Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico

Coletânea de tarefas
Tema: Geometria

9.º ano de escolaridade

Leonor Santos
Sandra Raposo
António Cardoso
Paulo Correia
Rui Gonçalo Espadeiro

Setembro de 2024

Cofinanciado por:

Ficha técnica

Título:
Coletânea de tarefas - Tema Geometria (9.º ano de escolaridade)

Autores:
Leonor Santos, Sandra Raposo, António Cardoso, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro

Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/.

Data
Lisboa, setembro de 2024

Os autores agradecem o precioso contributo do professor João Almiro pela colaboração na revisão do texto.

Índice

Introdução

As novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* foram elaboradas pelo Grupo de Trabalho da Revisão Curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (GTRCAEMEB) e homologadas a 19 de agosto de 2021, através do Despacho n.º 8209/2021. Constituem um novo programa de Matemática cuja generalização alargada se iniciou, de forma faseada, a partir do ano letivo 2022/23.

Esta generalização foi antecipada, em 2021/22, por duas turmas de cada um dos anos de escolaridade 1.º, 3.º, 5.º e 7.º, sendo este processo conduzido pelo Grupo de Trabalho do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM). O GTDCPM convidou professores a lecionar nos diferentes anos de escolaridade, procurando que as turmas envolvidas se distribuíssem por Agrupamentos de escolas/Escolas não agrupadas de diferentes regiões de Portugal continental, não correspondendo a quaisquer critérios que, de alguma forma, lhes conferissem excecionalidade.

Um dos objetivos desta antecipação foi o de proporcionar a criação de materiais de apoio às aprendizagens, a divulgar em larga escala, que fossem experimentados com alunos em contexto real e alvo de reflexão e adequação por parte dos seus autores. De forma a cumprir este objetivo, elaboraram-se coletâneas das tarefas que foram propostas aos alunos de cada ano de escolaridade envolvido na antecipação em 2021/22. A presente coletânea diz respeito ao trabalho realizado em 2023/24 nas duas turmas de 9.º ano de escolaridade.

De modo a tornar mais percetível a sequência seguida na abordagem dos temas e subtópicos matemáticos, cada coletânea inicia-se com a apresentação da planificação a longo prazo que foi elaborada. Segue-se a sequência das tarefas organizada com indicação do(s) tópico(s) matemático(s) envolvido(s) no correspondente tema matemático, antecedida sempre pela identificação dos conteúdos de aprendizagem a abordar com a exploração de cada tarefa. Com esta antecipação, procurou-se, desde logo, verificar se era necessário proceder a ajustamentos nas tarefas de modo a contemplar todos os conteúdos de aprendizagem.

Para cada tarefa, explicitam-se os conteúdos de aprendizagem que potencialmente podem ser adquiridos pelos alunos, bem como os objetivos de aprendizagem que se pretende que os alunos desenvolvam a partir do trabalho na tarefa. São igualmente fornecidas indicações acerca da organização do trabalho dos alunos, correspondendo ao que aconteceu na realidade ou já com algumas adaptações. Respeitando as orientações metodológicas das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico, nomeadamente para o 9.º ano, o método de ensino habitualmente seguido foi o de ensino exploratório, tendo os alunos oportunidade, a partir de tarefas tendencialmente desafiadoras e poderosas, de trabalhar de forma autónoma, com o apoio do professor, individualmente, a pares, ou em pequenos grupos, e de participar numa discussão coletiva posterior, envolvendo toda a turma, tendo em vista a explicitação e comparação de ideias e processos, e a sistematização e institucionalização do conhecimento matemático na turma.

É importante chamar a atenção que estas coletâneas não pressupõem qualquer intenção prescritiva. Devem apenas ser entendidas como materiais de apoio cuja conceção respeitou as novas orientações curriculares e que agora se disponibilizam a quem lhes encontrar utilidade, que os adaptará à sua realidade escolar, nomeadamente em função das características das turmas e dos seus hábitos de trabalho.

Em síntese: A presente coletânea apresenta materiais relevantes que concretizam as opções curriculares adotadas em 2023/24, no âmbito das Novas Aprendizagens Essenciais em Matemática, em duas turmas do 9.º ano de escolaridade, num contexto de trabalho colaborativo entre os dois professores titulares das turmas e os três elementos do GTDCPM que trabalharam diretamente com estes professores.

Esperamos que a partilha do trabalho que é feita possa ser útil para os/as professores/as que lecionem este novo programa de Matemática para o 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico.

Planificação a longo prazo

TEMA	TÓPICOS	Tempos letivos previstos (50 min)	Distribuição pelos períodos
GEOMETRIA (E NÚMEROS)	Números Racionais (8.º ano) ● Raiz cúbica Figuras no espaço (8.º ano) ● Área da superfície de prismas retos, pirâmides regulares, cilindros, cones	6	**1.º Período 61**
NÚMEROS	Números Reais	15	
ÁLGEBRA	Expressões algébricas e equações (8.º ano) ● Equações literais ● Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas	15	
DADOS E PROBABILIDADES	(8.º e 9.º anos) Questões estatísticas e recolha de dados	4	
ÁLGEBRA	Funções ● Função de proporcionalidade inversa	7	
GEOMETRIA	Operações com figuras (7.º ano) ● Critérios de semelhança de triângulos ● Relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes	8	
Momentos formais de Avaliação Sumativa.		6	
GEOMETRIA	Figuras planas ● Razões trigonométricas no triângulo retângulo	10	**2.º Período 54**
DADOS E PROBABILIDADES	(8.º e 9.º anos) Organização de dados e representações gráficas	10	
ÁLGEBRA	Expressões algébricas, equações e inequações ● Casos notáveis da multiplicação de binómios ● Decomposição de polinómios em fatores ● Equações de 2.º grau a uma incógnita ● Resolução de equações de 2.º grau a uma incógnita	20	
DADOS E PROBABILIDADES	Probabilidades	8	
Momentos formais de Avaliação Sumativa.		6	
ÁLGEBRA	Funções ● Funções quadráticas da forma $f(x) = ax^2, a \in R \setminus \{0\}$	6	**3.º Período 34**
GEOMETRIA	Figuras planas ● Ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência ● Construções e lugares geométricos	12	
DADOS E PROBABILIDADES	(8.º e 9.º anos) Análise de dados, comunicação e divulgação do estudo	4	
ÁLGEBRA	Expressões algébricas, equações e inequações ● Inequações do 1.º grau a uma incógnita ● Resolução de inequações	6	
Momentos formais de Avaliação Sumativa.		6	
	Total	128	

Nota: Parte do tema de Dados foi trabalhado a partir do desenvolvimento de trabalho de projeto. As aulas previstas não foram realizadas de forma sequencial, mas sim, intercaladas com outros temas, ao longo dos três períodos.

A planificação a longo prazo foi definida com a intenção de recuperar alguns tópicos que não foram abordados, ou foram abordados de forma parcial, ou de forma incompleta, nos anos letivos anteriores. Procurou-se que esta abordagem fosse integrada com os temas do 9.º ano.

Tema: Geometria

Neste ciclo pretende-se continuar a desenvolver o raciocínio espacial dos alunos, ampliando a sua compreensão do espaço e a sua capacidade de operarem com figuras no plano e no espaço. O estabelecimento de relações geométricas deve ser acompanhado pela experiência (onde a tecnologia desempenha um papel fundamental) reforçando a relação entre a Geometria e a Álgebra. O estudo das transformações geométricas ganha relevância e cria um contexto favorável para o aumento gradual e progressivo da abstração e do formalismo matemáticos adequados ao raciocínio e à comunicação matemáticos.

Canavarro et al. (2021), *Aprendizagens Essenciais de Matemática, 7.º ano, 3.º ciclo do EB* (pp. 10-11). DGE, ME.

Tópico

Figuras no espaço

Conteúdos de aprendizagem por tarefa

			Capacidades Matemáticas						Capacidades e atitudes gerais transversais							
Aulas 50 min	**Nome da Tarefa**	**Subtópicos**	RP	RM	PC	Com	Re	Con	PCr (D)	Cri (D)	Col (E)	AC (F)	Aut (F)	IA (F)	Per (F)	Val (I)
1	Tarefa 1[1] - Do volume para a aresta do cubo	• Raiz cúbica (Números Racionais)					X	X	X							X
3	Tarefa 2 - Plastificar para reutilizar	• Área da superfície de prismas retos, pirâmides regulares e cilindros (figuras no espaço)	X			X				X	X	X				
2	Tarefa 3 - Decidir com áreas e volumes	• Área da superfície de cones (figuras no espaço)		X		X					X		X			X

Legenda

RP - Resolução de Problemas
RM - Raciocínio Matemático
PC - Pensamento Computacional
Com - Comunicação Matemática
Re - Representações Matemáticas
Con - Conexões Matemáticas

D - Pensamento crítico e pensamento criativo
E - Relacionamento interpessoal
F - Desenvolvimento pessoal e autonomia
I - Saber científico, técnico e tecnológico

PCr - Pensamento Crítico
Cri - Criatividade
Col - Colaboração
AC - Autoconfiança
Aut - Autorregulação
IA - Iniciativa e Autonomia
Per - Perseverança
Val - Valorização do papel da Matemática

[1] Esta tarefa, embora envolva um subtópico dos "Números racionais" do 8.º ano, como foi trabalhada em articulação com estas tarefas de Geometria, optámos por apresentá-la nesta coletânea.

Tarefa 1 - Do volume para a aresta do cubo

Notas para o professor:

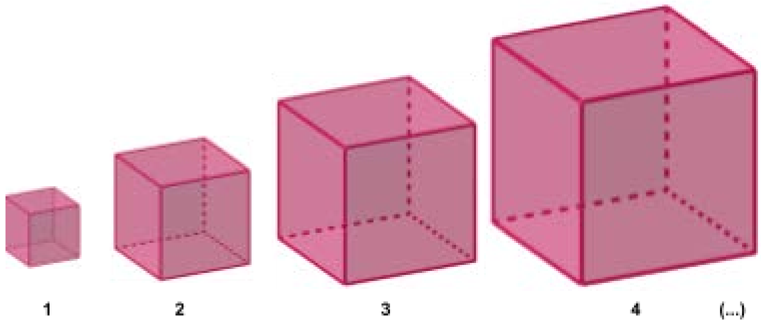
A exploração da tarefa 1 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Conhecer os cubos perfeitos até 125;
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de raízes cúbicas de cubos perfeitos e valores aproximados de outras raízes cúbicas, com recurso à tecnologia;
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas;
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão;
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Reconhecer a importância da matemática para a interpretação e intervenção de situações da realidade.

