

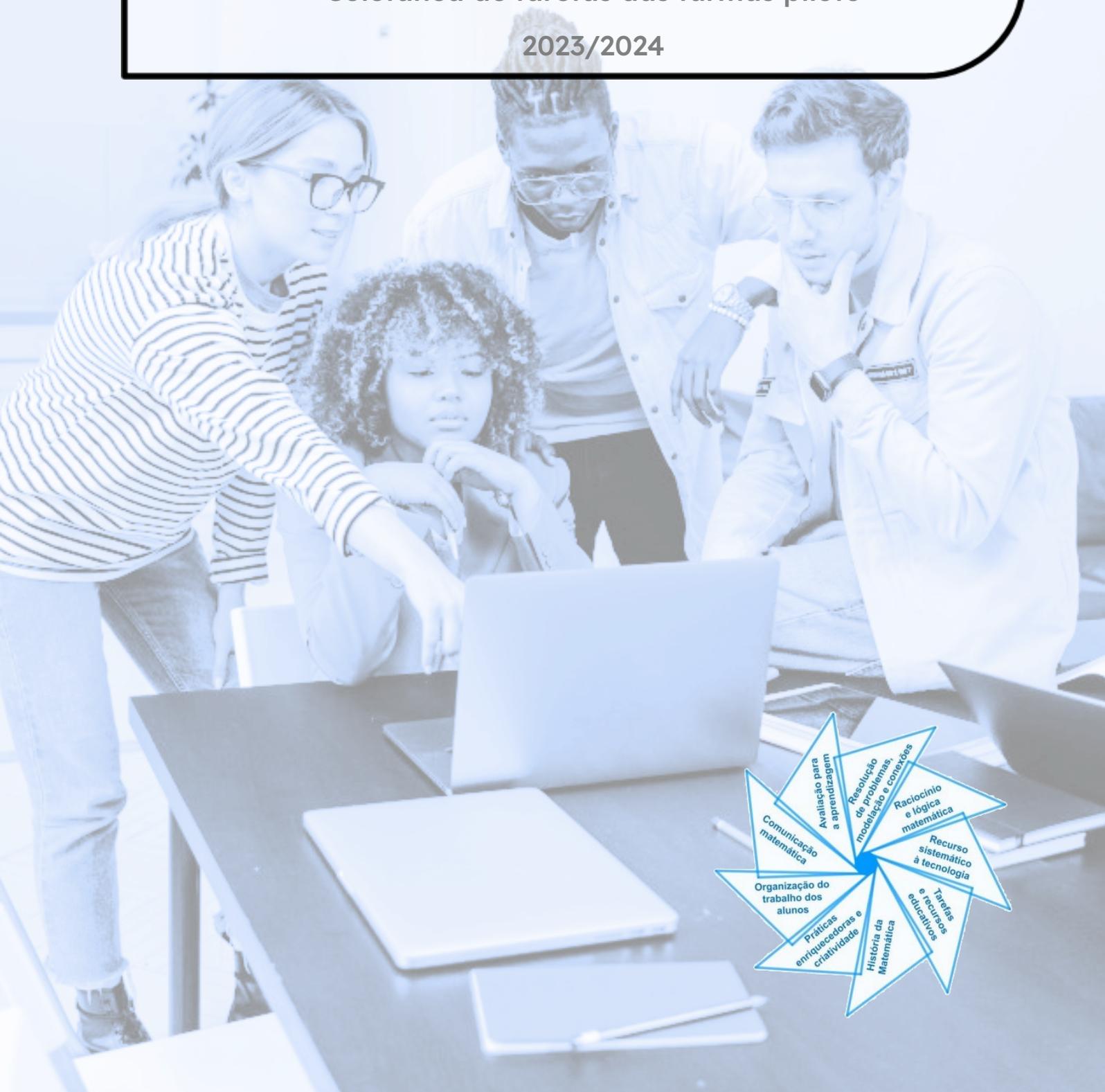
# MODELOS MATEMÁTICOS NAS ELEIÇÕES E NA PARTILHA

Matemática A

10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024



## Ficha técnica

### **Título:**

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Modelos matemáticos nas eleições e na partilha (Matemática A 10.º ano)

### **Autoria e adaptação:**

Professores das turmas piloto de Matemática A

### **Revisão:**

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

### **Imagem da capa:**

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em <https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/>

### **Data:**

Lisboa, abril de 2024



# Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação

de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:

Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva  
*Coordenador*

# TEMA - MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA

## TÓPICO: MODELOS MATEMÁTICOS NAS ELEIÇÕES E NA PARTILHA

Modelos matemáticos nas eleições						
Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	<a href="#">Tarefa 1</a> Eleição do delegado de turma da Escola Bom Sucesso	<b>Modelos matemáticos nas eleições</b>  Maioria simples Maioria absoluta	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais.</li> <li>• Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.</li> <li>• Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</li> </ul>	Grupos de 4 elementos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas, modelação e conexões</li> <li>• Organização do trabalho dos alunos</li> <li>• Comunicação matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> <li>• Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</li> </ul>
1	<a href="#">Tarefa 2</a> Eleições presidenciais	<b>Modelos matemáticos nas eleições</b>  Maioria simples Maioria absoluta	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais.</li> <li>• Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.</li> <li>• Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</li> </ul>	A pares	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas, modelação e conexões</li> <li>• Comunicação matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> </ul>

