.

3. Proporcionalidade como igualdade entre duas razões. A proporcionalidade directa traduz uma igualdade entre duas razões: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tópico que é trabalhado no 2.º ciclo. Os principais problemas que se colocam são de valor omisso – dados três termos de uma proporção, descobrir o quarto termo – e de comparação – será que duas razões estão na mesma proporção? Dados os quatro termos de uma proporção ou dadas informações sobre uma situação contextualizada, os alunos devem saber dizer se se trata de uma situação de proporcionalidade directa ou de um outro tipo de relação.

Note-se, contudo, que já no 1.º ciclo os alunos devem resolver problemas que envolvem o raciocínio proporcional, explorando, por exemplo, sequências e tabelas, abordagem que constitui a base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade, como ilustramos no capítulo sobre Sequências. No 3.º ciclo, os alunos continuam a trabalhar com situações de proporcionalidade directa, encarada agora como uma função linear, como mostramos no capítulo sobre Funções.

4.1.2. Relação de desigualdade

Para além da relação de igualdade (representada por =), os alunos devem contactar também com as relações de ordem ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) e de diferente ($\neq$). Particular atenção deve ser dada, logo desde o 1.º ciclo, à utilização dos símbolos $<$ e $>$.

Numa fase inicial, as expressões envolvendo relações de desigualdade devem ser muito simples, pois o que se pretende é que os alunos percebam a natureza destas relações – não é desenvolver técnicas de resolução de inequações. Será importante que os alunos percebam desde logo que a solução de uma condição do tipo $\square < 10$ é um conjunto com diversos elementos. Devem também perceber a afinidade entre a relação de menor e a relação de maior, ou seja, que tanto faz dizer que $2 < 5$ como dizer que $5 > 2$.

Recorde-se que inicialmente os alunos conhecem os números naturais e o zero – são, portanto, estes os valores numéricos que nos primeiros anos podem ser dados como soluções para questões envolvendo desigualdades. Mais tarde, o conjunto das soluções pode envolver já os números racionais na sua representação fraccionária ou decimal. Por exemplo, o professor pode propor aos alunos do 1.º ciclo que procurem soluções para a condição $\square < 5$. Estes verificarão que os números naturais 1, 2, 3 e 4 satisfazem a condição e o mesmo acontece com o 0. No caso de já terem trabalhado partes da unidade, como a metade ou a terça parte, e a sua representação na forma de fracção, os alunos podem indicar como soluções para a condição $\square < 1$, por exemplo, 0, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$. No caso desta questão ser colocada a alunos que já tenham trabalhado com a representação decimal, podem dar como soluções, por exemplo, 0,3, 0,51, 0,891…. Já no final do 2.º ciclo, como soluções para a condição dada, além de números racionais não negativos são também admissíveis os números inteiros negativos.

No 2.º ciclo, as relações de igualdade e de ordem (menor e maior) desempenham um papel importante na aprendizagem da comparação e ordenação no tópico Números racionais não negativos. No que respeita à igualdade, os alunos devem reconhecer que um mesmo número racional pode ser representado de várias formas, nomeadamente na forma fraccionária ou na forma decimal. Salienta-se, ainda, que a representação em cada uma dessas formas não é única, existindo, por exemplo, diversas fracções e diversas representações decimais equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 0{,}50...$$

A ordenação dos números racionais traz dificuldades significativas para os alunos. Nos números naturais, o próprio sistema de representação decimal proporciona um processo intuitivo para estabelecer a ordenação de dois números, mas nos números racionais isso não acontece. Assim, por exemplo, não é fácil dizer qual é maior entre $\frac{5}{9}$

e $\frac{4}{7}$. Neste caso é de usar a representação decimal e a recta numérica. Note-se, porém, que mesmo na representação decimal surgem, por vezes, dificuldades significativas nos alunos, por exemplo, ao ordenar 0,7 e 0,14. Muitos deles ignoram o significado posicional dos algarismos e dizem que 0,14 é maior que 0,7 pois 14 é maior que 7. Na verdade, nem todos os alunos generalizam as propriedades do sistema de numeração decimal dos números inteiros para os números decimais, assunto que tem de ser abordado explicitamente na sala de aula.

Depois dos alunos já terem adquirido alguma familiaridade com a relação de menor, devem perceber que esta relação é transitiva ($a<b$ e $b<c$ implica que $a<c$) mas não é simétrica (se $a<b$ não se tem $b<a$) nem reflexiva (não se verifica $a<a$). O mesmo se passa, de um modo semelhante, para a relação de maior.

A relação de menor ou igual merece, também, alguma atenção, no fim do 3.º ciclo, a propósito do estudo das inequações. É de notar que esta relação, tal como a relação de menor, é transitiva. Além disso, tal como a relação de menor, não é simétrica (por exemplo, temos $5 \leq 7$ mas não temos $7 \leq 5$). No entanto, ao contrário da relação de menor, a relação de menor ou igual é reflexiva: para todo o número *x*, temos $x \leq x$. Note-se que a discussão do trabalho a fazer com inequações será feita em pormenor mais adiante, no último capítulo desta brochura.

4.1.3. Relações entre números, expressões e generalização

Tendo em vista o desenvolvimento nos alunos do sentido de número, podem ser exploradas diversas relações entre números. Muitas dessas situações podem ser igualmente trabalhadas procurando identificar e generalizar regularidades, promovendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Exemplos destas situações são a relação inversa entre adição e subtracção ($39-17=22$ pois $39=22+17$), a relação de compensação ($31+9=30+10$; $39-17=40-18$), a composição e decomposição de números ($23+11+9=23+20$; $39-17=39-10-7$; $17-8=17-10+2$). O professor deve procurar que os alunos justifiquem as relações que estabelecem, com base na sua compreensão das operações e deve questioná-los acerca da validade destas relações para todos os números. Para tal, os alunos podem analisar diversos exemplos ou procurar contra-exemplos. Além disso, já nos primeiros anos, os alunos trabalham também com relações inversas como "o dobro de" e "a metade de", por exemplo, para apoiar estratégias de cálculo mental, bem como a compreensão e construção da tabuada.

Numa perspectiva semelhante, Megan Franke, Thomas Carpenter e Dan Battey[29] sugerem que os alunos devem desenvolver desde cedo um "pensamento relacional". Caracterizam este pensamento pela capacidade de analisar expressões e equações como um todo em vez de o fazer apenas segundo um processo realizado por etapas. Indicam que, para tal, é fundamental o uso de propriedades dos números e das operações. Apresentam como exemplo a resolução da expressão $78+34-34=\_\_\_$. A resolução desta expressão começando pela operação $78+34$ e subtraindo depois 34 ao resultado, não envolve pensamento relacional. No entanto, esse conhecimento é usado se tivermos em atenção que $34-34=0$ e usarmos essa relação para obter a resposta.

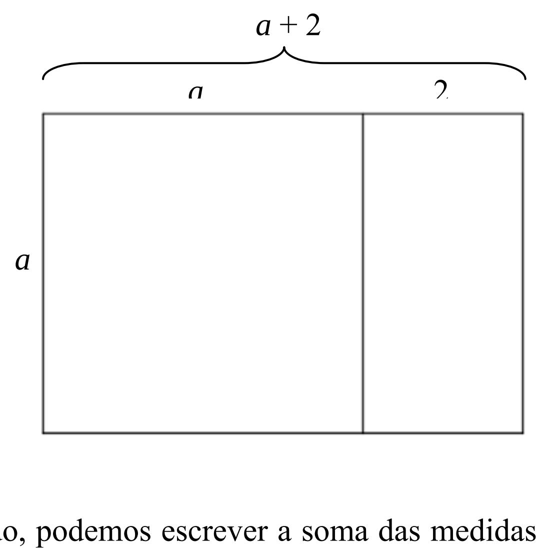
Um aspecto muito importante para o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos é o questionamento feito pelo professor quando procura que estes esclareçam o seu modo de pensar. Perante a questão "Como é que fizeste?" os alunos explicam que pensaram que "$34-34$ dá zero e $78+0$ é 78". Contudo, terminar aqui a discussão não explora todas as potencialidades da situação. Seria bom averiguar qual o fundamento desta estratégia e qual o seu alcance. Para isso, o professor deve perguntar, também, "Como é que sabes isso? Será que isso é válido para todos os números?" Na verdade, está em causa o uso da propriedade associativa (que permite que se comece a resolução da expressão determinando $34-34$). Não é importante que os alunos reconheçam desde logo o nome desta propriedade, mas é importante que saibam reconhecer quando a podem usar na determinação do valor de expressões deste tipo. Questões como estas levam os alunos a pensar porque é que uma dada abordagem é legítima e promove o desenvolvimento da sua capacidade de generalização.

Ao mesmo tempo que se estabelecem generalizações, é importante que os alunos tomem consciência que existem generalizações que não são válidas. Por exemplo não é verdade que $3+(4\times 2)$ seja igual a $(3+4)\times 2$. Ou seja, neste caso faz toda a diferença a ordem pela qual se fazem as diferentes operações. Por isso, é fundamental que os alunos compreendam o significado dos parênteses e a prioridade das operações numa expressão numérica.

Tendo em vista estabelecer generalizações de relações entre números e de propriedades, Rina Zaskis[30] sugere o uso algébrico dos números em diversas situações, como, por exemplo, no jogo "Pensa num número". Criando uma situação em que após a realização de diversas operações se obtém o mesmo número de partida ou quando se consegue adivinhar o número a que se chega, desperta-se a curiosidade dos alunos para a razão que permite que tal seja possível. Após realizarem experiências com diferentes valores numéricos, os alunos podem ser chamados a descobrir as relações estabelecidas e as propriedades usadas, procurando apresentar uma generalização relativa à situação.

No 2.º ciclo, os alunos começam a usar a linguagem simbólica para descrever relações. Uma situação apropriada para a iniciação a esta linguagem é o estudo das áreas e perímetros. Por exemplo, o perímetro de um rectângulo pode ser representado por $P = 2c + 2l$. Os alunos devem reconhecer que o significado desta expressão não é "dois comprimentos mais duas larguras", mas sim duas vezes um número (a medida do comprimento do rectângulo) mais duas vezes outro número (a medida da largura do mesmo rectângulo). Note-se que a introdução de letras para designar números desconhecidos corresponde à adopção de uma escrita progressivamente mais abreviada, incluindo, por exemplo, a omissão do sinal de multiplicação. Deste modo, não é preciso escrever $2 \times l$ para representar o produto de 2 por *l*. No entanto, 25 continua a ter uma interpretação aritmética, representando o número "duas dezenas e cinco unidades" e não o produto de 2 por 5, que continua a ser representado por 2×5.

Ainda neste contexto, é de propor situações que possibilitem uma interpretação geométrica de expressões algébricas, promovendo a capacidade de visualização dos alunos. Por exemplo, usando a fórmula da área do rectângulo, podemos escrever a área do rectângulo de dimensões a e $a+2$ como $a(a+2)$:



Do mesmo modo, podemos escrever a soma das medidas das áreas do quadrado de lado a e do rectângulo de dimensões a e 2 de diversas maneiras, como $aa + 2a$, ou

$a(a+2)$, ou ainda, $a^2 + 2a$. Estas situações são também propícias à exploração de propriedades das operações, como a propriedade comutativa da adição e da multiplicação ou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

4.1.4. Propriedades das operações

Já anteriormente fizemos várias referências às propriedades das operações aritméticas. Estas propriedades devem ser reconhecidas em casos particulares e, progressivamente, generalizadas. Na verdade, uma das formas de encarar a Álgebra é como Aritmética generalizada. A identificação destas propriedades e a sua generalização desde os primeiros anos de escolaridade constituem uma base importante para o pensamento algébrico.

Da Aritmética, sabemos, por exemplo, que se tem $5+7$ igual a $7+5$. Mas uma relação semelhante vale para qualquer par de números naturais, ou seja, $a+b$ é igual a $b+a$, para quaisquer números naturais a e b. Podemos então escrever $a+b=b+a$. Neste caso, temos uma relação de igualdade associada à operação de adição (que se designa por "propriedade comutativa" da adição). É fácil de ver que a multiplicação de números naturais é também comutativa, ou seja $a \times b = b \times a$, para quaisquer números naturais a e b. Mas o mesmo já não acontece para as respectivas operações inversas, subtracção e divisão, como os alunos podem verificar. Para nenhum par de números naturais diferentes se tem $a-b=b-a$ nem $a:b=b:a$.

Para além da propriedade comutativa da adição e da multiplicação, os alunos devem reconhecer a propriedade associativa destas operações bem como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No caso de termos uma divisão exacta é também possível recorrer à propriedade distributiva, neste caso da divisão em relação à adição, decompondo o dividendo, para determinar mais facilmente o quociente. Esta situação particular pode ser bastante útil na realização de cálculo mental envolvendo divisões. No caso de se proceder à decomposição do divisor não é possível usar esta propriedade. Por exemplo, para realizar a operação $124:4$ podemos ter:

$$124:4 = (120+4):4 = 120:4 + 4:4 = 30 + 1 = 31$$

De um modo geral, sendo $a = x + y$, temos que:

$$a : b = (x + y) : b = x : b + y : b = \frac{x}{b} + \frac{y}{b}$$

Os alunos devem também reconhecer os elementos neutros da adição e da multiplicação. Qualquer número natural adicionado com 0 dá esse mesmo número (0 é o elemento neutro para a adição) e qualquer número natural multiplicado por 1 dá esse mesmo número (1 é o elemento neutro para a multiplicação). O estabelecimento deste tipo de relações, associadas às propriedades das operações, e a sua expressão, primeiro em linguagem natural e depois, progressivamente, em linguagem simbólica, é um dos aspectos do pensamento algébrico.

Muitas vezes os alunos usam as propriedades das operações e as relações entre números em situações de cálculo mental sem lhes fazer referência. Não sendo o principal objectivo que os alunos mencionem constantemente essas propriedades, o professor deve estar atento à sua utilização, verificando se o estão a fazer de um modo adequado. Deve, ainda, fomentar a formulação de conjecturas e a apresentação de generalizações nas situações em que estas são válidas.

4.2. Tarefas: Exemplos e ilustrações na sala de aula

4.2.1. Relações numéricas

Exemplo 1 – Igualdade de expressões numéricas. Os alunos devem trabalhar sequências de expressões numéricas com o intuito de encontrarem relações numéricas, reforçando o significado de equivalência do sinal de igual. Eis diversas expressões numéricas que se podem propor:

11 + □ = 26	□ = 15 + 11
11 + 15 = □ + 11	11 + □ = 11 + 15
11 + 15 = 12 + □	14 + □ = 11 + 15
11 + 15 = □ + 16	□ + 12 = 11 + 15
11 + 15 = □ + 17	□ + 13 = 11 + 15

No fim da sua resolução, os alunos devem ser questionados para que expliquem o seu raciocínio. Com isto procuramos que os alunos estabeleçam relações entre os números, comparando as expressões que se apresentam de ambos os lados do sinal de igual. Nas primeiras quatro expressões os alunos podem verificar que, na adição, a ordem das parcelas não altera o resultado. Na expressão $11+15=12+\square$, os alunos podem usar um raciocínio de compensação, argumentando, por exemplo, que o número em falta é o 14, uma vez que para manter a equivalência a unidade que se adiciona a 11 para obter 12 tem de ser subtraída a 15.

Exemplo 2 – Análise de expressões numéricas. A identificação de relações entre números e a capacidade de as generalizar, aliadas à compreensão e ao uso das propriedades das operações, contribuem para o desenvolvimento de aspectos do pensamento algébrico dos alunos, promovendo a generalização e a compreensão da relação de equivalência. Na tarefa seguinte os alunos analisam as expressões numéricas e identificam relações entre os números e as propriedades das operações que lhes permitem dizer se estas expressões são verdadeiras ou falsas.

$57 + 23 - 23 = 57 + 45 - 45$
$24 + 9 - 9 = 23$
$41 + 1 = 42 + 19 - 19$
$20 - 20 + 77 = 78 - 1$
$64 = 65 + 1 - 1$
$15 + 7 = 15 + 5 + 2$
$46 - 16 = 46 - 6 - 10$

O professor deve promover uma discussão colectiva das justificações dos alunos de modo a realçar as relações que estabeleceram e as propriedades em que se baseiam para analisar a validade das expressões numéricas sem recorrer ao cálculo.

Exemplo 3 – Relação de proporcionalidade directa. Os professores devem propor situações que os alunos analisam para verificar se envolvem ou não relações de proporcionalidade directa, resolvendo depois questões, como no exemplo que se segue:

A Joana pintou as paredes do seu quarto com uma cor que criou, misturando as cores amarelo e azul. Para cada duas doses de amarelo juntou três doses de azul.

a) Se a Joana colocar num recipiente 45 doses de azul, quantas doses de amarelo deverá juntar para obter a cor que criou?

b) Se a Joana colocar num recipiente 14 doses de amarelo e 15 doses de azul obtém a cor com que pintou as paredes do seu quarto?

c) E se a Joana colocar num recipiente 18 doses de amarelo e 27 doses de azul obtém a cor que inicialmente usou?

Para manter sempre a mesma cor, a Joana tem que usar amarelo e azul "sempre na mesma proporção". Trata-se, portanto, de uma relação de proporcionalidade directa. Podem resolver a alínea a) usando a propriedade fundamental das proporções, recorrendo à razão unitária (para 1 dose de amarelo, usar 1,5 doses de azul), ou usando, ainda, outras estratégias. Na alínea b) pretende-se que os alunos concluam que a igualdade $\frac{2}{3}=\frac{14}{15}$ não se verifica, pelo que a cor que se obtém não é a mesma. Na alínea c) devem confirmar a existência de igualdade entre as duas razões.

Exemplo 4 – Utilização dos símbolos <, >, =. Os sinais que estabelecem a relação de menor, de maior ou de igualdade podem surgir em situações que apelem à identificação de relações entre os números como as que se apresentam de seguida:

Completa os □ com os símbolos <, > ou =, de modo a obteres afirmações verdadeiras. Explica o teu raciocínio.

38 + 45 □ 40 + 43
40 + 45 □ 41 + 45
39 + 42 □ 40 + 43
35 + 42 □ 34 + 40
38 + 47 □ 40 + 43

52 – 27 □ 50 – 25
55 – 32 □ 52 – 32
52 – 29 □ 52 – 27

A apresentação, por parte dos alunos, do raciocínio que realizaram para obter a sua resposta é fundamental para identificar as relações que conseguem estabelecer. Nesta tarefa não se pretende que os alunos calculem o valor de cada expressão numérica para indicar o sinal correcto em cada situação. Pelo contrário, devem analisar as diversas expressões numéricas e procurar relações entre os números que as compõem. Por exemplo, comparando directamente os números envolvidos, podemos concluir que as expressões $38+45$ e $40+43$ representam o mesmo valor – na verdade, 40 tem mais 2 que 38 mas, em compensação, 43 tem menos 2 que 45. Além disso, da análise de $40+45$ e de $41+45$ ressalta que 45 está presente em ambas as expressões e que 40 é menor do que 41, pelo que se conclui que $40+45<41+45$. No caso da operação de subtracção, na situação $52-27$ $\square$ $50-25$, tanto ao aditivo como ao subtractivo de $52-27$ foi subtraído 2 para obter $50-25$ o que não altera a diferença (propriedade da invariância do resto).

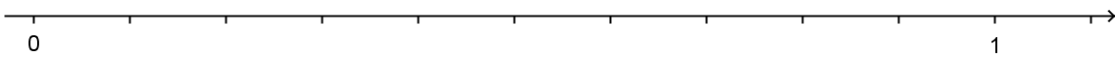
Exemplo 5 – Ordenação de números racionais. A partir do 2.º ciclo, os alunos devem saber comparar e ordenar números racionais representados nas formas decimal e fraccionária, identificando relações entre os números e recorrendo às suas propriedades.

Observa os números racionais seguintes:

$$0{,}75 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{8} \quad 0{,}1 \quad \frac{9}{10} \quad 0{,}3 \quad \frac{6}{12}$$

a) Indica os que são menores que $\frac{1}{2}$. Explica o teu raciocínio.

b) Representa na recta numérica todos os números racionais indicados:



Nesta tarefa, os alunos comparam todos os números racionais dados com $\frac{1}{2}$. Podem fazê-lo com base na representação decimal de cada número ou recorrer à sua compreensão de fracção e ao conhecimento de fracções equivalentes. Na representação na recta podem começar por marcar $\frac{1}{2}$ e usar as conclusões a que chegaram na alínea anterior para assinalar os restantes números na recta. Como a unidade está dividida em dez partes, será vantajoso que os alunos identifiquem algumas relações, como por exemplo, $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$ e $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$.

Exemplo 6 – Desigualdades. Os alunos podem também resolver outros tipos de questões envolvendo desigualdades. Por exemplo:

Utilizando os números naturais e o zero, indica, para cada um dos casos, os valores que os tornam afirmações verdadeiras:

$$\square < 5$$

$$\square + 1 < 7$$

$$10 < 6 + \square$$

A realização desta tarefa reforça a ideia de que algumas questões matemáticas podem ter mais do que uma solução. Assim, no 1.º ciclo, os alunos devem reconhecer que a condição $\square < 5$ é satisfeita para os valores 0, 1, 2, 3 e 4. No 2.º ciclo, uma vez que os alunos já conhecem os números racionais, deve assinalar-se que estes números também podem ser considerados, obtendo-se assim uma infinidade de soluções.

Exemplo 7 – Pensa num número. O jogo "pensa num número" envolve a descoberta de relações entre os números por parte dos alunos. Este jogo permite que cada um deles pense num número e que todos cheguem à mesma conclusão, iniciando o processo de generalização. O professor pode começar por explorar situações muito simples, de acordo com as relações entre os números e as propriedades que pretende abordar. Os exemplos que se seguem ilustram várias dessas situações:

1. Pensa num número. Adiciona 10. Agora subtrai 10. Que número obtiveste?
2. Pensa num número. Multiplica esse número por 6. Agora divide por 2. Divide o resultado por 3. Que número obtiveste?

Os alunos podem apresentar as operações que fizeram com diversos números e generalizar estas situações. A generalização é mais facilmente identificada no caso em que se apresentam as operações mas estas não se realizam. Supondo que na situação 2. pensámos no número 5 fazemos 5×6; $(5 \times 6) : 2$; $((5 \times 6) : 2) : 3$; 5. Não é necessário que os alunos recorram, desde logo, à utilização da linguagem algébrica para representar esta situação. Podem, por exemplo, fazê-lo usando a representação simbólica seguinte:

1. $\square$

   $\square + 10$

   $\square + 10 - 10 = \square$

2. $\square$

   $\square \times 6$

   $(\square \times 6) : 2$

   $((\square \times 6) : 2) : 3 = \square$

Posteriormente, podem surgir situações mais complexas, suscitando curiosidade nos alunos acerca da sua validade para qualquer número natural. Os alunos podem identificar as relações e as propriedades que são usadas para que seja possível prever o resultado que se obtém:

---

3. Pensa num número entre 1 e 10. Adiciona 5. Multiplica o resultado obtido por 3. Agora subtrai 15. Por fim divide por 3. Obtiveste o número em que pensaste!
4. Pensa num número entre 1 e 10. Multiplica esse número por 2. Adiciona 6. Acha o dobro desse número. Subtrai 8. Agora divide por 4. Obtiveste o número em que pensaste? O que aconteceu?

---

3. $\square$

$\square + 5$

$(\square + 5) \times 3 = \square \times 3 + 15$

$\square \times 3 + 15 - 15 = \square \times 3$

$\square \times 3 : 3 = \square$

4. $\square$

$\square \times 2$

$\square \times 2 + 6$

$(\square \times 2 + 6) \times 2 = \square \times 4 + 12$

$\square \times 4 + 12 - 8 = \square \times 4 + 4$

$(\square \times 4 + 4) : 4 = \square \times 4 : 4 + 4 : 4$

$= \square + 1$

O professor pode ainda desafiar os alunos a criarem as suas próprias indicações e explorar as relações e propriedades usadas por cada um, questionando toda a turma acerca da validade da situação apresentada.

Exemplo 8 – Relações numéricas com a calculadora[31]. O trabalho com a calculadora permite a identificação de relações numéricas dando ênfase à descoberta de regularidades e à formulação de conjecturas, como no exemplo que se apresenta de seguida:

Escreve 1 na calculadora e divide por 10. Confirma os resultados que aparecem na primeira linha da tabela. Sem desmarcar o que está na calculadora divide novamente por 10. Continua este processo até completares toda a tabela:

Representação fraccionária	Denominador	N.º de vezes que se divide 1 por 10	N.º de casas decimais	Representação decimal
$\frac{1}{10}$	10	1	1	0,1

$\frac{1}{100}$				
$\frac{1}{1000}$				
$\frac{1}{10000}$				
$\frac{1}{100000}$				

Efectua as seguintes operações:

$5:10 =$ ____ $\quad$ $5 \times 0{,}1 =$ ____

$5:100 =$ ____ $\quad$ $5 \times 0{,}01 =$ ____

$5:1000 =$ ____ $\quad$ $5 \times 0{,}001 =$ ____

Que relação identificas?

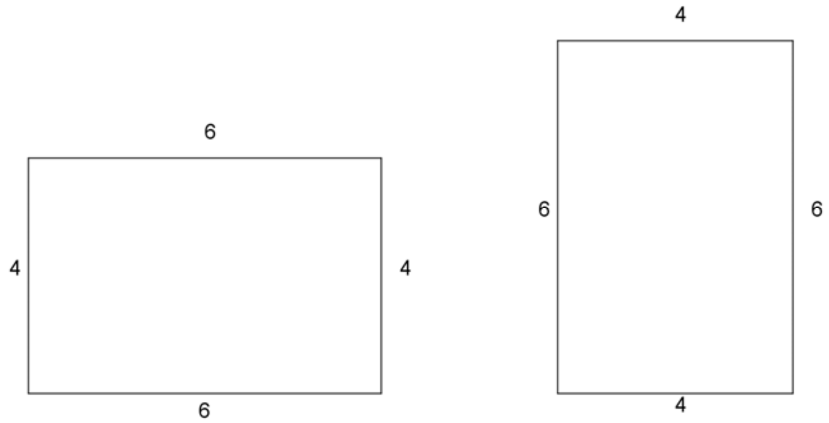
A exploração deste tipo de situações permite que sejam os alunos a formular as suas próprias conjecturas e as procurem validar, neste caso com recurso à calculadora. Com esta tarefa os alunos podem concluir que, com a multiplicação (divisão) de um número por 0,1, 0,01 e 0,001, se obtém o mesmo resultado do que com a divisão (multiplicação) desse número por 10, 100 e 1000, aspecto que deve ser trabalhado no 1.º ciclo. A calculadora auxiliou a descoberta desta relação que os alunos devem usar posteriormente em diversas situações sem que seja necessário recorrer de novo a este instrumento.

Exemplo 9 – Expressões. A análise de expressões numéricas, no caso do 1.º ciclo, ou de expressões algébricas, a partir do 2.º ciclo, pode surgir em contextos familiares aos alunos como situações de perímetros e áreas:

Considera um rectângulo cuja área é de 24 unidades. As medidas da largura e do comprimento do rectângulo são números naturais. Quais as dimensões do rectângulo?

Os alunos dos primeiros anos podem usar números para responder ao problema, identificar a regularidade que se verifica e apresentá-la de um modo geral, sem recorrer à simbologia algébrica. Podem ser trabalhadas as propriedades da operação de multiplicação e as relações entre os números associadas às suas estratégias. Mais tarde, esta simbologia pode ser usada para generalizar a situação por meio da expressão $c \times l = 24$.

O professor deve ajudar a esclarecer o que representa cada uma das letras, procurando evitar interpretações erradas. A letra *c* representa a medida do comprimento do rectângulo e a letra *l* representa a medida da largura do mesmo rectângulo, independentemente da posição em que este se encontra (ver a figura com uma das soluções do problema, $6 \times 4 = 24$):



O professor pode esclarecer que, pelo facto dos dois rectângulos serem congruentes (ou geometricamente iguais), não faz sentido considerar 6×4 e 4×6 como sendo duas soluções diferentes.

Assim, surgem como resposta os seguintes valores:

Medida do comprimento (*c*)	Medida da largura (*l*)
24	1
12	2
8	3
6	4

A partir do 2.º ciclo, o professor pode considerar que as soluções deste problema são números racionais, colocando aos alunos um novo desafio. Estes devem compreender que passam a existir infinitas soluções, apesar de apenas se indicarem algumas. Os alunos atribuem um valor a *c* e determinam *l* em função desse valor. Por exemplo, se considerarmos $c = 10$ então $l = 2{,}4$ ou se $c = 120$ temos $l = 0{,}2$. Note-se que se $c > l$, basta considerar $c > \sqrt{24}$. No 3.º ciclo esta situação pode ser explorada no âmbito do tópico Funções.

4.2.2. Relações envolvendo quantidades desconhecidas

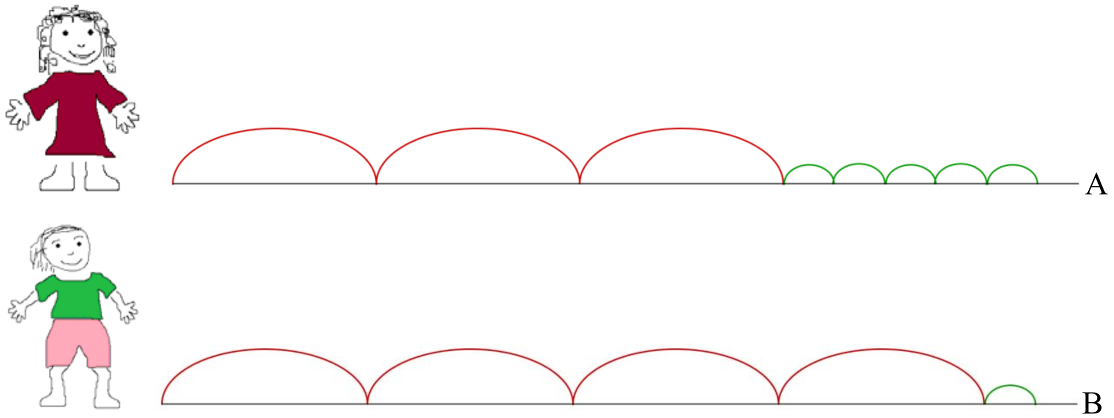
Exemplo 10 – Descobre o preço. O problema que apresentamos, em seguida, procura iniciar o trabalho de análise de relações com uma variável. A quantidade desconhecida é inicialmente tratada como um objecto que pode ser manipulado, permitindo depois determiná-la.

Eva e Rui tinham a mesma quantia de dinheiro no bolso. Foram a uma loja comprar cadernos escolares iguais. Quando saíram, cada um tinha na mão o que a figura apresenta. Determina o preço de um caderno.

Qualquer dos dois amigos comprou pelo menos um caderno. O Rui comprou apenas um caderno e ainda lhe restaram 2,75 euros. A Eva comprou dois cadernos e restaram-lhe 1,5 euros. Comparando as duas situações, verificamos que um caderno e 1,5 euros da Eva valem o mesmo que a quantia de dinheiro do Rui, ou seja, 2,75 euros. Facilmente se determina agora que um caderno custou 1,25 euros. O professor pode ainda questionar os alunos sobre a quantia total que possuía cada um dos amigos antes de entrar na loja.

Exemplo 11 – Saltos na recta[32]. Esta tarefa procura salientar o significado de equivalência do sinal de igual com base no trabalho com a recta não graduada. Esta representação permite resolver problemas com valores desconhecidos (incógnitas) dando ênfase à equivalência de expressões:

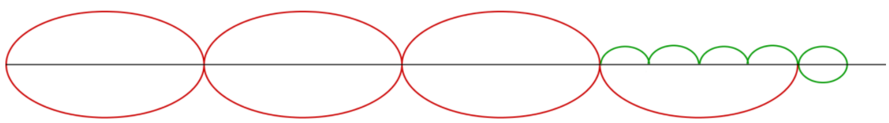
Numa actividade de Educação Física, o professor propôs aos seus alunos realizar dois tipos diferentes de percurso sobre uma linha com o mesmo comprimento, um constituído por saltos (todos com o mesmo comprimento) e outro por passos (também todos com os mesmo comprimento). A Anabela fez o percurso A e a Beatriz fez o percurso B:



A quantos passos corresponde todo o percurso?

Parte do percurso em A e em B é igual. Ambos iniciam com três saltos, pelo que este início do percurso, numa primeira fase, não nos dá muita informação. A parte final de ambos os percursos dá-nos mais informação. Comparando os dois casos, verificamos que um salto e um passo equivalem a cinco passos, donde se conclui que um salto equivale a quatro passos. Com esta informação podemos já indicar que cada percurso corresponde a dezassete passos no total.

O professor pode pedir aos alunos que marquem ambos os percursos numa recta de modo a facilitar o estabelecimento de relações entre eles, como mostra a figura:

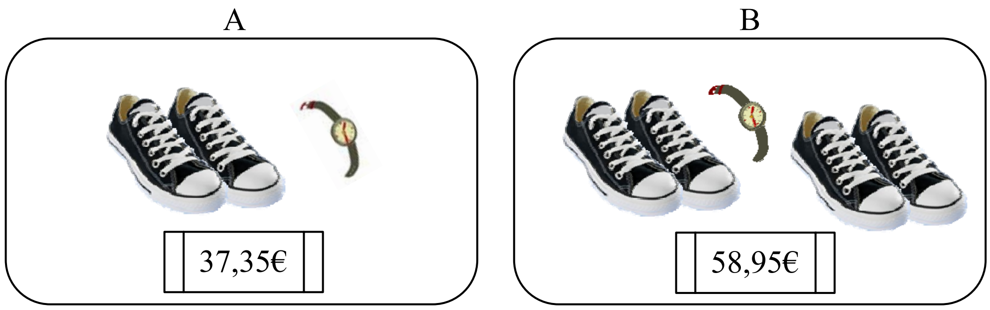


Recorrendo à linguagem algébrica, a situação pode ser traduzida por uma equação equivalente a $3x + 5 = 4x + 1$.

Novas situações podem ser propostas dando apenas as indicações por escrito e solicitando aos alunos que representem a situação na recta e determinem a solução do problema.

Exemplo 12 – Relações com duas variáveis[33]. A situação que se segue pode ser resolvida por meio de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Contudo, também pode ser trabalhada com os alunos antes de se iniciar o estudo desse tópico. O que se pretende é que os alunos estabeleçam relações entre os dados a que têm acesso.

Em duas lojas foram colocados na montra os mesmos artigos mas em quantidades e disposições diferentes. A montra A tem um valor total de 37,35 euros e a montra B tem um valor total de 58,95 euros. Descobre o preço de cada um dos artigos.



Podemos começar por considerar o par de ténis e o relógio como um todo. Da primeira montra concluímos que o par de ténis e o relógio custam 37,35 euros. Como os produtos são iguais em ambas as montras, também na montra B o par de ténis e o relógio custam 37,35 euros. A montra B tem mais um par de ténis do que a montra A e o seu valor acresce 21,60 euros. Ficamos assim a saber que o par de ténis tem um preço de 21,60 euros. Usando, por exemplo, a informação da montra A fazemos $37{,}35 - 21{,}60$ e obtemos o preço do relógio. Este tipo de tarefa abre caminho para uma posterior formalização. Se x representar o preço do par de ténis e y o preço do relógio, um sistema de duas equações correspondente a este problema é:

$$\begin{cases} x + y = 37{,}35 \\ 2x + y = 58{,}95 \end{cases}$$

5. Sequências e regularidades

O tópico Sequências e Regularidades percorre todo o ensino básico, tendo como principal objectivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. No 1.º ciclo, este tópico integra o tema Números e operações, envolvendo a exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números. Os alunos identificam a lei de formação de uma dada sequência e expressam-na por palavras suas. Este trabalho contribui para o desenvolvimento do sentido de número nos alunos e constitui uma base para o desenvolvimento da sua capacidade de generalização. Nos 2.º e 3.º ciclos, este tópico está incluído no tema Álgebra, envolvendo tanto a exploração de sequências como o uso da linguagem simbólica para as representar. No 2.º ciclo, os alunos contactam com conceitos como 'termo' e 'ordem'. No 3.º ciclo, usa-se a linguagem algébrica para expressar generalizações, nomeadamente para representar o termo geral de uma sequência e promover a compreensão das expressões algébricas e o desenvolvimento da capacidade de abstracção nos alunos.

5.1. Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

5.1.1. Sequências e regularidades

1. Sequências pictóricas e numéricas. Ao longo de todo o ensino básico, os alunos trabalham com sequências pictóricas e numéricas. Na análise de uma sequência pictórica identificam regularidades e descrevem características locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está directamente associada. O trabalho com sequências pictóricas e com sequências numéricas finitas ou infinitas (estas últimas chamadas sucessões) envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. Note-se que a descrição dessas generalizações em linguagem natural já exige uma grande capacidade de abstracção. A sua progressiva representação de um modo formal, usando símbolos matemáticos adequados, contribui para a compreensão dos símbolos e da linguagem algébrica, nomeadamente a compreensão da variável como número generalizado e das regras e convenções que regulam o cálculo algébrico.

Ao longo de toda a escolaridade, a análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínios envolvendo relações funcionais. Como refere o NCTM (2007), o trabalho com sequências pode constituir uma base para a compreensão do conceito de função. Note-se, ainda, que nos primeiros anos, a generalização exprime-se na linguagem natural dos alunos. As tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstracção, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático.