Esta tarefa trabalha subtópicos não lecionados no 8.º ano.
Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
A primeira questão levou os alunos a trabalhar a operação inversa do cubo de um número, que posteriormente foi identificada como raiz cúbica.
A terceira questão realizou-se sem recurso à calculadora.

Do volume para a aresta do cubo

1. Considera os quatro primeiros termos da sequência formada por cubos, em que o primeiro tem 1 cm de aresta, e os seguintes têm sempre mais 1 cm de aresta que o anterior:



1.1. Completa a seguinte tabela, tendo em conta a sequência apresentada:

Ordem	1	2	3	4	5
Volume do cubo		8			

1.2. Escreve o termo geral da sequência.

1.3. Indica a ordem do termo 64. Qual o significado dessa ordem no contexto do problema?

1.4. Qual é a medida da aresta do cubo cujo volume é 1000 cm^3? Mostra como chegaste à resposta.

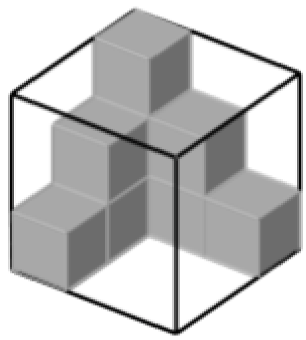
1.5. Considera o cubo de volume 216 cm^3.

1.5.1. Qual é a área de cada uma das faces do cubo? Mostra como chegaste à resposta.

1.5.2. Qual é a área total da superfície do cubo? Mostra como chegaste à resposta.

2. O Filipe pretende arrumar os cubinhos cinzentos numa caixa cúbica, de acordo com o esquema apresentado.

Supondo que essa caixa tem 343 cm^3 de volume e que cada cubinho cinzento tem de aresta 2,4 cm, diz se é possível proceder à arrumação como está presente no esquema. Explica a tua resposta.



3. Na última aula de Matemática foi pedido que os alunos estimassem o valor da raiz cúbica de 110 ($\sqrt[3]{110}$).

- O Filipe respondeu que o valor teria de ser superior a 10 e inferior a 11.
- A Maria respondeu que o valor teria de ser superior a 4 e inferior a 5.

Diz, qual dos alunos tem razão, justificando a tua resposta.

Tarefa 2 - Plastificar para reutilizar

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 2 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Resolver problemas de área da superfície, por composição ou decomposição;
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos;
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma;
- Trabalhar com os outros;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.

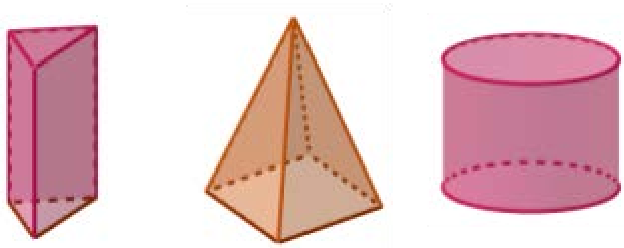
Esta tarefa trabalha subtópicos não lecionados no 8.º ano.
Na primeira questão os alunos estavam organizados em grupos de 4 a 5 elementos. Cada grupo trabalhou um sólido (prisma reto, pirâmide regular ou cilindro), organizou a informação e preparou uma apresentação para a discussão coletiva.

Plastificar para reutilizar

1. Nas aulas de Educação Visual os alunos de uma turma construíram prismas retos, pirâmides regulares e cilindros em papel.

Para tornar mais fácil o manuseamento e reutilização, resolveram plastificá-los.

Para tal foi necessário saber o valor da área a plastificar, em cada um dos seguintes sólidos:



1.1. Recolhe as medidas do sólido que foi distribuído ao teu grupo, que são necessárias para o cálculo da sua área, e regista-as no teu caderno (em centímetros, com arredondamento às décimas). Caso consideres necessário, desenha um esboço da planificação do sólido.

1.2. Calcula o valor da área da superfície desse sólido. Explica como procedeste.

1.3. Seleciona e fotografa, de entre os registos de cada elemento do grupo, uma planificação e os respetivos procedimentos para determinação da área da superfície do sólido.

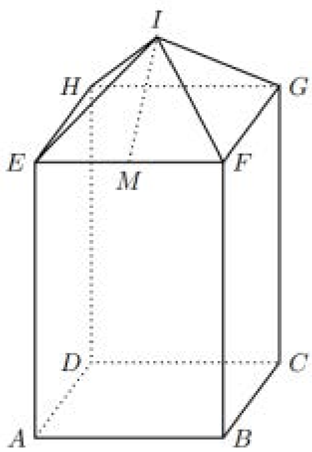
Coloca esses registos, no póster que está disponível na *Classroom* da turma, e usa-o para a apresentação e discussão coletiva.

2. A figura abaixo, à esquerda, é uma fotografia de uma caixa de chocolates que o Manuel fez para vender num arraial.

A figura da direita representa um modelo geométrico dessa caixa.

Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- $[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular regular;
- $[EFGHI]$ é uma pirâmide quadrangular regular;
- M é o ponto médio de $[EF]$;
- $\overline{AB} = 13$ cm, $\overline{FB} = 19$ cm e $\overline{IM} = 8$ cm



Determina a área da superfície da caixa de chocolates.

(Fonte: Adaptado de IAVE - Instituto de Avaliação Educacional. Prova Final 3.º Ciclo – 2010, 1.ª chamada)

Tarefa 3 - Decidir com áreas e volumes

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 3 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

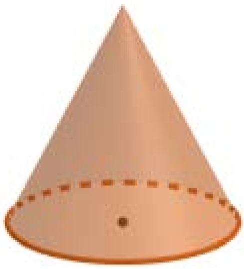
- Resolver problemas de área da superfície, por composição ou decomposição;
- Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos;
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las;
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Esta tarefa trabalha subtópicos não lecionados no 8.º ano.
Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em grupos de 4 a 5 elementos.

Decidir com áreas e volumes

1. Nas aulas de Educação Visual os alunos de uma turma também construíram cones em papel. Procuraram ainda plastificá-los, para tornar mais fácil o seu manuseamento e reutilização.

Para tal foi necessário saber o valor da área a plastificar:



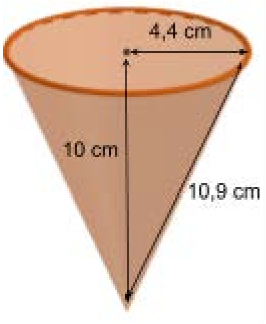
1.1. Recolhe as medidas do sólido que foi distribuído ao teu grupo, que são importantes para o cálculo da sua área, e regista-as no teu caderno (em centímetros, com arredondamento às décimas). Desenha a planificação do sólido.

1.2. Calcula o valor da área da superfície desse sólido. Explica como procedeste.

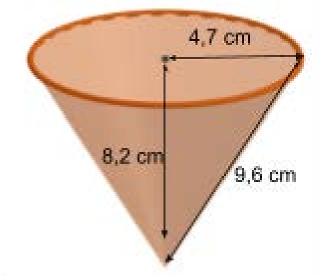
Área lateral do cone:
$\pi \times r \times g$

2. Um empresário da restauração pretende servir sumos em taças reutilizáveis de material sintético com 0,2 litros de capacidade (200 cm^3), com a forma de um cone.

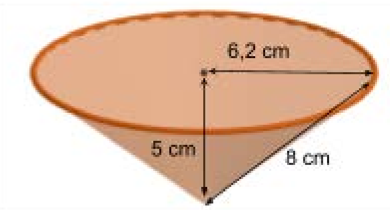
Uma empresa da especialidade apresentou três esboços para as taças que fabrica, com dimensões diferentes (arredondadas às décimas), informando que o preço do acrílico a usar na sua construção é de 20€ por metro quadrado:



Taça A



Taça B



Taça C

Depois da construção do cone, este será suportado por uma base com um custo constante.

Admitindo que o empresário de restauração escolherá a proposta mais barata que satisfaça a condição inicial, qual das taças é a melhor solução? Justifica a tua escolha.

Tópico

Figuras planas

Conteúdos de aprendizagem por tarefa

			Capacidades Matemáticas						**Capacidades e atitudes gerais transversais**							
Aulas 50 min	**Nome da Tarefa**	**Subtópicos**	RP	RM	PC	Com	Re	Con	PCr (D)	Cri (D)	Col (E)	AC (F)	Aut (F)	IA (F)	Per (F)	Val (I)
4	Tarefa 1[2] - Semelhanças de triângulos	• Critérios de semelhança de triângulos		X				X					X			X
3	Tarefa 2[2] - Perímetros e áreas de figuras semelhantes - a relação!	• Relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes		X		X			X						X	
2	Tarefa 3 - Razões Especiais (I) - Cos, Sen, Tg	• Razões trigonométricas no triângulo retângulo	X	X						X		X				
3	Tarefa 4 - Razões Especiais (II) - Cos, Sen, Tg	• Razões trigonométricas no triângulo retângulo		X			X		X							X
4	Tarefa 5 - Mais medidas inacessíveis	• Razões trigonométricas no triângulo retângulo	X			X		X			X			X		
1	Tarefa 6 - Em busca do ângulo escondido	• Razões trigonométricas no triângulo retângulo				X	X		X				X			

Legenda

RP - Resolução de Problemas
RM - Raciocínio Matemático
PC - Pensamento Computacional
Com - Comunicação Matemática
Re - Representações Matemáticas
Con - Conexões Matemáticas

D - Pensamento crítico e pensamento criativo
E - Relacionamento interpessoal
F - Desenvolvimento pessoal e autonomia
I - Saber científico, técnico e tecnológico

PCr - Pensamento Crítico
Cri - Criatividade
Col - Colaboração
AC - Autoconfiança
Aut - Autorregulação
IA - Iniciativa e Autonomia
Per - Perseverança
Val - Valorização do papel da Matemática

[2] Estas tarefas envolvem subtópicos não trabalhados no 7.º ano.