<p><b>1</b></p>	<p><a href="#">Tarefa 3</a> Eleições para os órgãos sociais do Clube de Futebol Rompe Canelas</p>	<p><b>Modelos matemáticos nas eleições</b>  Método de Borda</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</li> </ul>	<p>A pares</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas, modelação e conexões</li> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> </ul>
<p><b>1</b></p>	<p><a href="#">Tarefa 4</a> “Muitas voltas numa só” Texto de Luís Conraria</p>	<p><b>Modelos matemáticos nas eleições</b>  Método de Borda</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</li> </ul>	<p>Individual</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comunicação matemática</li> <li>• Raciocínio e lógica matemática</li> <li>• Tarefas e recursos educativos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> </ul>

Modelos matemáticos na partilha						
Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	<a href="#">Tarefa 5</a> Eleições Autárquicas	<b>Modelos matemáticos na partilha</b> Método de Hondt Método de St. Laguë	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais.</li> <li>• Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë.</li> <li>• Identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.</li> </ul>	Grupos de 4 elementos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas, modelação e conexões</li> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C).</li> <li>• Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</li> </ul>

# Tarefa 1

## Eleição do delegado de turma na Escola Bom Sucesso

### 1. Eleição do delegado da turma 12° C da Escola Bom Sucesso.

**Maioria simples ou relativa:** é eleita, numa única votação, a opção que reúne maior número de votos.

**Maioria absoluta:** é eleita a opção que recolhe pelo menos metade de todos os votos mais um.

1.1. A tabela apresenta os resultados da eleição do delegado da turma 12° C, constituída por 28 alunos. Cada aluno vota apenas num colega.

Alunos	Mariana	Francisco	Luís	Manuel	Maria	Total
N.º de votos	8	6	3	4	7	28
% de votos	28,57%	21,43%	10,71%	14,29%	25%	100%

Sabendo que o vencedor é quem obtiver maioria absoluta, será que se pode concluir que há vencedor? Será necessária outra votação? Justifica a tua resposta.

1.2. Quando não há maioria absoluta podem aplicar-se vários métodos. Tomando como ponto de partida os resultados da votação anterior para eleger o delegado da turma 12.º C, os alunos sugeriram o seguinte método:

1º: Com os resultados da primeira votação excluem-se os candidatos com menos de 15% dos votos;

2º: Faz-se uma segunda votação e ganha o candidato que obtiver maioria absoluta;

3º: Caso não tenha havido maioria absoluta, os dois candidatos mais votados vão disputar uma terceira votação;

4º: Na terceira votação ganha o aluno com maior percentagem de votos.



A tabela apresenta os resultados da segunda votação na eleição do delegado da turma 12° C, com o método apresentado acima:

Alunos	Mariana	Francisco	Maria	Total
N.º de votos	9	7	12	28
% de votos	32,14%	25%	42,86%	100%

Consegue-se saber quem foi o vencedor desta eleição? Justifica a tua resposta.

- 1.3. Qual é a percentagem de votos que precisaria de ter a Maria, no mínimo, para vencer a eleição na segunda votação? Justifica a resposta.
- 1.4. Faz uma reflexão sobre o método anterior e discute as suas limitações, indicando casos em que este não produz um resultado com maioria absoluta. Apresenta exemplos.



# Tarefa 1

## Eleição do delegado de turma na Escola Bom Sucesso

### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa visa dar a conhecer processos eleitorais por maioria simples e por maioria absoluta, promover a compreensão e a interpretação desses processos e fomentar o trabalho colaborativo.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Percentagens e operações com números racionais.

**Materiais e recursos:** Calculadora.

**Notas e sugestões:**

No início da aula, o professor poderá pedir aos alunos para partilharem os seus conhecimentos sobre eleições, em particular sobre as eleições em que participaram e como exerceram o seu voto. Poderá, também, fazer uma breve revisão sobre percentagens.

Sugere-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões, a utilização de um tempo letivo (50 minutos).

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e organizar os alunos em grupos de três ou quatro elementos. De seguida, os alunos devem resolver a tarefa e, no final, apresentar as suas conclusões na discussão final com toda a turma.

O professor deve observar o desempenho dos alunos e fornecer as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis dificuldades.

O professor deve também promover a autonomia dos alunos, clarificando a compreensão dos objetivos, mas permitindo a ocorrência de erros e incentivando os alunos a persistirem na procura de respostas/soluções consistentes. Deve, ainda, solicitar justificações para os raciocínios apresentados, e, na discussão final com toda a turma, explicar quais são as justificações válidas.



Os alunos poderão manifestar dificuldades no uso de percentagens, na comunicação e na expressão de ideias com vocabulário adequado.