2. Sequências repetitivas e sequências crescentes. Neste capítulo, abordamos dois tipos principais de sequências, as repetitivas e as crescentes. Numa *sequência repetitiva* há uma unidade (composta por diversos elementos ou termos) que se repete ciclicamente, como na figura seguinte:

☾★★☾☾★★☾☾★★☾☾★★☾…

A 1 1 A 1 1 A 1 1 A 1 1 …

vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, …

Dada uma sequência repetitiva com uma unidade de comprimento *n*, a determinação do elemento seguinte pode ter por base duas características: (i) a existência de uma igualdade entre cada elemento da sequência e um dos primeiros *n* elementos; (ii) a existência de uma igualdade entre cada elemento da sequência e o elemento *n* posições antes dele. Ao analisar este tipo de sequências os alunos têm oportunidade de continuar a sua representação, procurar regularidades e estabelecer generalizações. A compreensão da unidade que se repete pode não ser facilmente conseguida pelos alunos nos primeiros anos do ensino básico, mas é possível desenvolvê-la progressivamente. A percepção da unidade que se repete permite determinar a ordem de diversos elementos da sequência por meio de uma generalização.

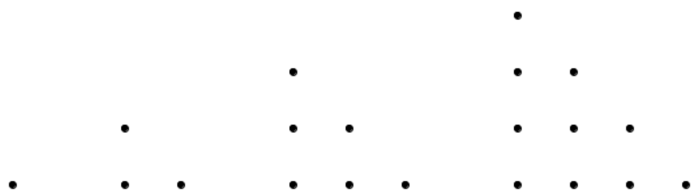
John Threlfall[34], num estudo realizado com crianças entre três e cinco anos de idade, considera que o uso de sequências repetitivas constitui um veículo para o trabalho com símbolos, um caminho conceptual para a Álgebra e um contexto para a generalização. Faz notar, no entanto, que as crianças mais novas podem continuar as sequências repetitivas usando métodos rítmicos sem compreender a unidade. A regularidade que ocorre tem por base um ritmo que lhes permite continuar uma sequência. Aponta, no entanto, que a abordagem rítmica não é suficiente para generalizar a sequência. Para que tal aconteça é necessário que os alunos compreendam qual é a unidade que se repete. As crianças mais pequenas nem sempre o conseguem. Assim, o autor sugere que o trabalho com sequências repetitivas seja continuado para além dos primeiros anos, com o intuito de aprofundar a exploração da sequência baseada na compreensão dessa unidade. Com alunos mais velhos, é possível estabelecer generalizações significativas.

Pelo seu lado, as *sequências crescentes* são constituídas por elementos ou termos diferentes. Cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na sequência, que designamos por ordem do termo. As sequências crescentes podem ser constituídas por números ou por objectos que assumem uma configuração pictórica, como na figura seguinte:

5, 10, 15, 20, 25, …

1, 4, 7, 10, 13, 16, …

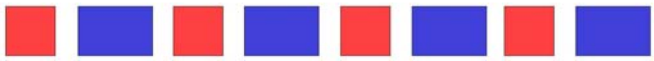
1, 4, 9, 16, 25, 36, …



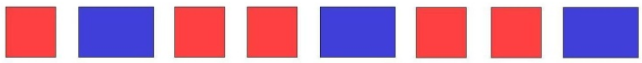
3. Diferentes possibilidades de continuação de uma sequência. Dados alguns termos de uma sequência, os alunos podem ser questionados quanto à continuação da sequência, identificando alguns dos termos seguintes. Nesta situação, o professor deve atender à possibilidade de os alunos interpretarem os termos apresentados de diferentes maneiras, identificando relações entre eles e, por isso, continuarem a sequência de modos distintos. Dada a possibilidade dos alunos apresentarem sequências diferentes mas com alguns termos em comum, torna-se fundamental solicitar-lhes que apresentem o seu raciocínio e justifiquem as suas opções. Além disso, em algumas tarefas podem ser dados um ou mais termos da sequência, que não sejam termos iniciais, pedindo aos alunos para indicar termos anteriores. Analisamos, de seguida, situações que proporcionam o surgimento de várias sequências.

Exemplo 1 – Sequência repetitiva[35]. Consideremos os três primeiros termos de uma sequência repetitiva:

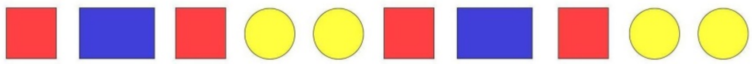
Os alunos podem, por exemplo, continuar a sequência dos seguintes modos:

a) 

(o conjunto que se repete é formado por dois elementos: quadrado vermelho, rectângulo não quadrado azul)

b) 

(o conjunto que se repete é formado por três elementos: quadrado vermelho, rectângulo não quadrado azul, quadrado vermelho)

c) 

(o conjunto que se repete é formado por cinco elementos: quadrado vermelho, rectângulo não quadrado azul, quadrado vermelho, círculo amarelo, círculo amarelo)

Além destas, existem muitas outras possibilidades de construir sequências repetitivas a partir dos três elementos dados.

Exemplo 2 – Sequência numérica crescente. Consideremos a sequência numérica cujos dois primeiros termos são:

$$1, 3, \ldots$$

Questionados, por exemplo, acerca dos quatro termos seguintes, os alunos podem, também nesta situação, apresentar diferentes sequências crescentes cujos dois primeiros termos são 1 e 3:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

(sequência de números ímpares, justificando que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre dois)

b) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

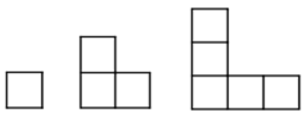
(sequência dos números triangulares, justificando que a diferença entre dois termos consecutivos tem sempre mais uma unidade que a diferença entre os dois termos consecutivos anteriores)

c) 1, 3, 7, 13, 21, 31, …

(a sequência das diferenças entre termos consecutivos é a sequência de números pares)

5.1.2. Estratégias dos alunos na exploração de sequências

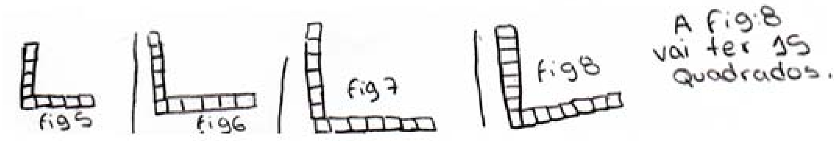
Numa sequência pictórica crescente, quando é solicitada a indicação de uma relação entre a ordem de um termo e algum aspecto da sua constituição, o aluno pode seguir diversas abordagens. De seguida, apresentamos algumas das estratégias que surgem com maior frequência na investigação realizada neste âmbito[36], acompanhadas de exemplos. As duas primeiras referem-se à sequência que se segue:



1. Estratégia de representação e contagem. O aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente. Por exemplo, Matilde (7.º ano) segue esta estratégia para determinar o termo de ordem 10 numa sequência pictórica em que cada figura é formada por um conjunto de pontos e onde são dados os três primeiros termos:

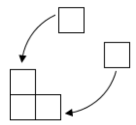
Eu desenhava todas as figuras a partir da 4ª posição, até a 10ª, depois contava o número de pintas.

Joana (7.º ano) segue, também, esta estratégia para determinar o número de quadrados do 8.º termo de uma outra sequência pictórica da qual se conhecem os quatro primeiros termos:



Esta estratégia não evidencia uma generalização de carácter global por parte do aluno, pelo que é importante questioná-lo sobre o processo que usou para representar os termos da sequência. Esta questão permite compreender que análise o aluno faz da sequência e que estratégia está, efectivamente, por trás da sua representação e contagem. Joana clarifica a análise da sequência que está na base da sua representação:

> Da figura dois para a figura três tem que se acrescentar um aqui e um aqui [ver esquema].



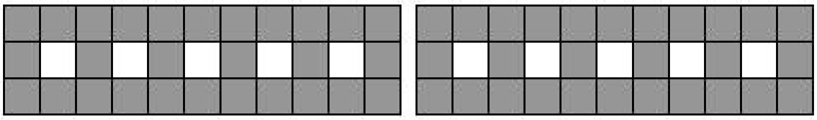
2. Estratégia aditiva. Esta estratégia tem por base uma abordagem recursiva. O aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte. Esta é a estratégia que se identifica no exemplo anterior e que Joana usa para generalizar, expressando-se em linguagem natural:

Esta estratégia muitas vezes constitui um obstáculo à determinação da relação entre cada termo e a sua ordem. Por outro lado, pode também conduzir a generalizações erradas. Por exemplo, dado que, de um termo para o seguinte, o número de quadrados aumenta duas unidades, alguns alunos tendem a apresentar como termo geral da sequência numérica relativa ao número de quadrados a expressão $2n$. No entanto, esta estratégia também permite chegar ao termo geral. Para isso basta partir do 1.º termo e considerar n "saltos" de 2 unidades. Assim, para obter o termo geral desta forma basta ter em conta o 1.º termo da sequência, o número de passos, enquanto número generalizado, e a diferença entre termos consecutivos.

3. Estratégia do objecto inteiro[37]. O aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta. Por exemplo, o aluno determina o termo de ordem 10 com base no termo de ordem 5 ou determina o termo de ordem 36 com base nos termos de ordem 4 e 9, multiplicando-os.

Esta estratégia conduz, muitas vezes, a generalizações erradas, como no caso da sequência seguinte:

Rafaela (7.º ano) considera que o número de quadrados cinzentos do termo de ordem 10 é o dobro do número de quadrados do termo de ordem 5. Tem, portanto, em conta, para diferentes termos, a razão entre as suas ordens. Para esta sequência tal estratégia não dá origem a uma resposta correcta, uma vez que há sobreposição:



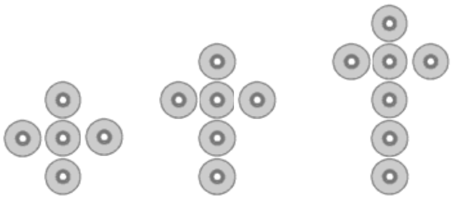
Após uma análise mais atenta da composição dos termos da sequência, os alunos podem verificar que, ao fazer a duplicação do termo de ordem 5, ficam com uma figura muito semelhante ao termo que pretendem obter mas que tem mais 3 quadrados cinzentos. Catarina (7.º ano) explica como procedeu:

> Fiz o dobro do número de quadrados da figura cinco. Fiz 28 mais 28 e foi dar 56. Mas tive de retirar 3 quadrados.

Com base nesta estratégia e analisando cuidadosamente os termos da sequência, é possível determinar correctamente os termos de algumas ordens. No entanto, se não se observarem as propriedades da figura, a estratégia do objecto inteiro dificulta a generalização. Na verdade, esta estratégia funciona perfeitamente quando há proporcionalidade directa (como em alguns dos exemplos anteriores) mas não funciona quando não há proporcionalidade (caso em que é de usar outras abordagens, como mostramos a seguir).

4. Estratégia da decomposição dos termos. A decomposição de um termo de uma sequência pictórica permite, muitas vezes, identificar o seu processo de construção, possibilitando a determinação de termos de ordem distante. Nesta estratégia, o aluno estabelece uma relação entre um termo e a sua ordem. A expressão algébrica que indica para o termo geral representa essa relação.

Esta estratégia potencia o surgimento de diferentes expressões algébricas para generalizar a sequência numérica associada à sequência pictórica em análise, como mostram as respostas de três alunos do 7.º ano relativas à sequência seguinte:



Número de CD do 32.º termo	Termo geral
Desenho os quatro cd's base; e depois acrescento 32 Cd's por baixo que representam o nº da figura	$4+x$
A figura nº 32, terá 36 quadrados, 2 na horizontal e 34 na vertical. A fig. constroi-se a partir dos 4 quadrados de base da fig. mais os do nº da fig.	$m+2+2$
Fazia 32 cd's na vertical e mais 3 na horizontal e 1 em cima.	$n+3+1=\alpha$

5.2. Tarefas: Exemplos e ilustrações na sala de aula

5.2.1. Sequências repetitivas no 1.º ciclo

As sequências repetitivas são as mais simples e podem ser usadas para o trabalho inicial da procura de regularidades e da generalização. Na sala de aula podem ter diferentes explorações de acordo com o ano de escolaridade. Este trabalho pode incidir nos seguintes pontos:

(i) Continuar a representação da sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos dados);
(ii) Identificar a unidade que se repete ciclicamente;

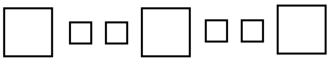
(iii) Descrever uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem (com base no comprimento da unidade que se repete);

(iv) Usar a relação entre o termo e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;

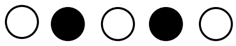
(v) Expressar essa relação em linguagem natural e simbólica (generalizar).

Os termos de uma sequência repetitiva podem ter apenas um atributo, como por exemplo, o tamanho, a cor, a orientação dos objectos, a forma, etc., como se verifica nos três exemplos seguintes:

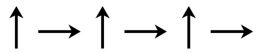
(i) o tamanho



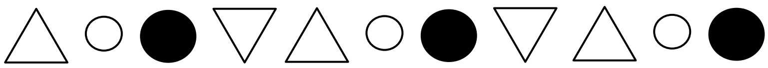
(ii) a cor



(iii) a orientação

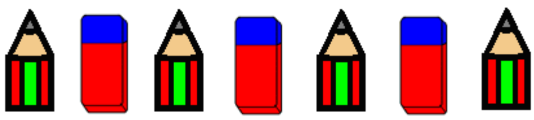


Numa sequência pode estar envolvido mais do que um atributo, como, por exemplo:



De seguida apresentamos vários exemplos que podem ser utilizados na sala de aula com o objectivo de desenvolver a capacidade de generalização dos alunos.

Exemplo 3 – Compreensão da unidade que se repete. A sequência repetitiva da figura seguinte tem apenas um atributo a considerar, o tipo de objecto. Além disso, tem apenas dois objectos diferentes:



Os alunos podem fazer a representação de alguns dos termos seguintes da sequência, identificando a alternância entre os dois objectos. Devem, ainda, associar cada termo a uma posição na sequência. O professor pode, portanto, questionar, por exemplo, que objecto se encontra na quarta posição da sequência, ou na nona posição da sequência.

Para promover a generalização, pode pedir-se aos alunos que indiquem a ordem em que os termos surgem na sequência, nomeadamente as borrachas:

> Que estão alternadas com os lápis.

> AS POSIÇÕES QUE AS BORRACHAS OCUPAM SÃO NÚMEROS PARES.

Ao indicar a lei de formação da sequência, os alunos podem ter apenas em atenção o seu comportamento rítmico, como mostram as duas respostas seguintes:

> 1º vinha o lápis depois a borracha e assim sucessiram

> É uma sequencia em que as figuras nunca estão juntas, por exemplo a borracha nunca está junto com outra borracha pois tem o lápis a separá-las.

Outros alunos podem ir mais longe e identificar a unidade que se repete e estabelecer uma relação entre os termos e as suas posições na sequência:

> Os lápis ocupam as posições impares enquanto as borrachas ocupam as posições pares.

Exemplo 4 – Raciocínio multiplicativo[38]. A sequência repetitiva da figura seguinte tem características semelhantes às dos exemplos anteriores. A unidade que se repete é constituída por quatro elementos, dois dos quais são iguais:

▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶

4 4 4 4 4

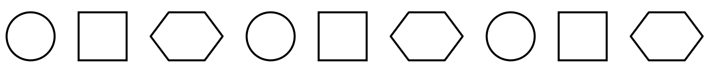
Por baixo de cada unidade está o número de elementos que a constitui. A exploração destas sequências propicia a compreensão da adição e da multiplicação. Tendo em vista promover essa compreensão, o professor pode colocar questões como: "Quantos elementos têm as duas primeiras unidades?" (2×4); "Quantos elementos têm as quatro primeiras unidades?" (4×4); "Quantas unidades estão representadas?" (5); "Quantos triângulos estão representados?" (2×5); "E quantos rectângulos?" (1×5). Esta situação pode, assim, promover o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

Além disso, a partir do 3.º ano, o professor pode sugerir a utilização de tabelas para registar os dados da sequência identificados pelos alunos, por exemplo, o número total de rectângulos ou de triângulos na sequência, após cada unidade:

Após a unidade	Número de ▮	Número de ▶
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10

A continuação de sequências apresentadas pelo professor e a exploração de regularidades das sequências repetitivas e a abordagem de questões sugeridas nos exemplos anteriores são importantes para o desenvolvimento da capacidade de abstracção. O professor pode, ainda, solicitar aos alunos que criem as suas próprias sequências repetitivas, que devem ser apresentadas e discutidas com os colegas.

Exemplo 5 – Critérios de divisibilidade. A sequência repetitiva da figura seguinte tem características semelhantes às do exemplo anterior. No entanto, as duas sequências diferem no número de elementos da unidade. Neste caso, a unidade é constituída por três objectos que se repetem ciclicamente:



Tal como na situação anterior, os alunos devem estabelecer relações entre cada polígono e a sua posição na sequência. Neste caso, o hexágono encontra-se nas posições correspondentes aos múltiplos de três. Para promover a discussão deste assunto, o professor pode perguntar "Qual a posição do primeiro hexágono da sequência?" (3.ª posição) e "Em que outras posições da sequência se encontra o hexágono?" (6.ª, 9.ª, 12.ª, 15.ª, 18.ª, …). O reconhecimento desta regularidade permite aos alunos identificar o polígono que está numa certa posição, qualquer que esta seja. Basta, para tal, que conheçam os múltiplos de três ou os critérios de divisibilidade por três. Perante questões como "Que polígono ocupa a posição 25 da sequência?" ou "Estará um hexágono na posição 61 da sequência?", os alunos usam estes critérios para justificar as suas conclusões, como exemplificam as respostas seguintes:

Sabemos que o hexagono está na posição que é multiplo de 3, logo sabemos que o hexagono está no 24° lugar, e o simbolo que vem asseguir é um circulo.

[não é um hexágono que está na posição]

Porque 61 é ~~[illegible]~~ não é um multiplo de 3.

O professor pode ainda colocar questões mais complexas que possibilitem a justificação de afirmações com base nos critérios de divisibilidade. Por exemplo: "Será que o hexágono ocupa a posição 23109 da sequência?". Desta questão podem surgir diálogos como o que se segue, que envolve alunos do 7.º ano:

> Bartolomeu: Dois mais três, mais um mais nove.
> [Vários alunos começam a somar os algarismos que formam o numeral]
> Mariana: Eu somei todos os números.
> Professora: Vocês adicionam todos os algarismos. Dois mais três, mais um, mais nove. Qual é o resultado?
> Vários alunos: Quinze.
> Professora: E o facto de ser quinze significa o quê?
> Vários alunos: Que é múltiplo de três.
> Professora: Portanto, o número é múltiplo de três. E o que é que isso significa?
> Vários alunos: Que nessa posição está um hexágono.

5.2.2. Sequências crescentes no 1.º ciclo

Logo nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem elaborar sequências numéricas e pictóricas de acordo com uma dada lei de formação, generalizar sequências numéricas crescentes usando a linguagem natural e explorar e investigar regularidades em tabelas e esquemas de números. Este trabalho deve ser efectuado em articulação com o desenvolvimento do sentido de número.

No 1.º ciclo, o trabalho com estas sequências incide sobre os aspectos seguintes:

(i) Continuar a representação de uma sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos termos dados);

(ii) Descrever os termos da sequência pictórica de acordo com a sua ordem (com base na análise das propriedades de cada figura da sequência);

(iii) Usar a relação entre o modo de constituição de cada figura e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma dada ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;

(iv) Expressar essa relação em linguagem natural (generalizar);

(v) Indicar a lei de formação de uma sequência numérica;

(vi) Escrever os termos de uma sequência numérica dada a lei de formação.

Exemplo 6 – Números pares e ímpares[39]. Um exemplo do trabalho que pode ser realizado na sala de aula envolve a exploração dos números pares e ímpares e da relação entre eles. Estes números podem ser representados pelas sequências seguintes:

	□	□ □□	□□ □□□	□□□ □□□□	□□□□ □□□□□
Números ímpares	1	3	5	7	9
	□ □	□□ □□	□□□ □□□	□□□□ □□□□	□□□□□ □□□□□
Números pares	2	4	6	8	10

Os alunos podem referir, por exemplo:

(i) De um número ímpar para o seguinte aumentam-se duas unidades;

(ii) De um número par para o seguinte aumentam-se duas unidades;

(iii) Os números pares são múltiplos de 2, ou seja, qualquer número par pode ser obtido pela multiplicação do número 2 por um número natural (pela análise da disposição rectangular dos números pares);

(iv) Um número par tem uma unidade a mais que o número ímpar anterior e uma unidade a menos que o número ímpar seguinte.

Exemplo 7 – Utilização da recta numérica. É natural que surjam outras sequências de números e a generalização a fazer pode ter por base a sua representação numa recta numérica. Por exemplo, pode pedir-se aos alunos que descrevam o que observam em situações como a da figura:

A representação corresponde à sequência 1, 4, 7, 10, 13,… que onde se começa em 1 e se adicionam sucessivamente 3 unidades. Pode também analisar-se a situação inversa, ou seja, dada a lei de formação, pedir aos alunos para determinarem os termos da sequência. Os alunos, se sentirem necessidade, podem apoiar-se, numa fase inicial, na representação numa recta não graduada,

Exemplo 8 – Regularidades no quadrado 10 por 10. A exploração do quadrado 10 por 10 (ver a figura seguinte) deve ser proposta aos alunos do 1.º ciclo com o objectivo de lhes proporcionar a oportunidade de explorarem sequências finitas de números e descreverem as regularidades que encontram, indicando a sua lei de formação:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Os alunos identificam regularidades relativas aos números em cada linha e em cada coluna. Por exemplo, em cada linha, da esquerda para a direita, de um número para o seguinte aumenta uma unidade, e em cada coluna, de cima para baixo, de um número para o seguinte aumenta 10 unidades. Assinalam ainda aspectos mais simples como as colunas de números pares, as colunas de números ímpares e a coluna dos múltiplos de 10. Podem também investigar as regularidades relativas à disposição dos múltiplos de 3 e de 7, como apresentam os dois quadrados da figura:

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10
11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**	19	20
21	22	23	**24**	25	26	**27**	28	29	**30**
31	32	**33**	34	35	**36**	37	38	**39**	40
41	**42**	43	44	**45**	46	47	**48**	49	50
51	52	53	**54**	55	56	**57**	58	59	**60**
61	62	**63**	64	65	**66**	67	68	**69**	70
71	**72**	73	74	**75**	76	77	**78**	79	80
81	82	83	**84**	85	86	**87**	88	89	**90**
91	92	**93**	94	95	**96**	97	98	**99**	100

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	**28**	29	30
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	40
41	**42**	43	44	45	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	55	**56**	57	58	59	60
61	62	**63**	64	65	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	**77**	78	79	80
81	82	83	**84**	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	**98**	99	100

Com base na exploração da disposição dos múltiplos de um dado número, os alunos podem formar novas sequências, identificando, por exemplo, o número de múltiplos em cada linha do quadrado. Assim, após assinalarem os múltiplos de 6, verificam que na primeira linha há apenas um múltiplo, o 6, na segunda linha há dois múltiplos, o 12 e o 18, e assim sucessivamente, formando a sequência 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1…

Além de deixar os alunos explorarem livremente a tabela de números, o professor deve propor que assinalem no quadrado 10 por 10 os números que formam uma sequência dada a sua lei de formação. Por exemplo, pode pedir aos alunos para marcarem os números de 5 em 5, começando no 3, e identificar a regularidade no algarismo das unidades[40], como mostra a figura:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Os alunos obtêm, assim, a sequência 3, 8, 13, 18, 23, 28… (até 98). Os algarismos das unidades são, alternadamente, 3 e 8. No quadrado 10 por 10, os números desta sequência ocupam duas colunas, a terceira e a oitava. Com base nesta representação, o professor pode promover uma discussão com vista ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e da capacidade de generalização dos alunos. Pode, também, questionar os alunos sobre o resultado de adições como:

$3 + 10 =$ $\qquad$ $3 + 15 =$

$3 + 20 =$ $\qquad$ $3 + 25 =$

$3 + 50 =$ $\qquad$ $3 + 55 =$

Com base nos resultados obtidos, pode pedir-se aos alunos que indiquem o algarismo das unidades do resultado da adição de números que não estão representados no quadrado 10 por 10, como:

$3 + 115 =$ $\qquad$ $3 + 140 =$

Após esta discussão, os alunos podem estabelecer, por exemplo, a seguinte generalização: *Sempre que adicionam 3 a um múltiplo de 5 a soma é um número cujo algarismo das unidades é 3 ou 8; se esse múltiplo de 5 é também múltiplo de 10 o algarismo das unidades da soma é 3 e se esse múltiplo de 5 não é múltiplo de 10 o algarismo das unidades da soma é 8.*

De seguida, sem efectuarem as marcações no quadrado, os alunos podem indicar o que acontece se marcarem os números de 5 em 5 começando, agora no 4, por exemplo.

Uma outra situação a investigar a partir da representação no quadrado 10 por 10, tendo em vista os mesmos objectivos, é começar num número e adicionar sucessivamente 9, como mostra o quadrado seguinte:

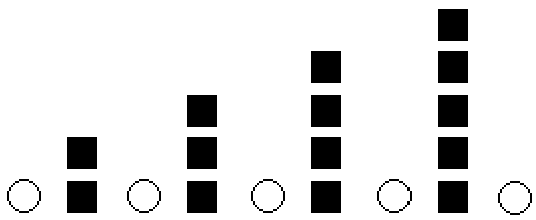
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

O professor deve pedir que os alunos justifiquem esta disposição das somas. Atendendo às características do quadrado identificadas inicialmente, na mesma coluna, de uma linha para a seguinte, o número aumenta 10 unidades. Assim, esta disposição salienta que adicionar 9 equivale a adicionar 10 e subtrair 1. De seguida, os alunos devem proceder ao seu registo escrito para identificarem estratégias de cálculo mental e para identificarem a regularidade, procedendo depois à indicação da sua generalização:

$$7 + 9 = 16$$
$$16 + 9 = 25$$
$$25 + 9 = 34$$
$$34 + 9 = 43$$
$$43 + 9 = 52$$
$$52 + 9 = 61$$
$$61 + 9 = 70$$
$$70 + 9 = 79$$
$$79 + 9 = 88$$
$$88 + 9 = 97$$

A sequência numérica relativa ao algarismo das unidades da soma é, neste caso, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 8, 7… Outras sugestões de exploração desta sequência podem ver-se na brochura *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática*[41].

Exemplo 9 – Sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente. Nas sequências mistas há um atributo que se repete ciclicamente e outro atributo que varia de acordo com a posição que ocupa na sequência, como mostra a sequência da figura:



Situações como esta permitem, por um lado, promover a compreensão da unidade que se repete ciclicamente e, por outro lado, analisar sequências crescentes. Na exploração destas sequências os alunos podem manifestar dificuldades em responder a questões como "Descreve o termo de ordem *n*", mas podem começar por identificar as ordens dos termos que se repetem e não crescem. Neste exemplo podem referir que os termos de ordem ímpar são brancos e os termos de ordem par são pretos. O círculo é o termo que surge em todas as ordens ímpares; os termos de ordem par, pelo seu lado, são constituídos por quadrados. Nestes termos de ordem par, o número de quadrados que os constitui aumenta em cada passo, ou seja, de um termo par para o termo par seguinte, acrescenta-se um quadrado preto.

Mais tarde, no 2.º e 3.º ciclos, os alunos fazem uma descrição da lei de formação que lhes permite dizer por quantos quadrados é constituído qualquer termo de ordem par. Para um dado termo de ordem par verificam que o termo par anterior tem um número de quadrados igual a metade da sua ordem pelo que esse termo par tem um número de quadrados igual a metade da sua ordem mais um. Recorrendo à linguagem algébrica podemos dizer que o termo par de ordem $2n$, sendo n um número natural, tem $n+1$ quadrados.

5.2.3. Sequências crescentes nos 2.º e 3.º ciclos

Entre as sequências crescentes, as sequências pictóricas têm grande importância pois a análise das suas propriedades figurativas pode levar a interessantes generalizações. Nos 2.º e 3.º ciclos, o trabalho com estas sequências pode incidir sobre os aspectos seguintes:

(i) Continuar a representação de uma sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos termos dados);

(ii) Descrever os termos de uma sequência pictórica de acordo com a sua ordem (com base na análise das propriedades de cada figura da sequência);

(iii) Usar a relação entre o modo de constituição de cada termo e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma dada ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;

(iv) Expressar essa relação em linguagem natural (generalizar);

(v) Representar o termo geral da sequência numérica associada a uma sequência pictórica (no 3.º ciclo, usando a linguagem algébrica);

(vi) Determinar o termo geral de uma sequência numérica;

(vii) Escrever os termos da sequência numérica dado o seu termo geral.

Em algumas situações, a determinação de termos de ordem distante é bastante complexa, nomeadamente quando a sequência envolve relações quadráticas ou outras relações não lineares. O mesmo acontece com a generalização da relação entre o termo da sequência e a sua ordem. É, portanto, importante que, para além de continuar sequências dadas, os alunos possam explorar e descrever sequências. É também importante que trabalhem com sequências numéricas em que um termo geral seja uma expressão algébrica que represente relações de diferentes tipos.

Um termo geral de uma sequência numérica associada a uma sequência pictórica pode ser determinado de diferentes modos: (i) pela decomposição dos termos da sequência pictórica; (ii) pela análise da sequência numérica tendo em conta o seu sentido de número; ou (iii) pela determinação das diferenças entre termos[42].

A determinação de um termo geral de uma sequência numérica com base na decomposição de um termo, procurando estabelecer relações entre a ordem desse termo e o número de elementos que constituem cada uma das suas diferentes partes, contribui para o desenvolvimento da capacidade de generalização e do sentido de símbolo dos alunos. Esta abordagem promove, assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico. O uso desta estratégia possibilita, ainda, o surgimento de expressões algébricas equivalentes, a partir de diferentes análises de uma mesma sequência. A exploração dessas expressões, nomeadamente, a verificação da sua equivalência, reforça a compreensão dos símbolos e promove a compreensão da manipulação algébrica.

Outra possibilidade, para o professor, é analisar uma sequência numérica pelo método das diferenças, dando atenção aos valores numéricos (como é apresentado nos exemplos 12 e 15). Assim, a exploração de termos de ordem consecutiva na sequência permite identificar a transformação que ocorre de uma ordem para a seguinte. Conhecer as diferenças entre termos consecutivos permite continuar a sequência numérica e dá indicações quanto à natureza do termo geral. Para isso, determinam-se consecutivamente as diferenças até que estas sejam constantes. A n-ésima diferença ser constante indica que um termo geral é um polinómio de grau n.

Exemplo 10 – Construção de uma sequência dado um termo geral. Aos alunos deve ser também proposta a construção de uma sequência numérica dado um termo geral. Determinando diversos termos, os alunos identificam o tipo de crescimento da sequência e as propriedades dos respectivos valores numéricos. Esta actividade pode contribuir para desenvolver a sua compreensão das expressões algébricas. Por exemplo, na determinação dos cinco primeiros termos da sequência de termo geral $4n-1$, temos:

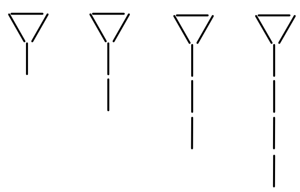
$$\begin{aligned}
&4\times 1-1=3\\
&4\times 2-1=7\\
&4\times 3-1=11\\
&4\times 4-1=15\\
&4\times 5-1=19
\end{aligned}$$

Os alunos podem verificar que de um termo para o termo seguinte aumentam-se quatro unidades porque se multiplica a ordem do termo por quatro. Este facto tem por base a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação [se o termo de ordem n é $4n-1$ então o termo de ordem $n+1$ é $4(n+1)-1$, ou seja, $4n+3$ – uma vez que $4n+3-(4n-1)=4n+3-4n+1=4$ concluímos que a diferença entre dois termos consecutivos é de 4 unidades]. Podem ainda verificar que a sequência é constituída pelos números que têm menos uma unidade que os múltiplos de quatro.

A análise de sequências pictóricas crescentes tem como principais objectivos desenvolver as capacidades de generalização e de usar a linguagem algébrica para expressar generalizações. Os exemplos que apresentamos de seguida procuram mostrar a grande diversidade de sequências pictóricas[43] que o professor pode propor na sala de aula, de acordo com o tipo de relação que quer que os alunos estabeleçam. As expressões algébricas que representam as respectivas sequências numéricas podem ser polinómios dos 1.º ou 2.º graus, e mesmo mais complexos.

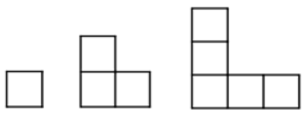
As questões a colocar para cada sequência pictórica estão relacionadas com os cinco primeiros aspectos acima mencionados, de acordo com o ano de escolaridade dos alunos e com as suas experiências anteriores. Para os alunos do 3.º ciclo acrescem questões relativas à indicação de um termo geral da sequência numérica correspondente e à utilização dessa expressão algébrica.

Exemplo 11 – Relação do tipo $n \pm a$. Os termos da sequência deste exemplo são formados por segmentos todos com o mesmo comprimento. A análise de figuras consecutivas mostra que cada termo tem uma parte igual ao termo anterior e acresce um segmento vertical, abaixo do já representado. Contudo, esta observação não basta para determinar um termo geral da sequência numérica relativa ao número de segmentos. Analisando as propriedades dos termos da sequência verificamos que estes são constituídos por uma parte comum e uma parte que se altera de acordo com a ordem do termo. A parte comum constante tem três segmentos que formam um triângulo equilátero. Na parte que varia, o número de segmentos verticais tem o mesmo valor que a ordem do termo. Obtém-se assim uma expressão algébrica que representa a sequência numérica, $n+3$:



Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de segmentos	4	5	6	7	…	$n+3$

Exemplo 12 – Relação do tipo $an \pm c$. Os termos da sequência deste exemplo são formados por quadrados. Queremos encontrar o número de quadrados de qualquer termo, identificando a relação entre esse número e a sua ordem na sequência. A análise das propriedades da figura permite seguir diferentes abordagens. Por exemplo, podemos verificar que a partir do primeiro termo, cada termo da sequência pode ser dividido em duas partes, sugeridas pela estrutura da sequência, que se relacionam com a ordem do termo. O número total de quadrados tanto na horizontal como na vertical é igual à ordem da figura. Contudo, há um quadrado que não pode ser contado duas vezes:



Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de quadrados	1	3	5	7	…	$2n-1$

A análise da sequência numérica leva-nos a identificar a sequência de números ímpares, aspectos que os alunos devem identificar.

De modo a poder compreender as diferentes estratégias dos alunos, é importante que o professor conheça bem a estrutura matemática subjacente a este tipo de sequência, recorrendo, para si, a raciocínios mais formais. Nesta sequência, o professor pode obter o termo geral a partir da determinação das diferenças entre os termos numéricos. Para isso, pode começar por construir uma tabela como a que se segue:

Ordem	1	2	3	4	5
Número total de quadrados	1	3	5	7	9
Primeira diferença		2	2	2	2

A primeira diferença é constante, o que confirma que a sequência pode ser representada por um termo geral de 1.º grau. De um modo genérico, para determinar um termo geral do tipo $u_n = an + b$ basta substituir dois pares ordenados da sequência

(n, u_n), por exemplo, $(1, u_1)$ e $(2, u_2)$, no termo geral e ficamos com um sistema de duas equações a duas incógnitas. Como, neste caso, $u_1 = 1$ e $u_2 = 3$, obtém-se:

$$\begin{cases} 1 = a \times 1 + b \\ 3 = a \times 2 + b \end{cases}$$

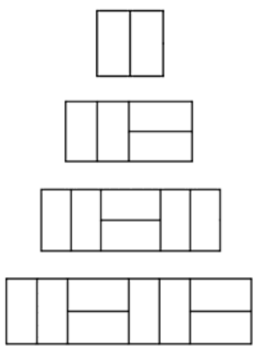
cujas soluções são $a = 2$ e $b = -1$.

Podemos, por outro lado, identificar a informação que a determinação das diferenças fornece para o termo geral, como ilustra a tabela seguinte:

n	1	2	3	4	5
$u_n = an + b$	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	$5a + b$
Primeira diferença	a	a	a	a	

Neste tipo de sequência numérica o valor da primeira diferença indica o valor de a. O valor de b pode determinar-se fazendo a subtracção entre o primeiro termo, u_1, e o valor da diferença, isto é $b = u_1 - a$. Na sequência apresentada o valor de a é 2 e o valor de b é -1 ($b = 1 - 2$). Obtém-se, assim, o termo geral desta sequência, $2n - 1$.