Tarefa 1 - Semelhanças de triângulos

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 1 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar os critérios de semelhança de triângulos;
- Reconhecer situações de aplicação indevida dos critérios de semelhança de triângulos;
- Resolver problemas que envolvam critérios de semelhança de triângulos, em diversos contextos;
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica;
- Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização;
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada;
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las;
- Reconhecer a importância da matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Apesar de já terem sido trabalhados os critérios de semelhança de triângulos, houve necessidade de os revisitar, como forma de favorecer o desenvolvimento da tarefa seguinte, que relacionam áreas e perímetros de figuras semelhantes.
Para a questão 3.3. foi apresentada a seguinte extensão: "Com os 175 berlindes, quantos triângulos da sequência conseguia o Manuel construir? Explica a tua resposta, indicando o número de berlindes do último triângulo e o número de berlindes que sobravam."

Semelhanças de triângulos

No 7.º ano verificámos que **duas figuras são semelhantes** se mantêm a mesma forma.

Considerando r a razão de semelhança, definimos ainda que uma figura é:

- uma redução se $0 < r < 1$;
- congruente ou geometricamente igual se $r = 1$;
- uma ampliação se $r > 1$.

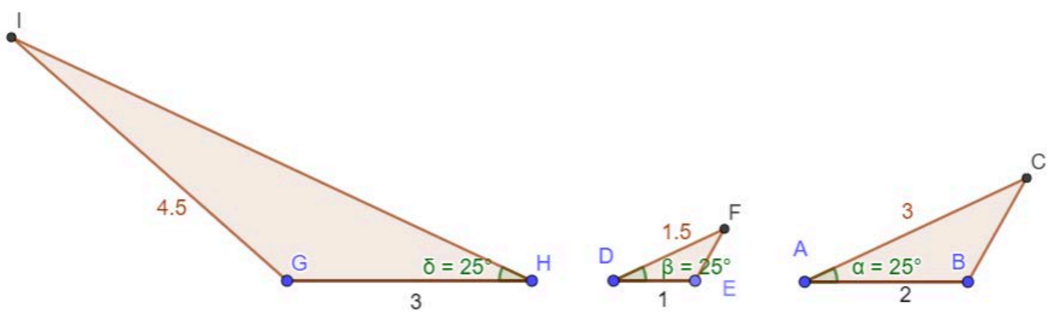
Estudámos ainda **três critérios de semelhança de triângulos**, que foram explorados através de apliquetas Geogebra, que designámos por:

- **Critério AA (Ângulo - Ângulo)**
  Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos de um são iguais a dois dos ângulos do outro.
- **Critério LLL (Lado-Lado-Lado)**
  Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro.
- **Critério LAL (Lado- Ângulo-Lado)**
  Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois dos lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são iguais.

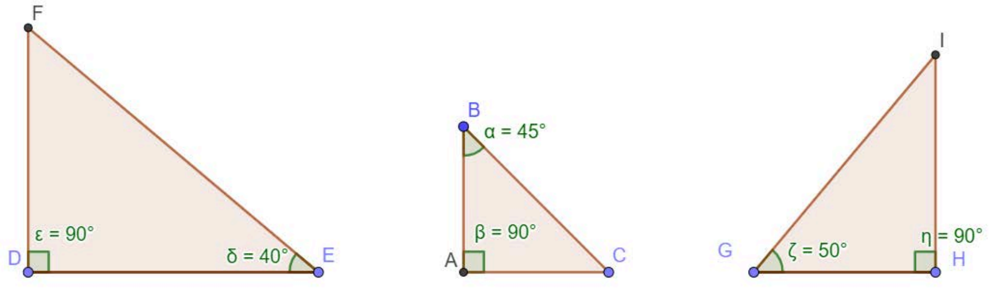
1. Para cada um dos critérios de semelhança de triângulos referidos acima, esboça um par de triângulos que o ilustre. Identifica o critério de semelhança que estás a aplicar em cada caso.

2. Cada um dos conjuntos de figuras, apresentados a seguir, contém um intruso. Ou seja, há um triângulo que não é semelhante aos outros dois.
Seleciona o intruso em cada situação apresentada, explicando a tua opção.

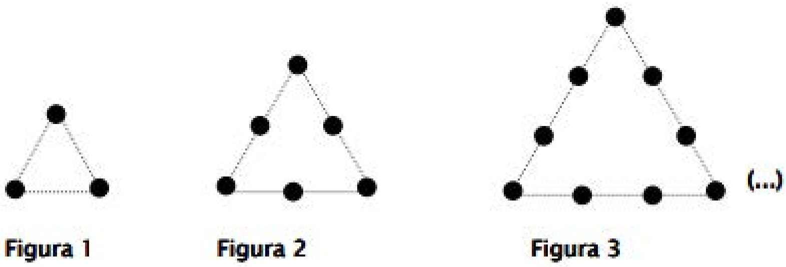
Situação 1



Situação 2



3. O Manuel coleciona berlindes. Um dia levou-os todos para a praia. Contou-os e entreteve-se a construir triângulos. Contou 175 berlindes e construiu uma sequência de triângulos equiláteros, tal como estão representados nas figuras.



3.1. Os triângulos construídos pelo Manuel são semelhantes? Justifica a tua resposta.

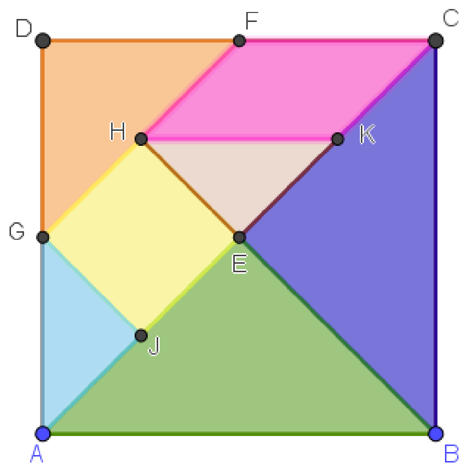
3.2. Qual das seguintes expressões permite calcular o número de berlindes utilizados em cada uma das figuras?

(A) $n + 3$ **(B)** $3n$ **(C)** $3n + 3$ **(D)** $2n + 1$

3.3. Se tivesse decidido construir um só triângulo equilátero, qual seria o número máximo de berlindes que devia colocar em cada lado? Explica a tua resposta.

(Fonte: Adaptado de projeto 1001 itens https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/2022-09/417.pdf)

4. Numa das últimas aulas do período, os alunos de uma turma foram desafiados a utilizar o quebra-cabeças chinês, Tangram, para obterem figuras com a mesma área.



Sabe-se que:

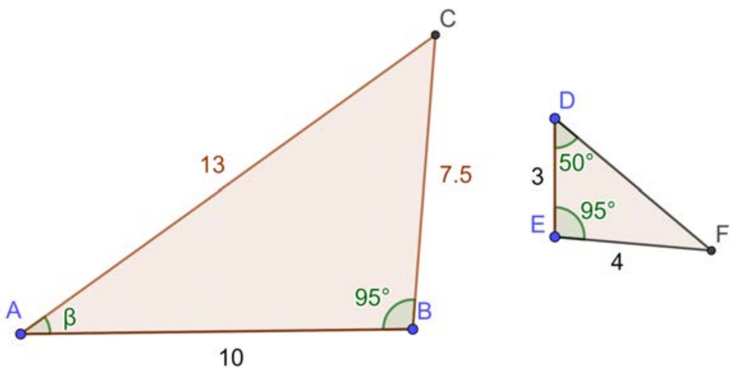
- $[ABCD]$ é um quadrado;
- os pontos F e G são pontos médios dos lados $[CD]$ e $[AD]$, respetivamente;
- o ponto E é o ponto médio da diagonal $[AC]$.

4.1. Indica um triângulo semelhante ao $[BCE]$. Justifica a tua opção.

4.2. Qual é a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DFG]$ no triângulo $[ABC]$? Explica a tua resposta.

4.3. Qual é a razão de semelhança que transforma o triângulo $[ABE]$ no triângulo $[EHK]$? Explica a tua resposta.

5. Considera os dois triângulos apresentados:



5.1. Justifica que os triângulos são semelhantes.

5.2. Qual a amplitude do ângulo β? Justifica.

5.3. Determina o comprimento do segmento de reta $[DF]$.

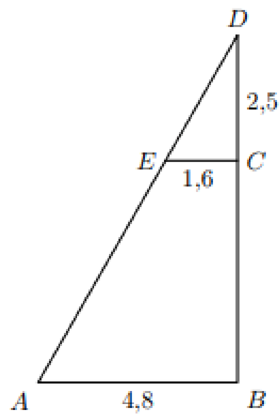
6. Para assegurar a atividade de prevenção, vigilância e deteção de incêndios florestais, existem torres de vigia. Na figura seguinte, à esquerda, está uma fotografia de uma dessas torres. Para determinar a altura da plataforma da torre, imaginaram-se dois triângulos retângulos, semelhantes, representados na figura da direita.

A figura ao lado representa um esquema desses dois triângulos.

O esquema não está desenhado à escala.

Sabe-se que:

- $\overline{DC} = 2,5$ m
- $\overline{EC} = 1,6$ m
- $\overline{AB} = 4,8$ m

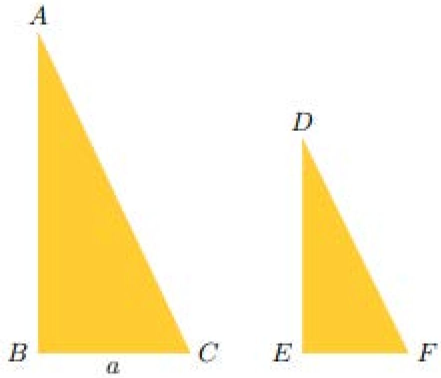


Qual é o comprimento, em metros, de $[CB]$?

Apresenta os cálculos que efetuaste.

(Fonte: Adaptado de GAVE (2010), Teste Intermédio 9.º ano)

7. A figura da esquerda é uma fotografia de um veleiro com duas velas. Na figura da direita, apresenta-se um modelo dessas velas, que não está desenhado à escala



Relativamente ao modelo, sabe-se que:

- os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes;
- as retas AB e DE são paralelas;
- $\overline{AB} = 8,4$ m e $\overline{DE} = 5,6$ m;
- $\overline{BC} = a,\ a > 0$.