Um possível aprofundamento desta tarefa seria pedir aos alunos para proporem um método que solucionasse os problemas identificados.

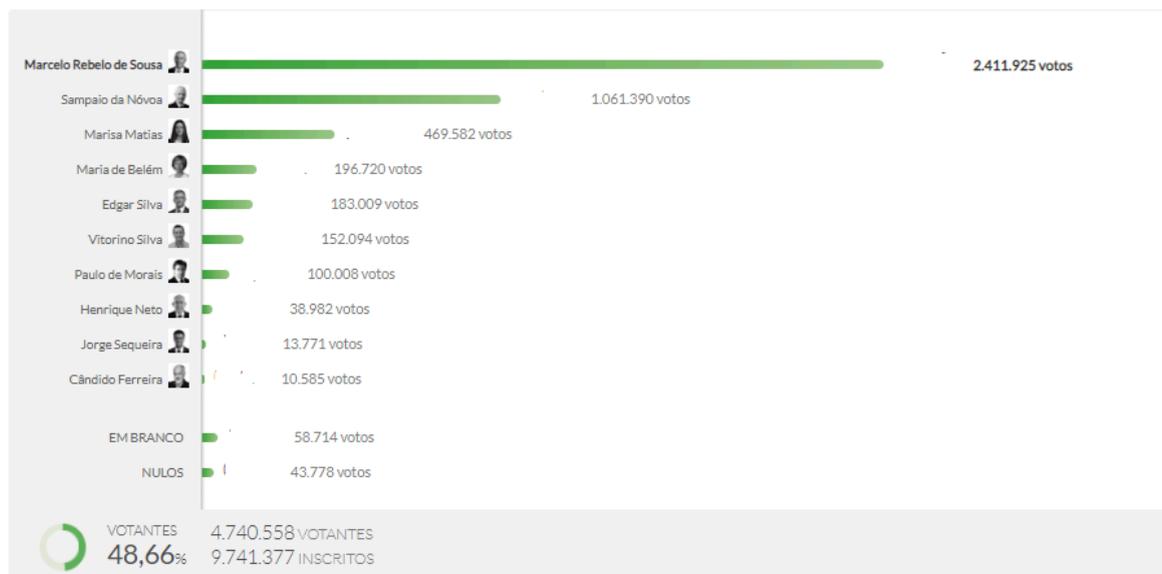


## Tarefa 2

### Eleições Presidenciais

#### Parte I - Eleições Presidenciais 2016 – 24 de janeiro

A imagem seguinte apresenta os resultados oficiais finais registados nas Eleições Presidenciais Portuguesas de 2016.



1. Determina o número de votos validamente expressos nesta eleição.
2. Qual é a percentagem de abstenção?
3. Qual é a percentagem de votos obtida por Marcelo Rebelo de Sousa, em relação ao:
  - 3.1 número de eleitores inscritos?
  - 3.2 número de votos validamente expressos?
4. Compara e comenta os resultados obtidos na questão anterior, referindo o impacto da abstenção.



5. De acordo com a lei eleitoral do Presidente da República, quantos abstencionistas, no mínimo, deveriam ter ido votar, e em que candidato(s), para que Marcelo Rebelo de Sousa tivesse que disputar a eleição na segunda volta?

**Artigo 10.º**

**(Critério da eleição)**

1. Considerar-se-á eleito o candidato que obtiver mais de metade dos votos validamente expressos.
2. Se nenhum dos candidatos obtiver esse número de votos, o Presidente da República fixará o segundo sufrágio até ao 21.º dia subsequente à primeira votação.
3. A esse sufrágio concorrerão apenas os dois candidatos mais votados que não tenham retirado a candidatura.

In Lei eleitoral do Presidente da República - DL n.º 319-A/76, de 3 de maio

**Parte II - Eleições Presidenciais 1986 - 26 de janeiro**

Nas eleições presidenciais portuguesas de 1986, foram quatro os candidatos à Presidência da República: Mário Soares, Freitas do Amaral, Salgado Zenha e Lurdes Pintasilgo. Os resultados registados no primeiro sufrágio (primeira volta), realizado a 26 de janeiro, estão apresentados na tabela seguinte:

Resultados Nacionais - 1ª volta								
Inscritos	Votantes		Abstenções		Branco		Nulos	
	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
7 617 257	5 742 151	75,38	1 875 106	24,62	17 709	0,31	46 334	0,81
Votação por Candidato - Resultados Nacionais								
	Diogo Pinto de Freitas do Amaral  Freitas do Amaral	Mário Alberto N. Lopes Soares  Mário Soares	Francisco de A. Salgado Zenha  Salgado Zenha	Maria de Lurdes S. M. Pintasilgo  Lurdes Pintasilgo				
Total	2 629 597	1 443 683	1 185 867	418 961				
%	46,31	25,43	20,88	7,38				

Para acederes ao Critério de eleição (i.e. o Método da maioria a duas voltas), consulta o Artigo 10.º exposto em cima.