Exemplo 13 – Relação do tipo an. Os termos desta sequência são formados por rectângulos. Para continuar a sequência, os alunos devem ter em atenção que a orientação do bloco constituído por dois rectângulos vai-se alternando, com rectângulos ora na vertical, ora na horizontal. Procuramos aqui a relação entre o número total de rectângulos e o número de blocos (que representa a ordem do termo na sequência):

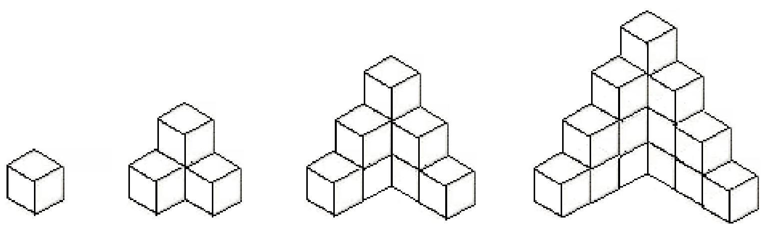


Número de blocos (ordem)	1	2	3	4	…	n
Número total de rectângulos	2	4	6	8	…	$2n$

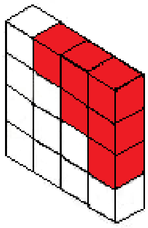
A exploração da constituição dos termos destas sequências contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Nesta situação temos a sequência de números pares. Se cada bloco for constituído por a rectângulos, com esta lei de formação o número total de rectângulos é dado pela expressão an.

Os exemplos 14, 15 e 16 que apresentamos em seguida incluem sequências pictóricas às quais se podem associar sequências numéricas cujos termos gerais são expressões algébricas de 2.º grau, sendo, portanto, a sua exploração mais adequada para alunos que se encontrem no final do ensino básico.

Exemplo 14 – Relação do tipo n^2. O estudo desta sequência apela à capacidade de visualização espacial. Na sequência seguinte, cada termo é constituído por cubos empilhados de acordo com uma dada lei de formação.



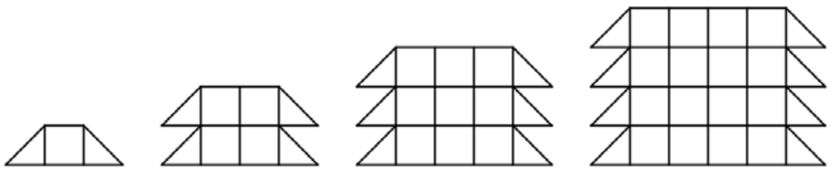
Alguns dos cubos não são visíveis na representação no papel. Para que os alunos mais novos compreendam a construção e consigam contar o número de cubos de cada termo pode ser necessária a utilização de material manipulável. Os alunos podem verificar que alguns cubos podem ser movimentados de modo a constituir uma forma quadrangular de lado n, sendo n a ordem do termo:



A sequência numérica que surge neste caso corresponde à sequência dos quadrados perfeitos:

Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de cubos	1	4	9	16	…	n^2

Exemplo 15 – Relação do tipo $n(n+a)$. Neste exemplo estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência pictórica, formados por quadrados e triângulos. A esta sequência podem ser associadas diversas sequências numéricas, dependendo dos aspectos que se procuram explorar.



Para descrever a relação entre a ordem de um termo e o número total de peças (uma peça pode ser um quadrado ou um triângulo) que o constitui, com base nas suas propriedades, os alunos podem indicar que cada termo tem quadrados e triângulos dispostos de modo que: (i) o conjunto das peças quadrangulares forma um quadrado que tem de lado tantos quadrados quanto o valor da ordem do termo (o número de peças quadrangulares é igual a n^2), e (ii) as peças triangulares encontram-se em dois lados opostos desse quadrado e o número de peças triangulares em cada um desses lados é igual ao número de peças quadrangulares que formam o lado (o número de peças triangulares é igual a $2n$). A tabela que se segue representa a relação entre a ordem do termo na sequência e o número total de peças que o formam:

Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de peças	3	8	15	24	…	$n^2 + 2n$

Tal como no exemplo 12, também aqui o professor deve reconhecer a estrutura subjacente à sequência e ser capaz de recorrer, para si, a métodos mais formais. Por exemplo, para determinar o termo geral desta sequência numérica, o professor pode usar o método das diferenças, elaborando uma tabela como a que se segue:

Ordem	1	2	3	4	5
Número total de peças	3	8	15	24	35
Primeira diferença		5	7	9	11
Segunda diferença			2	2	2

Nesta sequência a primeira diferença não é constante, apenas é constante a segunda diferença. Trata-se, portanto, de uma sequência quadrática. Um seu termo geral é uma expressão algébrica do tipo $u_n = an^2 + bn + c$. Para determinar os valores de *a*, *b* e *c* elaboram-se três equações por substituição de três pares ordenados da sequência, por exemplo $(1, u_1)$, $(2, u_2)$ e $(3, u_3)$. Nesta situação é também possível identificar a informação que a determinação das diferenças fornece para o termo geral, por meio da tabela seguinte:

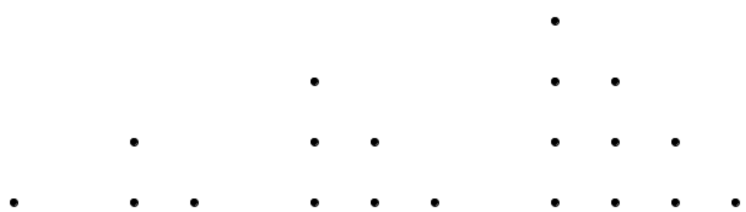
n	1	2	3	4	5
$u_n = an^2 + bn + c$	$a+b+c$	$4a+2b+c$	$9a+3b+c$	$16a+4b+c$	$25a+5b+c$
Primeira diferença		$3a+b$	$5a+b$	$7a+b$	$9a+b$
Segunda diferença			$2a$	$2a$	$2a$

O valor da segunda diferença, numa sequência quadrática, indica o dobro do valor de *a*. Substituindo o valor de *a* numa das expressões que resultam da primeira diferença podemos determinar o valor de *b*. Fazemos, por exemplo, $u_2 - u_1 = 3a + b$. Como sabemos a diferença $u_2 - u_1$ e o valor de *a,* temos uma equação de 1.º grau a uma incógnita. Agora o valor de c é facilmente determinado com base em qualquer um dos termos da sequência. Por exemplo, fazemos $u_1 = a + b + c \Leftrightarrow c = u_1 - a - b$. Assim, para esta sequência numérica temos $a = 1$, $5 = 3 + b \Leftrightarrow b = 2$ e $c = 3 - 1 - 2 = 0$. O termo geral é, portanto, $n^2 + 2n$.

A esta sequência pictórica pode também estar associada a sequência numérica relativa à área total de cada figura, tomando como unidade de área o quadrado do primeiro termo. Cada triângulo tem metade da área de um quadrado. Movendo as peças triangulares de um lado do quadrado para o outro lado obteríamos um rectângulo de área $n(n+1)$. A tabela seguinte apresenta essa sequência numérica:

Ordem	1	2	3	4	…	n
Área total	2	6	12	20	…	$n(n+1)$

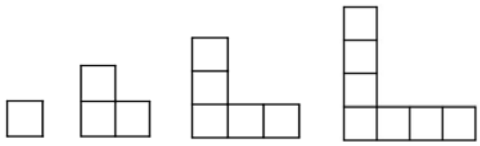
Exemplo 16 – Relação do tipo $n(n \pm a)/2$. Os termos da sequência pictórica deste exemplo são formados por pontos. Podemos propor a análise da relação entre a ordem de um termo na sequência e o seu número de pontos. Com base na análise de figuras consecutivas, verificamos que o número de pontos de um termo se obtém adicionando a sua ordem ao número de pontos do termo anterior. Procurando estabelecer uma relação entre cada termo e a sua ordem, podemos analisar a constituição de cada termo. A forma triangular que os pontos assumem sugere metade de uma forma rectangular com $n+1$ pontos no comprimento e n pontos na largura:



Ordem	1	2	3	4	…	n
Número de pontos	1	3	6	10	…	$\frac{n(n+1)}{2}$

Exemplo 17 – Expressões algébricas equivalentes. No 3.º ciclo, podem apresentar-se aos alunos tarefas destinadas a promover o estabelecimento de generalizações por meio de uma regra que relacione um termo com a sua ordem na sequência. No caso das sequências pictóricas crescentes, isso pode ser feito através da análise do modo como estão constituídos os seus termos, identificando partes variantes e partes invariantes, de acordo com a sua ordem. Nestas tarefas, o professor pode propor a determinação de expressões algébricas relativas às sequências numéricas associadas. Deve solicitar aos alunos que registem o modo como decompuseram cada termo da sequência, tendo em conta a sua ordem, de modo a que seja compreensível a forma como obtiveram o termo geral. Assim, retomando a sequência apresentada no exemplo 12, o professor pode propor aos alunos o seguinte:

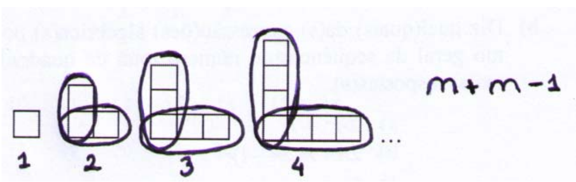
Considera os quatro primeiros termos de uma sequência pictórica:

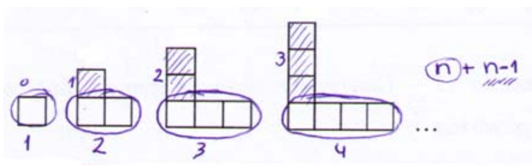


a) Indica um termo geral da sequência do número de quadrados de cada termo desta sequência pictórica. Regista a tua análise da figura.

b) Procurando olhar para a figura de outro modo, apresenta um termo geral diferente do anterior, registando de novo a tua análise da figura.

Da parte dos alunos, podem surgir resoluções como as seguintes:

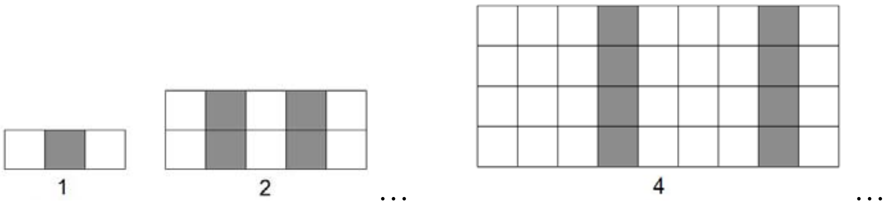




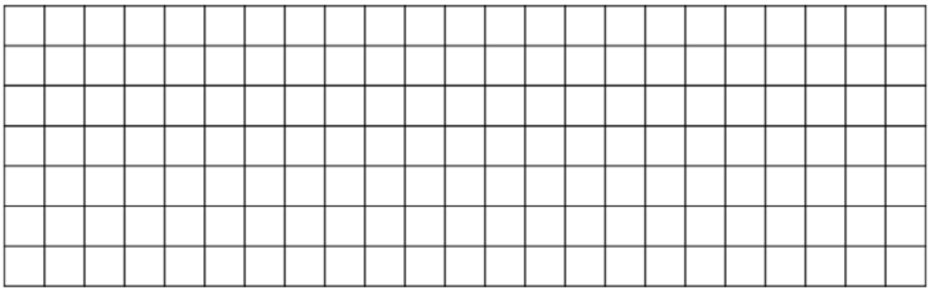
Para além de propor tarefas com sequências em que são dados os seus primeiros três ou quatro termos, o professor deve apresentar situações envolvendo a exploração de sequências cujos primeiros termos não são conhecidos, como se mostra nos exemplos que se seguem.

Exemplo 18 – Determinar diversos termos, dados termos não consecutivos de uma sequência pictórica.

A figura seguinte apresenta os 1.º, 2.º e 4.º termos de uma sequência.



a) Representa os 3.º e 5.º termos desta sequência. Explica o teu raciocínio.



b) Diz qual(quais) da(s) expressão(ões) algébrica(s) pode(m) representar um termo geral da sequência do número total de quadrados 1 por 1. Justifica a(s) tua(s) respostas(s).

   a) $2n^2 + n$
   b) $2n + n(2n - 1)$
   c) $2(n + n + 1)$
   d) $2n + 2(n - 1) \times n + n$

Exemplo 19 – Determinar diversos termos, dado apenas um termo de uma sequência pictórica.

A figura seguinte apresenta o 4.º termo de uma sequência.

a) Indica os três termos que podem anteceder este termo nesta sequência. Explica o teu raciocínio.

b) Apresenta um termo geral da sequência do número de pintas.

A exploração deste tipo de tarefas possibilita o surgimento de diferentes sequências numéricas de acordo com a análise que os alunos fazem dos termos dados. Deste modo é dada grande ênfase à análise da figura, promovendo a sua decomposição e o estabelecimento de relações com a sua ordem na sequência.

5.2.4. Esquemas numéricos

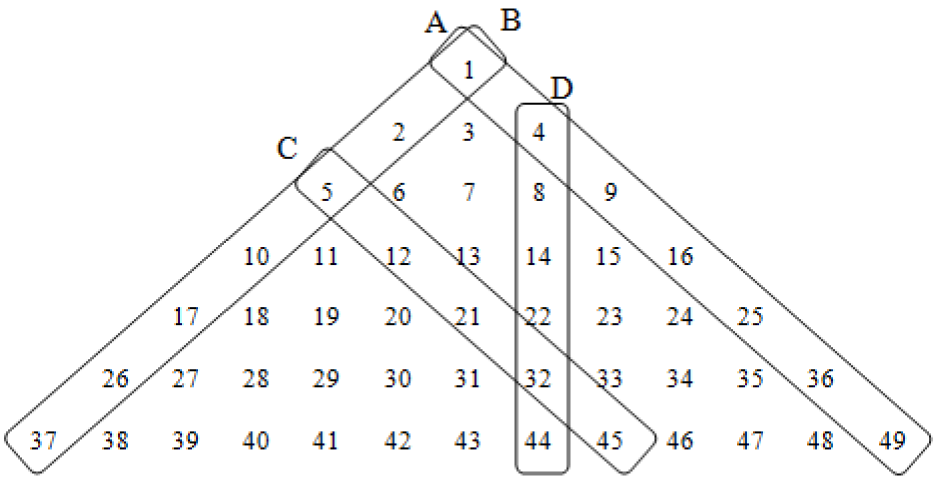
A figura abaixo apresenta um esquema onde podem ser identificadas diversas sequências numéricas cabendo aos alunos assinalá-las e determinar o respectivo termo geral. Este esquema é relativamente complexo, envolvendo sequências quadráticas, e a determinação do termo geral das várias sequências é adequada para alunos no final do 3.º ciclo[44].

						1						
					2	3	4					
				5	6	7	8	9				
			10	11	12	13	14	15	16			
		17	18	19	20	21	22	23	24	25		
	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

Este esquema pode ser continuado até onde se quiser. Nele, os alunos podem identificar diversas regularidades. Por exemplo, verificam que considerando os números na vertical, da primeira para a segunda linha o número acresce 2 unidades, da segunda para a terceira linhas acresce 4 unidades, da terceira para a quarta linha acresce 6 unidades e assim sucessivamente, qualquer que seja a vertical considerada. Na diagonal, o aumento depende também das linhas. Na diagonal da esquerda para a direita da primeira para a segunda linha aumenta 3, da segunda para a terceira linhas aumenta 5, depois aumenta 7 e assim sucessivamente. Na diagonal da direita para a esquerda, da primeira para a segunda linha aumenta 1, da segunda para a terceira linhas aumenta 3, depois aumenta 5, de seguida 7, e assim sucessivamente.

Contudo, nem todas as sequências de números onde os alunos podem encontrar regularidades são infinitas, como é o caso da sequência de números 16, 22, 30, 40, 52, 66, 82, em que do primeiro para o segundo aumenta 6 unidades, do segundo para o terceiro aumenta 8, depois aumenta 10, 12, 14 e, por fim, aumenta 16. Esta sequência poderia ser continuada de acordo com esta lei de formação e o número seguinte seria 100. No entanto este número já não se encontra no seguimento dos anteriores.

O esquema da figura abaixo tem assinaladas algumas das sequências numéricas que os alunos identificam, devendo depois ser-lhes pedido que indiquem o seu termo geral:



Inicialmente, em cada uma das sequências assinaladas, os alunos podem apenas referir a diferença entre termos consecutivos. As suas capacidades de generalizar e de expressar o termo geral usando a linguagem algébrica dependem do trabalho desenvolvido noutras situações de exploração deste tipo de sequências. Cada uma das sequências pode ser explorada e deve ser procurado um termo geral, tal como foi apresentado anteriormente para outras sequências numéricas quadráticas.

Os alunos indicam que a sequência numérica A é constituída pelos "quadrados perfeitos" ou pelo resultado de um "número multiplicado por ele próprio", sendo este número igual ao número da linha em que esse resultado se encontra. Devem, portanto, apresentar a expressão algébrica n^2, ou equivalente, para o termo geral.

Pelo seu lado, a generalização da sequência B pode seguir duas abordagens. Numa, os alunos verificam que cada termo tem mais uma unidade que o termo anterior da sequência A. Dada esta compreensão é fácil chegar à expressão $(n-1)^2+1$. Noutra abordagem, podem verificar que o primeiro termo é 1 e que a primeira diferença entre termos consecutivos não é constante, mas a segunda já é, o que indica que o termo geral é uma expressão do tipo an^2+bn+c. Como a segunda diferença é 2, o valor de a é 1. Da primeira diferença entre os dois primeiros termos ficamos com a equação $3\times 1+b=1$, pelo que $b=-2$. A expressão que resulta do conhecimento do primeiro termo permite determinar o valor de c, $1+(-2)+c=1 \Leftrightarrow c=2$. A expressão obtida por esta abordagem é n^2-2n+2. Caso surjam as duas abordagens na sala de aula, isso pode ser usado para reforçar a compreensão da manipulação algébrica, verificando a equivalência das expressões.

Com um procedimento análogo, para a sequência C determinamos que $a=1$, $b=4$ e $c=0$, sendo, portanto, n^2+4n (ou $n(n+4)$) o seu termo geral. E para a sequência D, temos $a=1$, $b=1$ e $c=2$, sendo o termo geral n^2+n+2.

Estes esquemas podem ter estruturas muito diversificadas e um primeiro desafio a colocar pelo professor aos alunos pode ser o de continuar o esquema numérico, verificando as várias estratégias que os alunos seguem, reveladoras de diferentes compreensões. Para os alunos dos primeiros anos, o professor pode sugerir esquemas numéricos mais simples com o intuito de promover o sentido de número e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

6. Símbolos e expressões algébricas

Na educação matemática não faltam "condenações" do simbolismo. No entanto, ele é parte essencial da Matemática, que não podemos dispensar. Na verdade, o simbolismo coloca um problema complicado de resolver. Por um lado, os símbolos têm um grande valor. Na verdade, o simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar as ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular. Por outro lado, o simbolismo acarreta grandes perigos para o processo de ensino-aprendizagem, pois, como dizem Davis e Hersh[45], caímos no formalismo quando perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção aos símbolos e ao modo de os manipular. Este capítulo debruça-se sobre as diferentes interpretações para os símbolos e expressões, analisa o modo como se desenvolve a noção de variável e o sentido de símbolo e discute o ensino das expressões algébricas, com destaque para os casos notáveis da multiplicação de binómios – um dos pontos do currículo de Álgebra escolar onde se verificam sérias dificuldades por parte dos alunos.

6.1. Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

6.1.1. Interpretação de símbolos e expressões

Sublinha-se constantemente que a Álgebra envolve uma forte simbolização. Na verdade, o uso de símbolos começa desde logo na Aritmética:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -, \times, \div, =, <, >, \frac{3}{5}, \%, \sqrt{2}, 2^3$$

A Álgebra acrescenta novos símbolos e envolve uma mudança de significado de alguns dos símbolos existentes.

Novos símbolos: x, y, $\Leftrightarrow$, $\{$ ...

Símbolos para operações abstractas: θ, σ, ω, φ, μ, η, λ...

Mudança do significado: =, +...

A mudança de significado do símbolo = é um dos aspectos que mais dificuldade traz aos alunos. Assim, em Aritmética, os alunos estão habituados a encarar a expressão $5+7=$ como indicando uma operação que é preciso fazer. Em Álgebra, $x+5=7$, não se refere a uma operação, mas sim a uma condição, colocando a pergunta qual o valor que satisfaz esta igualdade. Do mesmo modo, em Aritmética, $5+7$ é uma expressão que pode ser simplificada, enquanto que, em Álgebra, $x+5$ é uma expressão que não se pode escrever de modo mais simples, pelo menos enquanto não se souber mais informação sobre x.

Já nos anos 70, num estudo feito no Reino Unido, Dietmar Küchemann[46] indicava diversas acepções para as letras usadas em Álgebra. Para além de várias noções rudimentares (letra avaliada, letra não considerada e letra como objecto), apontava três acepções fundamentais usadas correntemente em Matemática:

1. *Letra como incógnita*, representando um número específico, mas desconhecido, com o qual é possível operar directamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como $x+3=6$, por exemplo.
2. *Letra como número generalizado*, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor. Por exemplo, ao responderem adequadamente a questões como "o que podes dizer sobre c se $c + d = 10$ e c é menor que d?", os alunos revelam esta interpretação da letra.
3. *Letra como variável*, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre um dado conjunto e outros conjuntos. É a interpretação que os alunos necessitam de ter, quando raciocinam sobre questões como "qual é maior, $2n$ ou $n + 2$?".

É de notar que muitas das expressões algébricas e equações usadas frequentemente nas aulas de Matemática podem ser interpretadas de modos distintos. Zalman Usiskin[47], ilustra esta ideia com equações como as seguintes.

$$A = CL$$

$$40 = 5x$$

$sin(x) = cos(x).tg(x)$

$1 = n.\frac{1}{n}$

$y = kx$

Segundo Usiskin, a primeira expressão apresentada, $A = CL$, é uma fórmula, na qual as letras *A*, *C* e *L* representam três quantidades – área (*A*), comprimento (*C*) e largura (*L*) – que são entendidas como se fossem números conhecidos. Na equação $40 = 5x$, a letra *x* é usualmente vista como incógnita, ou seja, como representante de um certo número desconhecido. A expressão $\sin(x) = \cos(x).tg(x)$ é uma identidade, sendo a letra *x* vista como o argumento de uma função. A expressão $1 = n.\frac{1}{n}$ representa a propriedade da existência de inverso e pode surgir da generalização de uma regularidade. Por último, $y = kx$ pode ser interpretada como a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa em que as três letras utilizadas assumem papéis distintos: *x* é o argumento da função (variável independente), *y* é o valor que a função toma para cada argumento (variável dependente) e *k* pode ser visto como a constante de proporcionalidade directa ou como um parâmetro, se considerarmos a família de funções. Por outro lado, esta expressão pode ainda ser encarada como a equação reduzida das rectas não verticais que contêm a origem do referencial e têm declive *k*. Podemos discordar destas interpretações num ou noutro ponto, mas os exemplos apresentados mostram que a utilização das letras é multifacetada, envolvendo uma diversidade de significados, de acordo com as situações em causa.

As dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por numerosos autores[48]. Alguns exemplos dessas dificuldades podem ver-se no Quadro 2.

Quadro 2 – Dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra

- Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números,
- Pensar numa variável como significando um número qualquer,
- Atribuir significado às letras existentes numa expressão,
- Dar sentido a uma expressão algébrica,
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica,

- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e = e, em particular, distinguir adição aritmética $(3+5)$ da adição algébrica $(x+3)$.

6.1.2. Desenvolvimento do sentido de símbolo

Alan Schoenfeld e Abraham Arcavi[49] criticam o facto do ensino da Matemática tender a encarar a utilização de variáveis como algo que, após alguma prática, os alunos compreendem de modo uniforme e sem qualquer ambiguidade. Com base num pequeno estudo realizado com matemáticos, educadores matemáticos, cientistas, linguistas e lógicos, ilustram a diversidade de formas como a notação matemática pode ser entendida. Estes autores argumentam que, no cenário escolar, a construção do conceito de variável é um processo complexo que merece atenção particular, considerando-o mesmo como um tópico central no ensino-aprendizagem da Matemática. Consideram que a utilização, com significado, da noção de variável facilita a transição entre a Aritmética e a Álgebra e propicia a construção de novos conceitos matemáticos de carácter mais avançado, noutros anos de escolaridade.

Assim, parece aconselhável introduzir desde cedo as diversas utilizações dos símbolos literais, nomeadamente como incógnita, número generalizado e variável. Essa é a perspectiva, por exemplo, dos *Princípios e Normas* do NCTM, onde se defende, de um modo abrangente, que os alunos devem compreender os diversos significados e usos das letras, através da representação de quantidades, nomeadamente na resolução de situações problemáticas. Também o *Programa de Matemática* indica que a aprendizagem da linguagem algébrica se deve iniciar no 2.º ciclo. Para o 3.º ciclo, este programa refere que:

> A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e [d]a simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efectuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto. O conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, em equações e fórmulas) e discutam os seus significados (p. 55).

O facto de se considerar uma fronteira mais alargada para a Álgebra do que a estabelecida tradicionalmente não significa que se menospreze o cálculo algébrico e o papel do simbolismo. Pelo contrário, indo além da simples manipulação de símbolos e expressões algébricas será preciso dar mais atenção aos símbolos e aos seus significados. Como vimos no capítulo 2, Abraham Arcavi defende que se deve procurar o desenvolvimento do "sentido de símbolo" (*symbol sense*), e que representa para o caso da Álgebra, um papel análogo ao que o "sentido de número" assume no trabalho com Números e operações. Na sua perspectiva, o sentido de símbolo inclui a compreensão de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos consoante os contextos, intuindo a existência dessas diferenças. Assim, os alunos devem criar uma intuição que lhes permita interpretar aspectos implícitos nos símbolos e antecipar o que pode decorrer das acções que desencadeiam sobre eles. Para Arcavi, ter sentido de símbolo deve permitir aos alunos serem capazes de decidir quando os símbolos são úteis e devem ser utilizados, para evidenciar relações, mostrar a generalidade ou fazer demonstrações. Além disso, o sentido de símbolo inclui a capacidade de seleccionar uma representação simbólica e de poder melhorá-la, se necessário. É o que sucede, por vezes, na resolução de problemas, quando os alunos necessitam de escolher uma forma de representar três números consecutivos. Em certas situações pode ser mais vantajoso designar o menor número por n, sendo os seguintes $n+1$ e $n+2$. Noutras situações poderá ser mais simples considerar $n-1$, n e $n+1$, ou ainda $n-2$, $n-1$ e n. A escolha das representações simbólicas para as variáveis pode ser também muito importante quando os alunos formulam um sistema de equações para resolver um problema, uma vez que uma escolha pouco cuidadosa pode originar a formulação de um sistema de resolução bastante mais complexa. O sentido de símbolo diz ainda respeito à capacidade de manipular e interpretar as expressões algébricas de forma eficiente. Arcavi salienta que a manipulação algébrica não deve ser efectuada automaticamente, de uma forma completamente cega, devendo incluir uma análise crítica das expressões, que permita antecipar a razoabilidade das soluções obtidas.

Ao longo do ensino básico, as actividades realizadas pelos alunos devem contribuir para que eles desenvolvam o sentido de símbolo. Continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático, quer relativo a situações extra-matemáticas, a aprendizagem da Álgebra requer a compreensão dos seus conceitos fundamentais. Para isso, o professor deve dar atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nas suas diversas vertentes, permitindo aos alunos a elaboração de raciocínios cada vez mais abstractos e complexos.

6.1.3. Expressões algébricas

O trabalho com expressões algébricas constitui uma vertente importante da aprendizagem da Álgebra, nomeadamente no 3.º ciclo. No passado, os alunos trabalhavam a simplificação de expressões algébricas relativamente complexas, antes de iniciar o estudo de equações e funções. Hoje em dia, a aprendizagem do trabalho com expressões algébricas faz-se em simultâneo com a aprendizagem das sequências, das funções e das equações, procurando-se assim que estas façam sentido para os alunos. No entanto, seria errado pensar que só por trabalharem com sequências, funções e equações, automaticamente aprendem a lidar com expressões algébricas. O trabalho com expressões algébricas, por vezes, precisa de uma atenção específica, de modo a que os alunos percebam com que objecto estão a trabalhar, que operações que podem efectuar e que equivalências podem obter.

No trabalho com expressões algébricas é importante que os alunos reconheçam a noção de equivalência de expressões – duas expressões são equivalentes se assumem o mesmo valor para todo o valor que se atribua à variável (ou variáveis que nelas figuram). A equivalência de expressões algébricas tem de ser justificada pelas propriedades das operações – comutativa, associativa, distributiva, existência de elemento neutro ou elemento absorvente – ou pela definição das operações inversas ($x = b - a$ se e só se $x + a = b$, etc.). Note-se, ainda, que a equivalência de expressões representa-se com o sinal de igual. Trata-se, por isso, de um dos usos deste sinal, que muitas vezes provoca confusão nos alunos. Estes devem, no entanto, compreender que quando escrevemos $2x + x = 3x$ não estamos a dizer que as expressões algébricas são iguais, mas sim que ambas assumem o mesmo valor, para o mesmo valor atribuído a *x*, ou seja, que são equivalentes. Isto sucede, também, nos exemplos que se seguem, que os alunos devem aprender a interpretar de modo distinto: no primeiro encontramo-nos perante a resolução de uma equação do 1.º grau, que é possível e indeterminada; no segundo encontramo-nos perante a simplificação de uma expressão algébrica:

$6x-4(2x+4)=6x-8x-16$ $\Leftrightarrow 6x-8x-16=6x-8x-16$ $\Leftrightarrow 6x-6x-8x+8x=-16+16$ $\Leftrightarrow 0=0$	$6x-4(2x+4)=6x-8x-16=-2x-16$

Já referimos anteriormente que Carolyn Kieran estabelece uma distinção entre duas perspectivas da Álgebra, a *processual* e a *estrutural*[50]. Do seu ponto de vista, os alunos assumem uma perspectiva *processual* quando procuram de imediato substituir as variáveis por números, realizando depois as operações aritméticas indicadas. Por exemplo, se considerarmos a expressão $3x+y$ e substituirmos x por 4 e y por 5, obtemos 12+5, o que conduz ao resultado 17. Outro exemplo consiste na resolução da equação $2x+5=11$, com substituição de x por valores sucessivos até encontrar o valor correcto. Nestes exemplos, as operações realizadas são numéricas. Pelo contrário, os alunos assumem uma perspectiva *estrutural* quando trabalham com as expressões algébricas de acordo com as convenções próprias da estrutura destas expressões, compreendendo o que estão a fazer. Por exemplo, a expressão $3x+y+8x$ pode ser simplificada, dando origem à expressão $11x+y$. Noutro exemplo, a resolução da equação $5x+2x-5=-4+1$ pode ser iniciada através da simplificação das expressões que surgem em ambos os membros, obtendo-se a equação equivalente $7x-5=-3$, bastante mais simples que a anterior. Nestes exemplos, os alunos operam sobre as expressões algébricas, obtendo como resultado uma expressão algébrica. Deste modo, no 3.º ciclo, a tarefa do professor é a de levar os alunos a passar de uma perspectiva processual para uma perspectiva estrutural da Álgebra, sendo que os alunos que se situam numa perspectiva estrutural conseguem recorrer a estratégias de âmbito processual quando a situação se resolve com mais facilidade desse modo.

A compreensão das expressões algébricas pelos alunos envolve diversos aspectos. Um primeiro aspecto é a compreensão da noção de monómio e da sua representação – ou seja, reconhecer, por exemplo, $2x$ como sendo uma forma abreviada de escrever $2\times x$. É muitas vezes problemático para o aluno reconhecer que x é um monómio (de coeficiente 1), 4 é um monómio (sem parte literal), $-x$ é um monómio (de coeficiente –1) e que $-x$ pode representar um número positivo (se $x<0$). Outro aspecto tem a ver com a simplificação de monómios semelhantes, que depende, em grande medida, da compreensão da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta simplificação assume maior dificuldade quando os coeficientes dos monómios a simplificar são fraccionários ou têm sinais diferentes. Verificamos aqui que dificuldades relacionadas com conceitos ou representações próprios da Aritmética contribuem também para o surgimento de dificuldades adicionais nos conceitos e representações algébricos. Outra dificuldade reconhecida é em lidar com a "falta de fechamento" das expressões algébricas. Por exemplo, alguns alunos não encaram a expressão $2x + 3$ como irredutível e consideram que pode ser simplificada, escrevendo $5x$. Estes alunos assumem a existência "virtual" da variável x no segundo monómio, dando origem a uma aplicação incorrecta daquela propriedade. A realização de alguns exemplos numéricos pode ser uma estratégia eficaz para que reconheçam que a equivalência que propõem é de facto incorrecta. Assim, se $x = 2$,

$2x + 3$ assume o valor $2 \times 2 + 3$, ou seja, 7
enquanto que $5x$ assume o valor 5×2, ou seja, 10

Muitos alunos manifestam dificuldades em lidar com expressões algébricas como as que já foram referidas neste texto, principalmente quando não conseguem atribuir-lhes significado, interpretando o papel da simbologia nelas incluída ou vendo-as como indicando um determinado procedimento. De acordo com Sigrid Wagner, Sid Rachlin e Bob Jensen[51], por vezes, é mais difícil para os alunos atribuir significado a expressões algébricas, do que, propriamente, a equações. Daí que, alguns deles sejam tentados a acrescentar a uma expressão algébrica "$= 0$", transformando-a numa equação que, em seguida, tentam resolver.

Duas outras autoras, Liora Linchevski e Drora Livneh[52], analisam o modo como alguns alunos, no processo de resolução da equação $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$, transformaram $n - 2 + 5$ em $n - 7$. Este erro resulta da separação do número 2 do sinal – que o precede, seguida da adição de 2 com 5. São novamente dificuldades de ordem aritmética a dar origem a dificuldades no trabalho com o simbolismo algébrico. Em qualquer dos casos, estamos perante uma situação de violação das convenções estabelecidas no trabalho com expressões algébricas, ou seja, na respectiva estrutura. Estas autoras consideram que o ensino da Álgebra deve promover o "sentido da estrutura", isto é, que os alunos devem tomar contacto com a estrutura das expressões algébricas e tornar-se capazes de usá-la de forma flexível. Para isso, as tarefas propostas devem promover, por exemplo, a capacidade de compor e decompor expressões algébricas, mantendo a equivalência dessas expressões.

O *Programa de Matemática* indica que a aprendizagem das operações com monómios e polinómios e da simplificação de expressões algébricas deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efectuando cálculos a partir de expressões algébricas, substituindo as letras por valores numéricos.

Adição e multiplicação algébrica de monómios e polinómios

A adição algébrica de monómios requer uma correcta identificação dos monómios que são semelhantes, isto é, dos monómios que têm a mesma parte literal. A simplificação de expressões onde só intervém a adição algébrica de monómios envolve o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a adição ou subtracção dos coeficientes dos monómios semelhantes, como mostram os exemplos que se seguem:

a)

$$\begin{aligned}&9x+8y-3x+4y=\\&=9x-3x+8y+4y=\\&=(9-3)x+(8+4)y=\\&=6x+12y\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&-x^2-x+3x^2=\\&=(-1+3)x^2-x=\\&=2x^2-x\end{aligned}$$

A adição algébrica de polinómios envolve a necessidade de eliminar os parêntesis, o que é especialmente delicado para os alunos no caso da subtracção. Assim, é conveniente que seja dada particular atenção à simplificação de expressões como $3+x-(4-2x)$ e que os alunos compreendam que o uso de parêntesis, em situações como esta, é fundamental.

Ao contrário do que sucede no caso da adição algébrica de monómios, em que a parte literal dos monómios (semelhantes) adicionados não se altera, na multiplicação de monómios (semelhantes ou não) multiplicamos os coeficientes e as partes literais. A compreensão do que é uma potência e do significado da sua base e do expoente, bem como das propriedades operatórias das potências (com a mesma base) pode facilitar a compreensão da forma como se obtém a parte literal do monómio resultante. Por exemplo, se o aluno compreender que $4^2 \times 4^3 = 4^5$ poderá fazer o paralelismo e observar que

$x^2 \times x^3 = x^5$. Para multiplicar polinómios é, novamente, fundamental saber usar com eficiência a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e ser capaz de multiplicar monómios.

Em muitos casos, quando o aluno ainda não compreende completamente a adição de monómios, acaba por utilizar incorrectamente o raciocínio da multiplicação e comete erros como considerar $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$. É, por isso, muito importante que estas operações sejam bem consolidadas e surjam com base em tarefas a que os alunos consigam atribuir significado, como a exploração de sequências e regularidades.