Qual é, em função de a, o comprimento do segmento de reta $[EF]$? Mostra como chegaste à tua resposta.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2023), Prova de Aferição de Matemática, 8.º Ano de Escolaridade)

Tarefa 2 - Perímetros e áreas de figuras semelhantes - a relação!

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 2 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Conhecer a razão entre as medidas dos perímetros de duas figuras semelhantes;
- Conhecer a razão entre as medidas das áreas de duas figuras semelhantes;
- Aplicar as razões entre medidas de perímetros e medidas de áreas de figuras semelhantes em situações concretas;
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Na questão 1., os alunos recorreram a apliquetas diferentes , conforme as diversas figuras originais (quadrado, triângulo, retângulo ou pentágono) para obtenção de outras semelhantes, usando o método da homotetia.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Perímetros e áreas de figuras semelhantes - a relação!

1. Recorre à apliqueta com o código **GDAF VFSW**, onde te é apresentado um quadrado e obtém figuras semelhantes à dada, através do método da homotetia.

   Começa por selecionar o polígono que te é dado, seguido do centro da homotetia e depois, insere na caixa de texto que surge, uma de cada vez, as razões $\frac{1}{2}$, 2, 3 e 4.

   1.1. Completa a tabela.

   Nota: podes recorrer a algumas das ferramentas disponíveis na apliqueta.

Figura	Perímetro
inicial	
transformada de razão $\frac{1}{2}$	
transformada de razão 2	
transformada de razão 3	
transformada de razão 4	

   1.2. Qual a relação que consegues estabelecer entre os perímetros da figura inicial e de cada uma das figuras transformadas?

   1.3. Escreve uma expressão algébrica que traduz a relação entre os perímetros da figura transformada (P_T) e da figura inicial (P_I).

   1.4. Numa semelhança de razão 12, qual será o perímetro de uma figura transformada, relativamente ao perímetro da figura inicial? Explica como procedeste.

   1.5. Completa a tabela.

   Nota: podes recorrer a algumas das ferramentas disponíveis na apliqueta.

Figura	Área
inicial	
transformada de razão $\frac{1}{2}$	
transformada de razão 2	
transformada de razão 3	
transformada de razão 4	

   1.6. Qual a relação que consegues estabelecer entre as áreas da figura inicial e de cada uma das transformadas?

1.7. Escreve uma expressão algébrica que traduz a relação entre as áreas da figura transformada (A_T) e da figura inicial (A_I).

1.8. Numa semelhança de razão 3, qual será a área de uma figura transformada, relativamente à área da figura inicial? Explica como procedeste.

2. Sabe-se que duas figuras A e B são semelhantes e que B se obtém de A através de homotetia de razão 3.

2.1. A figura B é uma redução da figura A? Justifica.

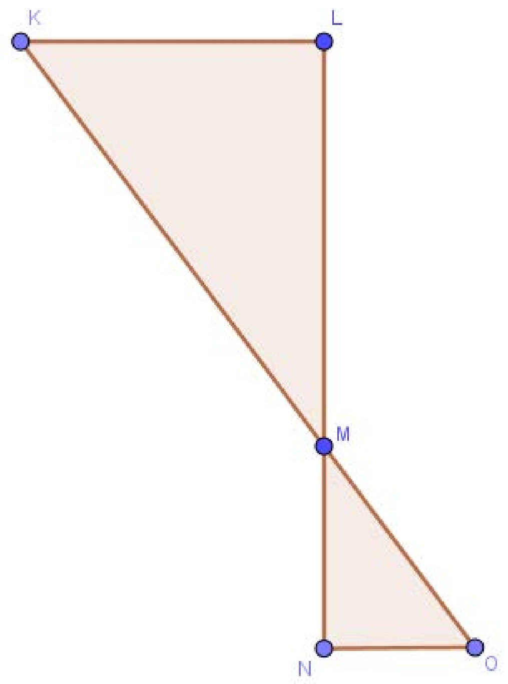
2.2. Sabendo que o perímetro da figura B é 18 cm, calcula o perímetro da figura A.

2.3. Qual é a área da figura B, sabendo que a área da figura A é 2,6 cm^2.

3. Considera a figura ao lado.

Sabe-se que:

- $[KL]//[NO]$;
- o ponto M é o ponto de interseção de $[KO]$ e $[LN]$.



3.1. Justifica que os triângulos $[KLM]$ e $[MNO]$ são semelhantes.

3.2. Sabendo que $\frac{\overline{MN}}{\overline{ML}} = 0,2$, calcula:

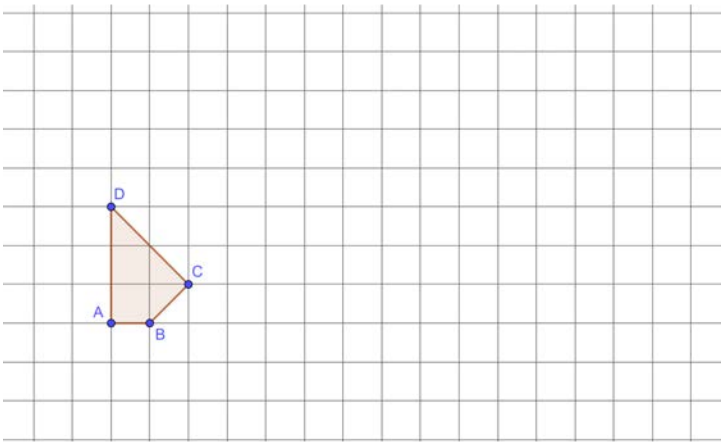
3.2.1. o perímetro do triângulo $[KLM]$, sabendo que $P_{[MNO]} = 12$.

3.2.2. a área do triângulo $[KLM]$ sabendo que $A_{[MNO]} = 6$.

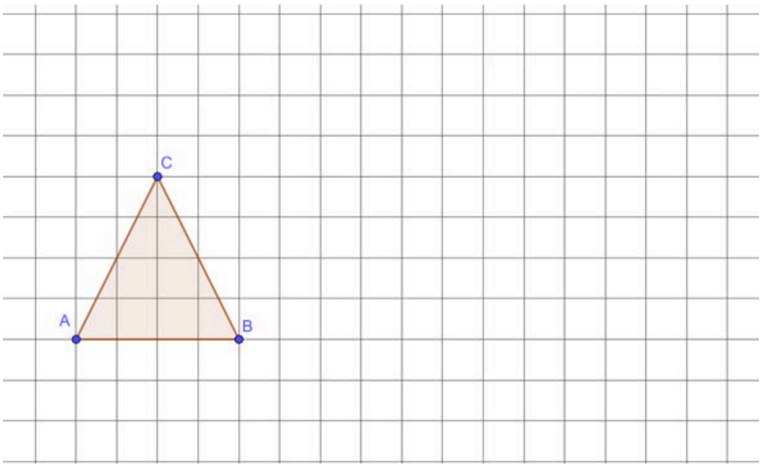
Nota: A figura não está desenhada à escala.

4. Para cada figura apresentada, esboça outra semelhante que tenha:

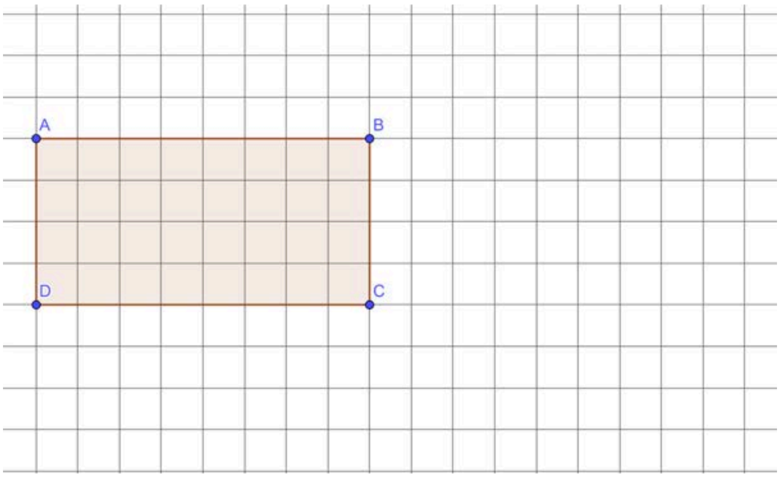
4.1. o triplo do seu perímetro;



4.2. o quádruplo da sua área;



4.3. um quarto da sua área.



Tarefa 3 - Razões Especiais (I) - Cos, Sen, Tg

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 3 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo;
- Distinguir as razões trigonométricas através da confrontação de situações simples;
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas;
- Classificar objetos atendendo às suas características;
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.

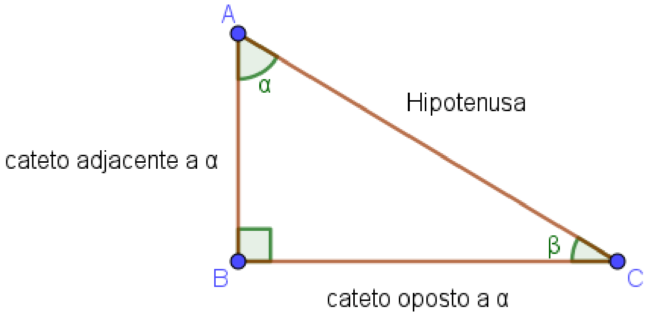
Tendo por intenção normalizar a diversidade, foram utilizadas as diversas representações das razões trigonométricas: sin α, sen α , cos α, tan α e tg α.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
No final da questão 2.3. foi formalizado o conceito de razão trigonometria e introduzidas as designações.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Razões Especiais (I) - Cos, Sen, Tg

1. Num triângulo retângulo qualquer, define-se como cateto oposto e cateto adjacente a um dos seus ângulos agudos, α, o lado oposto ao ângulo α e lado adjacente ao ângulo α, respetivamente, como mostra a figura.



Usando as letras da figura, identifica os catetos oposto e adjacente ao ângulo β.