1. Qual seria o Presidente da República se tivesse sido utilizado o Método da Maioria Simples?
2. Explica por que, pelo método da maioria a duas voltas, não foi possível declarar nenhum vencedor na primeira volta.
3. Justifica porque Mário Soares e Freitas do Amaral foram os candidatos apurados para a segunda volta.
4. A segunda volta foi realizada em 16 de fevereiro do mesmo ano, tendo Mário Soares sido declarado vencedor. Compara os resultados das duas voltas e comenta. Podes consultar os resultados da 2.<sup>a</sup> volta na tabela seguinte.

Resultados nacionais - 2. <sup>a</sup> volta		
Candidato	Total	%
Mário Soares	3 010 756	51,18
Freitas do Amaral	2 872 064	48,82

Nota: Tarefa adaptada do plano de formação da capacitação das Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A.



## Tarefa 2

### Eleições Presidenciais

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Esta tarefa visa analisar, interpretar e discutir o processo eleitoral do Presidente da República, em Portugal, com existência ou não de uma segunda volta, e clarificar a importância da participação do cidadão na eleição dos seus representantes.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Percentagens e operações com números racionais.

**Materiais e recursos:** Calculadora.

##### Notas e sugestões:

No início da aula, o professor poderá pedir aos alunos para procurarem o significado dos seguintes termos: voto validamente expresso, voto branco, voto nulo, abstenção, mandato e escrutínio.

No início da aula, o professor poderá pedir aos alunos para partilharem os seus conhecimentos sobre eleições, em particular sobre as eleições em que participaram e como exerceram o seu voto. Poderá, também, fazer uma breve revisão sobre percentagens.

Sugere-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões, a utilização de um tempo letivo (50 minutos).

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e organizar os alunos em grupos de dois (pares). De seguida, os alunos devem resolver a tarefa e, no final, apresentar as suas conclusões na discussão final com toda a turma.

O professor deve observar o desempenho dos alunos e fornecer as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis dificuldades.

O professor deve também promover a autonomia dos alunos, clarificando a compreensão dos objetivos, mas permitindo a ocorrência de erros e incentivando os alunos a persistirem na procura de respostas/soluções consistentes. Deve, ainda,



solicitar justificações para os raciocínios apresentados, e na discussão final com toda a turma, explicar quais são as justificações válidas.

Os alunos poderão manifestar dificuldades no uso de percentagens, na comunicação e na expressão de ideias com vocabulário adequado.



## Tarefa 3

### Eleições para os órgãos sociais do Clube de Futebol Rompe Canelas

#### Parte I - Método de Borda

Para escolher o Presidente do Clube de Futebol Rompe Canelas, realizou-se uma eleição. Os quatro candidatos foram o António, a Margarida, o Rui e a Emília. Para determinar o vencedor deste processo eleitoral o Clube decidiu aplicar o método de Borda que consiste no seguinte:

- cada eleitor indica a sua ordem de preferências em relação a todos os candidatos;
- cada primeira preferência recebe tantos pontos quanto os candidatos em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência 1 ponto.
- é declarado vencedor o candidato que totalizar o maior número de pontos.

Após a votação, obtiveram-se as preferências apresentadas na tabela seguinte:

Preferência	860 votos	920 votos	800 votos	970 votos
1.ª	António	Margarida	Rui	Margarida
2.ª	Rui	António	António	Emília
3.ª	Emília	Emília	Emília	Rui
4.ª	Margarida	Rui	Margarida	António

1. Copia e completa a tabela:

	Preferência	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª
Votos	António	860	1720		
	Emília				
	Margarida				
	Rui				

2. Quantos votantes preferem a Margarida a todos os outros candidatos?
3. Quantos votantes têm como segunda opção o António?
4. Qual é o candidato com maior percentagem de últimas preferências? Indica o valor dessa percentagem arredondado às unidades.



5. Quem foi o vencedor desta eleição?
6. Determina a classificação final de todos os candidatos.
7. Será que o vencedor se manteria se fosse utilizado qualquer um dos outros métodos de votação já estudados?
8. Explora as seguintes questões recorrendo a uma Folha de Cálculo.
  - 8.1. Os resultados desta eleição alterar-se-iam se ao candidato colocado em último lugar, na ordem de preferências, fossem atribuídos 0 pontos, a seguir 1 ponto e assim por diante, até que ao candidato colocado em 1.º lugar na ordem de preferências fossem atribuídos  $n - 1$  pontos, sendo  $n$  o número de candidatos?
  - 8.2. E se os pontos a atribuir fossem os seguintes:
    - Última alternativa: 0 pontos
    - Penúltima: 2 pontosCada uma das alternativas seguintes com mais 2 pontos do que a anterior. Os resultados da eleição apresentada continuariam a manter-se?
  - 8.3. Averigua, atribuindo diferentes valores a  $k$ , se o vencedor desta eleição se modifica, caso os pontos a atribuir forem:
    - Última alternativa: 0 pontos
    - Penúltima:  $k$  pontosCada uma das alternativas seguintes com mais  $k$  pontos do que a anterior.
9. Um método semelhante ao método de Borda é o utilizado na pontuação final do Festival da Canção, em que a cada uma das 10 melhores canções são atribuídos 12, 10, 8 e daí até 1 ponto. Recorrendo a uma folha de cálculo, explora cada uma das questões seguintes.
  - 9.1. No exemplo da votação aqui apresentada, o que aconteceria se fosse atribuída a pontuação seguinte?
    - 1.ª preferência: 6 pontos
    - 2.ª preferência: 4 pontos
    - 3.ª preferência: 2 pontos
    - 4.ª preferência: 1 ponto