Casos notáveis da multiplicação de binómios

No trabalho com expressões algébricas, assumem especial importância os casos notáveis da multiplicação de binómios. A equivalência de $(x+a)^2$ e $x^2+2xa+a^2$ (quadrado de um binómio) deve ser mostrada tanto algébrica como geometricamente. No entanto, antes de poderem compreender uma justificação geral, os alunos devem trabalhar com casos simples tais como:

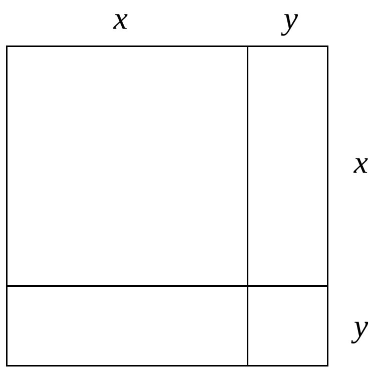
$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1(1+x) + x(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2$$

No caso dos alunos terem muita dificuldade em seguir estes passos, o professor pode reverter para um exemplo puramente numérico e evidenciar o paralelo entre esse exemplo e uma expressão algébrica tão simples quanto possível:

$$(1+3)^2 = (1+3)(1+3) = 1(1+3) + 3(1+3) = 1\times 1 + 1\times 3 + 1\times 3 + 3\times 3 = 1^2 + 2\times 1\times 3 + 3^2$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = xx + xy + xy + yy = x^2 + 2xy + y^2$$

A interpretação geométrica, a partir da determinação da área do quadrado na sua totalidade ou a partir de uma dada decomposição, pode ajudar a promover a compreensão da equivalência entre as duas expressões:



$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= xx+xy+xy+yy \\
&= x^2+2xy+y^2
\end{aligned}
$$

A diferença de quadrados também pode surgir algebricamente, com base na observação de que os monómios do 1.º grau são simétricos e acabam por se anular:

$$(x+4)(x-4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$$

$$(x-6)(x+6) = x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$$

$$(2x-5)(2x+5) = 4x^2 - 10x + 10x - 25 = 4x^2 - 25$$

Em geral, $(ax-b)(ax+b) = (ax)^2 - abx + abx - b^2 = (ax)^2 - b^2$.

No 3.º ciclo, os alunos devem ainda saber escrever expressões equivalentes em casos como $(ax+b)^2$, $(ax-b)^2$ e $(ax+b)(ax-b)$. No entanto, a abordagem a outros casos mais complexos, como $(ax^3+bx^4)^2$ pode ser deixada para o ensino secundário.

No trabalho com casos notáveis da multiplicação, são vários os aspectos que os alunos têm de compreender. Assim, têm de perceber que a equivalência das expressões funciona nos dois sentidos, isto é, tanto temos $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ como temos $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, e umas vezes temos necessidade de transformar o quadrado de um binómio num trinómio, outras vezes passa-se o inverso (basta pensar no papel importantíssimo que a factorização pode ter na resolução de alguns tipos de equações do 2.º grau, em conjunto com a lei do anulamento do produto).

De acordo com o *Programa de Matemática*, deve ser proposta aos alunos a adição algébrica e a multiplicação de polinómios como $2x+1$ e $3x+2$, ou $x+2$ e x^2-3x+2. Além disso, este programa refere que os alunos devem utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios. Por exemplo:

$$87^2 = (80+7)^2 = 80^2 + 2\times 80\times 7 + 7^2$$

$$(x+3)^2 - 2^2 = (x+3+2)(x+3-2) = (x+5)(x-1)$$

Os casos notáveis da multiplicação podem também ser trabalhados com base em tarefas exploratórias, envolvendo a procura de relações entre números, a identificação de regularidades e a sua generalização, como sugerimos na secção seguinte deste texto.

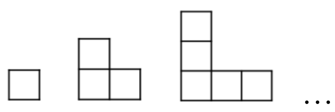
6.2. Tarefas: Exemplos e ilustrações na sala de aula

Neste ponto apresentamos algumas tarefas para o trabalho com expressões algébricas no 3.º ciclo. Em cada caso, apresentamos sumariamente a tarefa e os objectivos que se propõe atingir e damos alguns exemplos do que se pode passar na sala de aula.

6.2.1. Sequências pictóricas e expressões algébricas equivalentes

As expressões algébricas podem surgir da representação simbólica da relação que os alunos identificam tendo por base a decomposição das figuras que formam uma sequência[53]. Deste modo, a análise de sequências pictóricas crescentes pode contribuir para a compreensão das expressões algébricas e para a compreensão das operações envolvidas na sua simplificação.

Exemplo 1 – Sequência pictóricas e simplificação de expressões. Na sequência já apresentada anteriormente, no capítulo 5, é possível decompor de vários modos os termos que a constituem, estabelecendo relações com a sua ordem. Assim, após a decomposição de um termo, devem identificar a(s) parte(s) invariante(s) e a(s) parte(s) que variam, de acordo com a ordem desse termo.



Por exemplo, Bartolomeu (7.º ano) identifica duas partes nas figuras da sequência: uma constituída pelo total de quadrados que estão dispostos na horizontal (em número igual à ordem da figura) e outra constituída pelos quadrados que estão na vertical, retirando o que está na base dessa coluna (em número igual à ordem da figura menos um). Descreve assim o termo de ordem 8:

> têm 15 quadrados porque na horizontal teria 8 e na vertical 7.

Cidália (7.º ano) identifica também duas partes nas figuras da sequência: a do total de quadrados na horizontal e a do total de quadrados na vertical (ambas com igual número de quadrados e igual à ordem da figura). Como há um quadrado comum, a aluna indica ser necessário retirar um quadrado para compensar a sobrecontagem:

> Porque 8+8 = 16 e como um dos quadrados fica em cima do outro, assim ficamos com 15.

Estas duas formas de decompor a figura dão origem a expressões algébricas equivalentes, como $x+(x-1)$, $x+x-1$ ou $2x-1$. É isso que nos indica Bartolomeu:

> fazia o dobro do número da fig. e depois tirava um quadrado.
>
> $x \times 2 - 1$

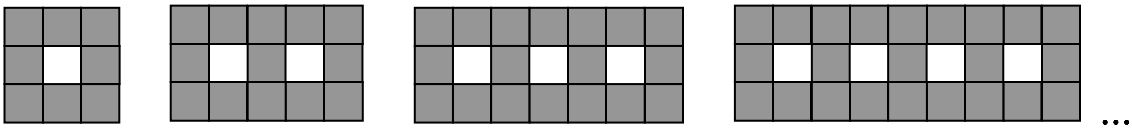
A partilha das diferentes estratégias, das descrições verbais e das expressões algébricas entre os alunos, nos momentos de discussão em grande grupo, permite analisar as propriedades das operações e o modo de simplificar expressões algébricas. Neste caso é possível explorar, por exemplo, os seguintes aspectos:

(i) Desembaraçar de parênteses: $x+(x-1)=x+x-1$;

(ii) Adicionar dois monómios semelhantes: $x+x-1=2x-1$.

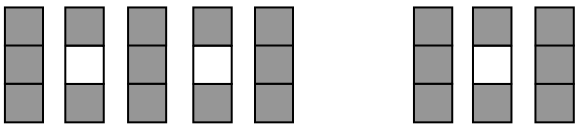
Exemplo 2 – Diferentes perspectivas e diferentes expressões. Numa sequência pictórica em que os respectivos termos são mais elaborados que os apresentados na sequência anterior, as expressões algébricas que representam a relação entre a ordem de uma figura e as partes que a constituem (parte(s) invariante(s) e parte(s) que variam, de acordo com a sua ordem) são também mais complexas e permitem explorar diferentes aspectos da manipulação algébrica.

Procuremos o termo geral da sequência numérica dada pelo número de quadrados cinzentos da sequência pictórica seguinte:



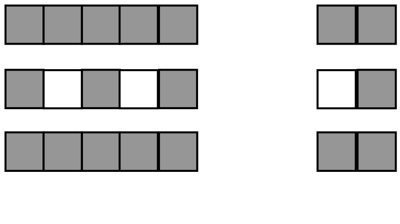
O número de quadrados cinzentos em cada figura pode ser obtido com base em decomposições diversas.

A. Cada figura é constituída por colunas de três quadrados. Começa e termina com uma coluna de quadrados cinzentos. Entre cada uma destas colunas há uma coluna de três quadrados em que o do meio é branco e os restantes são cinzentos. O número de quadrados brancos é igual à ordem do termo. Há tantas colunas de três quadrados cinzentos quanto a ordem do termo mais um.



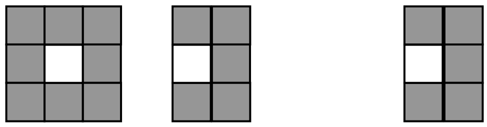
O número de quadrados cinzentos é dado, por exemplo, pela expressão $2n + 3(n + 1)$.

B. Cada figura é constituída, no total, por três linhas de quadrados. O número de quadrados de cada linha é igual ao dobro da ordem da figura mais um. Deste modo o número de quadrados brancos está também a ser contado. Para obter o número de quadrados cinzentos de uma figura basta subtrair ao total o número de quadrados brancos. Há tantos quadrados brancos quanto a ordem da figura.



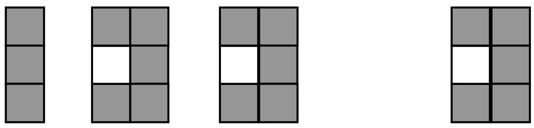
O número de quadrados cinzentos é dado, por exemplo, pela expressão $3(2n+1)-n$ ou pela expressão $2n+1+2n+1+2n+1-n$.

C. Cada figura é constituída por um conjunto de oito quadrados cinzentos aos quais se juntam conjuntos de cinco quadrados cinzentos (CC invertidos). O número de CC invertidos é igual à ordem da figura menos um.



O número de quadrados cinzentos é dado pela expressão $8 + 5(n - 1)$.

D. Cada figura inicia-se com uma coluna de três quadrados cinzentos aos quais se juntam conjuntos de cinco quadrados cinzentos (CC invertidos). O número de CC invertidos é igual à ordem da figura.



O número de quadrados cinzentos é dado pela expressão $3+5n$.

A equivalência existente entre as diversas expressões algébricas permite explorar aspectos como o desembaraçar de parênteses e as operações entre monómios semelhantes, como nos seguintes exemplos:

(i)	(ii)	(iii)
$2n+3(n+1)=2n+3n+3$	$3(2n+1)-n=6n+3-n$	$8+5(n-1)=8+5n-5$
$=5n+3$	$=5n+3$	$=3+5n$

Exemplo 3 – Descoberta do erro em operações com polinómios[54]. Esta tarefa consiste numa lista de dez transformações realizadas a partir de polinómios dados, das quais três são correctas e as restantes erradas. O seu objectivo é promover a capacidade dos alunos reconhecerem o que são transformações correctas e incorrectas na simplificação de expressões algébricas e qual a razão dos erros cometidos.

Verifica, em cada alínea, se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, corrige de modo a torná-las equivalentes:

1. $(3+c)+(8-5c)+(2-c)=3c+3c+1c=7c$

2. $(-y+3)+(2y+2)=-y+3+2y+2=y+5$

3. $(3-x)+(2+3x)=3-x+2+3x=5-2x$

4. $2(a+5)=10a$

5. $2(x^2-3x+1)=2x^2-3x+1$

6. $3(2+a)+2(3+a)=6+3a+6+2a=5a+12$

7. $x(x-3)=x+x-3=2x-3$

8. $y-(5-y)=y-5-y=2y-5$

9. $\frac{1}{2}(2x+1)+x=\frac{2}{2}x+\frac{1}{2}+x=x+\frac{1}{2}+x=2x+\frac{1}{2}$

10. $\frac{x-2}{2}-x=\frac{x-2}{2}-\frac{2x}{2}=x-2-2x=-x+2$

Por exemplo, na questão 1, uma resposta possível é: "na passagem de $(3+c)+(8-5c)+(2-c)$ para $3c+3c+1c$ foram "adicionados" termos não semelhantes 3 e c, 8 e $-5c$, e 2 e $-c$".

O facto de, na tarefa, existirem, lado a lado, casos em que não se verifica qualquer erro e casos com incorrecções aumenta o grau de abertura e requer maior atenção por parte dos alunos. Note-se, ainda, que a tarefa pode ser realizada individualmente ou em grupo e pode assumir facilmente o carácter de jogo, desde que se estabeleçam regras adequadas.

De seguida apresentamos algumas alíneas corrigidas por alunos portugueses, do 8.º ano. No primeiro exemplo, Luís apercebe-se do erro e corrige-o, aplicando adequadamente a propriedade distributiva:

$$\textbf{4.}\quad 2(a+5) = \cancel{10a} = 2a+10$$

$$2a+10$$

No caso seguinte, Vera estabelece correctamente equivalências entre expressões. A aluna não simplifica a expressão inicial mas formula uma outra expressão que, simplificada, dá $7c$:

$$\textbf{1.}\quad (3+c)+(8-5c)+(2-c) = 3c+3c+1c$$
$$= 7c$$

$$3\times e+(8e-5e)+(2e-e)=3e+3e+1e=7e$$

Na aplicação em sala de aula, verifica-se também que alguns alunos identificam erros em alíneas em que se verifica a equivalência de expressões. Esta situação deve ser identificada pelo professor, tanto quanto possível, enquanto circula pela sala observando os alunos a trabalhar e deve ser explorada e discutida convenientemente com toda a turma. Vejamos as seguintes resoluções dos alunos:

$$\textbf{9.}\quad \frac{1}{2}(2x+1)+x = \frac{2}{2}x+\frac{1}{2}+x$$
$$= x+\frac{1}{2}+x$$
$$= 2x+\frac{1}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\times 2x+\frac{1}{2}\times 1+x =$$
$$= 0,5\times 2x+0,5\times 1+x =$$
$$= 1\times 1+2x+x = 1+3x$$

falsa

Neste exemplo, a Rita aplica correctamente a propriedade distributiva e transforma $\frac{1}{2}$ em 0,5. No monómio $0,5\times 2x$, a aluna não reconhece que deve, em primeiro lugar, efectuar esta multiplicação para determinar o coeficiente do monómio. Em vez disso, a aluna adiciona 0,5 e 0,5, obtendo 1, e multiplica o resultado por 1, ignorando a ordem pela qual as operações se devem efectuar. A partir daí, continua correctamente a simplificação da expressão, adicionando os monómios semelhantes.

No próximo exemplo, Célia começa por usar correctamente a propriedade distributiva:

$$9.\quad \frac{1}{2}(2x+1)+x = \frac{2}{2}x+\frac{1}{2}+x$$
$$= x+\frac{1}{2}+x$$
$$= 2x+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(2x+1)+x = \left(\frac{1}{2}\times 2x\right)+\left(\frac{1}{2}\times 1\right)+x =$$
$$= \frac{1}{2}\times 2x + \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}\times 3x + \frac{1}{2} = 1\times 3x = 3x$$

No entanto, na simplificação dos monómios, comete dois erros. Primeiro, não efectua a operação adequada para identificar o coeficiente do monómio $\frac{1}{2}\times 2x$. Em segundo lugar, não respeita a prioridade das operações pois adiciona $2x$ com x e adiciona $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{2}$ em vez de multiplicar $\frac{1}{2}$ por $3x$.

Nos exemplos que se seguem, a equivalência de expressões não se verifica, como é o caso da alínea 7. Em dois dos exemplos, os alunos começam por aplicar a propriedade distributiva, obtendo uma equivalência correcta.

$$7.\quad x(x-3) = x+x-3$$
$$= 2x-3$$

Errada?

$$x(x-3) = x^2 - 3x = -3x^3$$

Neste caso, Paulo adiciona monómios que não são semelhantes, tentando transformar a expressão num único monómio, parecendo não aceitar a falta de fechamento da expressão. Este aluno adiciona os expoentes dos monómios e assume como coeficiente a parte numérica do monómio $-3x$.

Filomena, por seu lado, assume erradamente que pode ignorar o expoente do monómio do segundo grau, x^2, ficando, assim, com dois monómios semelhantes. Em seguida, efectua correctamente a adição algébrica desses monómios:

$$7.\quad x(x-3) = x+x-3 \qquad = x^2 - 3x = x - 3x = -2x$$
$$= 2x-3$$

Uma terceira aluna, Sílvia, também erra ao simplificar a mesma expressão:

7. $x(x-3) = x + x - 3$ ×

$= 2x - 3$

$2x - 3x = -1x$

Neste caso, a aluna tenta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Multiplica correctamente x por –3 mas erra ao escrever $2x$ em vez de x^2. No final, esta aluna também efectua, a simplificação correcta dos monómios semelhantes.

6.2.2. Casos notáveis da multiplicação de binómios

Exemplo 4 – Diferença de quadrados[55].

Investiga o que acontece se efectuares as seguintes multiplicações:

$$8 \times 8 = 64$$
$$9 \times 7 = 63$$
$$10 \times 6 = 60$$
$$\_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$$

Identifica a regularidade nos resultados obtidos a partir de $8 \times 8 = 64$.

Com base no que descobriste, prevê os produtos seguintes, a partir de $15 \times 15 = 225$:

$$16 \times 14 = \_\_\_$$
$$17 \times 13 = \_\_\_$$
$$18 \times 12 = \_\_\_$$

Será que a regularidade que encontraste se verifica sempre que se parte da multiplicação de um número por ele próprio?

Sugere uma operação de partida para prever o produto 21×19 e apresenta o resultado.

Esta tarefa pode ser explorada nos primeiros anos de escolaridade, com a identificação de diversas regularidades numéricas, podendo efectuar-se as operações recorrendo a estratégias de cálculo mental ou à calculadora. No 3.º ciclo, é possível generalizar e construir uma representação simbólica dessa generalização:

8×8	9×7	10×6	11×5	12×4	$\cdots$
64	63	60	55	48	$\cdots$
Diferenças (em relação a 64)	$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$\cdots$
n	$(n+1)(n-1)$	$(n+2)(n-2)$	$(n+3)(n-3)$	$(n+4)(n-4)$	$\cdots$

A observação destas regularidades pode levar à construção da fórmula $(n+a)\times(n-a)=n^2-a^2$, isto é, da diferença de quadrados.

Exemplo 5 – Quadrado do binómio[56].

Investiga o que acontece se subtraíres quadrados perfeitos consecutivos:

$$4-1=\_\_\_$$
$$9-4=\_\_\_$$
$$16-9=\_\_\_$$
$$\_\_\_-\_\_\_=\_\_\_$$

Será que a regularidade que parece existir se verifica sempre?

Recorre à linguagem algébrica para representar a regra que encontraste.

À semelhança do que sucede no exemplo anterior, esta tarefa pode ser explorada mais cedo mas, no 3.º ciclo, pode conduzir à observação das regularidades explicitadas na tabela e a uma generalização:

$4-1$	$9-4$	$16-9$	$25-16$	$36-25$	$\ldots$
2^2-1^2	3^2-2^2	4^2-3^2	5^2-4^2	6^2-5^2	$\ldots$
$3=2\times 2-1$	$5=2\times 3-1$	$7=2\times 4-1$	$9=2\times 5-1$	$11=2\times 6-1$	$\ldots$

Os alunos podem apenas indicar que a diferença entre quadrados perfeitos consecutivos é um número ímpar. Mas para validar a sua conjectura devem recorrer à linguagem algébrica. A generalização conduz à expressão $n^2-(n-1)^2=2n-1$, que é equivalente a $(n-1)^2=n^2-2n+1$.

7. Equações do 1.º grau

As equações do 1.º grau com uma incógnita constituem um tópico importante do *Programa de Matemática*. Nos 1.º e 2.º ciclos trabalha-se já com equações muito simples, mas nessa altura o objectivo não é aprender a resolver equações – é sobretudo desenvolver o conceito de igualdade e a compreensão das propriedades das operações e da relação de cada operação com a sua inversa. A aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita e do seu uso na resolução de problemas é objecto de trabalho no 3.º ciclo, sendo necessário dar atenção às dificuldades dos alunos associadas aos conceitos básicos referentes às equações, às dificuldades que resultam da complexidade crescente das expressões envolvidas nos dois membros de uma equação e também às dificuldades que resultam de uma incompleta apreensão dos conceitos aritméticos.

7.1. Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

7.1.1. Noção de equação

Não é fácil definir "equação" de um modo correcto e apropriado para os alunos do ensino básico. No entanto, estes alunos devem desenvolver uma boa ideia do que é uma equação. O primeiro passo deve ser, logo no 1.º ciclo, a escrita de expressões como:

$$6 = \_\_\_ + 2 \quad \text{ou} \quad 1 + \square = 9$$

Estas expressões ocorrem naturalmente no trabalho com números e operações e o professor pode referir-se a elas, dizendo, simplesmente, que se trata de equações. Ou seja, nesta fase bastará dizer que equação é uma igualdade como a indicada, "onde há um valor desconhecido". A ocorrência de situações deste género pode levar os alunos a apropriarem-se deste termo, usando-o por sua iniciativa, ao descreverem o seu trabalho.

O *Programa de Matemática* prevê que os alunos 2.º ciclo utilizem a linguagem simbólica. Uma das maneiras de promover o uso desta linguagem é através da resolução de equações simples. No entanto, neste ciclo não se pretende que os alunos aprendam já a resolver equações complexas, pelo que os exemplos a trabalhar devem envolver apenas uma operação:

$\_\_\_ + 2 = 14$	$13 + \_\_\_ = 20$	$12 = \_\_\_ + 3$	$16 = 7 + \_\_\_$
$\_\_\_ - 2 = 14$	$13 - \_\_\_ = 10$	$15 = \_\_\_ - 6$	$20 = 27 - \_\_\_$
$2 \times \_\_\_ = 20$	$\_\_\_ \times 3 = 18$	$25 = \_\_\_ \times 5$	$40 = 2 \times \_\_\_$
$\frac{\_\_\_}{2} = 20$	$\frac{18}{\_\_\_} = 6$	$40 = \frac{\_\_\_}{10}$	$9 = \frac{27}{\_\_\_}$

Na resolução destas equações, o objectivo é que os alunos sejam capazes de atender ao significado das operações que nelas surgem, bem como à respectiva operação inversa. No entanto, é natural que muitos alunos não consigam resolver as equações com esse tipo de raciocínio, podendo, numa primeira etapa, usar estratégias mais informais como a contagem ou a tentativa e erro[57].

A certa altura as expressões deste tipo passarão a ser escritas preferencialmente usando letras para designar a "incógnita", termo que pode aparecer de forma natural no trabalho na sala de aula. É muito possível que alguns alunos sugiram que em vez de $1 + \_\_\_ = 9$ se escreva $1 + x = 9$. Caso essa sugestão não surja espontaneamente da parte dos alunos, o professor terá de decidir qual o momento oportuno para introduzir a linguagem algébrica.

No 3.º ciclo, o conceito de equação pode ser de novo abordado tendo como referência a análise de exemplos de equações: "Uma equação é uma expressão como $x + 5 = 9$, $2x + 4 = -3$, ou $-\frac{3}{2}x + 0{,}5 = \frac{x+1}{4}$". Os alunos devem compreender que uma equação envolve "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos". Deve notar-se que não se trata propriamente de uma definição matemática rigorosa, pois limitámo-nos a transferir a questão do termo "equação" para o termo "igualdade", que, por sua vez, é indefinido. Será necessário alertar os alunos para o facto de nem todas as expressões que envolvem o sinal de "=" serem equações. Por exemplo, $5 + 2 = 7$ não é uma equação porque nela não há qualquer valor desconhecido.

Por vezes é apresentado um conceito de equação mais restritivo. É o que acontece quando se diz que "uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos e que só é satisfeita para certos valores da incógnita". No entanto, esta condição exclui as identidades como $x = x$ e as equações impossíveis, como $1 + x = x$. A verdade é que, muitas vezes, ao olharmos para uma expressão com o sinal de igual não sabemos se se trata de uma identidade, uma equação possível ou uma equação impossível, razão pela qual é preferível usar a noção abrangente de equação, que inclui como caso particular as identidades.

Claro que numa equação o valor desconhecido pode ser representado de muitas maneiras diferentes. Em Álgebra é usual designar as variáveis e incógnitas por x (variável real) e n (variável natural), mas também se usam muitas outras letras. Note-se que um uso exclusivo das letras x e n pode criar nos alunos a dificuldade em lidar com outras letras no papel de variáveis e incógnitas, enquanto que uma grande variação de símbolos pode criar grande confusão nos alunos. Neste aspecto, como em muitos outros, o bom senso do professor é essencial.

Note-se, ainda, que o trabalho com equações pressupõe, naturalmente, a familiarização dos alunos com uma terminologia nova, nomeadamente "termo" e "membro". Ao mesmo tempo, o trabalho com equações deve apoiar o desenvolvimento do significado das expressões algébricas e da respectiva terminologia – monómio, polinómio, binómio, coeficiente numérico, parte literal, etc. Particularmente importantes são as noções de "solução de uma equação" e "equações equivalentes". Para além de serem capazes de resolver equações, os alunos devem ser capazes de verificar se um dado valor é ou não solução de uma certa equação. Além disso, devem saber que duas equações são equivalentes se e só se tiverem as mesmas soluções.

Um passo importante na aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau é o domínio das regras práticas de resolução de equações, baseadas nos princípios de equivalência. No entanto, antes da utilização destas regras, os alunos devem começar por resolver equações simples, envolvendo no máximo duas operações:

$2x + 2 = 14$	$13 + 4x = 21$	$12 = 3x + 3$	$15 = 7 + 4x$
$32 - 2x = 14$	$30 - 5x = 10$	$15 = 25x - 5$	$20 = 29 - 3x$
$2 \times 4x = 24$	$2x \times 3 = 18$	$25 = 5x \times 5$	$40 = 2 \times 4x$
$\frac{x}{2} = 20$	$\frac{18}{3x} = 6$	$40 = \frac{2x}{10}$	$9 = \frac{36}{x}$

Também aqui os alunos podem usar estratégias informais de resolução de equações. Estas abordagens servem de preparação para a abordagem formal, recorrendo às regras de resolução de equações, baseadas nos princípios de equivalência.

No passado, estes princípios eram apresentados como teoremas que se demonstravam de modo formal a partir das propriedades das operações numéricas. A pouco e pouco deixaram de se demonstrar, sendo apresentados aos alunos de modo intuitivo. Finalmente, assumiram a forma de "regras práticas". O princípio de equivalência que indica que se pode somar ou subtrair a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação deixou progressivamente de ser enunciado deste modo, passando a ser substituído pela regra prática de transposição que nos permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. O princípio de equivalência que afirma que podemos dividir ou multiplicar ambos os membros de uma equação por um dado número diferente de zero passou a ser ele próprio enunciado como regra prática. Finalmente, o princípio de equivalência que indica que podemos substituir uma expressão dada por outra expressão equivalente deixou, em muitos casos, de ser enunciado. No entanto, esta é uma ideia algébrica fundamental que os alunos têm de interiorizar para ter sucesso na sua aprendizagem.

O enunciado dos princípios de equivalência como regras práticas é uma abordagem que facilita o processo de resolução de equações. No entanto, tende a deixar em segundo plano a justificação dessas regras, o que pode reforçar uma perspectiva da Matemática como conjunto de regras arbitrárias. É importante, por isso, que os alunos tenham uma percepção de onde vêm essas regras práticas e qual a sua justificação.

Um modelo usado desde há muito para o ensino dos princípios de equivalência e das regras práticas de resolução de equações é o da balança de dois pratos. O uso deste modelo facilita a compreensão da operação de eliminar o mesmo termo de ambos membros e também a operação de multiplicar ambos os membros por um número positivo. No entanto, deve ter-se em atenção que muitos alunos nunca viram uma balança deste tipo e não têm uma compreensão intuitiva do seu funcionamento. Neste caso, como em muitos outros, a aprendizagem dos alunos depende do modo como este material é usado. É importante que os alunos possam fazer as suas experiências e discutir os resultados uns com os outros, bem como relacionar o que se passa na balança com o que se passa nas expressões algébricas[58]. Ao longo do 3.º ciclo, os alunos devem trabalhar com equações impossíveis e com equações possíveis e indeterminadas.

7.1.2. Dificuldades dos alunos

Muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem dos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência. Boa parte destas dificuldades tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal "menos" que o precede. Os erros e dificuldades mais comuns no trabalho com expressões algébricas e equações encontram-se sistematizados no Quadro 3. Note-se, porém, que alguns alunos não chegam propriamente a cometer erros. A sua dificuldade é de tal ordem que nem sequer percebem muito bem o que representa uma equação e muito menos o que está envolvido na respectiva resolução. A lista indicada não pretende ser exaustiva mas apenas indicativa. Importa, sobretudo, que o professor esteja alerta para a possibilidade da ocorrência destas e de outras dificuldades dos alunos, tendo em conta que elas podem estar relacionadas com as experiências vividas nas suas aulas.

Quadro 3 – Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: – quatro "y's"; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – $4+y$ por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996

Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x-215=265 \Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x+5=8 \Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x=24 \Leftrightarrow 6+x=24$ $11x=9x=\frac{11}{9}$ $2x=4 \Leftrightarrow$ *i)* $x=4-2$; *ii)* $x=\frac{4}{-2}$; *iii)* $x=\frac{2}{4}$ $-x=-17 \Leftrightarrow ??$ $-x=4 \Leftrightarrow ??$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

Estudos realizados nos anos 80 sugerem que o modo como as crianças pensam em Álgebra está estreitamente relacionado com o seu desenvolvimento cognitivo, estabelecendo um paralelismo entre o seu desempenho e o estádio de Piaget em que se encontram. A ideia de que as dificuldades dos alunos em Álgebra têm a sua principal origem no atraso do seu desenvolvimento cognitivo sugere que qualquer acção do professor para as ultrapassar será necessariamente infrutífera. No entanto, Mollie MacGregor e Kaye Stacey[59] argumentam que esta interpretação não explica o facto de alunos num mesmo estádio de desenvolvimento usarem a simbologia algébrica de formas muito díspares. Defendem, por isso, que as diferentes interpretações dos alunos podem ter outra origem, salientando diversos pontos que ilustramos com resoluções de alunos portugueses[60].

1. Adição incorrecta de termos semelhantes. Diversos estudos têm identificado dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de equações do 1.º grau. Carolyn Kieran[61] é uma autora que se tem destacado neste campo. Uma das situações que identifica refere-se ao facto de muitos alunos adicionarem incorrectamente os coeficientes de dois termos, afirmando, por exemplo, que $-2x+5x=8$ é equivalente a $-7x=8$.

Sara (7.º ano), não revela qualquer dificuldade em interpretar a notação algébrica e em seguir procedimentos correctos para iniciar a resolução da equação $3(x-7)+10=2x-3$. Esta aluna usa a propriedade distributiva de modo adequado, mas depois não adiciona correctamente os termos semelhantes no primeiro membro (faz $-21+10=-31$ e não $-21+10=-11$). Demonstra, aqui, uma dificuldade na execução das operações com números inteiros.

$$3 \times x - 3 \times 7 + 10 = 2x - 3$$
$$(=) 3x - 21 + 10 = 2x - 3$$
$$(=) 3x - 31 = 2x - 3$$
$$(=) 3x - 2x = +31 - 3$$
$$(=) x = 31 - 3$$
$$(=) x = 28$$

2. Adição incorrecta de termos não semelhantes e interpretação incorrecta do sinal "=". Perante a equação $2x+3=4x-1$, Afonso (8.º ano), exprime a sua surpresa pelo facto de 4*x* ser um termo do segundo membro da equação, quando esperava que a soma de 2*x* com 3 tivesse dado origem a 5*x*:

> Afonso: Aqui, como é que é isto? 4*x*…? Se tem $2x+3$, vai dar igual…
> Professora: Não pode dar ali 4*x*?
> Afonso: Não, é a maneira… Não percebo como vai dar.
> Professora: O que é que tu esperavas que desse? Explica lá.
> Afonso: Não, porque… Não sei… Também o 3 o que é que podia estar aqui a fazer, se está aqui o 4*x*? Mas se isto é a somar e depois vai dar igual a 4*x* menos 1… (…) Se eu somasse ficaria 5*x*, não é, stora?

O aluno considera o binómio $2x + 3$ como uma expressão que não está terminada e que pode, ainda, ser alvo de simplificação. Deste modo, não interpreta o sinal "=" como exprimindo uma relação de equivalência. Além disso, influenciado pela sua experiência anterior em Aritmética, encara o sinal "+" como um indicador da necessidade de proceder a uma adição e obter um resultado, que deve surgir à direita do "=". Esta interpretação da expressão algébrica do 1.º membro e dos sinais "+" e "=" impede-o de conseguir resolver a equação de forma correcta. A interpretação do sinal "+" como indicador de uma adição algébrica e a compreensão do sinal "=" como indicador de uma relação de equivalência são aspectos que não surgem nos alunos de forma imediata.

3. Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau. Teresa (7.º ano) mostra dificuldades na compreensão de monómios do tipo ax, com a diferente de zero. Na equação $2x + 3 = 15$, entende a letra x como representante do algarismo das unidades de um número com duas dezenas. Deste modo, argumenta que esta equação é impossível, uma vez que ao adicionar 3 a esse número não pode obter 15:

> Professora: O que tu entendes por isso que aí está?
>
> Teresa: Acho que não dá porque está aqui um 2, temos que acrescentar mais qualquer coisa, mais 3 não pode dar 15.
>
> Professora: Portanto, o que tu entendes é que está um 2…
>
> Teresa: Sim, e está o *x*, por isso significa, que tem de ser vinte e qualquer coisa mais os 3, é impossível dar 15.

$2x + 3 = 15$

É impossível dar 15.

4. Separação entre parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica. Sara (7.º ano) mostra dificuldade em simplificar a expressão algébrica $P = A + (A + 3) + (A \times 2)$ por considerar que deve separar totalmente a parte literal e a parte numérica dessa expressão:

> Sara: Se calhar posso somar os 3*A* mais 3 vezes 2.
>
> Professora: Como é que tu já chegaste a esse resultado?
>
> Sara: Somei os *AA* porque são figuras.
>
> Professora: Sim. E depois?
>
> Sara: E depois é só os números.

Professora: Ah… E porque é que colocaste 3 vezes 2? Porque é que é 3 vezes 2?

Sara: Porque é os 3 centímetros, mais o dobro do primeiro lado.

Professora: Continuo sem perceber porque é que juntaste os 3 centímetros com o dobro do primeiro lado.

Sara: Porque são os dois números.

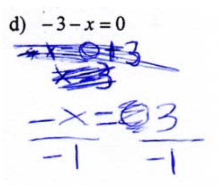
Professora: Então, juntas sempre os números com os números?

Sara: Sim, os números com números e as letras com letras.

A aluna adiciona a parte literal, considerando que todos os monómios do 1.º grau têm coeficiente 1, obtendo 3*A* e, em seguida, multiplica 3 por 2:

5. Resolução incorrecta de uma equação do tipo $ax = b$. A resolução deste tipo de equações levanta grandes dificuldades para muitos alunos, para certos valores de *a* e *b*. Isso é descrito num estudo da investigadora belga Joëlle Vlassis[62], desenvolvido com alunos entre os 13 e os 14 anos que já antes tinham começado a estudar Álgebra. Este estudo descreve a dificuldade sentida por alguns alunos na resolução de equações como $-x = 4$, por considerarem que após o sinal "–" deve estar um número positivo. Pensando deste modo não compreendem como pode $-x$ ser igual a 4.

A determinação da solução de uma equação deste tipo constitui também uma dificuldade para muitos alunos portugueses. Na resolução da equação $-x = 3$, Juliana (7.º ano), divide ambos os membros por –1, mas indica que a solução da equação é 3 em vez de –3.



Noutros casos, os alunos resolvem este tipo de equações de forma correcta, embora não sejam capazes de explicar os procedimentos que efectuam. É o que acontece com Afonso (8.º ano), quando procura explicar como resolveu a equação $-2x = -4$:

Afonso: E depois aqui é *x* igual a… –4 sobre –2.

Professora: Porquê?

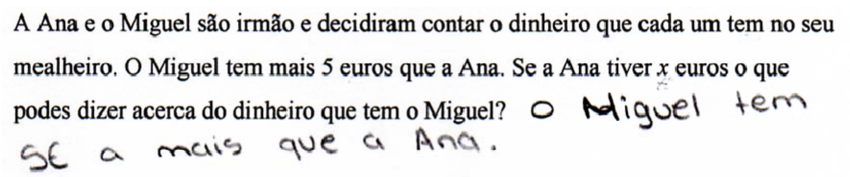
Afonso: Então, temos aqui um número. Fica $x = -4$ e depois passa o –2 cá para baixo.

Professora: Cá para baixo?? É que eu não estou a perceber… Mas porquê?

Afonso: Porque eu acho que é assim.

$$-2x = -4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2}$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

6. Uso de pressupostos intuitivos e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar. No início do estudo da Álgebra, os alunos, não familiarizados com a linguagem que a caracteriza, podem recorrer a estratégias que lhes permitam responder a determinadas questões, do modo que lhes parece mais adequado. É o que sucede com Raquel (7.º ano), que escreve algo relacionado com os restantes dados do problema, ignorando a letra que é usada no enunciado para representar o número de euros que a Ana tem:


A Ana e o Miguel são irmão e decidiram contar o dinheiro que cada um tem no seu mealheiro. O Miguel tem mais 5 euros que a Ana. Se a Ana tiver x euros o que podes dizer acerca do dinheiro que tem o Miguel? O Miguel tem 5E a mais que a Ana.

Relativamente à mesma situação, Teresa (7.º ano) opta por atribuir um valor específico à letra, por si escolhido: "Então, aqui por exemplo, se a Ana tiver vinte euros, o Miguel tem vinte e cinco, porque o Miguel tem mais cinco euros que a Ana".

7. Estabelecimento de analogias com sistemas simbólicos usados no quotidiano, noutras áreas da Matemática ou noutras disciplinas. Alguns alunos, por exemplo, atribuem valores às letras de acordo com a ordem em que estas surgem no alfabeto: $a = 1$, $b = 2$, e assim sucessivamente.