2. Recorre à apliqueta **Z7EM GHMT**, onde está construído um triângulo retângulo a que chamaremos Triângulo 1.

2.1. Designa por α, um qualquer ângulo agudo do triângulo.

Constrói, na apliqueta disponibilizada, três triângulos semelhantes ao inicial, identificando em cada um deles o ângulo correspondente a α e completa a tabela seguinte:

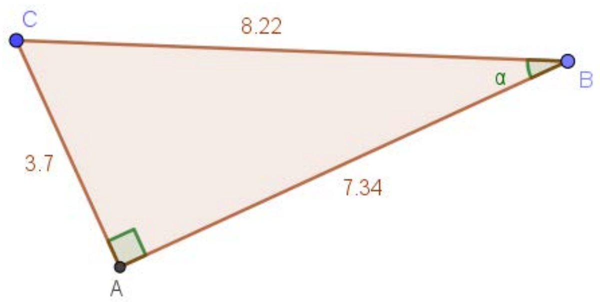
	Comprimento do cateto oposto a α	Comprimento do cateto adjacente a α	Comprimento da hipotenusa
Triângulo 1			
Triângulo 2			
Triângulo 3			
Triângulo 4			

2.2. Com base nos dados registados na alínea anterior, completa a tabela com os quocientes indicados.

	$\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$
Triângulo 1			
Triângulo 2			
Triângulo 3			
Triângulo 4			

2.3. Que relação podes estabelecer entre as medidas dos lados de cada triângulo e cada um dos quocientes calculados?

3. Escreve as razões trigonométricas do ângulo α, para o triângulo apresentado.



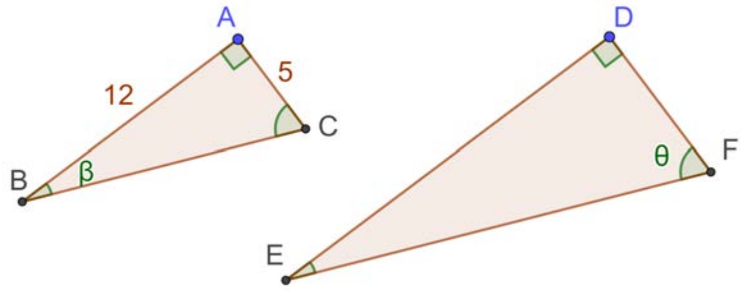
4. Na figura estão representados os triângulos retângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.

Considera $A\widehat{B}C = D\widehat{E}F$.

4.1. Mostra que os triângulos são semelhantes.

4.2. Determina os valores de $sen\ \beta$, $cos\ \beta$ e $tg\ \beta$.

4.3. Determina os valores de $sen\ \theta$, $cos\ \theta$ e $tg\ \theta$.



5. Com a utilização da régua e do transferidor, define uma estratégia que te permita determinar o valor de $tan\left(30^o\right)$.

Explica como procedeste.

Tarefa 4 - Razões Especiais (II) - Cos, Sen, Tg

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 4 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo;
- Distinguir as razões trigonométricas através da confrontação de situações simples;
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica;
- Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Os alunos trabalharam esta tarefa individualmente.
A questão 1, teve por intenção o manuseamento das calculadoras, nomeadamente, no que respeita à realização de operações que envolvem amplitudes de ângulos.

Razões Especiais (II) - Cos, Sen, Tg

1. A tua calculadora permite determinar o valor das razões trigonométricas de qualquer ângulo. Vamos considerar as amplitudes de ângulos em graus (*Degrees*).

Recorre à tua calculadora e indica um valor aproximado, às centésimas, para:

1.1. $sin\ (65°)$

1.2. $cos\ (52°)$

1.3. $tan\ (48°)$

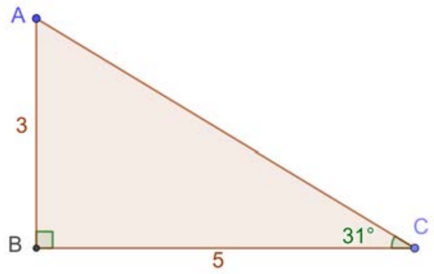
2. A Marta utilizou a calculadora para determinar o valor de $sen\ (85°)$ e obteve $1,25$.

O Nuno referiu que o valor apresentado pela Marta era impossível, pois o valor do seno de um ângulo nunca pode ser superior a 1.

Apresenta um argumento que valide a afirmação do Nuno.

Entre que valores pode variar o seno de um ângulo agudo? E o cosseno? E a tangente? Justifica a tua resposta.

3. Considera o seguinte triângulo.

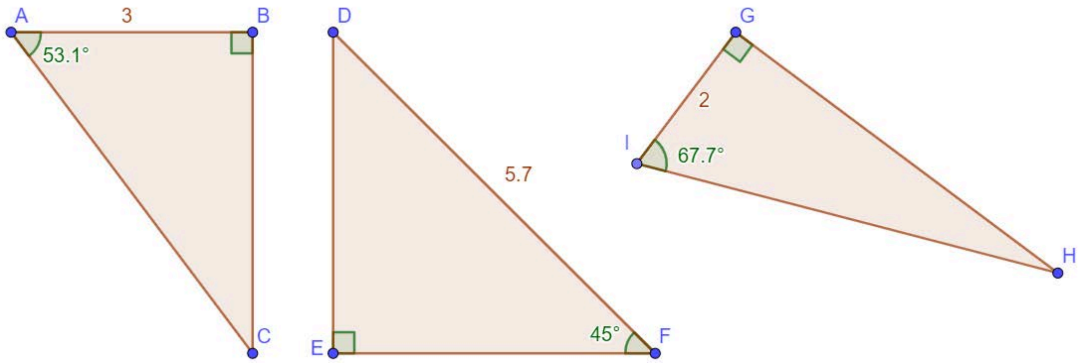


3.1. Escreve $\frac{3}{5}$ na forma de número decimal.

3.2. Recorrendo à calculadora, calcula o valor de $tg\ (31°)$

3.3. Compara os valores que obtiveste nas alíneas anteriores. Justifica a relação encontrada.

4. Considera os seguintes triângulos retângulos.



Tendo em consideração os dados apresentados e utilizando a tua calculadora, determina, com aproximação às décimas:

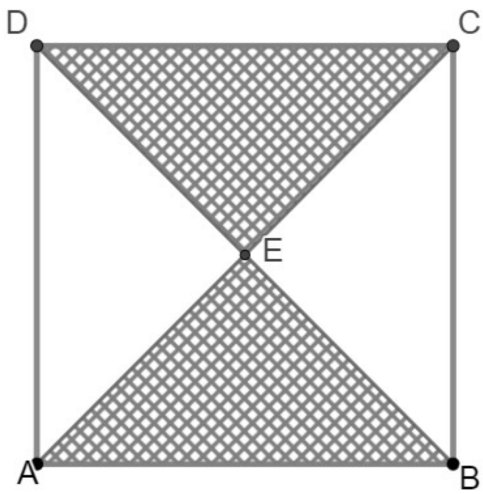
4.1. $\overline{BC}$

4.2. $\overline{ED}$

4.3. $\overline{IH}$

5. No jardim José Maria dos Santos, em Pinhal Novo, é possível observar um painel em calçada portuguesa onde constam algumas figuras geométricas.

O esquema seguinte representa um dos quadrados presentes nesse painel.



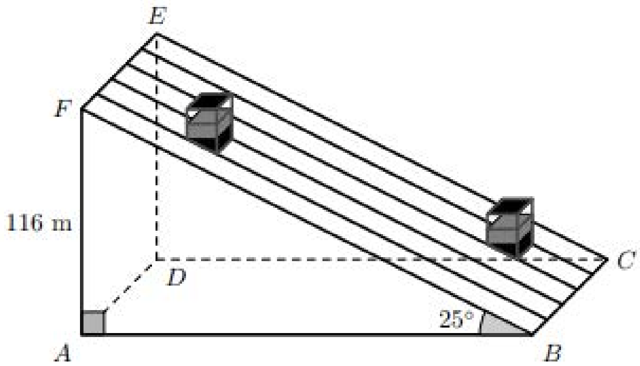
5.1. Justifica que os triângulos $[ABE]$ e $[ABC]$ são semelhantes.

5.2. Qual é a amplitude do ângulo ABE?

5.3. Sabendo que $\overline{BE} = 80\ cm$, qual é a área ocupada pelos triângulos cinzentos em cada um dos quadrados do painel?

6. Na figura seguinte, à esquerda, é apresentada uma fotografia do elevador do Bom Jesus do Monte, em Braga. Atualmente, este elevador é o funicular movido por energia hidráulica mais antigo do mundo, ainda em funcionamento.

Na figura, à direita, apresenta-se um prisma triangular reto $[ABCDEF]$, que é um modelo geométrico da rampa onde as cabinas do elevador se deslocam.



Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- $F\widehat{B}A = 25°$
- $\overline{AF} = 116\ m$
- a base $[BAF]$do prisma é um triângulo retângulo em A.

O modelo geométrico não está desenhado à escala.

Determina o comprimento da rampa, ou seja, $\overline{BF}$.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, quatro casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

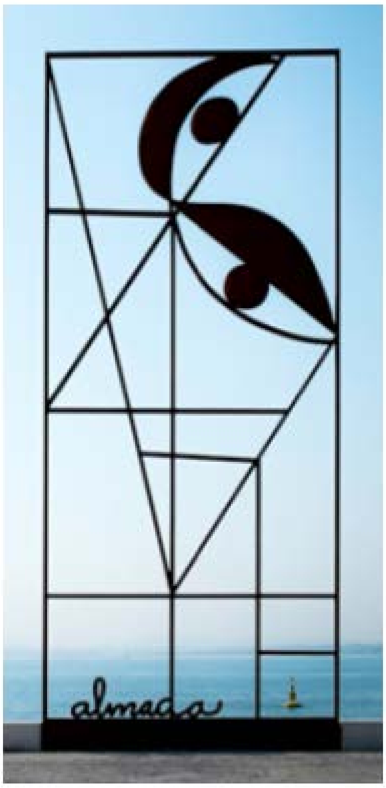
(Fonte: Adaptado de IAVE (2022), Prova Final 3.º Ciclo, 1.ª fase)

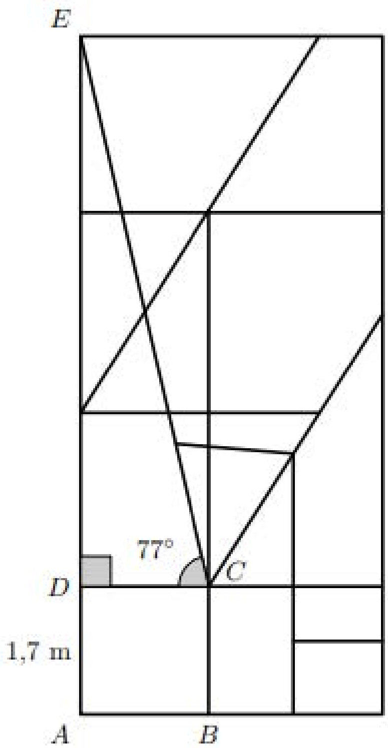
7. A figura ao lado, à esquerda, é uma fotografia do monumento comemorativo dos 120 anos do nascimento de Almada Negreiros, situado na Avenida Ribeira das Naus, em Lisboa.