9.2. Outra situação, em que se aplica uma variante do método de Borda, tal como apresentado, é o caso da eleição do melhor jogador da Major League Baseball, dos EUA, em que cada júri atribui 14 pontos à sua 1.ª preferência, 9 pontos à 2.ª e assim por diante, atribuindo 1 ponto à sua 10.ª preferência.

Adaptando essa variante a esta eleição, explora o que aconteceria se utilizássemos uma distribuição semelhante:

- 1.ª preferência: 7 pontos
- 2.ª preferência: 3 pontos
- 3.ª preferência: 2 pontos
- 4.ª preferência: 1 ponto

10. Na eleição apresentada, será possível encontrar uma outra distribuição em que se atribuam  $x$  pontos para cada primeiro lugar na ordem de preferências,  $y$  pontos para cada segundo lugar, e assim sucessivamente, com  $x > y > \dots$ , e os resultados finais sejam alterados?

*(Sugestão: deves recorrer a uma folha de cálculo para testar várias hipóteses.)*

Nota: Tarefa adaptada do plano de formação da capacitação das Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A (João Marques; Manuela Simões; Matilde Almeida)

## Parte II - Variantes do método de Borda

Tal como o método da maioria simples, o método de Borda não é perfeito, originando situações que podem ser consideradas injustas.

Por vezes, os eleitores decidem votar, não de acordo com as suas verdadeiras preferências, mas de forma estratégica, a fim de tentar influenciar o resultado da eleição, de modo a que este se torne mais favorável para as suas preferências.

Um exemplo deste voto estratégico, num sistema preferencial, acontece quando um eleitor que prevê que determinado candidato, que não o seu preferido, seja o vencedor da eleição, decide colocar esse candidato numa posição mais desfavorável na sua lista de preferências.

1. Imaginemos que os votantes que preferem o candidato que ficou em segundo lugar nesta eleição, prevendo que este não fosse o candidato vencedor, decidiam todos votar estrategicamente, colocando o António no último lugar das suas preferências, mantendo a posição relativa das restantes. Será que o vencedor desta eleição se manteria com a pontuação proposta originalmente?



2. Vejamos uma outra situação.

Suponhamos que a Emília, ao sentir que não tinha a preferência de muitos sócios, apresentou a sua desistência, imediatamente antes da eleição, passando a votação a contar apenas com os 3 candidatos restantes. Admite que as preferências dos votantes se manteriam.

- 2.1. Sem fazer qualquer cálculo, quem te parece que será o vencedor da eleição, se utilizarmos o método de Borda tal como apresentado inicialmente (3-2-1)?
- 2.2. Elabora uma tabela de preferências reformulada, apenas com os 3 candidatos em votação.
- 2.3. Determina o resultado da eleição. A tua previsão concretizou-se?
- 2.4. Comenta as diferenças no resultado final obtido.



## Tarefa 3

### Eleições para os órgãos sociais do Clube de Futebol Rompe Canelas

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa visa identificar o vencedor de um processo eleitoral pelo método de Borda.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Percentagens e operações com números racionais.

**Materiais e recursos:** Calculadora, folha de cálculo.

**Notas e sugestões:**

No início da aula, o professor poderá pedir aos alunos para partilharem os seus conhecimentos sobre eleições, em particular sobre as eleições em que participaram e como exerceram o seu voto.

Sugere-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões, a utilização de dois tempos letivos (100 minutos).

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e organizar os alunos em grupos de dois elementos (pares). De seguida, os alunos devem resolver a tarefa e, no final, apresentar as suas conclusões na discussão final com toda a turma.

O professor deve observar o desempenho dos alunos e fornecer as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis dificuldades.

O professor deve também promover a autonomia dos alunos, clarificando a compreensão dos objetivos, mas permitindo a ocorrência de erros e incentivando os alunos a persistirem na procura de respostas/soluções consistentes. Deve, ainda, solicitar justificações para os raciocínios apresentados, e na discussão final com toda a turma, explicar quais são as justificações válidas.

Os alunos poderão manifestar dificuldades no uso da calculadora, na comunicação e na expressão de ideias com vocabulário adequado.



Um possível aprofundamento desta tarefa seria pedir aos alunos para proporem um método que solucionasse os problemas identificados.



## Tarefa 4

### Muitas voltas numa só

Analisa o texto “Muitas voltas numa só” de Luís Aguiar-Conraria, professor de Economia da Universidade do Minho.

### Muitas voltas numa só

Numa eleição, se temos de escolher entre sete, porque é que só damos opinião sobre um? Eis um método alternativo...