8. Interferência de outras aprendizagens em Matemática. Alguns alunos consideram que, em qualquer monómio com coeficiente igual a um, a letra envolvida representa o valor 1. A interferência de outras aprendizagens é também notória em Maria (8.º ano). Depois de resolver correctamente uma equação do 1.º grau, obtendo o valor 2, procura verificar, desnecessariamente, se –2 também é solução, tal como sucede em alguns tipos de equações do 2.º grau que já estudou:

$$2\times 2+3=4\times 2-1$$
$$\Leftrightarrow 4+3=8-1$$
$$\Leftrightarrow 7=7$$

$$2\times(-2)+3=4\times(-2)-1$$
$$\Leftrightarrow -4+3=-8-1$$
$$\Leftrightarrow -1=-9$$

Maria: Acho que não há outra hipótese, sem ser o 2.
Professora: Quer dizer, se houvesse outra hipótese, para ti era o –2, era?
Maria: Hum, hum.
Professora: E porquê?
Maria: Não sei, lembrei-me daquilo… Da solução, que às vezes dá –2 e 2.

9. Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptados. Por exemplo, os alunos podem manifestar dificuldades na interpretação das letras utilizadas, nomeadamente, quando estas são usadas como abreviações de palavras ou como designações de objectos. Este erro pode ser induzido pelo modo como as tarefas são construídas e como o próprio professor gere as discussões na aula. Lesley Booth[63] sublinha que é importante que o professor compreenda as dificuldades dos alunos e a sua origem, uma vez que esta compreensão lhe permite propor tarefas capazes de promover aprendizagens mais significativas e minorar as suas dificuldades.

7.1.3. Progressão na aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau

1. Equações numéricas de complexidade crescente. A aprendizagem das equações do 1.º grau a uma incógnita envolve níveis sucessivos de complexidade, cada um dos quais envolvendo as suas dificuldades específicas. As equações mais simples são as numéricas, que envolvem apenas uma variável, no papel de incógnita. Mais complexas são as equações que envolvem duas e mais variáveis, usualmente designadas por equações literais.

Equações apenas com três termos, podem ser trabalhadas, como vimos, nos 1.º e 2.º ciclos. A complexidade aumenta quando aumenta o número de termos, quando a incógnita surge em ambos os membros e quando os valores dos coeficientes numéricos são negativos, fraccionários ou, ainda, quando os seus valores absolutos são muito elevados.

$$2x+1=5$$

$$2x+1=x$$

$$70x+13=129$$

$$-9x-145=150-x$$

$$3x+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$$

$$2-4x=-5x+1-\frac{2}{7}x+\frac{5}{4}-40x$$

Outro patamar de complexidade é a introdução de parêntesis e de expressões com denominadores:

$$2(x-5)=16$$

$$3(2+x)-3(x-1)=x-4$$

$$2x-\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-1}{-2}-x$$

$$2(x+2x)=\frac{-2+x}{-4}$$

Note-se que a complexidade que resulta das alterações nos coeficientes numéricos e da introdução de parêntesis e expressões com denominadores tem origem, sobretudo, em elementos da linguagem aritmética, na qual os alunos muitas vezes não se sentem muito à vontade. O professor do 3.º ciclo não pode dar como totalmente adquirida esta linguagem, sendo necessário, nesta fase, retomar o trabalho com cálculos e expressões numéricas iniciado no ciclo anterior.

2. Equações literais. Outro patamar de complexidade surge com o estudo das equações literais, como, por exemplo:

$$12(x-a)=16x \text{ (resolver em ordem a } x\text{)}$$

$$4x-6a=6x+8a \text{ (resolver em ordem a } a\text{)}$$

Trata-se, agora, de um acréscimo de complexidade de cunho essencialmente algébrico, associado aos diferentes papéis desempenhados pelas duas letras, sendo uma delas a incógnita (no primeiro caso, x, no segundo caso, a) e a outra um parâmetro (no primeiro caso, a, no segundo caso, x). A aprendizagem destes diferentes papéis das variáveis tem de se ir fazendo progressivamente, a partir de exemplos simples, e, tanto quanto possível relacionados com contextos reais significativos para os alunos.

Daniel Chazan e Michal Yerushalmy[64] analisam a resolução de equações com mais do que uma variável. Referem, por exemplo, que um ponto essencial relativamente a este tipo de equações é o facto de, ao isolar uma das variáveis, se alterar significativamente o modo como a equação em causa é interpretada. Na verdade, transformar uma equação da forma $ax + by = c$ numa equação da forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, através da aplicação dos princípios de equivalência, não altera a relação entre as variáveis. As duas expressões são equivalentes mas, na primeira, temos uma função implícita, que só se torna uma função explícita após termos feito a referida transformação.

Qualquer equação do 1.º grau com duas variáveis pode ser reescrita, de modo equivalente, como uma função linear de uma variável e este facto é muito útil para a sua representação gráfica. No entanto, esta alteração da forma implícita para a forma explícita traz dificuldades ao aluno devido à alteração dos papéis desempenhados pelas variáveis e pelo sinal de igual. Se nenhuma das duas variáveis x e y está isolada, elas assumem papéis semelhantes. Se isolamos a variável y, então x passa a ser a variável independente e y a variável dependente, que resulta das operações indicadas no segundo membro da equação. Os autores sublinham que se deve levar os alunos a dar importância ao acto de isolar uma variável, de modo a serem capazes de produzir gráficos.

O Quadro 4 sintetiza os modos como podem ser interpretadas as características de duas equações literais equivalentes.

Quadro 4 – Características de duas equações literais equivalentes.

	$25x + 0{,}05y = 100$	$y = 20\ (100 - 25x)$
Descrição	Equação (função implícita).	Função explícita.

Letras	x e y representam números desconhecidos. Não existe relação (explícita) de dependência entre x e y.	x é uma variável independente, que toma um conjunto de valores de um conjunto específico. y é a variável dependente, cujos valores são determinados a partir dos valores de x.
Sinal de igual	Simétrico – Representações diferentes para um mesmo número.	Assimétrico – y ou $f(x)$ são designações para o resultado dos cálculos efectuados pelo processo f, aplicado ao objecto x.

Robin Marcus e Daniel Chazan[65] argumentam que a resolução de equações literais do 1.º grau é significativamente diferente da resolução de equações numéricas do 1.º grau, com uma incógnita. Numa equação numérica, isolar a incógnita, corresponde a resolver uma equação literal em ordem a uma das variáveis. No entanto, este procedimento tem consequências diferentes nos dois casos. Numa equação literal, em vez de se obter como solução um valor numérico específico (quando existe solução), obtemos uma expressão algébrica que não faz parte, em si mesma, do conjunto solução da equação, embora possa gerar pares ordenados que fazem parte desse conjunto.

A construção dos conceitos algébricos fundamentais é um processo complexo que envolve questões delicadas para muitos alunos: as distintas interpretações da simbologia algébrica, a necessidade de respeitar as regras sintácticas da Álgebra, a formulação de generalizações e a sua expressão de forma adequada ou a resolução de problemas envolvendo variáveis. A própria natureza da actividade algébrica desenvolvida e as estratégias mais habituais de actuação em diversos domínios podem ganhar novos significados noutras situações. É o que sucede quando se simplificam expressões algébricas e quando se resolvem equações numéricas ou literais do 1.º grau. Como vimos, existem diversas estratégias de ensino que podem contribuir para uma aprendizagem da Álgebra com sentido, todas elas com os seus pontos fortes e fracos. É ao professor que, apoiado pelos conhecimentos produzidos pela investigação já desenvolvida, cabe definir as suas próprias formas de actuação, adequadas ao seu contexto profissional, proporcionando aos alunos experiências significativas.

7.2. Tarefas – Exemplos e ilustrações na sala de aula

7.2.1. Problemas envolvendo equações do 1.º grau

As equações são uma ferramenta fundamental para resolver problemas e isso deve estar presente ao longo de todo o trabalho a realizar com equações no ensino básico. O facto de termos dedicado a nossa atenção principalmente aos aspectos mais directamente relacionados com a linguagem, os conceitos e os procedimentos algébricos, não significa que os problemas devam ser remetidos para um lugar secundário.

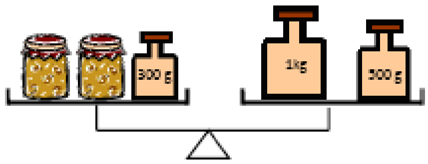
São vários os tipos de problemas que se podem usar a propósito da aprendizagem das equações numéricas e literais do 1.º grau. Eis alguns exemplos de problemas que podem dar origem a equações numéricas:

- Problemas envolvendo certas relações numéricas entre quantidades (entre os quais os conhecidos problemas de idades);
- Problemas envolvendo a partição de um todo num certo número de partes desiguais (por exemplo, os conhecidos problemas das heranças);
- Problemas envolvendo relação entre distância, tempo e velocidade (em que dois dos valores são conhecidos e um é desconhecido)
- Problemas envolvendo uma relação de proporcionalidade directa entre duas grandezas (em que são conhecidos dois valores e se pede a constante de proporcionalidade, ou se conhece esta constante e um dos valores e se pede o outro valor);
- Problemas envolvendo a verificação se um dado valor é ou não termo de uma certa sequência cujo termo geral é um polinómio do 1.º grau;
- Problemas envolvendo a transformação de expressões do 1.º grau.

Os exemplos que se seguem incluem resoluções efectuadas por alunos do 7.º ano.

Exemplo 1 – Balanças em equilíbrio. Desde cedo que se deve procurar promover nos alunos a compreensão do sinal de igual como indicando equivalência entre duas quantidades. A situação das balanças em equilíbrio ajuda a desenvolver essa compreensão e a promover o surgimento de estratégias informais para a resolução de equações que os alunos devem conseguir justificar. Muitas vezes, estas estratégias permitem estabelecer relações com a representação da situação em linguagem algébrica e com os princípios de equivalência, como mostram os exemplos seguintes.

A figura que se segue apresenta uma balança em equilíbrio em que os dois frascos de compota têm o mesmo peso:



a) Descreve como podes determinar o peso de cada um dos frascos de compota.

b) Traduz a situação de equilíbrio da balança por meio de uma equação.

Nesta questão, Andreia e Beatriz realizam as operações aritméticas que lhes permitem determinar o peso desconhecido:

→ cada 1 dos frascos pesa 600g.

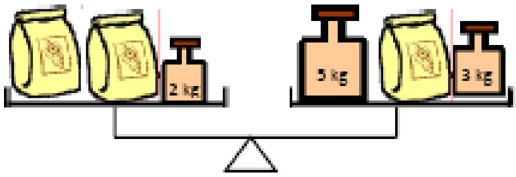
$$\left.\begin{array}{r} 1500g \\ -300 \\ \hline 1200 \end{array}\right\} \quad 1200 : 2 = 600$$

De seguida as alunas representam a situação por meio de uma equação e simplificam os termos semelhantes:

$$x + x + 300 = 1000 + 500$$
$$\Leftrightarrow 2x + 300 = 1500\,g$$

A situação seguinte apresenta uma balança em equilíbrio em que o objecto cujo peso se desconhece está nos dois pratos da balança:

A figura que se segue apresenta uma balança em equilíbrio em que os três sacos de farinha têm o mesmo peso:



a) Descreve como podes determinar o peso de cada um dos sacos de farinha.

b) Traduz a situação de equilíbrio da balança por meio de uma equação.

Andreia identifica o valor que é comum a ambos os pratos:

Tiramos 2kg de cada prato

Com base nesta observação e no facto de em ambos os pratos se encontrar um saco de farinha, Ricardo determina o peso de cada um dos sacos. Contudo, a apresentação das operações que realiza não é adequada, revelando não compreender a equivalência das expressões numéricas inerente ao sinal de igual:

5 Kg + 3 Kg = 8 Kg - 2 Kg = 6 Kg

Cada saco pesa 6 Kg. e de cada lado da balança pesa 14 Kg

Andreia traduz a situação por meio de uma equação e resolve-a pelos princípios de equivalência:

$$x + x + 2 = 5 + x + 3$$
$$\Leftrightarrow 2x + 2 = 8 + x$$

$$2x + 2 - 2 = 8 + x - 2$$
$$\Leftrightarrow 2x = 6 + x$$
$$\Leftrightarrow 2x - x = 6 + x - x$$
$$\boxed{x = 6}$$

Exemplo 2 – Problemas de palavras (word problems) – recurso ao conhecimento dos números. A resolução de problemas de palavras pode, por vezes, proporcionar o uso de equações que os alunos podem resolver recorrendo a estratégias informais.

Pensei num número, adicionei-lhe 12 e obtive 30. Em que número pensei?

Neste problema Francisco e Rodrigo, com base no seu conhecimento dos números, indicam que o valor desconhecido é 18. Quando lhes é solicitado que escrevam a equação que representa a situação, usam estratégias formais para a sua resolução. Deste modo, os alunos dão sentido às operações algébricas usadas na resolução formal das equações:

$$x + 12 = 30$$
$$\Leftrightarrow x = 30 - 12$$
$$\Leftrightarrow x = 18$$

O dobro da quantia de dinheiro que tenho no bolso mais 15 euros que tenho na carteira dá o total de 29 euros. Que quantia de dinheiro tenho no bolso?

Para esta questão, Ricardo e Paulo apresentam a resolução aritmética seguinte:

$$29 - 15 = 14$$
$$14 : 2 = 7 \quad \text{tem } 7€$$

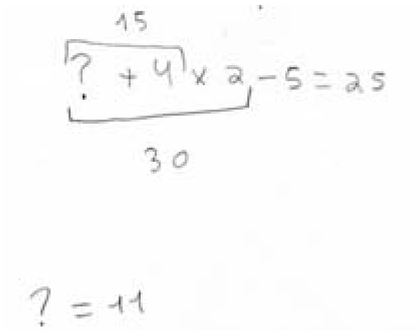
Com base nesta resolução é fácil identificar as operações a realizar na resolução formal da equação respectiva:

$$2 \times x + 15 = 29$$
$$2x + 15 = 29$$
$$2x = 29 - 15 = 14$$
$$2x : 2 = 14 : 2$$
$$1x = 7$$

Exemplo 3 – Problemas de palavras (word problems) – uso da cobertura (cover-up). Em algumas situações é possível resolver as equações observando algumas das suas partes como um todo e fazendo coberturas sucessivas.

Pensei num número e adicionei-lhe 4. Multipliquei o resultado por 2 e, por fim, subtraí 5. Obtive o número 25. Em que número pensei?

Susana escreve a equação que traduz o problema e, em seguida, na sua resolução, usa a estratégia da cobertura como se pode verificar no que representa para essa resolução:



A aluna cobre parte da equação, ou seja $x + 4 \times 2$, obtendo o valor 30 para que $30 - 5 = 25$. Cobre novamente parte dessa expressão, ficando com $x + 4$, que toma o valor de 15 pois $15 \times 2 = 30$. Por fim, a cobertura envolve apenas o valor desconhecido, 11 que surge da diferença $15 - 4$.

7.2.2. Equações literais

No que diz respeito às equações literais, devem usar-se as fórmulas já conhecidas dos alunos, tanto da Geometria (áreas do quadrado, rectângulo, triângulo, volume do cubo e do paralelepípedo), como da Física (envolvendo distância, tempo e velocidade). Podem ainda usar-se outras fórmulas relativas a transacções comerciais (em que a variável independente é a quantidade transaccionada) ou a fenómenos que variam no tempo (crescimento e decrescimento) e outras situações em que as relações entre variáveis possam ser descritas por polinómios do 1.º grau. Todas estas situações podem ser usadas não só como contexto para a resolução de problemas mas também para a realização de investigações, procurando saber o que acontece quando, numa equação com variável dependente, variável independente e diversos parâmetros, se faz variar um ou mais destes parâmetros. Os exemplos que se seguem ilustram o trabalho que os alunos podem realizar com recurso a diversas fórmulas.

Exemplo 4 – Relação entre peso e altura de um indivíduo. No contexto deste exemplo o professor pode formular diversas questões, salientando a vantagem de ter a equação resolvida em ordem a uma ou outra variável.

A relação entre o peso e altura de uma pessoa é aproximadamente dada por $p = 31a - 485$ (onde p representa o peso em quilogramas, e a representa a altura em centímetros).

Exemplo 5 – Índice de massa corporal. As equações literais permitem responder a problemas concretos da realidade e estão presentes em diversas áreas. A fórmula que dá o índice de massa corporal, quando se conhece o peso e a altura de uma pessoa, é um desses casos. Esta situação, além de proporcionar oportunidade de resolver a equação literal em ordem a uma das variáveis promove a interpretação dos resultados obtidos, como se verifica no exemplo seguinte:

O índice de massa corporal (*IMC*) de uma pessoa pode ser dado pela relação:

$$IMC = \frac{P}{A^2}$$

Onde P representa o seu peso e A a sua altura. O *IMC* considerado "normal" situa-se entre 18,6 e 24,9.

a) Calcula o teu *IMC*.

b) Para que o teu *IMC* se situe nos valores normais, qual o máximo de peso que podes ter?

c) Uma pessoa com *IMC* abaixo de 15 está perigosamente abaixo do seu peso normal. Verifica qual é o peso que corresponde ao *IMC* de 15 para uma pessoa com a tua altura.

Exemplo 6 – Média aritmética de dois, três,… n números. Uma conexão com o tema Organização e Tratamento de Dados pode proporcionar a construção de fórmulas, que constituem também equações literais.

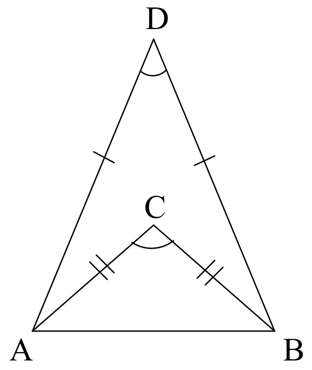
---

1) Escreve uma fórmula que represente a média aritmética de dois números a e b.
2) Escreve agora outra fórmula para a média de três números a, b e c.
3) Escreve uma fórmula que represente a média aritmética de n números.

7.2.3. Problemas de diversos campos da Matemática

Exemplo 8 – Um problema de Geometria. A Álgebra pode ser usada para resolver problemas de muitos outros campos da Matemática, tal como se ilustra neste exemplo e nos seguintes.

Os triângulos ABC e ABD são isósceles com a base AB comum. Suponhamos que o ângulo ACB tem o dobro da amplitude do ângulo ADB. Mostra que o ângulo DAC tem metade da amplitude de ADB.



À primeira vista estamos perante um problema puramente geométrico. No entanto, uma vez que a informação dada remete sobretudo para relações entre os ângulos de triângulos, o problema transforma-se facilmente num problema algébrico. Designando por a, b e c as medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC com vértices em A, B e C, respectivamente, por d a medida da amplitude do ângulo ADB e por x e y as medidas das amplitudes dos ângulos CAD e CBD, podemos escrever várias equações:

$$a + b + c = 180$$

$$a + x + d + b + y = 180$$

$$c = 2d$$

$$b = a$$

$$x = y$$

Recorrendo às equações apresentadas é possível provar algebricamente que o ângulo DAC tem metade da amplitude de ADB. Por exemplo, usando a primeira, a quarta e a terceira equações, obtemos

$a + a + c = 180$, ou seja, $2a = 180 - c$, ou ainda $2a = 180 - 2d$.

Usando agora a segunda equação, temos

$$a + x + d + a + x = 180$$

pelo que

$$2a + 2x + d = 180.$$

Donde, substituindo $2a$ por $180 - 2d$ e aplicando os nossos conhecimentos sobre a resolução de equações, se obtém

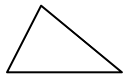
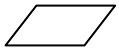
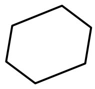
$180 - 2d + 2x + d = 180$ e, finalmente, $x = \dfrac{d}{2}$, tal como era pretendido.

Este problema evidencia o poder da ideia de substituição em Álgebra – podemos substituir uma variável ou uma expressão por outra expressão equivalente, obtendo ainda uma expressão equivalente. Ilustra, também, uma estratégia interessante em que começamos por escrever cinco equações, mas conseguimos, através da identificação de relações apropriadas, chegar a uma única equação que traduz a relação pretendida.

Exemplo 9 – Investigação de fórmulas de Geometria. Os alunos podem realizar investigações tendo em vista descobrir as fórmulas das áreas e dos volumes de figuras e sólidos geométricos e da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de polígonos convexos. A tarefa seguinte refere-se ao caso dos ângulos internos de polígonos convexos:

Faz a decomposição de cada polígono pelas diagonais que partem de um mesmo vértice, tal como é apresentado para o pentágono. Explora a relação entre o número de lados de um polígono e a soma das amplitudes dos seus ângulos internos:

Polígono	Número de lados do polígono	Decomposição em triângulos	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos

Triângulo				
Quadrilátero				
Pentágono				
Hexágono				

Exemplo 10 – Problemas de Teoria de Números. Os conceitos elementares de Teoria de Números (múltiplo, divisor, número primo, decomposição em factores) proporcionam interessantes problemas, para a resolução dos quais a Álgebra constitui uma poderosa ferramenta. Eis alguns exemplos:

1) Se *b* é um número ímpar, será que *3b* é também um número ímpar?
2) Considera um número a formado por dois dígitos, p e q (sendo $p > q$). Invertendo a ordem dos dígitos, obténs um novo número *b*. O que podes dizer acerca da diferença $a - b$?

Na alínea 1), os alunos podem conjecturar, testando alguns exemplos, que multiplicando um número por 3 se obtém sempre um número ímpar. Para o demonstrar, basta verificar que um número ímpar pode ser escrito como $2n+1$ e, como tal, o seu triplo será $3(2n+1) = 6n+3$. Como $6n$ é sempre um número par, $6n+3$ é um número ímpar.

Na alínea 2), devem, também, começar por apresentar alguns exemplos de números nas condições do enunciado e com base nos valores obtidos para a diferença, formular uma conjectura.

$a - b$	63 – 36	51 – 15	72 – 27
Valor da diferença	27	36	45
	27 = 9 × (6 – 3)	36 = 9 × (5 – 1)	45 = 9 × (7 – 2)

Com base nestes exemplos, os alunos podem conjecturar que a diferença é um múltiplo de 9. Podem ainda relacionar esse múltiplo com a diferença $p-q$. Para demonstrar essa conjectura os alunos devem representar *a* na forma $a = 10p + q$, sendo *p* e *q* algarismos e $p > q$. Do mesmo modo temos, $b = 10q + p$. Fazendo a diferença:

$$\begin{aligned} a-b &= (10p+q)-(10q+p) \\ &= 10p-10q+q-p \\ &= 10(p-q)-(p-q) \\ &= (10-1)(p-q) \\ &= 9(p-q) \end{aligned}$$

Deste modo, conclui-se que a diferença, $a-b$, é sempre um múltiplo de 9 e também um múltiplo da diferença dos dígitos $p-q$.

Exemplo 11 – Exploração com números. A grelha de números incluída neste exemplo encontra-se também explorada na tarefa Explorações com números[66].

Na tabela a seguir indicada, é possível representar qualquer número da primeira coluna por 4*n* (com *n* = 0, 1, 2…):

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
…	…	…	…

a) Como podes representar qualquer número da segunda coluna? E da terceira? E da quarta?
b) Mostra que a soma de um número qualquer da primeira coluna com outro número qualquer da primeira coluna está sempre na primeira coluna.
c) Mostra que a soma de um número qualquer da segunda coluna com um número qualquer da terceira coluna está sempre na quarta coluna.
d) Mostra que o quadrado perfeito de qualquer número par está sempre na primeira coluna.
e) O que podes dizer sobre os quadrados perfeitos dos números ímpares?

---

8. Funções

A aprendizagem do conceito de função é preparada desde os 1.º e 2.º ciclos. As sequências com que os alunos trabalham nestes ciclos são funções de variável natural, que a cada número (ordem) fazem corresponder um dado termo – que pode ser um número, um objecto geométrico ou outro objecto qualquer. Além disso, muitas situações trabalhadas em Organização e tratamento de dados (OTD) envolvem correspondências entre duas variáveis que se podem representar em tabelas e gráficos. No 2.º ciclo, assume grande relevância a resolução de problemas relativos a situações de proporcionalidade directa, que envolvem relações funcionais. No entanto, apesar de se trabalhar com correspondências representadas por diagramas, tabelas e gráficos, não se faz referência expressa ao conceito de função.

Este conceito só é estudado de forma explícita no 3.º ciclo. Os alunos devem saber o que é uma função, identificar correspondências que são funções e correspondências que não são funções, reconhecer funções representadas de diversas formas e indicar objectos e imagens. O estudo das funções visa a compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais. Note-se, porém, que a abordagem da noção de função neste ciclo não privilegia os aspectos estritamente matemáticos do conceito, mas sim o seu uso para modelar situações da realidade e para resolver problemas. Assim, a proporcionalidade directa, já conhecida dos alunos desde o 2.º ciclo, é agora encarada como uma função (linear) que envolve grandezas que assumem valores racionais (ou reais) positivos e negativos. Além de situações de proporcionalidade directa, são estudadas situações modeladas por funções afins (não lineares), do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero), e por funções de proporcionalidade inversa, do tipo $y = \frac{a}{x}$ (com a diferente de zero e x também diferente de zero). Dá-se também início ao estudo das funções quadráticas, analisando o caso particular das funções do tipo $y = ax^2$ (com a inteiro e diferente de zero). A maior parte das funções estudadas no 3.º ciclo tem por domínio o conjunto dos números racionais e, a partir de certa altura, o conjunto dos números reais.

8.1 Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

8.1.1. Conceito de função

1. Definição. Uma função f, definida num conjunto D e com valores num conjunto E, pode ser vista como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D (chamado *objecto*) um único elemento de E, que se designa por y ou $f(x)$ (chamado *imagem*). O conjunto D é designado por *domínio* de f e o conjunto C, de todas as imagens dos elementos do domínio, é designado por *contradomínio*. Deste modo, o contradomínio C é um subconjunto de E, o conjunto onde a função toma valores. As variáveis x e $f(x)$ são, respectivamente, as variáveis independente e dependente.

O conceito de função surge, historicamente, relacionado com a Geometria e a Álgebra – em especial, a partir do estudo de curvas representadas em gráficos cartesianos. O estudo elementar das funções faz parte da Álgebra e o estudo mais avançado, onde intervém a noção de infinitésimo, é feito na Análise Infinitesimal. Como mostra Bento Caraça, o grande desenvolvimento do conceito de função deve-se ao facto de constituir uma poderosa ferramenta para o estudo dos mais diversos fenómenos naturais[67]. Refira-se, por exemplo, a queda dos corpos, o movimento dos planetas, as marés, a propagação de ondas, o crescimento de populações… Mas também os fenómenos que resultam da acção do homem são estudados com recurso a este conceito, que, hoje em dia, é usado em todas as áreas da engenharia e da tecnologia, bem como no estudo da economia, administração, gestão de empresas, etc.

2. Representação. Existem quatro modos principais de representar uma função: (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações. Como indicámos mais atrás, o estudo das funções constitui um dos aspectos do pensamento algébrico que deve ser desenvolvido.

Assim, os alunos devem compreender que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que satisfaz uma certa condição. Isso é bem ilustrado pela representação em diagrama sagital, fazendo corresponder a cada elemento do domínio uma e uma só imagem. Esta representação é também útil para exemplificar correspondências entre dois conjuntos que são funções e correspondências entre dois conjuntos que não o são. No entanto, esta representação apenas é utilizável nos casos em que o domínio e o conjunto onde a função toma valores têm um número reduzido de elementos.

No 3.º ciclo, as representações mais importantes do conceito de função são as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas. As tabelas permitem representar funções em que o domínio tem um número significativo de elementos e os gráficos cartesianos e as expressões algébricas permitem representar funções cujo domínio é um conjunto infinito. Na verdade, a maior parte das funções com que se trabalha neste ciclo têm por domínio o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais (ou um seu subconjunto) ou o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais (ou um seu subconjunto). Também nas tabelas e nos gráficos cartesianos, os alunos podem reconhecer casos de correspondências que são e que não são funções.

3. Conceito de variação. A variação é um dos aspectos importantes do conceito de função. Quando efectuamos medições ao longo do tempo, observamos mudanças – por exemplo, "hoje faz mais calor do que ontem" (mudança qualitativa), ou "esta planta tem mais 15 cm do que no mês passado" (mudança quantitativa). A análise do crescimento de plantas pode dar origem a registos como "A minha planta não cresceu nas três primeiras semanas, depois cresceu durante três semanas e ao fim desse tempo não voltou a crescer mais". Muitos fenómenos têm taxa de variação constante, isto é, para qualquer valor de x, a razão entre o incremento na variável dependente y e o incremento na variável independente x é constante. Todos estes fenómenos podem ser representados por uma função afim, linear ou não linear. No entanto, os alunos devem contactar com fenómenos com outros tipos de variação, como o caso da planta, para que não fiquem com a ideia errada que todos os processos de mudança têm taxas de variação constantes.

8.1.2. Diferentes tipos de funções

4. Função afim (linear e não linear). Uma função afim tem por domínio $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$) e é dada por uma regra de correspondência da forma $f(x) = ax + b$, sendo a e b números racionais (ou reais). No caso particular em que $b = 0$, esta relação tem a forma $f(x) = ax$, e dizemos que se trata de uma função *linear*. Esta função representa uma relação de proporcionalidade directa entre duas grandezas e o seu gráfico é uma recta que contém a origem do referencial. Quando b é diferente de zero, a função diz-se afim *não linear* e o seu gráfico é uma recta que não contém a origem do referencial.

Uma propriedade importante da função linear dada por $f(x) = ax$ é que o quociente entre uma imagem, $f(x)$, e o respectivo objecto, x, é constante (essa constante é o coeficiente a e chama-se *constante de proporcionalidade*):

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a$$

Uma particularidade da função afim, linear ou não linear, é o facto de possuir uma taxa de variação constante. Assim, dando sucessivamente incrementos iguais à variável independente, é possível identificar regularidades na variável dependente. Quando a é positivo, a recta que representa a função forma com a parte positiva do eixo dos *xx* um ângulo de amplitude entre 0 e 90 graus, isto é, a função é estritamente crescente. Neste caso, a variação nos valores das variáveis dá-se no mesmo sentido. Assim, quando os valores de uma variável aumentam, o mesmo acontece aos valores correspondentes da outra variável. Quando a é negativo, a recta que representa a função forma com a parte positiva do eixo dos *xx* um ângulo cuja amplitude está entre 90 e 180 graus, isto é, a função é estritamente decrescente. Esta variação ocorre em sentidos contrários, ou seja, a valores cada vez maiores de uma das variáveis, correspondem valores cada vez menores da outra variável. Quando a é nulo, o gráfico da função é uma recta horizontal e a função designa-se por função *constante*. Nesta situação diz-se que a variação é nula[68].

Outro aspecto importante a analisar é o modo como variam os valores de uma variável em relação aos valores da outra variável. Como exemplo, vejamos as funções de domínio $\mathbb{Q}$, *f* dada por $f(x)=\dfrac{x}{4}$ e *g* dada por $g(x)=4x$. Alguns dos objectos e imagens destas funções estão representados na tabela:

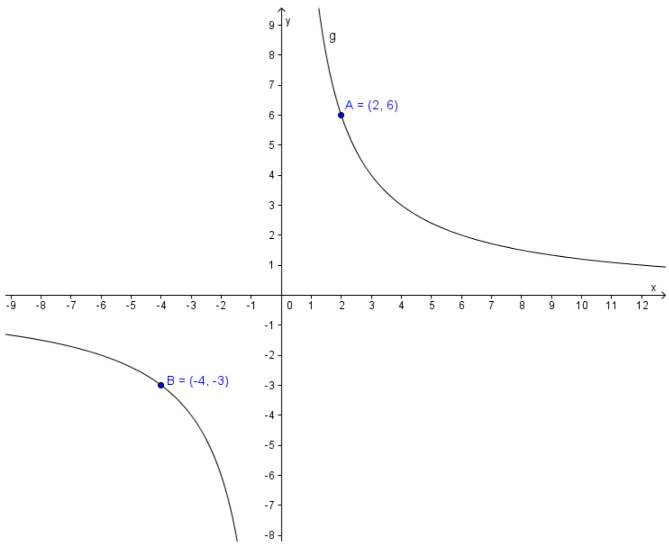
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dfrac{x}{4}$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$4x$	0	4	8	12	16	20	24	28	32

No caso da função *f*, um incremento de 1 unidade na variável independente *x* implica uma variação na variável dependente *y* de apenas 0,25. No caso da função *g*, ao mesmo incremento, corresponde uma variação de 4 unidades de *y*.

5. Função de proporcionalidade inversa. Uma função definida no conjunto dos números racionais (ou reais) não nulos, dada por uma expressão do tipo $y=\dfrac{a}{x}$, diz-se uma função de *proporcionalidade inversa*. O gráfico da função, neste caso, já não é uma recta mas sim uma curva (na verdade, uma hipérbole). A função de proporcionalidade inversa definida por $f(x)=\dfrac{a}{x}$ tem uma propriedade interessante – o produto de uma imagem, $f(x)$, pelo respectivo objecto, *x*, é constante (essa constante *a* é a *constante de proporcionalidade inversa*):

$$f(x).x=\frac{a}{x}.x=a$$

No caso que se segue, relativo à função definida por $g(x)=\dfrac{12}{x}$, em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, é possível verificar que o produto das coordenadas de cada ponto do gráfico é igual a 12, ou seja, 12 é a constante de proporcionalidade inversa:

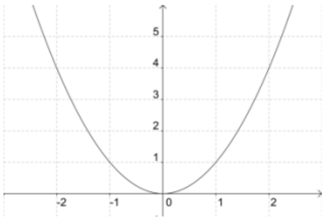


Na função de proporcionalidade inversa, a taxa de variação não é constante. Em certos intervalos, uma dada variação nos valores da variável independente *x* implica uma pequena variação nos valores correspondentes da variável dependente *y*. Noutros intervalos com igual amplitude, porém, implica uma maior variação na variável dependente. É o que se pode ver na tabela seguinte que representa alguns dos pares ordenados da função dada em $\mathbb{Q}$ por $y = \frac{2}{x}$:

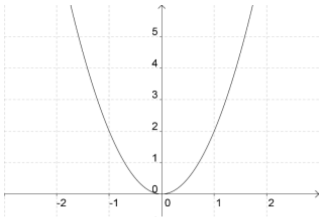
x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{2}{x}$	4	2	1	0,(6)	0,5	0,4	0,(3)	0,(285714)	0,25

Quanto *x* varia de 1 para 2, *y* sofre um decréscimo de 1 unidade. Quando *x* varia de 7 para 8, *y* sofre apenas um decréscimo de menos de 4 centésimas.

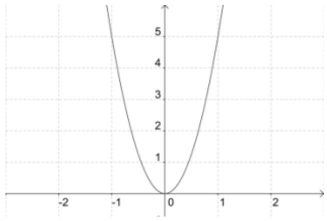
6. *Função quadrática*. O estudo das funções quadráticas, no 3.º ciclo, restringe-se a casos particulares do tipo $y = ax^2$ (com *a* inteiro e diferente de zero). O gráfico desta função é outra curva – uma parábola. Os alunos devem reconhecer que o parâmetro *a* tem influência no gráfico. Para *a* positivo, a parábola tem a concavidade virada para cima e, para *a* negativo, a concavidade está voltada para baixo (ver figuras seguintes). Para valores de *a* mais próximos de zero, a parábola toma um aspecto achatado, e para valores de *a* mais elevados, toma um aspecto esguio. Tal como no caso anterior, também aqui a taxa de variação não é constante.



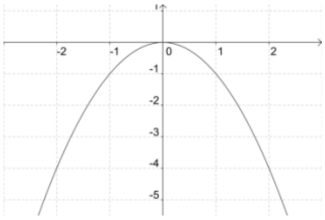
$y = x^2$



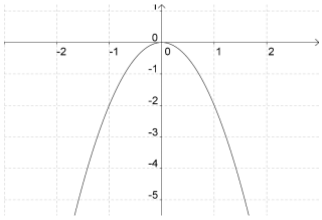
$y = 2x^2$



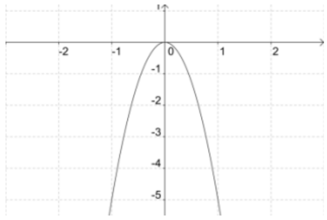
$y = 5x^2$



$y = -x^2$



$y = -2x^2$



$y = -5x^2$

8.1.3. Estratégias e dificuldades dos alunos

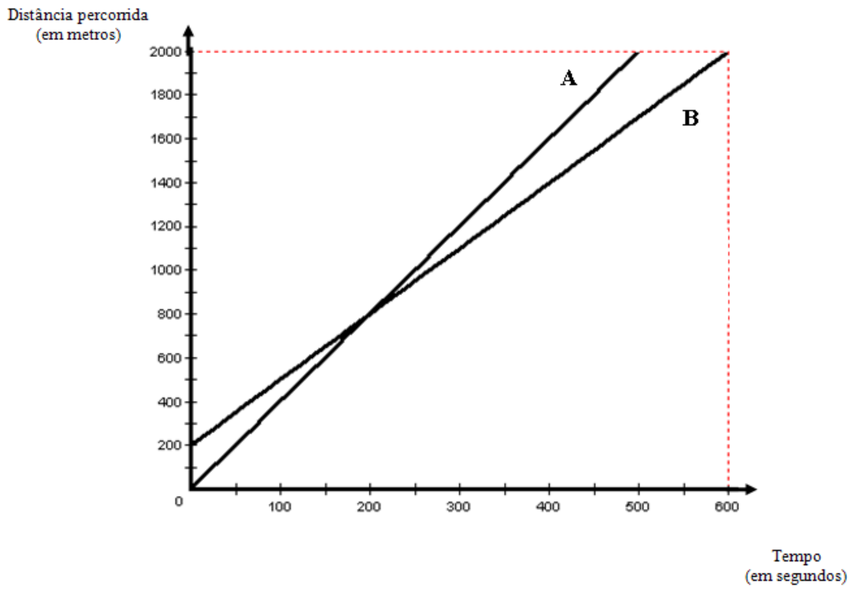
O trabalho com funções coloca diversos tipos de dificuldades aos alunos. Muitos deles têm dificuldade em fixar a terminologia própria deste tópico – domínio, objecto, imagem, são termos que incessantemente confundem. Estes alunos têm dificuldade em compreender estes termos se eles forem usados exclusivamente em contextos puramente matemáticos, uma vez que não se sentem à vontade nestes contextos. Usados em situações da realidade, estes termos muitas vezes surgem como artificiais. Deste modo, há que combinar estes dois tipos de contextos de modo adequado, introduzindo os termos com base na representação do diagrama sagital, em exemplos como a Máquina de Perguntas[69], e retomando estes termos depois, ocasionalmente, no trabalho realizado com situações da realidade, como na tarefa Combustíveis[70].