A figura da direita é um esquema que representa parte desse monumento, no qual estão assinalados o quadrado $[ABCD]$e o triângulo $[CDE]$, retângulo em D.

Sabe-se que:

- o quadrado representado por $[ABCD]$ tem $1,7\ m$ de lado;
- $E\widehat{C}D = 77°$





O esquema não está desenhado à escala.

Calcula a altura do monumento, ou seja, $\overline{AE}$.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades. Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2023), Prova Final 3.° Ciclo, Época especial)

Tarefa 5 - Mais medidas inacessíveis

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 5 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Resolver problemas utilizando razões trigonométricas;
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos;
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações;
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade;
- Trabalhar com os outros;
- Tomar decisões fundamentadas em argumentos próprios.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em grupos de 4 ou 5 elementos.
O recurso às aplicações de medição de ângulos, contribuiu para uma melhor gestão do tempo de realização da tarefa.

Mais medidas inacessíveis

"O astrolábio é um instrumento que serve para medir ângulos.

Há muito tempo, há cerca de 500 anos, os navegadores portugueses que chegaram às ilhas dos Açores, Cabo Verde e ao Brasil, usaram o astrolábio para não se perderem no mar. Com o astrolábio eles podiam marcar a sua posição sobre a Terra, medindo o ângulo que o Sol fazia com o horizonte.

Astrolábio que os navegadores portugueses utilizaram nos navios para medir a altura do Sol ao longo do dia.

Medindo com o astrolábio o ângulo que o Sol faz com o horizonte.

Com um astrolábio podes determinar a altura da tua casa, da tua escola ou das árvores de um jardim. O mesmo pode ser feito com um quadrante, que é como se fosse a quarta parte de um astrolábio."

(Fonte: https://www.cienciaviva.pt/equinocio/onde_estas/astrolabio_e_quadrante.asp)

Com o evoluir da tecnologia, é possível agora utilizar aplicações (app) para 'smartphone' que permitem medir ângulos, com alguma precisão.

Sugestão:

Android: "Simple Inclinometer"	IOS: "Protractor+"

Parte I

O teu grupo deve definir uma estratégia que permita determinar a altura do pavilhão gimnodesportivo, evidenciando o contributo da trigonometria neste processo.

Não se esqueçam de referir os materiais/instrumentos necessários para a realização da tarefa.

Parte II

Devem agora proceder à recolha das medidas necessárias para determinar a altura do pavilhão gimnodesportivo, por forma a elaborar um póster com as características a seguir apresentadas.

No póster deve constar a seguinte informação:

Descrição e ilustração (fotografias) do processo da obtenção da altura do pavilhão gimnodesportivo;

Descrição e ilustração (fotografias) do processo de cálculo da altura do pavilhão gimnodesportivo;

Fundamentar a escolha da razão trigonométrica usada;

Identificação dos elementos do grupo.

Tarefa 6 - Em busca do ângulo escondido

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 6 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo;
- Distinguir as razões trigonométricas através da confrontação de situações simples;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.

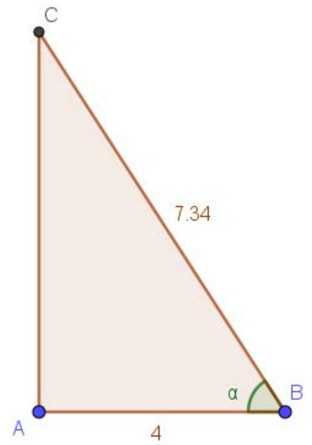
Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
A questão 1 permitiu aos alunos trabalharem o conceito de operação inversa das razões trigonométricas já estudadas.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Em busca do ângulo escondido

1. O professor do Miguel propôs um desafio na aula:

"Será possível determinar a amplitude de um ângulo agudo, num triângulo retângulo, como o sugerido na figura seguinte, do qual apenas se conhecem os comprimentos de dois lados?"



1.1. Usa a apliqueta de código **TV92 R4VG** para desenhares esse triângulo e determina a amplitude dos seus ângulos agudos.

1.2. O Miguel procurou usar as potencialidades da sua calculadora para responder ao desafio do professor e apresentou o seguinte esquema:

> No exemplo apresentado, $[BC]$ é a hipotenusa do triângulo retângulo e, para o ângulo α, $[AB]$ é o cateto adjacente.
>
> Como $cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$,
>
> $cos\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{7{,}34} \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow cos\ \alpha = 0,544959... \Leftrightarrow cos\ \alpha \simeq 0,5450$
>
> A calculadora permite determinar a amplitude do ângulo recorrendo à operação inversa do cosseno, o $arcos$ (ou cos^{-1}):
>
> $cos\ \alpha = 0,5450 \Leftrightarrow \alpha = arcos(0,5450) \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow \alpha = 56,975336... \Leftrightarrow \alpha \simeq 57$
>
> Assim, o ângulo α tem uma amplitude de, aproximadamente, 57°.

Será que se o Miguel tivesse usado o seno ou a tangente, chegaria à mesma amplitude do ângulo α ? Apresenta os cálculos necessários para responderes à questão.

2. Recorre à tua calculadora e indica um valor do ângulo, aproximado às unidades, para:

2.1. $sen\ (\quad) = 0,45$

2.2. $cos\ (\quad) = 0,8$

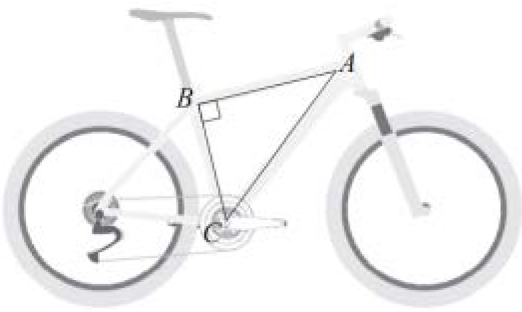
2.3. $tg\ (\quad) = 1$

3. A Rita quer comprar uma bicicleta de montanha para praticar desporto ao ar livre.

Na figura ao lado, estão representados uma bicicleta e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B;
- $\overline{BC} = 432\,mm$ e $\overline{AB} = 565\,mm$.

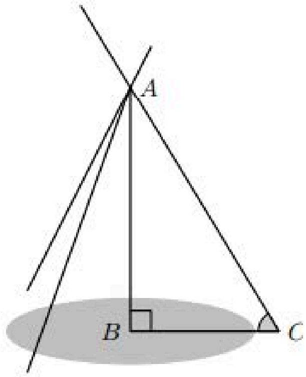


A figura não está desenhada à escala.

Calcula a amplitude do ângulo BAC. Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, quatro casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2023), Prova Final 3.º Ciclo, 2.ª fase)

4. A figura ao lado é uma fotografia da escultura Esforço, que se encontra em Vila Nova de Cerveira, do escultor português José Rodrigues. Esta escultura é constituída por um tripé no qual se suspende, por um fio, sobre um lago, uma peça de pedra. A figura da direita apresenta um modelo geométrico que ilustra a escultura.



Relativamente ao modelo geométrico, sabe-se que:

- o ponto A representa a ligação entre os elementos do tripé;
- o ponto C é o ponto de contacto de um desses elementos com o solo;
- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B;
- $\overline{AC} = 7\,m$ e $\overline{AB} = 6\,m$.

O modelo geométrico não está desenhado à escala. Determina a amplitude do ângulo ACB. Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, três casas decimais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2021), Prova de Matemática do 3.º Ciclo)

Tópico

Figuras planas

Conteúdos de aprendizagem por tarefa

			Capacidades Matemáticas						Capacidades e atitudes gerais transversais							
Aulas 50 min	**Nome da Tarefa**	**Subtópicos**	RP	RM	PC	Com	Re	Con	PCr (D)	Cri (D)	Col (E)	AC (F)	Aut (F)	IA (F)	Per (F)	Val (I)
3	Tarefa 1 - Às voltas com elementos da circunferência	• Ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência • Construções e lugares geométricos		X		X					X		X		X	
2	Tarefa 2 - Ângulos especiais	• Ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência		X		X			X			X		X		
3	Tarefa 3 - Polígonos regulares e circunferências	• Ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência	X	X						X					X	
3	Tarefa 4 - Pontos especiais	• Construções e lugares geométricos			X		X	X		X						X

Legenda

RP - Resolução de Problemas
RM - Raciocínio Matemático
PC - Pensamento Computacional
Com - Comunicação Matemática
Re - Representações Matemáticas
Con - Conexões Matemáticas

D - Pensamento crítico e pensamento criativo
E - Relacionamento interpessoal
F - Desenvolvimento pessoal e autonomia
I - Saber científico, técnico e tecnológico

PCr - Pensamento Crítico
Cri - Criatividade
Col - Colaboração
AC - Autoconfiança
Aut - Autorregulação
IA - Iniciativa e Autonomia
Per - Perseverança
Val - Valorização do papel da Matemática

Tarefa 1 - Às voltas na circunferência

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 1 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer a tangente à circunferência como a perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência;
- Resolver problemas envolvendo circunferências aplicando as relações estudadas;
- Apresentar, discutir e contrapor, de forma fundamentada, relações entre ângulos, arcos e cordas;
- Identificar circunferência, círculo e mediatriz de segmento como lugares geométricos;
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Trabalhar com os outros;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos;
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Aos alunos foram propostas questões que permitiram explorar simultaneamente os subtópicos ângulo ao centro numa circunferência e construções e lugares geométricos.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Às voltas na circunferência

Lembra que:

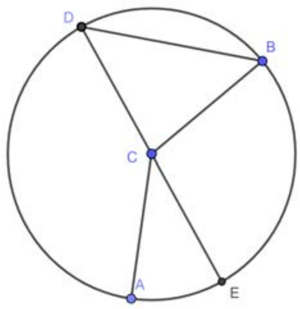
Raio de uma circunferência é um segmento de reta em que um dos extremos é o centro e o outro extremo é um ponto da circunferência.

Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujos extremos são pontos da circunferência.

Diâmetro de uma circunferência é um segmento de reta cujos extremos são pontos da circunferência e que passa pelo centro.

Arco de uma circunferência é uma porção de circunferência compreendida entre dois pontos da circunferência.

1. De acordo com as definições acima apresentadas e tendo por base a circunferência ao lado e os pontos nela assinalados, indica usando as letras da figura:



1.1. um raio _______

1.2. uma corda ________

1.3. um diâmetro ________

1.4. um arco ______

2. Recorre à apliqueta com código **YSJJ 2NZ3** e na circunferência que te é dada na Parte 1, procede da seguinte forma:

(A) desenha duas cordas paralelas;

(B) desenha as duas cordas que se obtêm através da ligação dos extremos consecutivos das cordas paralelas;

(C) desenha os dois arcos que estão entre as cordas paralelas;

(D) mede os arcos e as cordas compreendidos entre as cordas paralelas que traçaste em A)

2.1. Estabelece uma conjetura sobre as medidas dos arcos compreendidos entre cordas paralelas.

2.2. Estabelece uma conjetura sobre as medidas das cordas compreendidas entre cordas paralelas.

2.3. Será que as conjeturas são válidas para quaisquer duas cordas independentemente das suas posições relativas? Mostra como chegaste à tua resposta, exemplificando na Parte 2 da apliqueta.

3. Designa-se por **reta tangente** a uma circunferência toda a reta que tem apenas um ponto comum com a circunferência (ponto de tangência).

Recorre à apliqueta **RV7F P8ZD** e procede da seguinte forma:

(A) desenha uma circunferência;

(B) desenha uma reta tangente à circunferência, no ponto assinalado;

(C) marca um ponto qualquer sobre a reta tangente;

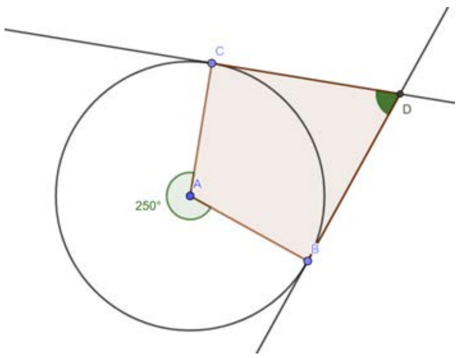
(D) desenha o raio, que contém o ponto de tangência;

(E) Determina a amplitude do ângulo formado pela reta tangente e pelo raio da circunferência que traçaste anteriormente.

O que podes dizer sobre a posição relativa entre a tangente a uma qualquer circunferência e o raio que contém o ponto de tangência? Explica a tua resposta.

Nota:  Tangentes (Seleciona um ponto ou reta, depois a circunferência)

4. Considera a circunferência de centro em A. sabe-se que $[ABCD]$ é um quadrilátero e que as retas BD e CD são tangentes à circunferência nos pontos B e C, respetivamente.



4.1. Determina a amplitude do ângulo CAB.

4.2. Determina a amplitude do ângulo CDB. Mostra como chegaste à tua resposta.

5. Sabendo que a **Mediatriz** de um segmento de reta é o conjunto de pontos equidistantes aos extremos desse segmento de reta, recorre à apliqueta com o código **HKQW RU65** e responde às seguintes questões:

5.1. Na parte 1, traça uma corda da circunferência e a respetiva mediatriz. Qual a posição relativa do centro da circunferência e a mediatriz? Justifica.

5.2. Na parte 2, traça duas cordas da circunferência e as respetivas mediatrizes. O que representa o ponto de interseção das duas mediatrizes? Justifica.

Tarefa 2 - Ângulos especiais

<u>Notas para o professor:</u>

A exploração da tarefa 2 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência;
- Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a do arco e com a medida da corda correspondente;
- Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a do arco associado;
- Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a do ângulo ao centro com o mesmo arco associado;
- Resolver problemas envolvendo circunferências aplicando as relações estudadas;
- Apresentar, discutir e contrapor, de forma fundamentada, relações entre ângulos, arcos e cordas.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos;
- Tomar decisões fundamentadas em argumentos próprios.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Foi feita a opção de apresentar definições que contribuíram para a realização da tarefa de uma forma autónoma.

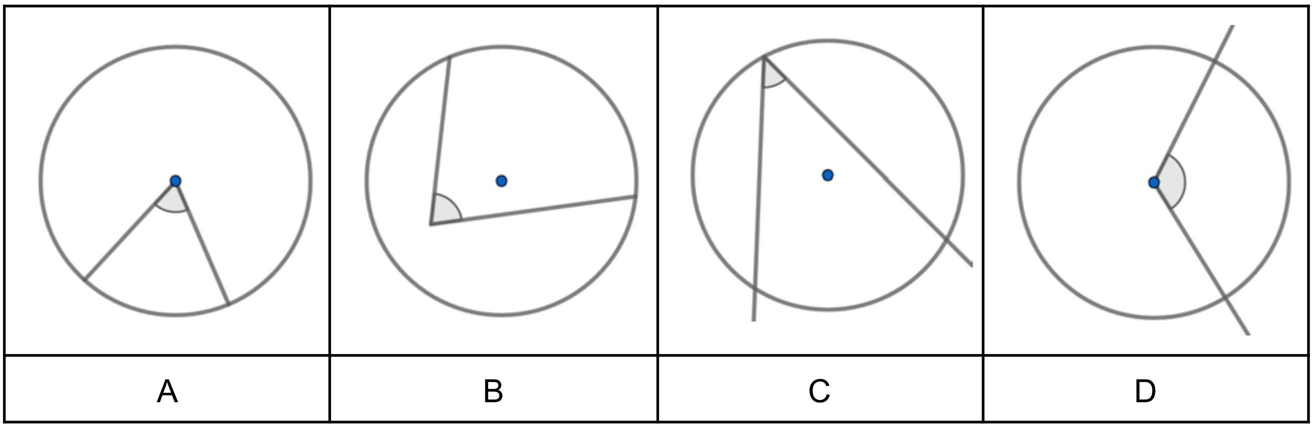
As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Ângulos especiais

Definição 1

Chama-se **ângulo ao centro** ao ângulo cujo vértice está sobre o centro da circunferência e os lados contêm raios dessa circunferência.

1. Atendendo à definição 1, identifica os ângulos ao centro que estão presentes no seguinte conjunto de imagens:



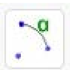
2. Recorre à apliqueta com o código **SVM6 YJX3**.

Na circunferência apresentada:

(A) desenha um ângulo ao centro e o arco que lhe corresponde;

(B) obtém as amplitudes do ângulo ao centro e do arco desenhados por ti.

Compara as amplitudes do arco com a de qualquer um dos ângulos ao centro obtidos.

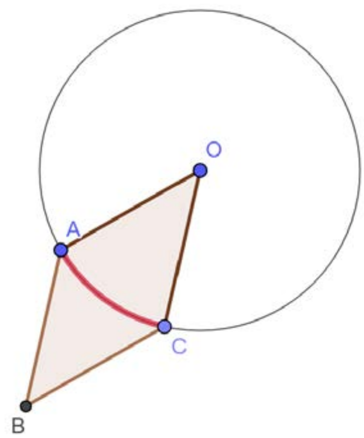
Nota:  Amplitude do arco (Seleciona centro, ponto, ponto)

3. Na figura seguinte está representado o paralelogramo $[OABC]$.

Sabe-se que a amplitude do arco AC é $48°$.

Determina a amplitude dos ângulos internos do paralelogramo.

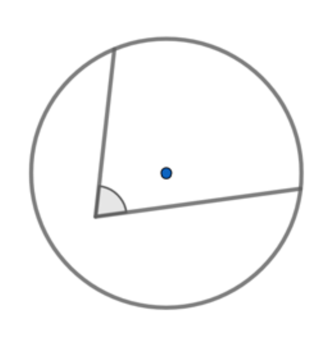
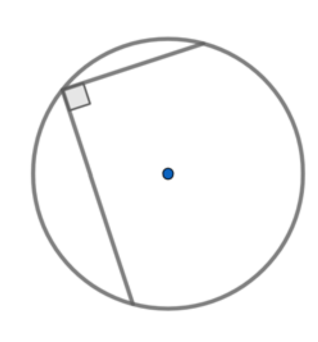
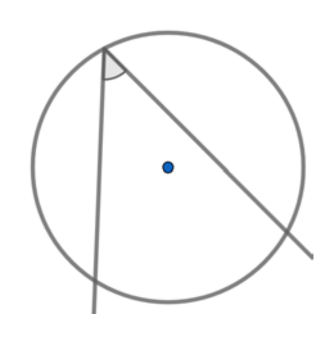
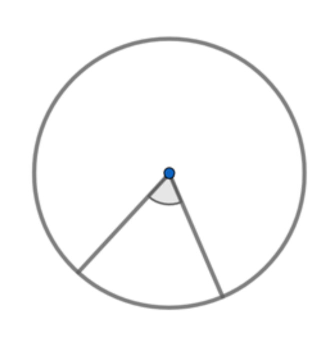
Mostra como chegaste à resposta.



Definição 2

Chama-se **ângulo inscrito** ao ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e os lados contêm cordas dessa circunferência.

4. Atendendo à definição 2, identifica os ângulos inscritos que estão presentes no seguinte conjunto de imagens:

			
A	B	C	D

5. Recorre à apliqueta com o código **AK5W FHVR**.

Na circunferência apresentada:

(A) desenha um ângulo inscrito;

(B) desenha o arco nele contido;

(C) determina as amplitudes do ângulo inscrito e do seu arco correspondente.