LUÍS AGUIAR-CONRARIA - PROFESSOR DE ECONOMIA DA UNIV. DO MINHO LFAGUIAR@EEG.UMINHO.PT

Nas últimas eleições presidenciais, houve sete candidatos. Caso tenha votado, por exemplo, em João Ferreira, então o seu boletim de voto nada nos diz sobre se preferia André Ventura ou Marisa Matias. Se temos de escolher entre sete, porque é que só damos opinião sobre um? No caso da última eleição para Belém, como Marcelo Rebelo de Sousa teve maioria à primeira, não há dúvidas de que a maioria dos portugueses o preferia.

Numa eleição com três candidatos, a situação também não é problemática: se não houver maioria à primeira, exclui-se o terceiro classificado e há uma segunda volta entre os dois mais votados. Não é perfeito, mas serve.

Quando há muitos candidatos, duas voltas podem ser manifestamente insuficientes.

Lembra-se da eleição presidencial francesa de 2002? Houve 16 candidatos. Os dois favoritos a passar à segunda volta eram Jacques Chirac e o socialista Lionel Jospin. As sondagens indicavam que, entre os dois, Lionel Jospin era o predileto da maioria dos franceses. Havendo 16 candidatos, a



grande maioria dos quais de esquerda, os votos dispersaram-se e Jospin conseguiu apenas 16,2% dos votos. Passaram à segunda volta o candidato da direita Jacques Chirac (com 19,9%) e o da extrema-direita, Jean-Marie Le Pen (16,9%).

Na segunda volta, Chirac ganhou confortavelmente, com 82%. Admitindo que as sondagens que referi estavam corretas, ganhou o candidato errado. A maioria preferia Jospin a Chirac.

Vários académicos têm proposto que, em vez de se votar num candidato, atribuamos uma pontuação a todos eles. Parecido com o que se faz no Festival da Canção.

Por exemplo, se houver quatro candidatos, atribuímos 4 pontos ao nosso preferido, 3 ao seguinte, 2 pontos ao 3º e 1 ao 4º. Revelamos o nosso ranking completo, dando muito mais informação.

Se admitirmos que a ordenação é sincera, então este tipo de votação, conhecida como Contagem de Borda, tem propriedades matemáticas muito convenientes. O problema é que convida a que mintamos sobre as nossas preferências. Imagine que os próximos candidatos presidenciais são André Ventura, Rui Rio, Augusto Santos Silva e Jerónimo de Sousa. Muito provavelmente, muitos dos eleitores de Rui Rio têm como segunda escolha Santos Silva. Mas, sabendo-o o principal adversário de Rio, terão um incentivo a pô-lo em último para minimizar a sua pontuação total. Raciocínio análogo farão os apoiantes de Santos Silva.

Uma alternativa possível seria um sistema de votação a várias voltas. Cada eleitor escolhe apenas um candidato. Não havendo maioria absoluta à primeira volta, repete-se a votação, mas retirando o candidato menos votado. No caso da eleição francesa de 2002, seria o 16º classificado. Depois, retirava-se o 15º; depois o 14º e por aí fora. Havia tantas voltas quantas as necessárias para que alguém tivesse maioria absoluta.

Está a pensar que sou tolo para propor um sistema destes que facilmente se poderia arrastar por vários meses. E tem razão. Mas e se eu lhe dissesse que era possível mimetizar este sistema numa só votação? Suponha que cada eleitor ordena os seus candidatos.

Na primeira contagem, apenas se olha para os candidatos que estão no topo das preferências. Não havendo maioria absoluta, elimina-se o menos escolhido. Os votos que colocaram esse candidato em primeiro lugar são redistribuídos pelos restantes. A redistribuição é simples, basta ver, em cada boletim, quem é que foi escolhido em segundo lugar e atribuir-lhe o voto. Se houver maioria, ótimo. Se não houver, continua-se. Um sistema destes pode ser quase instantâneo dado que cada eleitor dá de uma só vez a informação suficiente para várias voltas.



E, na verdade, não tem de ordenar todos os candidatos. Se apenas quiser escolher alguns, indica apenas esses.

Se por acaso, ao fim de algumas voltas forem todos eliminados, a partir daí é como se se abstivesse.

Vários académicos têm proposto que, em vez de se votar num candidato, atribuamos uma pontuação a todos eles

Como é que funciona na prática? O Alasca tem este sistema. Em novembro passado, elegeram um membro para o Senado e outro para a Casa dos Representantes. Para a Casa dos Representantes, havia quatro candidatos: Mary Peltola, Sarah Palin (sim, essa mesmo), Nick Begich e Chris Bye. Na primeira volta, os resultados foram, respetivamente, 48,7%, 25,8%, 23,6% e 1,9%. Chris Bye foi retirado e os seus votos foram redistribuídos pelos restantes, que ficaram, pela mesma ordem, com 49,2%, 26,3% e 24,5%. Como ainda não havia maioria absoluta, Nick Begich foi retirado. Entre quem o tinha escolhido, 43 mil tinham posto Sarah Palin a seguir, 7500 escolheram Mary Peltola e 14 mil não escolheram mais ninguém.