Em alguns casos, os alunos mostram dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia x, y, $f(x)$. Por vezes, compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que “a imagem de 5 é 3” mas não conseguem entender a expressão $f(5) = 3$. Sendo esta uma simbologia largamente usada no estudo das funções, desde o 3.º ciclo do ensino básico até aos ensinos secundário e superior, torna-se importante utilizá-la na sala de aula, levando os alunos a fazer uma apropriação progressiva, para que venham a usá-la adequadamente.

O trabalho com funções afins lineares e não lineares deve desenvolver-se sobretudo em situações contextualizadas. Dada informação em descrições verbais, tabelas, gráficos, ou expressões algébricas, os alunos devem ser capazes de determinar imagens correspondentes a certos objectos, bem como objectos correspondentes a certas imagens. Além disso, devem ser capazes de passar a informação de uma representação para outra e, ainda, de usar a informação dada para a resolução de problemas. Vejamos o seguinte exemplo[71], relativo a uma situação descrita num misto de linguagem natural e representação gráfica:

Rita e Miguel resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Miguel disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.

O gráfico abaixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:



- Miguel percorre 4 metros por segundo;
- Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Observa o gráfico e responde às questões:

a) Achas que Miguel tem razão? Quem sai vencedor?

b) Que distância percorre Rita ao fim de 100 segundos?

c) Quanto tempo demora Rita a percorrer 1400 metros?

A função $y = 4x$ representa a distância percorrida por Miguel ao longo do tempo. Trata-se de uma função linear que traduz uma relação de proporcionalidade directa, em que a constante de proporcionalidade é 4. A função $y = 3x + 200$ representa a distância percorrida por Rita ao longo do tempo. Trata-se de uma função afim não linear. Para determinar a distância percorrida por Rita ao fim de um certo tempo os alunos podem usar diversas estratégias.

1. *Interpretação do gráfico.* Os alunos podem, por exemplo, procurar obter as informações relevantes a partir do gráfico. É o que sucede com Sofia (8.º ano) que reconhece que Rita parte com um avanço de 200 metros mas afirma que "Miguel é mais rápido e chega primeiro à meta", existindo um ponto em que Miguel ultrapassa Rita. Se o gráfico tiver uma escala mais detalhada, a distância percorrida em 100 segundos e o tempo correspondente a 1400 metros podem ser visíveis de forma directa. Na figura dada, isso não é possível, a não ser de modo aproximado, o que leva os alunos a procurar outras estratégias para responder às questões.

2. *Recurso às informações dadas em linguagem natural.* Uma outra estratégia possível é ter em conta que Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros. Assim, é possível efectuar a multiplicação do tempo decorrido (em segundos), pela distância percorrida por segundo (em metros), seguida da adição dos 200 metros iniciais. André (8.º ano) descreve esse raciocínio: "Então, fiz 3×100, dá 300, e depois acrescentei os 200".

3. *Recurso a uma tabela.* Os alunos podem construir uma tabela que contenha diversos valores do tempo e da distância percorrida e procurar regularidades que lhes permitam determinar a distância percorrida por Rita em 100 segundos.

4. *Recurso a uma expressão algébrica.* Os alunos podem, ainda, procurar estabelecer uma expressão algébrica que traduza a distância percorrida por Rita em função do tempo (como a acima indicada, $y=3x+200$) e obter a imagem correspondente a $x=100$.

Neste exemplo, a determinação da distância percorrida por Miguel em 100 segundos equivale a um problema de valor omisso numa situação de proporcionalidade directa, que pode ser resolvido através de muitas estratégias, tendo em conta os pares de valores conhecidos. Porém, nas situações em que não existe proporcionalidade directa, muitas das estratégias que os alunos estão habituados a utilizar para resolver problemas rapidamente deixam de funcionar.

Na verdade, com muita frequência, os alunos usam estratégias que assumem existir proporcionalidade directa em situações em que tal relação não existe[72]. É o que sucede com Sofia, quando procura determinar a distância a que Rita se encontra ao fim de 100 segundos, isto é, quando procura determinar a imagem que corresponde ao objecto 100, aplicando indevidamente a regra de três simples:

$$2 \text{ —— } 206$$
$$100 \text{ —— } x$$
$$x = \frac{206 \times 100}{2}$$
$$x = 20600$$
$$x = 10300$$

Quando termina, a aluna olha para o que escreveu e apercebe-se de que 10300 é um valor que não faz sentido no contexto do problema, uma vez que é superior aos 2000 metros da pista de atletismo. Sofia explica que observou que Rita estava a 206 metros, ao fim de 2 segundos, facto que utilizou na regra de três simples:

> Sofia: Pois. Então, eu fiz assim, se ela em 2 segundos percorre 206 metros, em 100 segundos ela vai percorrer *x*.
> Professora: Hum, hum. E depois, deu-te 10300 e tu achaste estranho?
> Sofia: Pois. Não dá, porque ela só percorre 2000 metros.

Alguns alunos têm igualmente dificuldade em determinar um objecto que corresponde a uma imagem dada em situações contextualizadas. É também o caso de Sofia, ao tentar determinar o tempo (em segundos) que corresponde à distância de 1400 metros. Vai digitando números na calculadora, em silêncio e, em seguida, explica que está a tentar utilizar as operações inversas (divisão e subtracção):

> Sofia: Então, experimentei… Tipo, fazer as contas ao contrário. Ali… 1400 a dividir por 3, menos 200.
> Professora: Hum, hum. E depois não ficaste muito encorajada, porque…?
> Sofia: Porque deu um número decimal.
> Professora: Hum, hum. E depois tentaste outra coisa a seguir, que foi?
> Sofia: Foi verificar… Foi 1400… Não… Foi o número que deu, vezes 3, mais 200.

Sofia procura inverter o raciocínio usado para determinar uma imagem de uma função cuja regra de correspondência consiste em fazer uma multiplicação seguida de uma adição. Para isso, considera correctamente as operações inversas de divisão e subtracção, mas não efectua estas operações pela ordem adequada. O facto de ter obtido uma dízima que não esperava, leva-a a sentir a necessidade de fazer uma verificação.

Como volta a não obter 1400, apercebe-se do erro que cometeu. Para resolver correctamente o problema, deveria ter começado por subtrair os 200 metros e só depois dividir o valor obtido por 3. Isso mesmo é explicado por André: "Então, para ter 1400… Tirei os 200 metros, com que ela já tinha partido, deu 1200. Agora posso dividir os 1200 por 3 e vai-me dar o resultado."

A aplicação de estratégias adequadas a situações em que existe proporcionalidade directa a contextos onde essas estratégias não podem ser aplicadas ocorre também, por vezes, em situações de proporcionalidade inversa, pelo que é necessário algum tempo para que os alunos consigam distinguir estes dois tipos de situação.

A situação da corrida de Rita e Miguel permite colocar muitas outras questões que podem ser formuladas pelo professor ou pelos próprios alunos. Por exemplo, podemos perguntar: "Em que instante se prevê que se cruzem os dois amigos?"; "Que distância terão percorrido até aí?"; "Aos 600 metros, quantos metros separavam Rita de Miguel?", etc. Os alunos podem procurar as respostas através da leitura do gráfico, mas, caso não o consigam fazer com suficiente precisão, podem adoptar outras estratégias, baseadas em raciocínios aritméticos, usando operações ou tabelas, ou usando expressões algébricas, nomeadamente recorrendo a equações. É o que faz Sofia quando pretende descobrir em que instante os alunos se encontram:

> Sofia: Então, vou, ver qual é que é… Pronto, quando é que eles se vão encontrar. Tentar…
>
> $$4x = 3x + 200$$
> $$4x - 3x = 200$$
> $$x = 200$$
>
> Professora: Pois. E porque é que tu escolheste essa equação $4x = 3x + 200$?
> Sofia: Porque a distância que ele tinha percorrido tinha que ser igual à que ela percorreu.

Procurando verificar se Rita e Miguel se cruzam ao fim de 200 segundos, Sofia utiliza novamente as expressões algébricas, referindo que se encontram aos 800 metros:

$$4 \times 200 = 800$$
$$200 + 3x = 200 + 3 \times 200$$
$$= 200 + 600 =$$
$$= 800$$

8.2. Tarefas – Exemplos e ilustrações na sala de aula

As funções cujo estudo se propõe, em especial a função de proporcionalidade directa e a função de proporcionalidade inversa, devem ser exploradas como ferramentas de modelação em situações diversas. Em seguida apresentamos vários exemplos de tarefas envolvendo situações contextualizadas que podem ser utilizadas na sala de aula.

8.2.1. Gráficos de funções

Ao longo do ensino básico, os alunos devem desenvolver a sua capacidade de ler e interpretar gráficos de funções, que constitui uma capacidade importante para o seu futuro enquanto cidadãos. Para isso, necessitam de trabalhar com gráficos que apresentem vários tipos de variação em certos intervalos: (i) estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou constantes; e (ii) com variação constantes e não constantes. Os alunos devem também saber interpretar gráficos construídos a partir de variáveis discretas, isto é, que podem tomar um conjunto específico de valores, como o “número de um sapato” ou variáveis contínuas, que podem assumir qualquer valor num certo intervalo, como a “distância percorrida”. Os exemplos que se seguem ilustram o tipo de trabalho que pode ser desenvolvido com os alunos.

Exemplo 1 – Crimes contra o património[73]. Esta tarefa diz respeito à interpretação do gráfico de uma função. Os gráficos são utilizados para transmitir informações diversas em artigos de jornal, em relatórios de empresas e em muitos outros contextos. É fundamental que os alunos consigam interpretar essa informação, nomeadamente, identificando máximos e mínimos, situações em que há decréscimo, aumento, ou estabilidade, interpretando zeros que possam existir ou outros elementos pertinentes em cada contexto. Os gráficos devem ser tanto quanto possível relativos a situações reais, como é o caso do gráfico seguinte, sobre a evolução dos crimes cometidos contra o património:

O gráfico apresenta alguns dados de um estudo realizado pela Polícia Judiciária sobre a evolução dos crimes cometidos contra o património. Estes dados têm como referência o número de crimes cometidos no ano de 1996.

Em relação a este gráfico, responde às seguintes questões:

a) Em que ano se registou o maior número de crimes?

b) Em que ano se registou o menor número de crimes?

c) Indica um período de tempo em que o número de crimes tenha aumentado.

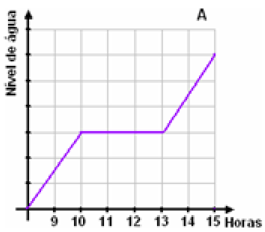
d) Indica um ano em que tenham existido menos de 20000 crimes contra o património.

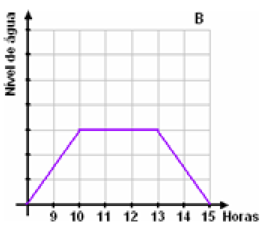
Exemplo 2 – O tanque do agricultor[74]. A tarefa seguinte tem como objectivo levar os alunos a associar um gráfico a uma situação apresentada em linguagem natural, em que existe variação. Esta tarefa, complementada por instruções que levem os alunos a explicar, oralmente ou por escrito, quais as razões que os levaram a fazer a sua opção ou a preterir os restantes gráficos, constitui uma boa oportunidade para trabalhar a capacidade de argumentação e comunicação matemáticas.

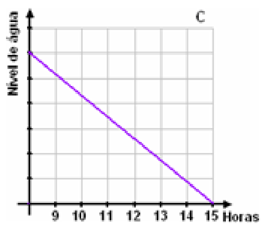
Considera a seguinte situação:

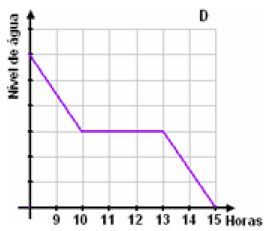
Um agricultor estava a esvaziar um dos tanques da sua propriedade. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque.

Qual dos seguintes gráficos traduz a situação descrita?



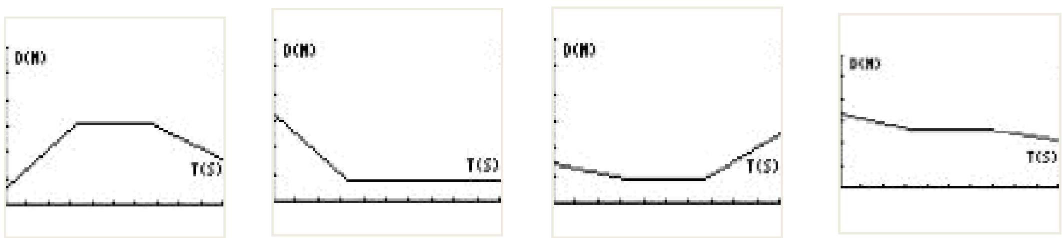






Exemplo 3 – Distância a um ponto fixo[75]. A interpretação de gráficos distância-tempo é um objectivo de aprendizagem de grande importância. Uma experiência que pode ser realizada na sala de aula, no início do estudo das funções, envolve a utilização de uma calculadora gráfica com o programa RANGER, associada a um sensor de movimento (CBR) e a um painel de visualização (*viewscreen*). Este sensor permite a recolha das distâncias a um ponto fixo em diversos instantes (neste caso a posição do próprio sensor). O programa RANGER gera gráficos distância-tempo de forma aleatória. Para um dado gráfico, o programa regista o movimento de um aluno que o tente reproduzir movimentando-se em frente do CBR. Para que o gráfico do movimento do aluno coincida com o gráfico inicialmente gerado, este tem de decidir em que local se deve colocar no início da experiência, se se deve aproximar ou afastar do ponto fixo, e se se deve movimentar de forma mais lenta ou mais acelerada.

Observa os seguintes exemplos de gráficos gerados pelo CBR:

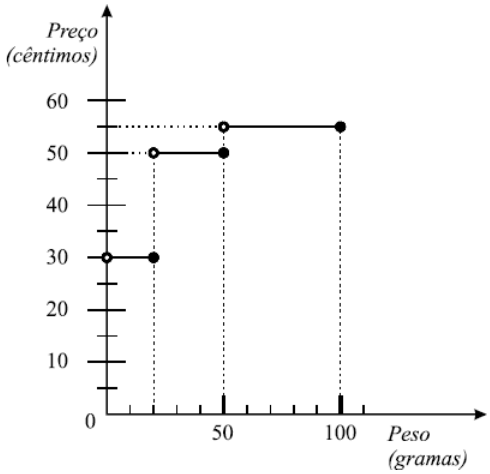


Sobre cada um dos gráficos responde às seguintes questões:

a) Identifica a variável independente e a variável dependente, as unidades em que estão expressas e o que representam as divisões marcadas em cada um dos eixos.
b) Considerando essa escala, diz em que posição te deves colocar no início do movimento em cada um dos casos.
c) Descreve o movimento que deves efectuar para imitar cada um dos gráficos.

Exemplo 4 – O envio dos postais[76]. A tarefa seguinte envolve a interpretação de uma função em escada. Na questão 2, os alunos necessitam de recorrer à interpretação da função para determinar o que se paga pelo envio de ambos os cartões em separado, determinando os preços correspondentes a cartas com 18 e 21 gramas. Em seguida, determinando o preço do envio conjunto dos postais (37 gramas), devem argumentar se este tipo de envio é mais económico.

O gráfico que se segue mostra o preço, em cêntimos, a pagar pelo envio de correspondência, em correio normal, para o território nacional, de acordo com o seu peso, em gramas:



a) Para enviar uma carta por correio, com o convite para a sua festa de aniversário, a Maria teve de pagar 30 cêntimos. Indica um valor possível para o peso, em gramas, dessa correspondência.

b) As duas primas gémeas da Maria vão enviar-lhe, cada uma, um cartão de aniversário por correio. O cartão que uma escolheu pesa 16 *g* e o cartão que a outra escolheu pesa 19 *g*. Cada uma tem um sobrescrito que pesa 2 *g*, oferecido na compra do respectivo cartão. Quanto economizam, no envio destas correspondências, se enviarem os dois cartões de aniversário num único envelope em vez de os enviarem em envelopes separados?

Exemplo 5 – Os ovos da quinta[77]. A situação seguinte estuda uma função que não é mais do que uma sequência com um comportamento parcialmente repetitivo e parcialmente crescente. A sua resolução envolve a passagem de informação de uma situação contextualizada para uma tabela e um gráfico.

Joana pretende arrumar os ovos que a sua mãe vai recolher na quinta, distribuindo-os por caixas que levam, no máximo, 6 ovos. A tabela que se segue representa o número de caixas que são necessárias em função do número de ovos recolhidos:

a) Ajuda Joana a preencher a tabela que se segue:

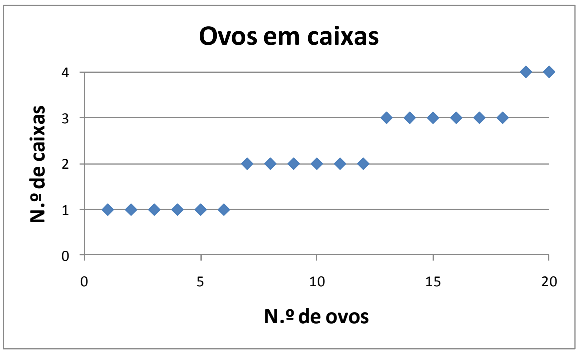
N.º de ovos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.º de caixas																				

b) Constrói um gráfico que represente estes dados.

Nesta situação, os alunos devem observar que se Joana tiver que arrumar apenas um ovo, necessita de uma caixa, o mesmo sucedendo se tiver que arrumar até 6 ovos. No entanto, se tiver que arrumar 7 ovos, já vai precisar de duas caixas e assim sucessivamente:

N.º de ovos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.º de caixas	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4

Uma vez que nos encontramos perante variáveis discretas, o gráfico pode ter o seguinte aspecto (função em escada):



8.2.2. Função linear ou de proporcionalidade directa

A função linear ou de proporcionalidade directa é um caso particular da função afim, que pode ser usado como modelo para muitas situações da realidade. Por exemplo, a relação entre a distância percorrida e o tempo gasto a percorrê-la a uma velocidade constante, imaginemos, de 70 km/h, é uma relação de proporcionalidade directa. Nesta situação, uma distância de 140 km é percorrida em 2 h e uma distância de 280 km é percorrida em 4 h. Numa relação de proporcionalidade directa, ao duplicarmos o valor de uma variável, obtemos uma duplicação no valor da outra. Não basta, portanto, pensar que os valores da variável dependente aumentam, quando aumentam os da variável dependente. É necessário que esse aumento seja dado pelo mesmo factor. Por outras palavras, a razão entre os valores das variáveis deve ser constante.

Os alunos devem saber reconhecer uma relação de proporcionalidade directa em situações dadas em linguagem natural, através de tabelas de valores, através de gráficos ou através de expressões algébricas da função. Progressivamente, devem conseguir traduzir informação de forma eficaz entre os vários tipos de representação e usá-la na resolução de problemas.

Exemplo 6 – Consumos de gasolina. É importante que os alunos consigam interpretar enunciados expressos em linguagem natural, que envolvam funções de proporcionalidade directa, e retirem a informação necessária para a resolução de um dado problema. Na situação que se segue, os alunos podem usar diversas estratégias e organizar os dados do modo que considerem mais útil e adequado.

O automóvel A gasta 5 litros aos 100 km, o automóvel B gasta 4,1 litros aos 100 km e o automóvel C gasta 7,2 litros aos 100 km.

a) Determina quanto gasta cada um dos automóveis para viagens com 20, 50, 100, 140, 200, 270 e 300 km.

b) Existe proporcionalidade directa entre a distância percorrida e o número de litros gastos por cada um dos automóveis. Indica qual é, para cada um deles a constante de proporcionalidade e o seu significado neste contexto.

A exploração desta situação pode ser continuada de diversos modos, através da formulação de outras questões, sendo possível traduzir a informação dada neste enunciado para as várias formas de representação das funções.

Exemplo 7 – Distância percorrida pela luz. Os alunos devem ser capazes de reconhecer se duas variáveis, com valores expressos através de uma tabela, são directamente proporcionais. Note-se que justificações como "são proporcionais porque quando o tempo aumenta, a distância também aumenta" não são suficientes para justificar a proporcionalidade. Os alunos devem encontrar outros processos de justificação, como, por exemplo, determinando a constante de proporcionalidade, que corresponde, nesta situação, à distância percorrida pela luz no espaço em apenas um segundo.

A distância percorrida pela luz no espaço é função do tempo. A tabela representa essa função:

a) As variáveis t e d são directamente proporcionais? Justifica.

b) Qual é a velocidade da luz, em km por segundo?

Tempo (t) (em segundos)	Distância (d) (em km)
2	6 000
3	9 000
4	12 000

---

c) Escreve uma expressão algébrica que represente a função.

Exemplo 8 – O preço dos pães. Os alunos devem ser capazes de trabalhar também com funções de proporcionalidade directa dadas algebricamente. Na situação que se segue, a função é dada por uma expressão algébrica, através da qual os alunos podem identificar a constante de proporcionalidade e interpretar o seu significado no contexto do problema. Podem observar que a constante de proporcionalidade é o preço de um pão e que o preço a pagar pelos pães comprados é obtido multiplicando o número de pães por 0,55 euros. Podem também pensar que é necessário dividir os valores dados quando o objectivo for determinar o número de pães comprados. Na representação gráfica é necessário atender ao facto de esta função ter domínio natural.

A Filipa estava a estudar Matemática e descobriu que a expressão $y = 0{,}55x$ representa o preço (em euros) a pagar por x pães comprados na padaria do seu pai.

a) Determina o preço a pagar por 15 pães.

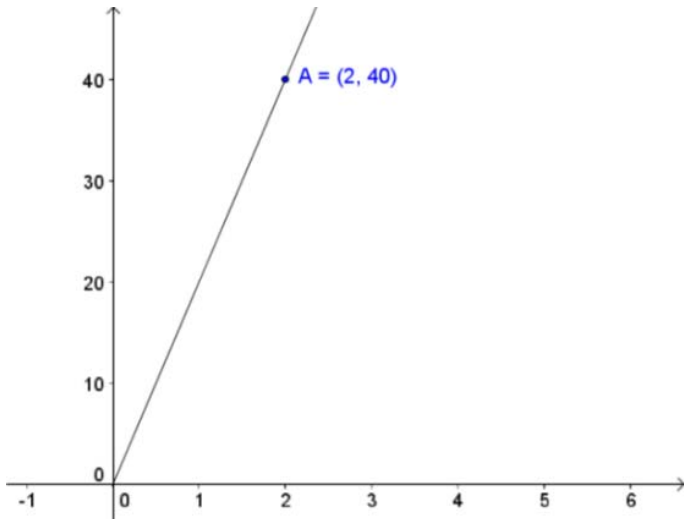
b) Se alguém gastar 15,95 euros, quantos pães terá comprado?

c) Existe proporcionalidade directa entre o número de pães que são comprados e o preço a pagar. Indica qual é a constante de proporcionalidade e o que significa no contexto do problema.

d) Representa graficamente a função $y = 0{,}55x$.

Exemplo 9 – Função de proporcionalidade directa dada graficamente. Na situação que se segue, os alunos devem observar o gráfico e identificar que diz respeito a uma função de proporcionalidade directa. Para escreverem uma expressão algébrica que a represente basta que determinem a constante de proporcionalidade. Uma vez que são dados um objecto não nulo, 2, e a sua imagem através desta função, 40, sabe-se que a constante de proporcionalidade é $\frac{40}{2} = 20$. Assim, a função pode ser definida algebricamente por $y = 20x$.

Escreve uma expressão algébrica da função representada graficamente na figura seguinte:



8.2.3. Função afim (não linear)

A função afim (não linear) é também um modelo muito usado para representar situações da realidade. O custo de algumas chamadas telefónicas, com um valor inicial ao qual acresce uma certa quantia por cada período de tempo é um bom exemplo. Embora estas situações se assemelhem àquelas em que existe proporcionalidade directa, devido à existência de uma taxa de variação constante, diferencia-as o facto de existir um valor inicial não nulo, cujo significado real depende da situação em causa. Os alunos não devem esquecer-se de que este valor inicial tem de ser tido em conta quando resolvem problemas envolvendo este tipo de função.

Os alunos devem ter a oportunidade de trabalhar com funções afins (não lineares) a partir das suas diversas representações, desenvolver a capacidade de extrair a informação relevante para a resolução de problemas e transformar essa informação noutro tipo de representação, caso seja útil.

Exemplo 10 – Serviço de limpeza. Os alunos devem reconhecer a função afim (não linear) como modelo de uma situação descrita em linguagem natural. Devem, nomeadamente, reconhecer que há situações em que existe uma taxa de variação constante para as quais a função de proporcionalidade directa não é um modelo adequado. É importante, quando analisam enunciados como o que se segue, que identifiquem que, além do preço por cada hora, existe um valor inicial de 20 euros que não pode ser menosprezado.

Uma empresa de prestação de serviços de limpeza cobra uma taxa de aluguer do seu equipamento, no valor de 20 euros, à qual acrescem 50 euros por cada hora de trabalho dos empregados que efectuam o serviço.

Exemplo 11 – Ordenado do vendedor. Os alunos devem também trabalhar com a função afim (não linear) dada por uma tabela. Neste exemplo, podem verificar que uma diferença de dois carros vendidos origina uma diferença de 500 euros no valor total recebido por um vendedor. Assim, o prémio por cada carro vendido é de 250 euros. Esta informação é útil para obter o valor do ordenado fixo: 1250 euros. Se dividirem os valores correspondentes das duas variáveis, verificam que não existe proporcionalidade directa. Esta conclusão pode também ser obtida por observação do gráfico da função. É importante promover a discussão sobre o significado das duas constantes, 250 e 1250, e da forma como essas constantes afectam o gráfico.

Um vendedor de automóveis recebe mensalmente, além do seu ordenado fixo, um prémio por cada carro vendido. A tabela que se segue contém o valor total, em euros, recebido pelo vendedor nos primeiros quatro meses deste ano.

N.º de carros vendidos	3	5	15	14
Valor total recebido	2000	2500	5000	4000

a) Determina qual é o valor do ordenado fixo do vendedor e o valor do prémio que obtém por cada carro vendido.
b) Constrói um gráfico que represente os dados da tabela.
c) Existe proporcionalidade directa? Justifica.
d) Escreve uma expressão algébrica que represente esta função.

Em geral, a partir do conhecimento de dois objectos não nulos e das respectivas imagens, os alunos podem obter facilmente o valor destas constantes, associando-as ao significado real que têm no problema e podem escrever uma expressão algébrica que represente esta função.

Exemplo 12 – Vendas de uma empresa. Igualmente importante é ser capaz de trabalhar com a função afim (não linear) dada algebricamente. Neste exemplo, quando se determina o valor obtido pela venda de 200 processadores, obtém-se um valor negativo. Este valor deve ser interpretado como o prejuízo que a empresa tem, se vender apenas esse número de processadores. Na discussão, os alunos devem compreender que os 50 euros correspondem ao valor de cada processador e salientar que os 30 000 euros constituem a despesa fixa no período considerado (por exemplo, gastos com o pessoal, com instalações). Uma vez que a despesa fixa é muito elevada, a venda de um número reduzido de processadores não é suficiente para gerar receita positiva. Esta função toma valores negativos para certos valores de x e valores positivos para outros valores de x, sendo nula num ponto.

A receita obtida por uma empresa que fabrica processadores para computadores, depende de x, o número de processadores vendidos, e é dada pela função $f(x) = 50x - 30000$ (valores em euros).

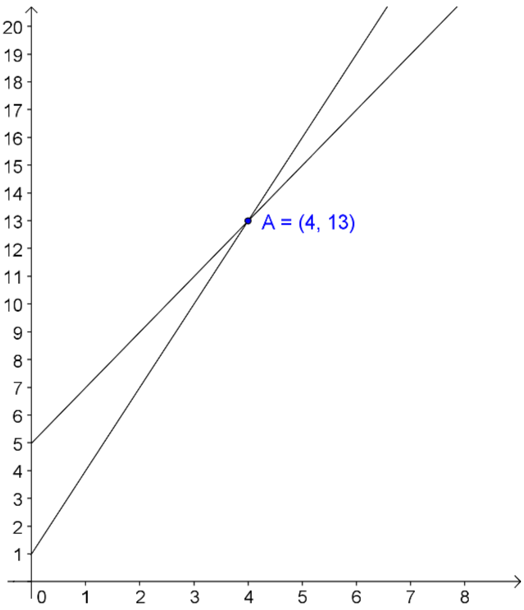
a) Que valor, em euros, obteve a empresa durante uma semana em que vendeu 200 processadores. Explica o que significa este valor para a empresa.

b) Numa semana em que obteve uma receita de 3000 euros, quantos processadores vendeu?

Exemplo 13 – Da função afim (não linear) para a realidade. Neste caso, a partir da expressão algébrica, os alunos podem identificar o declive e a ordenada na origem, relativos a cada uma das funções, informação que devem incluir na situação que imaginam. No seu trabalho devem referir o significado do ponto A, de intersecção das duas rectas. As coordenadas deste ponto indicam que, para o mesmo valor da variável independente, as duas funções dão origem a uma mesma imagem.

Na figura encontram-se as representações gráficas de duas funções, a e b, definidas, respectivamente, por $a(x) = 3x + 1$ e $b(x) = 2x + 5$.

Imagina uma situação da realidade que estas funções possam representar. Explica o que significa o ponto de intersecção das duas rectas na situação que imaginaste.



Exemplo 14 – Influência da variação dos parâmetros m e b no gráfico de funções do tipo $y = mx + b$*, com m diferente de zero.* A experiência dos alunos na resolução de problemas contextualizados envolvendo funções com diferentes expressões algébricas pode levá-los a compreender os conceitos de declive e ordenada na origem e a associar um significado real a cada um destes valores, em cada caso. Recorrendo ao *GeoGebra* ou à calculadora gráfica, os alunos podem observar o efeito da variação destes parâmetros no gráfico das funções, sintetizando as suas principais conclusões.

Recorrendo ao *GeoGebra* representa graficamente as funções que se seguem, do tipo, $y = mx + b$, com *m* diferente de zero:

$y = x$	$y = x + 5$
$y = 2x$	$y = x - 2$
$y = -3x$	$y = 2x + 3$
$y = 5x$	$y = 2x - 4$
$y = -10x$	$y = -3x + 1$

Esboça os gráficos destas funções na tua folha de papel, identificando cada uma através da sua expressão algébrica. Explica de que modo a alteração dos parâmetros *m* e *b* influencia a aparência do gráfico que se obtém.

Exemplo 15 – Vendas da pastelaria. O estudo da função linear e da função afim, e em particular o seu uso na resolução de problemas contextualizados, permite ao professor estabelecer uma ligação com o estudo de equações e inequações ou retomá-las, caso já tenham sido estudadas. A consideração de equações e inequações podem facilitar a resolução de um vasto conjunto de problemas. O exemplo que se segue ilustra esta situação.

A receita obtida por mês, por uma pastelaria, com a venda de bolos sem açúcar, em função da produção diária, em kg, é dada por $p(x) = 42x - 900$ (valores em euros).

a) Que quantidade de bolos é necessário vender para que o proprietário ganhe 1200 euros?

b) Que quantidade de bolos é necessário vender para que não haja prejuízo?

Note-se que a resolução de ambas as questões pode envolver apenas estratégias informais, como o recurso a tabelas de valores que permitam determinar o que é pedido, a realização de operações inversas, ou o uso do gráfico da função obtido, por exemplo, com recurso ao computador. No entanto, estas questões podem também ser exploradas de modo formal usando, no primeiro caso, uma equação ($42x - 900 = 1200$), e, no segundo caso, uma inequação ($42x - 900 \geq 0$).

Exemplo 16 – Temperatura em graus Celsius, Fahrenheit e Kelvin[78]. O trabalho com a função afim é também uma boa oportunidade para a resolução de equações literais (do 1.º grau), como neste exemplo relativo a escalas de temperatura.

Existem várias escalas de temperatura, por exemplo, a Celsius (*C*), a Fahrenheit (*F*) e a Kelvin (*K*).

A conversão de graus Celsius para graus Fahrenheit pode ser feita da seguinte forma:

$$F = 1{,}8C + 32$$

Pelo seu lado, a conversão de graus Celsius para graus Kelvin é dada por:

$$K = C + 273$$

a) A água congela aos 0 ºC e entra em ebulição aos 100 ºC. Determina os valores correspondentes a estas temperaturas nas escalas Fahrenheit e Kelvin.

Celsius	Fahrenheit	Kelvin
0		
100		

b) Representa graficamente as duas funções.

---

c) Resolve ambas as equações em ordem a *C*.

d) Estabelece uma relação entre as variáveis *F* e *K*.

8.2.4. Função de proporcionalidade inversa

A função de proporcionalidade inversa assume um papel importante na modelação de situações em que a relação entre duas variáveis envolve um produto constante dos valores correspondentes. É o que sucede, por exemplo, quando consideramos a relação entre a altura de um recipiente cilíndrico e a área que a sua base deve ter para que o volume seja um certo valor constante. O gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é muito diferente do gráfico de uma função afim (linear ou não linear), com que os alunos estão mais habituados a trabalhar. Daí que seja importante que as características deste novo tipo de gráfico sejam salientadas na aula, a partir das tarefas realizadas pelos alunos.

Exemplo 17 – Proporcionalidade inversa em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Com esta tarefa os alunos podem escrever pares de números cujo produto seja 12. Organizando os dados obtidos pelos alunos da turma, é possível reunir exemplos diversificados.

João pensou em dois números e disse: "o produto desses dois números é 24". Dá exemplos de números em que João possa ter pensado.

Os alunos devem compreender que se o valor do primeiro número aumentar, para que o produto se mantenha constante, o valor do segundo número deve diminuir. É possível observar que esses números podem ser ambos positivos ou ambos negativos, para que o produto possa ser um número positivo. Também pode ser observado que nenhum desses números pode ser nulo, pois isso originaria um produto nulo. Escrevendo a expressão algébrica $x.y = 24$ e resolvendo-a em ordem a *y*, chega-se à expressão $y = \frac{24}{x}$, com *x* diferente de zero, cuja representação gráfica os alunos podem visualizar recorrendo à calculadora gráfica ou a um programa de computador como o *GeoGebra*. Os alunos podem observar que os ramos da hipérbole se vão aproximando do eixo dos *yy*, dado que as suas imagens se tornam cada vez maiores, à medida que os valores de *x* se tornam próximos de zero. No entanto, devem ganhar, progressivamente, a ideia intuitiva de que os ramos da hipérbole nunca chegam a intersectar esse eixo.

Exemplo 18 – Ondas de rádio[79]. Muitas fórmulas de Física representam algebricamente funções de proporcionalidade inversa, como é o caso da relação entre o comprimento das ondas de rádio e a sua frequência.

O comprimento de onda das ondas de rádio é uma função da sua frequência. Uma fórmula para esta função é:

$$w = \frac{300000}{f}$$

em que w representa o comprimento de onda em metros e f representa a frequência em quilociclos por segundo.

a) O que acontece ao comprimento de onda quando a frequência da onda de rádio duplica? E quando é reduzida a metade?

b) Resolve a equação dada em ordem a f.

c) Determina a frequência da onda de rádio cujo comprimento de onda é de 1500 metros.

Exemplo 19 – Identificação de situações de proporcionalidade directa e inversa[80]. No exemplo que se segue, apresentamos algumas situações em que existe uma relação de proporcionalidade entre as variáveis e outras em que ela não existe. É importante que os alunos reconheçam quando essa proporcionalidade é directa, quando é inversa, ou mesmo quando não existe proporcionalidade.

Identifica em quais das situações seguintes há proporcionalidade entre as duas variáveis. Se existir, indica se esta é directa ou inversa.

a) A altura de uma pessoa e o seu peso.

b) O comprimento de uma fila de azulejos rectangulares iguais e o número desses azulejos.

c) O número de trabalhadores que colaboram numa obra e o tempo necessário para a terminar.

d) A quantidade de gasóleo abastecido e o preço total a pagar.

e) A velocidade média de um carro e o tempo gasto num percurso com um comprimento fixo.

f) O valor a pagar a uma banda de rock e o número de horas de trabalho dessa

---

banda, sabendo que cobram uma taxa fixa de 200 euros acrescida de 100 euros por hora.

g) A densidade de um corpo e o volume que ele ocupa.

h) O lado de um quadrado e o seu perímetro.