Na terceira volta, os 43 mil votos que Palin herdou não foram suficientes para bater Mary Peltola, que, apesar de apenas ter adicionado 7500 à sua votação, ganhou com 55%.

Os argumentos a favor de um sistema a duas voltas, se levados até às últimas consequências, desembocam num sistema a várias voltas como este. É simples, funciona e permite ao eleitor dar a sua opinião sobre os diversos candidatos, em vez de se limitar a um.

1. Porque é que o autor sentiu necessidade de introduzir outro método de contagem face ao exemplo apresentado das eleições presidenciais francesas de 2002?
2. Quais as vantagens e desvantagens do método da Borda?
3. Qual é o método alternativo apresentado ao método da Borda? Descreve esse método.

Nota: Tarefa adaptada do plano de formação da capacitação das Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A



## Tarefa 4

### Muitas voltas numa só

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Esta tarefa tem como objetivos, a interpretação e a comunicação da informação dada, permitindo ainda, a reflexão dos alunos sobre o resultado de uma votação estar de acordo com as preferências dos votantes e a “pura” intenção manifestada nessa votação.

**Materiais e recursos:** Tarefa.

##### Notas para o professor:

O professor poderá pedir aos alunos que leiam e analisem o texto contido na tarefa, em casa.

Sugere-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões, a utilização de um tempo letivo (50 minutos).

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e organizar os alunos em grupos de três ou quatro elementos. De seguida, os alunos devem resolver a tarefa e, no final, apresentar as suas conclusões na discussão final com toda a turma.

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e, de seguida, os alunos devem resolvê-la individualmente e, no final, apresentar a sua resolução.

O professor deve observar o desempenho dos alunos e fornecer as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis dificuldades.

O professor deve também promover a autonomia dos alunos, clarificando a compreensão dos objetivos, mas permitindo a ocorrência de erros e incentivando os alunos a persistirem na procura de respostas/soluções consistentes. Deve, ainda, solicitar justificações para os raciocínios apresentados, e na discussão final com toda a turma, explicar quais são as justificações válidas.

Os alunos poderão manifestar dificuldades na leitura e interpretação do texto, na comunicação e na expressão de ideias com vocabulário adequado.



## Tarefa 5

### Eleições Autárquicas

Excerto da Lei Eleitoral dos Órgãos das Autarquias Locais (LEI ORGÂNICA N.º 1/2001, DE 14 DE AGOSTO)

#### CAPÍTULO I

##### Âmbito

#### ARTIGO 1.º

##### Âmbito da presente lei

A presente lei orgânica regula a eleição de titulares para os órgãos das autarquias locais.

#### CAPÍTULO II

##### Regime da eleição

#### Artigo 12.º

##### Organização das listas

1. As listas propostas à eleição devem conter a indicação dos candidatos em número igual ao dos mandatos a preencher no respectivo órgão e de suplentes nos termos do n.º 9 do artigo 23.º.
2. Para as eleições gerais o número de mandatos de cada órgão autárquico será definido de acordo com os resultados do recenseamento eleitoral, obtidos através da base de dados central do recenseamento eleitoral e publicados pelo Ministério da Administração Interna no *Diário da República* com a antecedência de 120 dias relativamente ao termo do mandato.
3. Os candidatos de cada lista consideram-se ordenados segundo a sequência constante da respectiva declaração de candidatura.

#### ARTIGO 13.º

##### CrITÉrio de eleição

A conversão de votos em mandatos faz-se de acordo com o método de representação proporcional correspondente à média mais alta de Hondt, obedecendo às seguintes regras:

- a) Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista no círculo eleitoral respectivo;
- b) O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos que estiverem em causa;
- c) Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;
- d) No caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

1. Quais são os órgãos das autarquias locais abrangidos pela lei anterior?



2. Acede aos resultados das Eleições Autárquicas de 2021 em [Autárquicas 2021 \(mai.gov.pt\)](https://www.mai.gov.pt) ou através do QR Code.

Seguidamente seleciona o separador “Assembleia de Freguesia”, depois o separador “Localidades”, e neste escreve os nomes do distrito, do concelho e da freguesia onde se situa a tua escola.