Através dos exemplos apresentados, deve ser discutido na aula o facto de nem todas as relações entre variáveis serem de proporcionalidade directa. Existem relações entre variáveis em que o aumento dos valores da variável independente é acompanhado pelo aumento dos valores da variável dependente e não há proporcionalidade directa. É o que se passa, por exemplo, com a situação da banda de rock. Tendo em conta o modo como é efectuado o seu pagamento, à medida que o número de horas de trabalho aumenta, o valor a pagar à banda é também maior, mas isso não é suficiente para que se trate de uma relação de proporcionalidade directa. Com efeito, através de exemplos particulares, é possível constatar que a duplicação do número de horas não conduz à duplicação do valor a pagar, pois há sempre uma taxa fixa:

N.º de horas	Valor a pagar
1	300
2	400

A relação entre a altura de uma pessoa e o seu peso é outro exemplo em que não existe proporcionalidade. Nos exemplos apresentados existe proporcionalidade directa nas situações b), d) e h) e existe proporcionalidade inversa nas situações c), e) e g).

8.2.5. Função quadrática

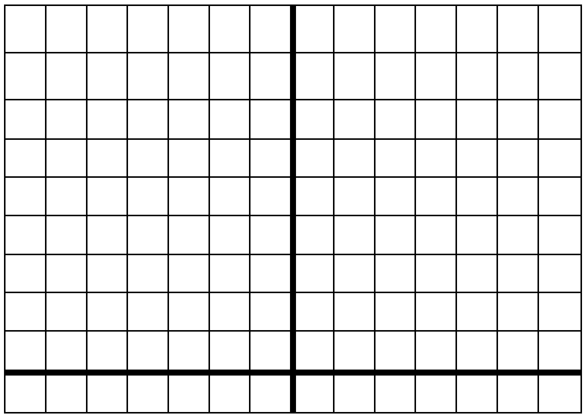
Há inúmeras situações da realidade que são modeladas por funções quadráticas: o lançamento de uma bola, a altura de uma corda presa entre dois postes, a queda de um projéctil… No entanto, no 3.º ciclo, o estudo da função quadrática deve resumir-se às funções do tipo $y = ax^2$, com a inteiro e diferente de zero.

Exemplo 20 – Função quadrática definida por $y = x^2$. A função definida por $y = x^2$ é uma das funções mais simples do tipo $y = ax^2$, com a inteiro e diferente de zero. A realização da tarefa que se segue permite aos alunos observarem que uma função deste tipo é representada por uma parábola, gráfico com que possivelmente ainda não tiveram qualquer contacto ao longo da sua escolaridade:

Dado um número qualquer, vejamos o que sucede quando se calcula o seu quadrado.

a) Preenche a tabela seguinte e constrói um gráfico que represente a relação entre x e x^2:

x	$y = x^2$
-4	$(-4)^2 = 16$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

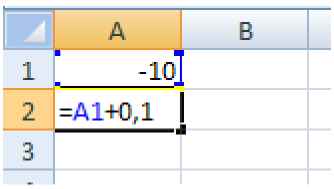


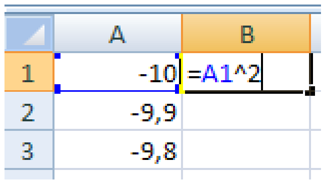
b) Recorrendo à folha de cálculo:

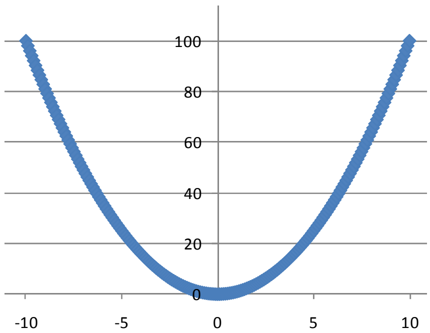
- Na coluna A, representa todos os objectos entre –10 e 10, com incrementos sucessivos de uma décima;
- Na coluna B, determina as imagens, isto é, os quadrados de todos os valores da coluna A.
- Representa graficamente os pontos cujas coordenadas determinaste.

c) És capaz de descrever o comportamento desta função? O que podes dizer sobre a relação entre um número e o respectivo quadrado? (Considera números inteiros e também racionais não inteiros, positivos e negativos, e justifica as tuas afirmações).

Ao trabalharem esta tarefa, usando papel e lápis, os alunos podem observar que os pontos que marcam se situam sobre uma curva, a que se dá o nome de parábola, uma curva que na parte central tem um aspecto achatado e que nas partes laterais cresce de modo cada vez mais acentuado. Se tiverem alguma prática no uso da calculadora gráfica ou da folha de cálculo, o recurso a estas ferramentas permite-lhes a representação de um maior número de pontos, de uma forma rápida. Na folha de cálculo, basta colocar numa célula o valor inicial, –10, e obter todos os outros objectos a partir desse, tendo em conta o incremento de uma décima. Uma possibilidade é usar a fórmula que se encontra na figura da esquerda, seleccionar a célula A2 e colocando o cursor no canto inferior direito da célula usar a funcionalidade "*Arrastar*", até obter uma lista com os objectos que são pedidos. A folha de cálculo permite também obter rapidamente os quadrados destes números. Basta introduzir a fórmula que se encontra na figura da direita e usar novamente a funcionalidade "*Arrastar*". Seleccionando todos os valores de ambas as colunas é possível inserir um gráfico onde todos os pontos obtidos são representados, semelhante ao que se encontra na figura abaixo. Modificando o incremento entre os valores da coluna A, é possível aumentar ou diminuir o número de pontos representados, tornando a linha do gráfico mais ou menos preenchida:







Com base na análise do gráfico da função e das tabelas de valores gerados pelo computador ou pela calculadora, os alunos podem reconhecer que o quadrado de qualquer número é sempre um número positivo, excepto no caso em que $x = 0$. Os alunos podem também reconhecer que a curva obtida é simétrica em relação ao eixo dos *yy*, o que se relaciona com o facto de x e $-x$ terem o mesmo quadrado (x^2). Podem ainda verificar que o quadrado de um número positivo maior que 1 é um número maior que ele, mas que o quadrado de um número entre 0 e 1 é um número menor que o número inicial. Nos números negativos, a situação é semelhante: o quadrado de um número menor que -1 é um número maior do que o módulo desse número e o quadrado de um número entre -1 e 0 é um número inferior ao módulo desse número. O professor deve ter presente que, quando $0 < |x| < 1$ (isto é, x está compreendido entre -1 e 1 e é diferente de 0), se tem $x^2 < |x|$ e, quando $|x| > 1$ (isto é, x não pertence ao intervalo $[-1,1]$), se tem, pelo contrário, $x^2 > |x|$. Existem apenas 3 números cujo módulo coincide com o seu quadrado: 0, -1 e 1. Estas relações tornam-se ainda mais evidentes se se traçarem as rectas $y = x$ e $y = -x$. A consideração dos valores racionais de x torna-se importante para que os alunos considerem o caso $|x| < 1$.

Exemplo 21 – Influência do parâmetro a no gráfico de uma função do tipo $y = ax^2$, com a inteiro e diferente de zero. Na exploração desta tarefa os alunos podem identificar que, quando *a* é um número positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima e que, quando *a* é um número negativo, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Devem também perceber, intuitivamente, que o valor de *a* também influencia a abertura da parábola. Um estudo mais detalhado deste tema pode envolver a elaboração de tabelas de valores que ajudem os alunos a visualizar o crescimento das imagens quando o módulo de *a* aumenta. Este tipo de tarefa pode também ser desenvolvido na sala de aula com recurso à utilização de calculadoras gráficas e do *viewscreen*, no caso de não ser possível usar uma sala equipada com computadores.

Recorrendo ao *GeoGebra* representa graficamente as funções que se seguem, do tipo $y = ax^2$, com *a* inteiro e diferente de zero:

$y = x^2$	$y = -x^2$
$y = 2x^2$	$y = -2x^2$
$y = 5x^2$	$y = -5x^2$
$y = 10x^2$	$y = -10x^2$

Esboça os gráficos destas funções na tua folha de papel, identificando cada uma através da sua expressão algébrica. Explica de que modo o parâmetro *a* influencia a forma do gráfico que se obtém.

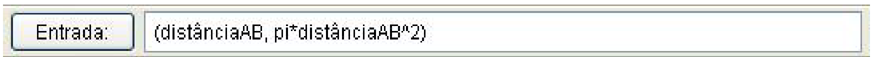
Exemplo 22 – Área do círculo. Os alunos devem ser capazes de usar a função quadrática do tipo $y = ax^2$, com *a* diferente de zero, como modelo se situações diversas. O exemplo mostra como as funções quadráticas podem modelar relações geométricas.

A relação entre a área de um círculo (*A*), em cm^2, depende do seu raio (*r*), em *cm*, e é dada por:

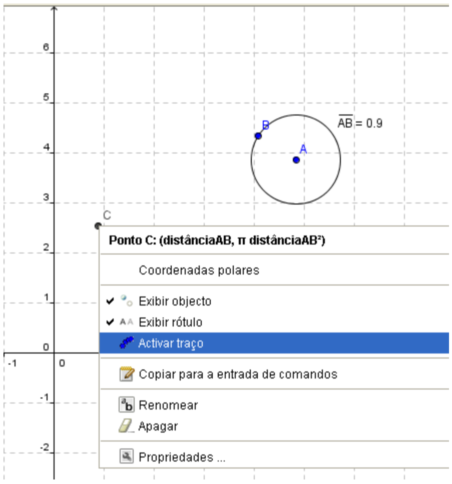
$$A(r) = \pi . r^2$$

Recorrendo ao *GeoGebra*, constrói uma representação gráfica para esta função:

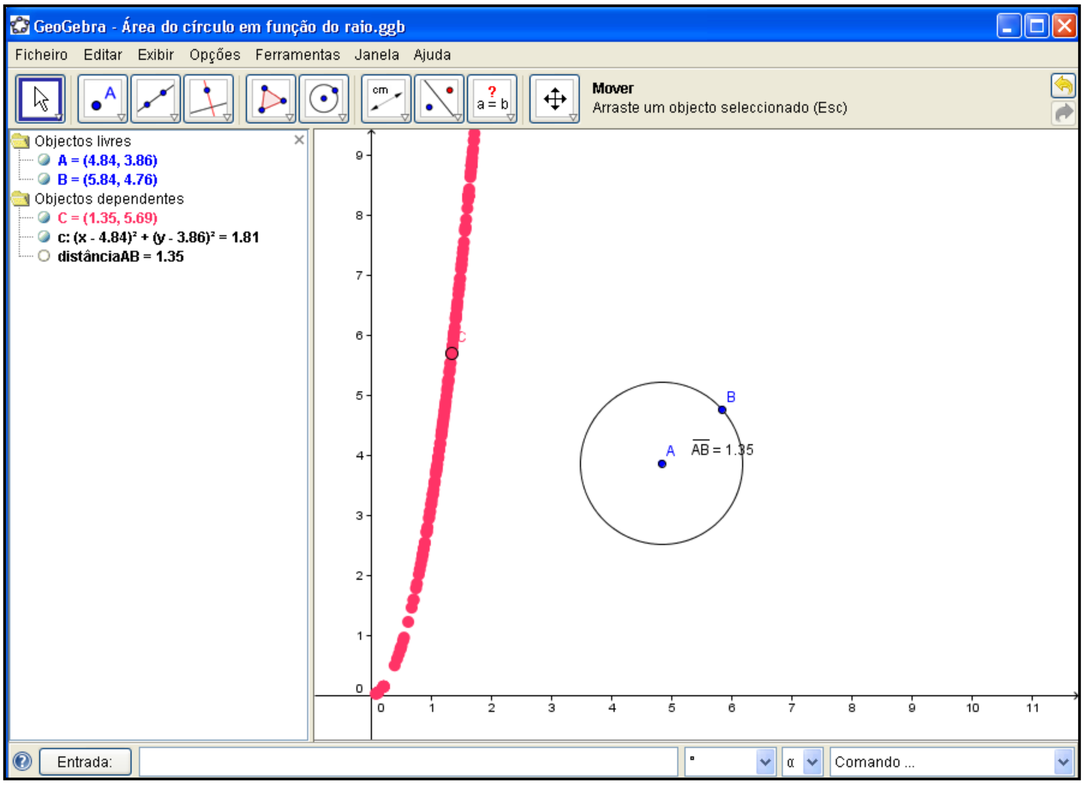
- Abre o *GeoGebra* e, no menu *Exibir*, faz aparecer na janela de visualização os eixos coordenados e o quadriculado.
- No sexto ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Circunferência dados o centro e um ponto* . Marca o ponto A, centro da circunferência, e, em seguida, um dos seus pontos, B, para que esta seja representada.
- No sétimo ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Distância ou comprimento*  e selecciona os pontos A e B. É medida a distância entre A e B, ou seja, o raio da circunferência.
- A variável independente, *distânciaAB*, é o **raio da circunferência**. A variável dependente é a **área do círculo limitado por essa circunferência** que se calcula através da expressão $\pi \times distânciaAB^2$. Representa um ponto do gráfico da função escrevendo, na caixa de entrada, as suas coordenadas: ($distânciaAB$, $pi \times distânciaAB\text{^}2$).



- Selecciona o ícone *Mover* . Clica com o botão do lado direito do rato em cima do ponto C. Selecciona a opção *Activar traço* como mostra a figura ao lado:
- Clica no ponto B e, sem soltar, arrasta-o.



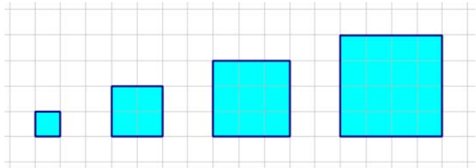
Fazendo variar o raio da circunferência, movendo o ponto B, é possível observar a marcação de vários pontos do gráfico da função. O alunos podem obter um gráfico como o que se segue, que corresponde à parte da parábola $y = \pi . x^2$ contida em $[0, +\infty[$:



Esta tarefa pode ser complementada por diversas questões por parte do professor. Um aspecto importante que pode ser discutido é o facto de o gráfico da função ser apenas parte da parábola. A experiência mostra que o ponto do gráfico se torna cada vez mais próximo da origem do referencial à medida que o ponto B se aproxima do centro A, isto é, à medida que o raio diminui. Os alunos deverão compreender que o raio não pode tomar valores negativos pelo que o gráfico da função que modela esta situação é apenas parte de uma parábola. Note-se que nesta função do tipo $y = ax^2$ o valor de a é o número irracional π, pelo que a exploração desta tarefa vem complementar o conhecimento dos alunos sobre este tipo de funções.

Exemplo 23 – Lado, perímetro e área. Existem, também, situações onde é possível relacionar a função quadrática com a função afim ou com a função linear. Basta, para isso, considerar o caso dos quadrados em que a variável independente é o seu lado. Se observarmos o que sucede aos perímetros dos quadrados e à sua área, há diversas questões que podem ser colocadas cuja exploração, na sala de aula, pode proporcionar um conhecimento mais profundo sobre os dois tipos de função envolvidos.

Observa a figura seguinte:



a) Preenche a tabela que se segue, considerando a quadrícula como unidade de medida:

Lado do quadrado (x)	Perímetro ($f(x)$)	Área ($g(x)$)

b) Representa graficamente, num mesmo referencial cartesiano, as duas funções:

- f, que associa ao lado de cada quadrado (x), o seu perímetro;
- g, que associa ao lado de cada quadrado (x), a sua área.

c) Em qual das duas funções se dá um crescimento mais acentuado, quando o valor de x aumenta?

9. Sistemas de Equações, Equações do 2.º grau e Inequações

No 3.º ciclo do ensino básico, para além das equações numéricas e literais do 1.º grau e de diversas funções elementares, questões já abordadas em capítulos anteriores, estudam-se ainda sistemas de equações do 1.º grau, equações do 2.º grau e inequações do 1.º grau. O estudo destes três tópicos proporciona aos alunos um amplo conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade. Além disso, contribui para desenvolver a sua capacidade de utilizar da linguagem algébrica, o seu raciocínio matemático e a sua capacidade de resolver de problemas. Na resolução de sistemas de equações é importante que os alunos compreendam a conjunção de condições e a sua interpretação geométrica. O estudo da equação do 2.º grau, primeiro incompleta e depois completa, constitui um terreno para a aplicação dos conceitos e técnicas algébricas já anteriormente aprendidos. O trabalho com inequações conduz, naturalmente, à conjunção e disjunção de condições em conjuntos infinitos. Estes tópicos permitem importantes conexões com a Geometria e com os Números e operações, que devem ser exploradas na sala de aula, proporcionando uma maior riqueza de significados aos objectos e procedimentos algébricos.

É importante ter em atenção que o trabalho com equações, sistemas e inequações facilmente pode conduzir a uma mecanização de procedimentos por parte dos alunos, sem qualquer compreensão do que estão a fazer – com que objectos estão a trabalhar, que questões se colocam relativamente a esses objectos e qual o fundamento das estratégias de resolução adoptadas. Para o evitar, o *Programa de Matemática* indica que se devem proporcionar aos alunos experiências informais, em casos necessariamente simples, antes da resolução algébrica formal. Essas experiências são essenciais para a compreensão dos conceitos e do fundamento dos procedimentos a seguir. A resolução formal deve surgir, numa segunda etapa, como o processo adequado para lidar com situações de maior complexidade. Além disso, na resolução de equações, sistemas e inequações, é de evitar, numa fase inicial, a formulação de questões numa linguagem demasiado formalizada. A formalização deve ser introduzida progressivamente, ajudando os alunos a fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática.

9.1. Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

9.1.1. Sistemas de equações

Os alunos já trabalharam anteriormente com equações do 1.º grau com duas variáveis, quer na resolução de equações literais, quer no estudo das funções. Do trabalho com as equações literais com duas variáveis, deve ter ficado com a noção que uma solução desta equação não é um número, mas sim um par ordenado de números e que esta equação admite, por norma, uma infinidade de soluções. Do estudo das funções, deve ter ficado com a noção que uma equação do tipo $y = ax + b$ representa uma relação entre duas variáveis – a variável independente (usualmente representada por *x*) e a variável dependente (usualmente representada por *y*) – e que esta relação é representada por uma recta num gráfico cartesiano.

Consideremos agora, em conjunto, duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, a que chamamos *sistema de equações do 1.º grau a duas incógnitas*:

a) $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 5x - y = 17 \end{cases}$

Cada uma das equações de um sistema diz respeito a uma recta. Se as duas rectas não forem paralelas, existe um ponto onde se encontram. As coordenadas desse ponto satisfazem tanto uma como outra equação e portanto, o par ordenado é solução do sistema. Esta interpretação da representação gráfica de um sistema de equações é fundamental para uma efectiva compreensão tanto da noção de sistema de equações como da natureza da respectiva solução.

Existem diversos processos algébricos para resolver sistemas de equações. O *Programa de Matemática* refere que os alunos devem aprender a resolver sistemas de equações pelo método de substituição. A iniciação a este método pode começar com sistemas muito simples em que uma das equações tem uma das variáveis com coeficiente 1 ou –1, como sucede nos sistemas acima apresentados.

No sistema da alínea a) uma das variáveis já está isolada na primeira equação, bastando efectuar a substituição na segunda equação. No sistema da alínea b) é possível isolar a variável *y*, fazendo transformações simples na segunda equação:

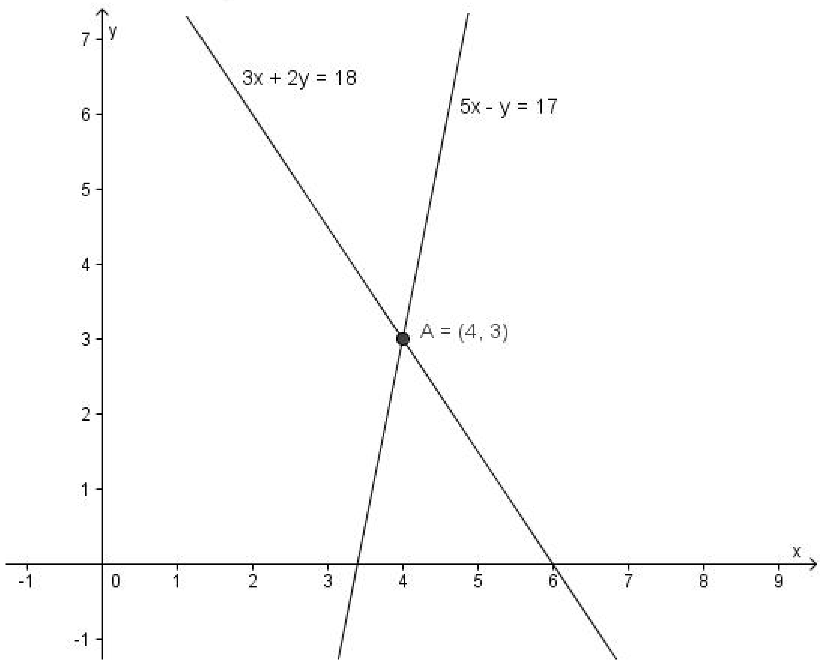
$$y = 5x - 17$$

Podemos agora, na primeira equação, substituir *y* pela expressão obtida,

$$3x + 2(5x - 17) = 18$$

Resolvendo a equação em ordem a *x*, obtemos $x = 4$. Substituindo o valor de *x* na outra equação encontramos $y = 3$. Deste modo, o sistema é possível e determinado e a sua solução é o par ordenado (4, 3). Nos casos mais complexos, em que nenhuma variável tem coeficiente 1 ou –1, os alunos devem aprender a avaliar que variável pode ser isolada com maior facilidade e que permite, mais eficazmente chegar à solução do sistema. O método de substituição, indicado pelo *Programa de Matemática*, baseia-se numa das ideias mais poderosas da Álgebra – a possibilidade de substituir uma expressão algébrica por outra equivalente. Trata-se de uma ideia com que os alunos já contactaram em anos anteriores e que aqui deve ser reforçada.

Graficamente, as rectas que correspondem a cada uma das equações do sistema são concorrentes num ponto, cujas coordenadas solucionam o sistema. Este é um sistema possível e determinado:



A resolução de sistemas de equações pelo método da substituição deve, pelo menos em alguns casos, ser complementada com a interpretação gráfica, de modo a que seja promovida a compreensão da solução. Para isso, é conveniente transformar as duas equações do sistema em equações onde a variável y surja isolada. Os alunos podem representar as rectas associadas às duas funções recorrendo ao computador (ou à calculadora gráfica) ou em papel quadriculado. Podem assim visualizar onde se situa o ponto de intersecção (caso exista) ou determinar as coordenadas desse ponto usando a tecnologia, confirmando o que fizeram algebricamente. Além disso, a tecnologia permite estudar uma grande variedade de casos. Os alunos devem também trabalhar, gráfica e algebricamente, com sistemas de equações possíveis e indeterminados, em que as rectas correspondentes são paralelas coincidentes e sistemas de equações impossíveis, em que as rectas são estritamente paralelas.

O método de adição ordenada, embora não seja considerado obrigatório pelo *Programa de Matemática*, é um método simples, podendo proporcionar uma interessante investigação baseada na representação geométrica dos sistemas de equações (ver exemplo 8 das Tarefas propostas).

As principais dificuldades dos alunos no trabalho com sistemas de equações podem agrupar-se em três grandes categorias: (i) compreender a noção de sistema e a natureza da solução de um sistema de equações; (ii) compreender os processos de resolução de sistemas de equações e ser capaz de os executar correctamente até obter a solução; e (iii) ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.

As dificuldades dos alunos na tradução de situações dadas em linguagem natural para sistemas de equações são em grande medida idênticas às que apresentam em casos que conduzem a outros tipos de condições. Essas dificuldades, como vimos em capítulos anteriores, têm múltiplas origens – a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, o estabelecimento de relações incorrectas entre as duas linguagens, a simples distracção ou o foco em pistas enganadoras. Para além disso, envolvem uma dificuldade acrescida – a noção de conjunção de condições. A resolução de alguns problemas, formulados inicialmente em linguagem natural e discutidos, por fim, com toda a turma, é também aqui uma boa forma de promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da comunicação matemática, por parte dos alunos.

9.1.2. Equações do 2.º grau

Uma equação do 2.º grau, com uma incógnita, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a diferente de zero, diz-se representada na forma canónica. O estudo das equações do 2.º grau a uma incógnita começa pelas equações incompletas (com $b = 0$ ou $c = 0$), que podem ser resolvidas por transformações algébricas simples. Vejamos, por exemplo, a equação $2x^2 - 3 = 0$ ($b = 0$). Esta equação pode ser resolvida, isolando o termo do 2.º grau, dividindo ambos os membros por 2 e extraindo de seguida a raiz quadrada também a ambos os membros. É preciso, naturalmente, ter em atenção que esta equação tem duas soluções, uma positiva e outra negativa:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

No caso da equação $2x^2 + 4x = 0$ ($c = 0$), o processo de resolução mais expedito consiste em escrevê-la como um produto de dois factores igual a zero, colocando um factor comum em evidência, por exemplo como se mostra em seguida:

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(2x + 4) = 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & 2x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(x + 2) = 0 \end{aligned}$$

Sabendo que o produto de dois números só pode ser zero se pelo menos um dos números for zero, aplica-se a "lei do anulamento do produto". Temos, deste modo:

$$\begin{aligned} & x(2x + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \vee 2x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \vee x = -2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & x(2x + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \vee x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$

A equação $2x^2 + 4x = 0$ tem, portanto duas soluções, 0 e –2.

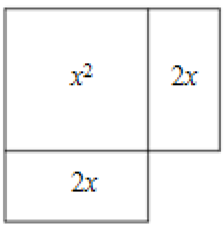
Para resolver uma equação do 2.º grau completa (isto é, com todos os coeficientes não nulos), os alunos devem saber usar a fórmula resolvente:

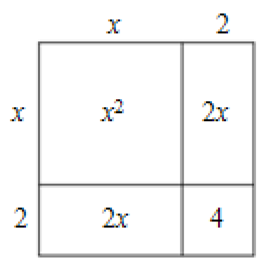
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Analisando o sinal do binómio discriminante ($b^2 - 4ac$) os alunos podem reconhecer se uma dada equação do 2.º grau é possível ou impossível e, no caso de ser possível, se tem uma ou duas raízes (soluções) distintas:

$b^2 - 4ac < 0$	A equação é impossível, isto é, não tem raízes reais.
$b^2 - 4ac = 0$	A equação é possível e tem apenas uma raiz.
$b^2 - 4ac > 0$	A equação é possível e tem duas raízes distintas.

A dedução da fórmula resolvente não faz parte do *Programa de Matemática*, que recomenda, no entanto, que esta seja proposta aos alunos com melhor desempenho matemático. Na verdade, a dedução desta fórmula, embora requeira algum desembaraço no cálculo algébrico, não é particularmente difícil. Esta dedução pode ser acompanhada pela representação geométrica desta equação, através do método conhecido por "completar o quadrado", que remonta a *al-Khwarizmi*. Uma forma de compreender em que consiste este método, é começar por uma equação de coeficientes numéricos, por exemplo $x^2 + 4x = 21$:





Assim, representamos o primeiro membro da equação, $x^2 + 4x$, como uma figura composta por um quadrado de área x^2 e dois rectângulos, cada um dos quais de área $2x$. Adicionando um quadrado de área 4 no canto inferior direito, "completamos o quadrado”, isto é, transformamos a figura num quadrado maior cuja área é $x^2 + 4x + 4$. Completar o quadrado na equação inicial $x^2 + 4x = 21$ conduz a

$$x^2 + 4x + 4 = 21 + 4$$

ou seja,

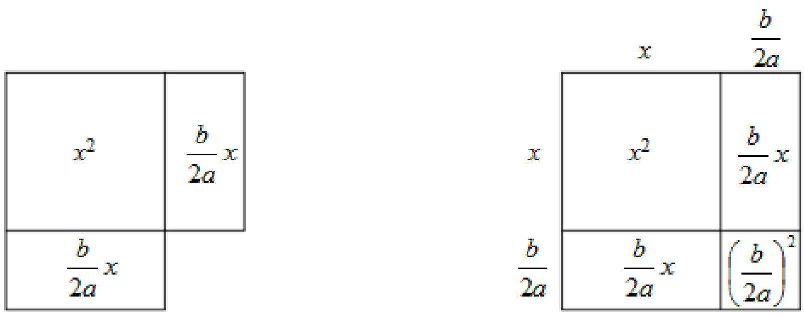
$$(x+2)^2 = 25$$

de onde resultam duas possibilidades:

$$(x+2) = 5 \text{ ou } (x+2) = -5$$

Assim, obtemos as duas soluções da equação $x = 3$ ou $x = -7$.

No caso geral da equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$ começamos por dividir ambos os membros por a ($a = 0$) e completamos o quadrado como mostra a figura:



A fórmula resolvente resulta de uma dedução análoga à anterior:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Do ponto de vista didáctico, o estudo da equação do 2.º grau deve proporcionar a conexão com o tópico Funções, nomeadamente através da resolução de tarefas que relacionem a equação incompleta $ax^2 = 0$ (caso em que $b = 0$ e $c = 0$) com a função quadrática do tipo $y = ax^2$, com *a* diferente de zero (ver Exemplo 9 deste capítulo).

Os alunos têm usualmente diversas dificuldades no trabalho com equações do 2.º grau, nomeadamente: (i) reconhecer que uma equação do 2.º grau é incompleta e resolvê-la usando as regras de resolução de equações e a lei do anulamento do produto; (ii) reescrever uma equação do 2.º grau na forma canónica; (iii) substituir correctamente os valores dos coeficientes de uma equação na forma canónica na fórmula resolvente e determinar os valores das raízes; (iv) interpretar as situações em que existe apenas uma raiz ou não existem raízes; e (v) traduzir condições verbais numa equação do 2.º grau e interpretar as suas soluções, de acordo com as condições dadas.

A maior parte destas dificuldades tem origem num domínio insuficiente da linguagem algébrica por parte dos alunos. No entanto, os cálculos podem ser simplificados pela escolha apropriada dos exemplos ou pelo recurso à tecnologia, mas a interpretação das situações tem de ser feita sempre de modo aprofundado e rigoroso, de modo a promover a compreensão por parte dos alunos.

9.1.3. Inequações do 1.º grau

Já em ciclos anteriores os alunos contactaram com os sinais < e >, que usaram para expressar relações numéricas de desigualdade simples. Agora usam-nos para representar relações de desigualdade entre condições.

De modo a compreender o conceito de inequação e a natureza do seu conjunto-solução, os alunos devem começar por resolver inequações simples, reconhecendo, desde logo, a equivalência entre $a < b$ e $b > a$.

As inequações a propor numa fase inicial devem conter apenas um "passo", isto é, devem poder ser resolvidas usando a definição de adição, de multiplicação ou as operações inversas. Analisando a desigualdade $x + 4 < 10$ podemos afirmar que $x + 4$ é inferior a 10 e isso é verdade para valores de *x* como 0, 1, –2 , 5, ou seja, apenas se $x < 6$. Vejamos mais alguns exemplos:

$x+5<10$	$y+4>5$	$x-1<-4$	$3-x<4$	$t-3>-1$
$2c<6$	$\frac{1}{2}x<3$	$\frac{1}{4}z>\frac{3}{2}$	$7<x+1$	$5-y>0$

Estas inequações devem ser resolvidas sem utilização das regras de resolução. Os alunos devem representar o conjunto-solução na recta real e sob a forma de intervalo, notando que estes conjuntos são infinitos e, em muitos casos, ilimitados. É, portanto fundamental que os alunos compreendam os intervalos como subconjuntos de $\mathbb{R}$, representem e interpretem intervalos de números reais na forma simbólica e gráfica, bem como a sua intersecção e reunião. Devem também ter em atenção que a determinação das soluções de uma inequação precisa de ter em conta as características da situação (ver exemplos nas Tarefas propostas). Devem, ainda, lidar com situações em que se usa a transitividade da relação de ordem em $\mathbb{R}$.

Para a resolução de inequações de maior complexidade, introduzem-se então as regras de resolução. Algumas destas regras podem até já ter sido descobertas pelos alunos, a propósito da resolução de inequações simples. É importante verificar em que casos as regras para a resolução de inequações não mudam em relação às regras conhecidas para as equações (transposição de termos e multiplicação de ambos os membros por um mesmo número positivo) e em que casos são diferentes (multiplicação de ambos os membros por um mesmo número negativo). A razão de ser desta diferença deve ser analisada pelos alunos, tendo por base desigualdades numéricas:

– O que acontece quando multiplico ambos os membros da desigualdade $2<3$ por 4? E por –4?

– O que acontece quando multiplico ambos os membros da desigualdade $20>10$, por 2? E por –2?

O trabalho com as inequações baseia-se, não na noção de igualdade, mas sim na noção de desigualdade, proporcionando aos alunos um tipo de raciocínio muito diferente do que se usa na resolução de equações e sistemas de equações. O conjunto-solução destas condições é muitas vezes infinito e ilimitado e trabalha-se com frequência com a conjunção e disjunção de condições em conjuntos infinitos. Constitui também uma oportunidade para estudar formalmente as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$

(transitiva, não simétrica e não reflexiva) e estabelecer conexões com os temas Geometria e Números e operações.

As dificuldades mais comuns dos alunos na resolução de inequações podem ser sistematizadas do seguinte modo: (i) não compreender o que é uma inequação e qual a natureza do seu conjunto-solução; (ii) aplicar indevidamente as regras de resolução das equações, multiplicando ambos os membros de uma inequação por um número negativo sem inverter o sentido da desigualdade; e (iii) estabelecer incorrectamente a intersecção e reunião de conjuntos-solução em situações de conjunção e disjunção de condições.

Um bom trabalho com desigualdades nos 1.º e 2.º ciclos é a estratégia de ensino mais segura para que os alunos possam desenvolver uma boa compreensão do que são inequações e dos seus métodos de resolução. Para os alunos que não tiveram essa oportunidade, nos primeiros anos de escolaridade, a estratégia a seguir, tal como nos sistemas de equações e nas equações do 2.º grau, é a de procurar desenvolver estas noções a partir de situações relativamente simples e sempre apoiada em representações geométricas. Pessia Tsamir, Nava Almog e Dina Tirosh[81] defendem que o uso de representações geométricas desempenha um papel positivo na aprendizagem dos alunos, uma vez que os ajuda a compreender melhor o que é uma inequação e a natureza do seu conjunto-solução.

9.2. Tarefas: Exemplos e ilustrações na sala de aula

9.2.1. Sistemas de equações

Exemplo 1 – Pesos[82]. Existe uma variedade de situações, envolvendo duas quantidades desconhecidas, que podem ser representadas e solucionadas usando sistemas de equações do 1.º grau. Neste exemplo, os alunos devem começar por identificar claramente quais são as quantidades desconhecidas que pretendem determinar. Em seguida, podem escrever duas equações que traduzam as indicações dadas por Alberto e Berta e que devem ser respeitadas:

Alberto disse para Berta: "A soma do teu peso com o dobro do meu é 190 kg". Berta respondeu: "Em contrapartida, a soma do teu peso com o dobro do meu é 185 kg".

Determina quanto pesa cada um.

Representando por a o peso, em kg, do Alberto e por b o peso, em kg, da Berta, a resolução do sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 190 \\ a + 2b = 185 \end{cases}$$

ou de outro equivalente, permite concluir que Alberto tem 65 kg e Berta tem 60 kg.

Exemplo 2 – Jogos Olímpicos[83]. Neste exemplo são dadas duas equações com duas variáveis que modelam a relação entre os tempos dos vencedores de uma corrida nos Jogos Olímpicos de diferentes anos:

As equações $y = 28{,}65 - 0{,}411(x - 1962)$ e $y = 27{,}5 - 0{,}411(x - 1990)$ representam modelos para o tempo dos vencedores da corrida dos 10000 metros nos Jogos Olímpicos. A variável x representa o ano e a variável y representa o tempo do vencedor, em minutos. Responde às questões seguintes:

a) Qual é o tempo aproximado do vencedor no ano de 1972 dado por cada uma das equações?

b) E qual é o tempo aproximado do vencedor para o ano de 2008 em cada caso?

c) As duas equações representam a mesma recta? Explica o teu raciocínio.

Observando qual é o significado das variáveis x e y, os alunos podem responder às alíneas a) e b) fazendo a substituição dos valores dados em ambas as expressões, verificando que se obtém valores menores em 2008 do que em 1972, como seria de esperar. Logo nestas alíneas é possível concluir que as duas equações não representam a mesma recta, facto que pode ser confirmado simplificando as expressões algébricas. Com efeito, as rectas possuem o mesmo declive mas ordenadas na origem distintas. Na resolução desta tarefa, os alunos podem, também, recorrer à calculadora gráfica.

Exemplo 3 – Questões de um teste[84]. O problema que se segue pode ser resolvido através da formulação de um sistema, que os alunos resolvem facilmente pelo método de substituição. No entanto, a segunda questão leva-os a procurar outras formas de resolução:

Um teste contém 42 questões, umas valendo 2 pontos e outras valendo 3 pontos. A pontuação máxima é de 100 pontos.

a) Representa a informação dada por um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas e resolve-o.

b) Pensa numa estratégia alternativa para resolver o problema, sem usar sistemas de equações.

Sem recorrer a equações, os alunos podem analisar regularidades em diferentes casos concretos, eventualmente com recurso a uma folha de cálculo. A construção de tabelas como as que se seguem permite identificar o número de questões de cada tipo que o teste tem. Para isso, os alunos devem definir, na primeira coluna, x como o número de questões de 2 pontos e gerar valores de 1 em 1, por exemplo. Os valores correspondentes de y, na segunda coluna, obtêm-se calculando as diferenças através da expressão $42 - x$. Na terceira coluna, basta calcular a pontuação que se obtém para cada par ordenado, através da expressão $2x + 3y$, recorrendo à designação das células, como mostra a figura:

B	C	D
x	*y*	**Pontuação**
1	41	=B2*2+C2*3
2	40	124
3	39	123
4	38	122
5	37	121
6	36	120
7	35	119
8	34	118
9	33	117
10	32	116
11	31	115

B	C	D
x	*y*	**Pontuação**
1	41	125
2	40	124
3	39	123
4	38	122
5	37	121
21	21	105
22	20	104
23	19	103
24	18	102
25	17	101
26	16	100

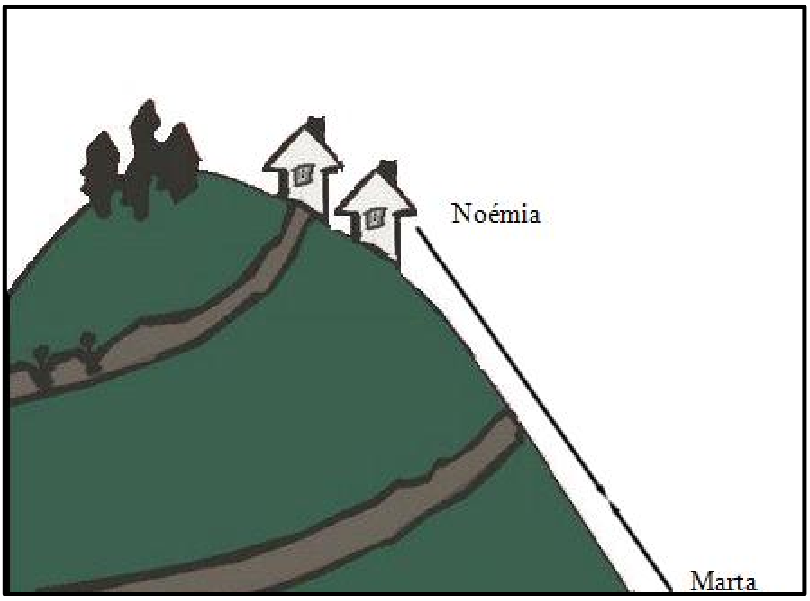
Exemplo 4 – Subindo e descendo uma montanha[85]. O problema seguinte diz respeito a distâncias.

Marta começa a subir a montanha, num percurso de 14 quilómetros, até ao acampamento onde a aguarda a sua amiga Noémia. Na mesma altura, esta parte ao seu encontro. Marta, ao subir, tem uma velocidade média de 2 quilómetros por hora, enquanto que Noémia, descendo a montanha, faz 6 quilómetros por hora. A que distância do acampamento se encontram?

Podemos supor que Marta e Noémia se encontram ao fim de t horas e que, nesse instante, Marta percorreu x quilómetros e Noémia percorreu y quilómetros. Este problema é curioso porque envolve três 3 variáveis. Uma vez que $x = 2t$ e $y = 6t$. É possível resolvê-lo através do sistema, pois no momento do encontro o tempo, t, decorrido é o mesmo:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{6} \end{cases}$$

Conclui-se que Marta e Noémia se encontram quando Marta já percorreu 3,5 quilómetros e Noémia percorreu 10,5 quilómetros. Este problema pode ser resolvido de outros modos, sendo bastante interessante fazer a confrontação das várias estratégias usadas pelos alunos. Uma forma de resolver o problema envolve compreender que a velocidade de Noémia é o triplo da velocidade de Marta, pelo que o espaço percorrido por Noémia, também será triplo do espaço percorrido por Marta. Assim, basta dividir 14 por 4, considerar um quarto do percurso, que diz respeito a Marta e os restantes três quartos, que dizem respeito a Noémia, como exemplifica o esquema seguinte:



Exemplo 5 – Preço da fruta[86]. No enunciado deste problema são dadas indicações sobre a relação entre duas quantidades desconhecidas:

O seguinte problema foi inventado na Índia, por Mahavira, há mais de mil anos: "O preço de 9 limões e 7 maçãs é 107. O preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Diz-me rapidamente qual o preço de um limão e uma maçã". E quanto custa uma maçã?

Este problema pode ser resolvido por meio do seguinte sistema de equações, em que *x* representa o número de limões e *y* o número de maçãs:

$$\begin{cases} 9x+7y=107 \\ 7x+9y=101 \end{cases}$$

A sua resolução, pelo método de substituição, permite determinar os preços de um limão e de uma maçã. Contudo, este processo é um pouco demorado. O enunciado sugere que se determine rapidamente o preço de um limão e uma maçã, pelo que se pode procurar outra estratégia. Observando o sistema podemos seguir outros métodos, que não o método da substituição, como se mostra de seguida:

$$\begin{array}{c} 9x+7y=107 \\ 7x+9y=101 \\ \hline 16x+16y=208 \end{array}$$

Mas $16x+16y=208 \Leftrightarrow x+y=13$, donde se conclui que o preço de um limão mais o preço de uma maçã é 13. Para determinar o preço da maçã podem seguir-se diferentes estratégias, usando as diversas relações que se podem estabelecer. Por exemplo, na segunda equação pode usar-se a informação de que o preço de 7 limões e 7 maçãs é de 91 para obter a equação $91+2y=101$. Assim, verifica-se que o preço de uma maçã é de 5.

Exemplo 6 – Problema do farmacêutico[87]. A situação que se segue constitui um problema clássico de misturas:

Um farmacêutico tem uma solução 10% salina e outra solução 30% salina. Que quantidade de cada uma das soluções deve misturar para obter uma garrafa de 0,5 litros com uma solução 15% salina?

Além da tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, a resolução do problema requer a compreensão do conceito de percentagem, pelo que se torna uma situação um pouco mais complexa do que as anteriores. Se *r* representar a quantidade da primeira solução a misturar e *s* a quantidade da segunda solução, podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 10r + 30s = 15 \times 500 \\ r + s = 500 \end{cases}$$

se trabalharmos com valores em mililitros, ou o sistema

$$\begin{cases} 0{,}1r + 0{,}3s = 0{,}15 \times 50 \\ r + s = 0{,}5 \end{cases}$$

se trabalharmos com valores em litros (ou outros equivalentes).

Exemplo 7 – Formulando sistemas de equações[88]. Neste exemplo, os alunos devem formular, eles próprios, sistemas de equações nas condições pedidas:

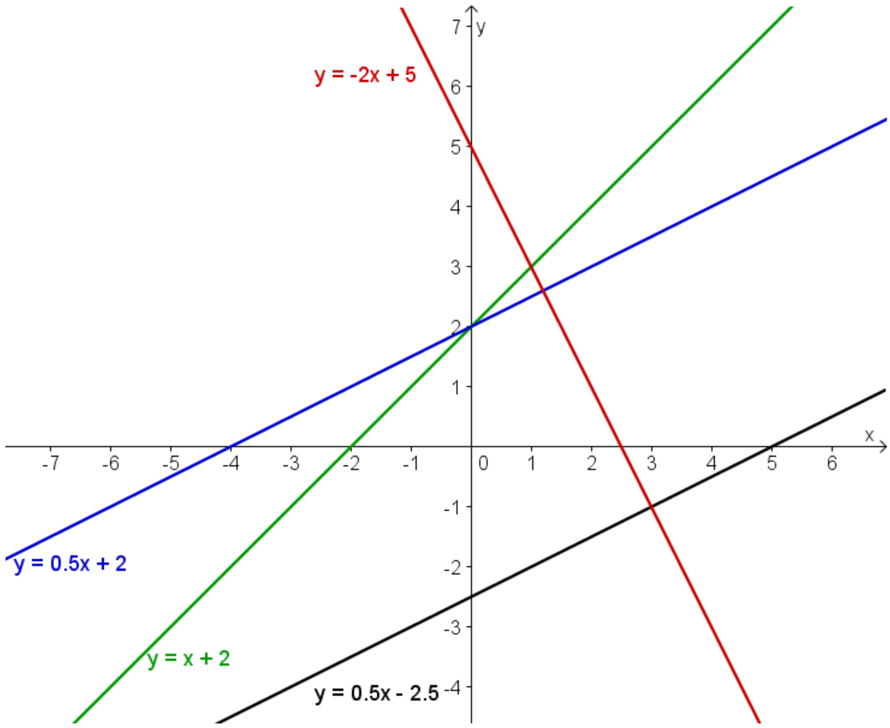
Escreve uma equação que, em conjunto com a equação $4x - y = 6$, forme um sistema de duas equações:

a) Possível e indeterminado;
b) Impossível;
c) Possível e com a solução (2, 2).

Os alunos devem partilhar, na discussão geral, as equações diferentes que certamente escreveram. A comparação das equações levará os alunos a reconhecer estratégias simples que permitem gerar sistemas possíveis e indeterminados, como por exemplo a escolha de uma segunda equação que se obtenha a partir da primeira multiplicando ambos os membros por um número real não nulo. Do mesmo modo, multiplicando ambos os membros desta equação, escrita na forma $Ax + By = C$, por constantes distintas, obtém-se a segunda equação de um sistema impossível.

Exemplo 8 – Formulando sistemas de equações. Uma outra tarefa que se pode propor aos alunos tem por base a formulação de um sistema de equações, escolhendo as equações das rectas a partir da observação da sua posição relativa:

Observa a figura:



Com base nos gráficos apresentados, escreve um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas que seja:

a) Possível e indeterminado;

b) Impossível;

c) Possível e determinado.

A representação gráfica de sistemas de equações contribui para a compreensão da variedade de soluções que se podem obter. Neste exemplo, são dadas as representações gráficas de diversas rectas, cujas equações os alunos devem seleccionar, de modo a formar um sistema possível e indeterminado, impossível e possível determinado. No caso do sistema impossível, existe apenas uma resposta mas, tanto para os sistemas possível e indeterminado como para o determinado, os alunos podem indicar mais que um par de rectas.

Exemplo 9 – Uma investigação com sistemas de equações do 1.º grau[89]. É usual fazer-se a representação gráfica dos sistemas de equações do 1.º grau para que os alunos percebam que a solução de um tal sistema é representada por um ponto do plano, ou seja, por um par ordenado. Muitas vezes, o trabalho a partir daí processa-se exclusivamente na representação algébrica. A investigação seguinte mostra como pode ser interessante relacionar o método de resolução da adição ordenada com a representação gráfica de sistemas de equações.

Considera o sistema de equações do 1.º grau:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 7y = -15 \end{cases}$$

a) Representa graficamente este sistema.

b) Multiplica a primeira equação do sistema indicado por diversos valores, positivos e negativos: 2, 3, –1… e representa graficamente, no mesmo referencial, as várias equações que vais obtendo. O que acontece à representação gráfica desta equação?

c) Adiciona agora duas das novas equações que obtiveste, ordenadamente, com a segunda equação do sistema e representa graficamente a equação obtida. O que acontece?

d) Para resolver o sistema pelo método da adição ordenada, poderíamos ter multiplicado a primeira equação por –3 e a segunda equação por 5. Efectua estas multiplicações, adiciona, ordenadamente, as equações que obtiveste, e faz a representação gráfica da equação resultante. Como interpretas o resultado?

Os alunos podem verificar que, multiplicando uma equação de um sistema por uma constante, obtém-se uma nova equação representada por uma recta coincidente com a recta correspondente à equação original. Adicionando as duas equações de um sistema, obtém-se uma nova equação, cuja representação não coincide com nenhuma das equações dadas, mas passa pelo respectivo ponto de intersecção. Somando as equações dadas de forma apropriada, podem obter-se rectas verticais e horizontais, que é interessante relacionar com a solução do sistema. Deste modo, representar graficamente combinações lineares das equações dadas pode ajudar os alunos compreender melhor as manipulações simbólicas.

9.2.2. Equações do 2.º grau

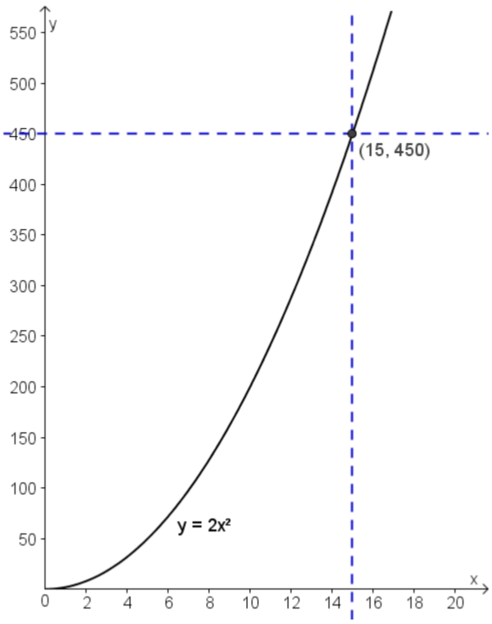
Exemplo 10 – Área de um rectângulo. Existem diversos problemas de áreas que podem ser resolvidos com recurso a equações do 2.º grau:

Na figura está representado um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a) Escreve uma expressão algébrica que represente a área do rectângulo.

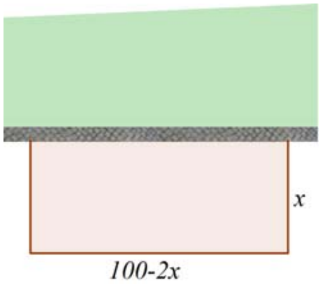
b) Determina as dimensões do rectângulo quando a sua área é 450 m^2.

Este exemplo pode suscitar a resolução da equação $2x^2 = 450$. É desejável que o professor promova a conexão entre a resolução desta equação do 2.º grau e a interpretação do gráfico da função $y = 2x^2$.



Exemplo 11 – Vedação de um terreno. Outro problema de área que pode ser resolvido com recurso a equações do 2.º grau é o seguinte:

O Sr. Armando quer vedar três lados de um terreno de forma rectangular, com uma rede com 100 m de comprimento, como mostra a figura.



Determina o valor que x deve ter para que a área do rectângulo seja de 1200 m^2.

Neste problema os alunos podem resolver a equação $x(100-2x)=1200$ ou outra equivalente e obtêm duas soluções: 20 e 30. É importante que consigam interpretar estas soluções tendo em conta a situação da realidade com que estão a trabalhar e que se apercebam de que existem dois rectângulos com perímetro igual a 100 m e área igual a 1200 m^2, um com dimensões 20×60 e outro com dimensões 30×40. Muitas vezes os alunos chegam a uma destas soluções por tentativa e erro. É importante mostrar-lhes um método mais formal de resolução a que podem recorrer, neste caso usando uma equação do 2.º grau.

Exemplo 12 – Números pares consecutivos. A resolução de equações do 2.º grau pode também surgir em problemas que envolvem relações entre números:

O produto de dois números pares consecutivos é 4224. Determina esses números.

Para formular a equação do 2.º grau os alunos podem representar o número par, por exemplo, pelo monómio $2x$. Assim, o número par consecutivo pode ser representado pelo polinómio $2x+2$. A equação $2x(2x+2)=4224$, ou outra que lhe seja equivalente, traduz o problema. O produto destes dois números é uma capicua, 4224, pelo que esta situação pode constituir a base para um trabalho de projecto que envolva a pesquisa das características destes números.

Exemplo 13 – Distância entre automóveis[90]. Existem diversas situações modeladas por funções do 2.º grau como a que se segue:

A distância de segurança entre automóveis numa auto-estrada depende da velocidade média a que estes seguem. Uma fórmula aproximada para relacionar a distância de segurança, *y*, dada em metros, e a velocidade, *x*, dada em quilómetros por hora, é a seguinte:

$$y = \frac{1}{300}x^2 + \frac{1}{3}x + 18$$

a) Qual a distância de segurança entre os automóveis quando estes circulam à velocidade de 90 quilómetros por hora?

b) E de 120 quilómetros por hora?

c) E quando há um congestionamento e os automóveis só circulam a 30 quilómetros por hora?

A determinação da distância de segurança, a partir da expressão algébrica permite observar que, dos três valores que são dados, é aos 120 quilómetros que corresponde a distância de segurança entre automóveis mais elevada (106 metros). Pelo contrário, quando há um congestionamento e os automóveis circulam a 30 quilómetros por hora, essa distância é a mais baixa das três (31 metros). Com efeito, o gráfico da função quadrática definida por esta expressão algébrica é uma parábola, com a concavidade voltada para cima e vértice em $\left(-50, \frac{29}{3}\right)$. Na situação apresentada, uma vez que se trata da velocidade, sabemos que $x \geq 0$, sendo a função estritamente crescente no intervalo $[0,+\infty[$, o que confirma que a velocidades maiores correspondem maiores distâncias de segurança entre automóveis.

Exemplo 14 – Movimento de um projéctil. O movimento de um projéctil de uma dada altura pode ser modelado por uma função quadrática. A expressão algébrica que a representa é um polinómio do 2.º grau que pode ser utilizado pelos alunos para determinar a altura a que se encontra o projéctil num certo instante ou o instante em que uma altura dada é atingida:

O movimento de um projéctil lançado horizontalmente é dado por

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 100$$

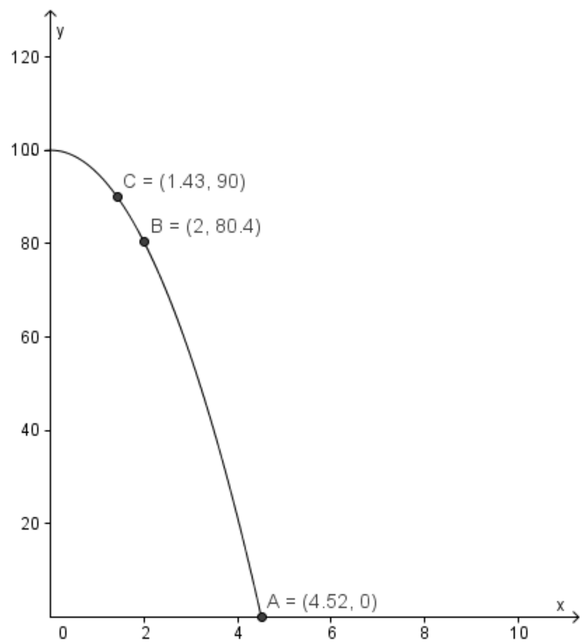
onde *h* representa a altura em cada instante, *t* representa o tempo (em segundos), e 100 representa a altura inicial (em metros). Representa graficamente esta equação.

a) Ao fim de 2 segundos, a que altura está o projéctil? Ao fim de 5 segundos?

b) Em que instante o projéctil atinge o solo?

c) Determina em que instante o projéctil está à altura de 90 metros.

Na primeira pergunta os alunos devem observar que o valor que corresponde a 5 segundos é negativo, o que não faz sentido para a altura, permitindo concluir que o projéctil atingiu o solo antes disso. Esse instante é a solução positiva da equação $-4,9t^2 + 100 = 0$ que os alunos devem resolver na pergunta seguinte. A resolução da última pergunta á análoga, bastando igualar a expressão a 90. A equação do 2º grau que se obtém, agora, é uma equação completa. O gráfico seguinte mostra a altura do projéctil desde o instante em que é lançado até ao instante em que atinge o solo.



Exemplo 15 – Lei do anulamento do produto. Deve ser proposta aos alunos a resolução de equações do 2.º grau em que possa ser escrita uma factorização da expressão algébrica e aplicada a lei do anulamento do produto:

Resolve as seguintes equações aplicando a lei do anulamento do produto:

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $x^2 - 4x = 0$

c) $3x^2 + 3x = 0$

d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

e) $9x^2 - 8x = 0$

f) $8x^2 - 1 = 0$

Exemplo 16 – Dedução da fórmula resolvente para equações do 2.º grau. A dedução desta fórmula pode ser feita por diferentes processos (um deles já apresentado na secção 9.1.2.). Os alunos podem recolher informação sobre a história desta equação e os processos de demonstração da sua solução, pesquisando em diversos livros e na Internet.

9.2.3. Inequações do 1.º grau

Exemplo 17 – Inequações. Para resolver inequações, os alunos necessitam de conhecer bem o conjunto dos números reais e compreender de que forma as condições com que trabalham estão relacionadas com esse conjunto, ou com alguns seus subconjuntos:

Determina o conjunto-solução das seguintes inequações:

a) $2x < x + 4$

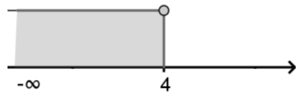
b) $-4x + 1 \geq 3 - x$

c) $-20 \leq x + 1$ e $2x + 6 < 10$

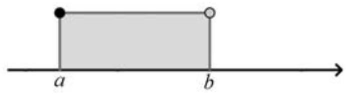
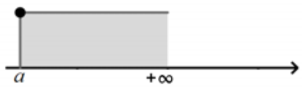
d) $4x > 10$ e x é um número par

e) $-2y \leq -4$ e y é um múltiplo de 3

A primeira inequação, de resolução bastante simples, tem como conjunto-solução o intervalo $]-\infty, 4[$. Os alunos devem ser incentivados a elaborar a respectiva representação na recta real, uma vez que esta facilita a identificação do conjunto-solução.



Nas inequações seguintes, os alunos devem sentir maiores dificuldades, principalmente se necessitarem de multiplicar, ou dividir, ambos os membros por um número negativo. Deve, também, ser salientada a diferença entre os sinais $\leq$, $\geq$, $<$ e $>$ e o tipo de intervalo correspondente (aberto ou fechado):

$[a,b[$	$[a,+\infty[$
$\{x \in IR : a \leq x < b\}$	$\{x \in IR : x \geq a\}$
	

Quando resolvem inequações, os alunos devem ter especial cuidado na forma como apresentam o conjunto-solução. Na alínea c), a conjunção das condições requer que os alunos determinem a intersecção dos conjuntos-solução de cada uma das condições dadas. Ao contrário do que sucede nas alíneas anteriores, o conjunto-solução a determinar nas alíneas d) e e) é um conjunto discreto, que não é representado usando intervalos.

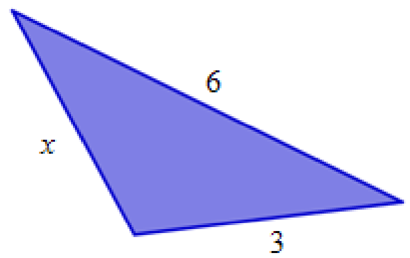
Exemplo 18 – Um problema com inequações. A par das equações, as inequações também desempenham um papel bastante relevante na resolução de alguns problemas:

Hélio recebeu 60 euros dos avós no seu aniversário. Ele ganha 16 euros por semana a distribuir propaganda comercial. Desde o seu aniversário ele já recebeu mais do que os 180 euros necessários para fazer uma viagem a Paris. Há quantas semanas foi o seu aniversário?

Os alunos podem formular a inequação considerando que t é o número de semanas após o aniversário do Hélio. Resolvendo a inequação $60+16t>180$, ou outra equivalente, chegam à conclusão que passaram pelo menos 8 semanas. Neste tipo de problemas é importante que os alunos saibam traduzir da linguagem natural para a linguagem algébrica expressões como “mais do que”, “inferior a”, “pelo menos”, etc.

Exemplo 19 – Perímetro do triângulo. A tarefa seguinte diz respeito à propriedade geométrica do triângulo usualmente designada por "desigualdade triangular":

Observa o triângulo seguinte:



Indica os valores que o perímetro do triângulo pode assumir.

Para resolver este problema, os alunos podem formular a inequação $x+3>6$, ou outra equivalente, cuja resolução permite identificar que a medida do lado desconhecido é maior do que 3. Por outro lado, também tem que se verificar $x+6>3$ e $6+3>x$. Chega-se, então, à conclusão de que $6-3<x \wedge x<6+3$, isto é, $3<x<9$ Assim, o perímetro do triângulo é um valor superior a 12 e inferior a 18. Esta tarefa permite estabelecer, tal como sucedeu em tarefas anteriores, noutros capítulos, uma conexão entre temas do *Programa de Matemática* – a Álgebra e a Geometria.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

APM – Grupo de trabalho T3 (2002). *Funções no 3.º ciclo com tecnologia*. Lisboa: APM.

Bekken, O. (1994). *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: GEPEM, Universidade de Santa Úrsula.

Bezuszka, S., & Kenney, M. (2008). The three R's: Recursive thinking, recursion, and recursive formulas. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 81-97). Reston, VA: NCTM.

Bishop, J. (1995). Mathematical patterns in the middle grades: Symbolic representations and solution strategies. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 73-79). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em http://ia.fc.ul.pt].

Caraça, B. J. (1958). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, 16*(1), 57-80.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Drouhard, J-P., & Teppo, A. (2004). Symbols and language. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 227-264). Boston, MA: Kluwer.

English, L., & Warren, E. (1999). Introducing the variable through patterns exploration. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 141-145). Reston, VA: NCTM.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, *4*(1), 78-91.

Franke, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge. (pp. 333-359).). New York, NY: Routledge.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Kluwer.

Friel, S., Rachlin, S., & Doyle, D. (2001). *Navigating through algebra in grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

Frobisher, L. (1999). Primary school children's knowledge of odd and even numbers. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 31-48). London: Cassel.

Gannon, G., & Shultz, H. S. (2006). Solving simultaneous equations: Getting more from geometry. *Mathematics Teacher, 100*(3), 189-191.

Gibbs, W. (1999). Pattern in the classroom. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-220). London: Cassel.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher. L., & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London: Cassel.

Hawes, K. (2006). Using error analysis to teach equation solving. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(5), 238-242.

Jacob, B., & Fosnot, C. (2008). *The California Frog-Jumping Contest: Algebra*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Jacobs, H. R. (1979). *Elementary algebra*. San Francisco, CA: Freeman.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2005). *Algebrafying elementary mathematics in a teacher-centered, systemic way*. (Retirado em 5 de Julho de 2005 de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf)

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland et al. (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 141-146). Noordwijkerhout, Holanda.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *ICME 8: Selected lectures* (pp. 271-290). Sevilha: SAEM Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2006). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 514-519.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: Murray.

Lima, R., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 3-18.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between the algebraic and the numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 173-196.

Lins, R. C., & Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

Marcus, R., & Chazan, D. (2005). *Introducing solving equations: Teachers and the one variable first [Algebra] curriculum*. Comunicação apresentada no Simpósio

AERA 2005 [Acedido em 26 de Novembro de 2007, de http://www.msu.edu/~kat/aerapapers/marcusaera2005.pdf].

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Paul Chapman.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano de escolaridade: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em http://ia.fc.ul.pt].

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 195-231.

ME-DGEBS (1991a). *Organização curricular e programas (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991c). *Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991d). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. [Acedido em 21/06/2009 de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/ Documents/ProgramaMatematica.pdf].

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 341-368.

Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. (2007). *Discovering algebra: An investigative approach*. Emeryville, CA: Key Curriculum.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, A., & Orton, J. (1994). Students' perception and use of patterns and generalization. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 404-414.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London: Cassel.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8.º ano* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em http://ia.fc.ul.pt]

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na* *aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2005). Como vai o pensamento algébrico dos alunos? *Educação e Matemática, 85*, 54-60.

Ponte, J. P., Matos, A. & Branco, N. (2009). *Sequências e funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. [Acedido em 21/06/2009 de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Paginas/default.aspx#]

Ponte, J. P., Salvado, C., Fraga, A., Santos, T., & Mosquito, E. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante, 16*(1), 111-146.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students access to significant mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-164). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Roper, T. (1999). Pattern and the assessment of mathematical investigations. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 178-191). London: Cassel.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), 420-427.

Silvestre, A. I. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa: Uma experiência no 2.º ciclo.* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em http://ia.fc.ul.pt]

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea, 5*(10), 61-89.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). *Iniciacion al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Tsamir, P., Almog, N. & Tirosh, D. (1998). Students' solutions of inequalities. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 129-136). Stellenbosch: Universidade de Stellenbosch.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vale, I., Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática: Prospostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization, *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 375-382). Utreque: Universidade de Utreque.

Wagner, Rachlin, S. L., & Jensen, R. J. (1984*). Algebra learning project: Final report.* Athens, GA: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 113-126). Reston, VA: NCTM.

White, A., & Van Dyke, F. (2006). Habits in the classroom. *Mathematics Teacher, 100*(4), 270-274.

Zaskis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 12th ICMI Study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 676-681). Melbourne: University of Melbourne Press.

Endereços electrónicos

Banco de itens – GAVE, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/, acedido em 20/06/2009.

Projecto 1001 itens – GAVE, http://www.gave.min-edu.pt/np3/109.html, acedido em 20/06/2009.

Illuminations, NCTM, http://illuminations.nctm.org/, acedido em 20/06/2009.

Insights into Algebra, http://www.learner.org/workshops/algebra/index.html, acedido em 20/06/2009.

Patterns, Functions, Algebra, http://www.learner.org/courses/learningmath/algebra/index.html, acedido em 20/06/2009.

Notas

[1] Ver ME-DGIDC, 2007.
[2] Ver Stanic e Kilpatrick, 1989.
[3] Literalmente, *aljabr w'al muqabalah* significa "completar e reduzir". Ver Bekken, 1994.
[4] Ver, por exemplo, ME-DGEBS, 1991c, 1991d.
[5] Ver Devlin, 2002, p. 11.
[6] Ver Freudenthal, 1983.
[7] Ver Kaput, 1998, 1999.
[8] Ver Kaput, 2008.
[9] Ver, por exemplo, o Propósito Principal de Ensino do 2.º e do 3.º ciclos.
[10] Ver NCTM, 2007, p. 39.
[11] Ver Arcavi, 1994.
[12] A partir do momento que se faz uso do conceito de derivada, passa-se do campo da Álgebra para o campo da Análise Infinitesimal.
[13] Nos países de língua inglesa é usual chamar *função linear* a uma função cuja expressão algébrica é do tipo $y=ax+b$, porque o gráfico é uma recta (*line*, em inglês). O mesmo fazem José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo no seu *Compêndio de Álgebra*. Em Portugal, no entanto, distingue-se o caso em que b=0, a que se chama <u>linear</u>, porque respeita a condição das aplicações lineares e $b\neq 0$, a que se chama <u>afim</u> e que se diz não ser linear porque não respeita a condição das aplicações lineares. Neste caso, o *Programa de Matemática* optou por seguir a tradição portuguesa mais usual.
[14] É a perspectiva defendida, por exemplo, por Chazan e Yerushalmy, 2003.
[15] Ver Lins e Giménez, 1997.
[16] Note-se que a balança como modelo intuitivo para as equações já era usada no século XVI nos livros de Álgebra de Pedro Nunes.
[17] Ver Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993.
[18] Ver Kaput e Blanton, 2005.
[19] O movimento para a introdução de uma forte componente de iniciação à Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade é conhecido por *Early Algebra*. Ver Carraher e Schlieman, 2007 e Cusi e Malara, 2007.
[20] Ver Kieran, 2007.
[21] Trata-se de um *software* de utilização livre, disponível do endereço http://www.geogebra.org, onde se podem encontrar igualmente diversos recursos auxiliares.
[22] Conhecidos pela sigla CAS, *Computer Algebra Systems*.
[23] Como referem, de resto, Chazan e Yerushalmy, 2003.
[24] Ver Kieran, 1992.
[25] Como é indicado, por exemplo, em Cusi e Malara, 2007.
[26] Ver Falkner, Levi e Carpenter, 1999.
[27] Ver diversas situações em Molina, Castro e Castro, 2009.
[28] Ver Drouhard e Teppo, 2004.
[29] Ver Franke, Carpenter e Battey, 2008.
[30] Ver Zaskis, 2001.
[31] Tarefa inspirada em http://www.learner.org/courses/learningmath/number/session7/part_a/index.html.
[32] Tarefa inspirada em Jacob e Fosnot, 2008.
[33] Ver relações entre duas ou mais variáveis em Driscoll, 1999 e Ponte, Matos e Branco, 2005.
[34] Ver Threlfall, 1999.
[35] Ver mais exemplos de sequências repetitivas em Vale e Pimentel, 2009.
[36] Ver, por exemplo, Bishop, 1995, English e Warren, 1999, e Stacey, 1989.
[37] A designação "objecto inteiro" é usada por Stacey, 1989; outros autores, como English e Warren, 1999, falam em "razão".

[38] Para mais situações, ver Warren e Cooper, 2008.
[39] Ver Frobisher, 1999.
[40] Situação proposta no *Programa de Matemática para o Ensino Básico,* ME-DGIDC, 2007, p. 17.
[41] Ver Vale e Pimentel, 2009.
[42] Ver mais em Bezuszka e Kenney, 2008.
[43] Ver mais em Gibbs, 1999.
[44] Esquema apresentado por Orton e Orton, 1994, 1999.
[45] Ver Davis e Hersh, 1995.
[46] Ver Küchemann, 1981.
[47] Ver Usiskin, 1988.
[48] Ver, por exemplo, Booth, 1994 e Rojano, 2002.
[49] Ver Schoenfeld e Arcavi, 1988.
[50] Ver Kieran, 1992.
[51] Ver Wagner, Rachlin e Jensen, 1984.
[52] Ver Linchevski e Livneh, 1999.
[53] A "estrutura do padrão" é referida em Roper, 1999.
[54] Tarefa desenvolvida por Idália Pesquita, apresentada aqui com algumas adaptações. Os exemplos que incluímos referem-se a alunos portugueses do 8.º ano que participaram nesse estudo. Ver Pesquita, 2007.
[55] Ver NCTM, 1989, p.54.
[56] Tarefa inspirada em Driscoll, 1999, p.91.
[57] Kieran, 1992, refere várias estratégias (a que chama métodos) para resolver equações, nomeadamente informais como (i) uso das propriedades dos números, (ii) técnicas de contagem, (iii) *cover-up* (cobertura) (iv) desfazer (ou andar para trás), e (v) substituição por tentativa-erro, e formais, usando as regras de resolução de equações: (i) transposição e (ii) realização das mesmas operações em ambos os lados.
[58] Note-se, a propósito, que existem investigações apontando em direcções opostas – enquanto que umas confirmam o valor deste modelo físico, outras sugerem que não tem qualquer efeito positivo na aprendizagem dos alunos (Ver Kieran, 2007). Os resultados contraditórios destas investigações têm muito mais a ver com as condições em que este material é usado do que com as potencialidades do material propriamente dito.
[59] Ver MacGregor e Stacey, 1997.
[60] Os exemplos que apresentamos referem-se a alunos portugueses que participaram em estudos realizados por Ana Matos, e Neusa Branco. Desses alunos, Teresa e Raquel (ambas do 7.º ano), não tinham estudado anteriormente qualquer tópico de Álgebra. Em contrapartida, Sara e Juliana (também do 7.º ano) e Afonso e Maria (ambos do 8.º ano) já tinham iniciado anteriormente o estudo da linguagem algébrica. Ver Branco, 2008 e Matos, 2007.
[61] Ver, por exemplo, Kieran, 1985, 1992.
[62] Ver Vlassis, 2001.
[63] Ver Booth, 1988.
[64] Ver Chazan e Yerushalmy, 2003.
[65] Ver Marcus e Chazan, 2005.
[66] Ver Ponte, Matos e Branco, 2009, pp. 26-33.
[67] Ver B. J. Caraça, 1958.
[68] Ver Friel, Rachlin e Doyle, 2001.
[69] Ver Ponte, Matos e Branco, 2009, pp. 75-84.
[70] Ver Ponte, Matos e Branco, 2009, pp 105-112.
[71] Tarefa inspirada em Matos, 2007, pp. 70-71.
[72] Ver, por exemplo, Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens e Verschaffel, 2005.
[73] Tarefa inspirada em Banco de itens – GAVE, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/3eb/802/906.
[74] Tarefa inspirada em Banco de itens – GAVE, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/3eb/900/2263.
[75] Tarefa inspirada em APM – Grupo de Trabalho T3, 2002, pp. 83-86.
[76] Tarefa inspirada em Banco de itens – GAVE, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/3eb/920/4325.
[77] Tarefa inspirada em Mason, Graham e Johnston-Wilder, 2005, p. 70.
[78] Tarefa inspirada em Banco de itens – GAVE, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/3eb/802/4962.
[79] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p. 330.
[80]Tarefa inspirada em Mason, Graham, e Johnston-Wilder, 2005, p. 157.
[81] Ver Tsamir, Almog e Tirosh, 1998.
[82] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p. 296.
[83] Tarefa inspirada em Murdock, Kamischke e Kamischke, 2007, p. 279.

[84] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p.331.
[85] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p.331.
[86] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p.332.
[87] Tarefa inspirada em Murdock, Kamischke e Kamischke, 2007, p. 283.
[88] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p. 337.
[89] Tarefa inspirada em Gannon e Shultz, 2006, p. 190.
[90] Tarefa inspirada em Jacobs, 1979, p. 611.