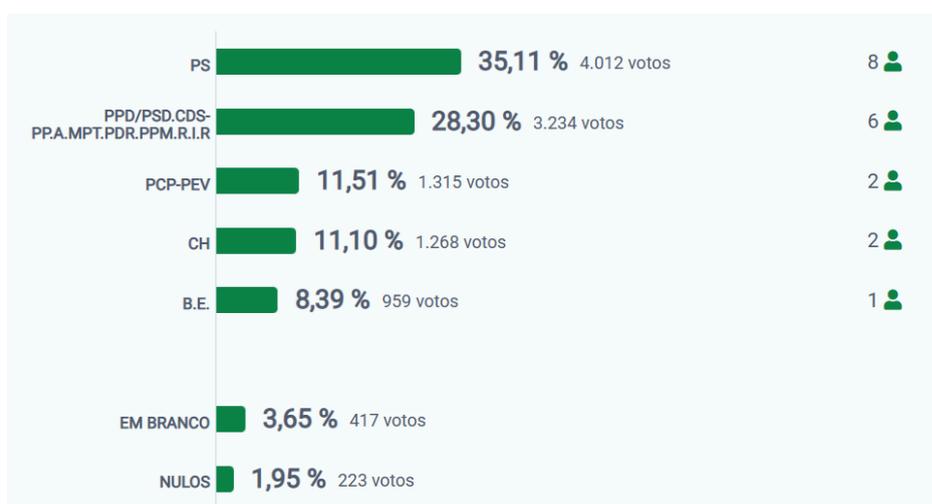
Recorrendo a uma folha de cálculo, confirma, utilizando o método de Hondt, o número de mandatos obtidos por cada partido, na freguesia que selecionaste.



3. O Método de Hondt, implementado em inúmeros países, tais como Holanda, Israel, Espanha, Argentina e Portugal, não é o único método de representação proporcional que recorre a uma sequência de divisores sucessivos.

O Método de Sainte-Laguë, utilizado, por exemplo, na Nova Zelândia e na Lituânia, é muito semelhante ao Método de Hondt, mas utiliza como divisores os números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, ...

O gráfico seguinte apresenta a distribuição dos 19 mandatos da freguesia do Cacém e São Marcos, no concelho de Sintra, do distrito de Lisboa, nas Eleições Autárquicas de 2021:



- 3.1. Recorrendo a uma folha de cálculo, obtém a distribuição dos 19 mandatos, da freguesia de Cacém e São Marcos, pelo Método de Sainte-Laguë. Compara a distribuição obtida com a que ocorreu em 2021, com o Método de Hondt. Existiriam partidos beneficiados, ou prejudicados, com a aplicação do Método de St.-Laguë? Justifica a tua resposta.



3.2. Imagina que os mandatos eram atribuídos na proporção direta dos votos obtidos por cada um dos partidos, com arredondamento à unidade. Na freguesia de Cacém e São Marcos, e aplicando este método, por exemplo, ao Partido Comunista Português - Partido Ecologista “Os Verdes” (PCP-PEV), seriam atribuídos 2 mandatos, uma vez que

$$\frac{1315}{10\,788} \times 19 \approx 2,316.$$

Verifica se a adoção deste método modificaria, ou não, o número de mandatos atribuídos a cada partido concorrente nas referidas eleições.

3.3. Imagina que, nas eleições à Junta de Freguesia de Cacém e São Marcos, o PCP-PEV se tinha coligado com o Bloco de Esquerda (B.E.). Haveria alguma vantagem em criar essa coligação? Utiliza o Método de Hondt para responder à questão, considerando que o número de votos da coligação seria a soma dos votos obtidos por cada um dos partidos nas eleições de 2021.

3.4. De acordo com as alíneas anteriores, qual dos dois métodos apresenta tendência para favorecer os partidos mais votados? Justifica a tua resposta.

Nota: Tarefa adaptada do plano de formação da capacitação das Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A (Cristina Negra; Marta Almeida)



## Tarefa 5

### Eleições Autárquicas

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë para a distribuição de mandatos.

**Materiais e recursos:** Calculadora, telemóvel ou computador com *internet* e folha de cálculo.

**Notas e sugestões:**

No início da aula, o professor poderá pedir aos alunos para, em casa, ler e analisar o excerto da lei apresentado no início da tarefa.

Sugere-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões, a utilização de três tempos letivos (150 minutos).

Num primeiro momento, o professor deve fazer uma breve apresentação da tarefa e organizar os alunos em grupos de quatro elementos. De seguida, os alunos devem resolver a tarefa e, no final, apresentar as suas conclusões na discussão final com toda a turma.

O professor deve observar o desempenho dos alunos e fornecer as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis dificuldades.

O professor deve também promover a autonomia dos alunos, clarificando a compreensão dos objetivos, mas permitindo a ocorrência de erros e incentivando os alunos a persistirem na procura de respostas/soluções consistentes. Deve, ainda, solicitar justificações para os raciocínios apresentados, e na discussão final com toda a turma, explicar quais são as justificações válidas.

Os alunos poderão manifestar dificuldades no uso de percentagens, na utilização da folha de cálculo, na comunicação e na expressão de ideias com vocabulário adequado.

Um possível aprofundamento desta tarefa seria pedir aos alunos para proporem um método que solucionasse os problemas identificados.



Os métodos referidos nesta seção são métodos de representação proporcional que utilizam sequências de divisores sucessivos. No entanto, existem outros métodos de representação proporcional que não utilizam sequências de divisores. Um possível aprofundamento desta atividade seria propor aos alunos a realização de uma pesquisa sobre alguns desses métodos e, a partir dela, selecionar e aplicar um desses métodos aos dados da freguesia de Cacém e São Marcos (apresentados no enunciado da tarefa), podendo fazer a comparação da distribuição obtida com o método selecionado, com os resultados oficiais das Eleições Autárquicas de 2021.