5.1. Escreve uma conjetura que relacione as amplitudes de um ângulo inscrito e do arco correspondente.

5.2. Desenha um ângulo ao centro que contenha o mesmo arco que o ângulo inscrito desenhado anteriormente.

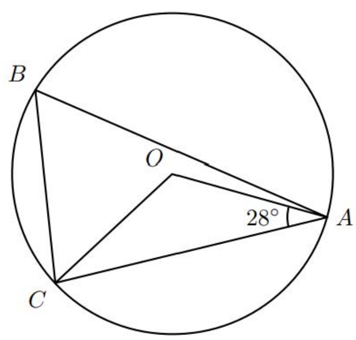
Escreve uma conjetura que relacione os dois ângulos.

6. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro O, o triângulo $[ABC]$, inscrito na circunferência, e o triângulo $[OAC]$.

Os pontos A, B e C pertencem à circunferência.

A amplitude do ângulo OAC é $28°$.

A figura não está desenhada à escala. Calcula a amplitude, em graus, do ângulo CBA. Apresenta todos os cálculos que efetuares.



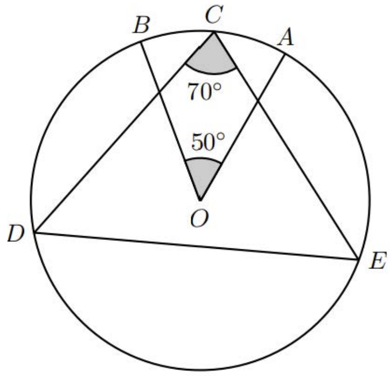
(Fonte: IAVE (2023), Prova Final 3.º Ciclo, Época especial)

7. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro O.

Os pontos A, B, C, D e E pertencem à circunferência.

Sabe-se que:

- a amplitude do ângulo AOB é $50°$;
- $\overline{CD} = \overline{CE}$;
- $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$;
- a amplitude do ângulo DCE é $70°$.



A figura não está desenhada à escala.

Calcula a amplitude, em graus, do arco BD.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

(Fonte: IAVE (2023), Prova Final 3.° Ciclo, 2.ª fase)

8. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro O e o triângulo $[ABC]$.

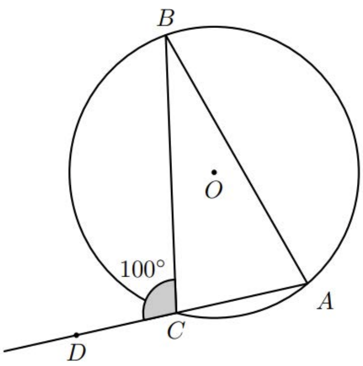
Os pontos $A,\ B$ e C pertencem à circunferência, e o ponto D é exterior à circunferência e pertence à semirreta $\dot{A}C$.

A amplitude do ângulo BCD é $100°$.

A figura não está desenhada à escala.

Calcula a amplitude, em graus, do arco BCA.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.



(Fonte: IAVE (2023), Prova Final 3.° Ciclo, 1.ª fase)

Tarefa 3 - Polígonos regulares e circunferências

Notas para o professor:

A exploração da tarefa 3 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Raciocinar matematicamente, relacionando a classificação de quadriláteros e quadriláteros que se inscrevam numa circunferência;
- Realizar construções em AGD que mobilizem lugares geométricos, polígonos regulares, relações entre ângulos e isometrias, estabelecendo conexões entre diferentes tópicos abordados em geometria plana;
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia;
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma;
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Na questão 2. considerou-se que uma família de quadriláteros era inscritível numa circunferência quando todos os elementos dessa família verificassem a condição de terem ângulos opostos suplementares.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Polígonos regulares e circunferências

1. Recorre à apliqueta com o código **TDH3 BUCF** e responde às seguintes questões.

1.1. Na parte 1, inscreve um retângulo numa circunferência. O que podes dizer sobre as amplitudes de dois ângulos opostos?

1.2. Na parte 2, inscreve um trapézio isósceles numa circunferência. O que podes dizer sobre as amplitudes de dois ângulos opostos?

1.3. Na parte 3, inscreve um quadrilátero qualquer numa circunferência. O que podes dizer sobre as amplitudes de dois ângulos opostos?

1.4. É possível inscrever um losango numa circunferência? Explica a tua resposta.

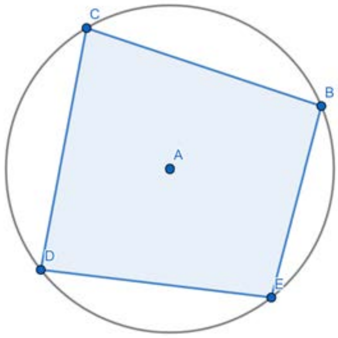
2. Preenche a seguinte tabela, justificando as tuas opções.

Famílias de quadriláteros	Inscritíveis numa circunferência?	
	SIM	NÃO
Quadrados		
Retângulos		
Losangos		
Papagaios		
Trapézios		
Trapézios retângulos		
Paralelogramos		

3. O quadrilátero $[BCDE]$ está inscrito na circunferência de centro A e raio $[AB]$.

Determina a amplitude de cada um dos ângulos interno do quadrilátero $[BCDE]$, sabendo que:

- a amplitude do ângulo DCB é $86,2°$;
- a amplitude do arco EBC é $172,4°$.

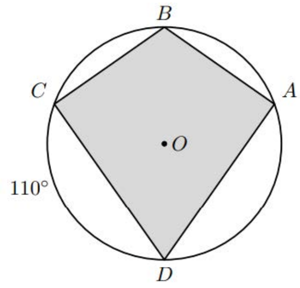


4. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e o papagaio $[ABCD]$ inscrito na circunferência.

A amplitude do arco CD é $110°$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Determina, em graus, $A\hat{D}C$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.



(Fonte: IAVE (2019), Prova Final 3.º Ciclo, 1.ª fase)

5. Recorre à apliqueta **VTKK N4SX.**

Constrói um triângulo retângulo, sabendo que AB é a sua hipotenusa.

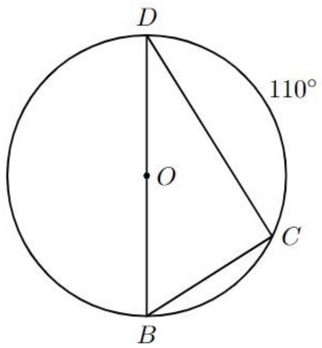
5.1. O triângulo que construíste é único? Porquê?

5.2. Desenha a circunferência cujo diâmetro é o segmento AB. O que podes referir sobre a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência? Justifica a tua resposta.

6. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O. Os pontos $B,\ C$ e D pertencem à circunferência.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[BD]$é um diâmetro da circunferência;
- $\overset{\frown}{CD} = 110°$.



A figura não está desenhada à escala.

Qual é a amplitude do ângulo BDC?

(A) $70°$ **(B)** $55°$ **(C)** $45°$ **(D)** $35°$

(Fonte: Adaptado de IAVE (2022), Prova Final 3.º Ciclo, 1.ª fase)

Tarefa 4 - Pontos especiais

<u>Notas para o professor:</u>

A exploração da tarefa 4 procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar circunferência, círculo, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento de reta como lugares geométricos;
- Construir polígonos regulares inscritos numa circunferência relacionando as medidas dos lados com as medidas dos comprimentos e das amplitudes dos arcos, e das respetivas amplitudes dos ângulos ao centro;
- Realizar construções em AGD que mobilizem lugares geométricos, polígonos regulares, relações entre ângulos e isometrias, estabelecendo conexões entre diferentes tópicos abordados em geometria plana;
- Extrair a informação essencial de um problema;
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema;
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes;
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões);
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma;
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Os alunos trabalharam esta tarefa organizados em pares.
Nesta tarefa houve espaço para a formalização do conceito de lugar geométrico e da operacionalização das suas construções, através da utilização de régua, compasso e transferidor.
Na questão 4.4. foi dada a possibilidade aos alunos de inscreverem outros polígonos regulares na circunferência.

As atividades que permitem gerar as Tarefas do *GeoGebra* aqui utilizadas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/u5djwgsc. Deverá começar por copiar a atividade que pretende usar com os seus alunos e gravá-la na sua conta. De seguida, transformá-la em Tarefa do GeoGebra. Só procedendo deste modo poderá guardar as resoluções dos seus alunos na sua área de trabalho.

Pontos especiais

Chamamos lugar geométrico a um conjunto de pontos que gozam de uma propriedade comum.

1. No mapa apresentado são referidas algumas capitais de distrito. Assinala no mapa:

1.1. o lugar geométrico dos pontos cuja distância a Viseu seja menor ou igual à distância entre Viseu e a Guarda;

1.2. o lugar geométrico dos pontos equidistantes a Beja e Faro;

1.3. o lugar geométrico dos pontos equidistantes das semirretas que formam o ângulo Évora - Setúbal - Santarém.

2. Desenha no teu caderno um triângulo $[ABC]$.

2.1. Qual é o lugar geométrico dos pontos do plano, que estão a uma distância igual de B e de C?

(A) circunferência de centro em B e raio $[BC]$

(B) círculo de centro em C e raio $[BC]$

(C) mediatriz do segmento de reta $[BC]$

(D) bissetriz do ângulo BAC.

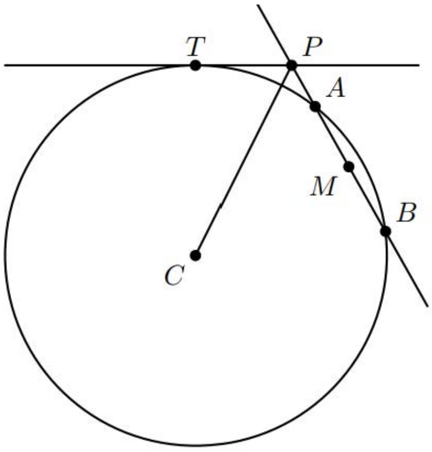
2.2. Assinala no triângulo $[ABC]$ o conjunto dos pontos equidistantes dos lados AB e AC.

3. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro no ponto C e os pontos T, P, A, M e B.

A figura não está desenhada à escala.

Sabe-se que:

- os pontos T, A e B pertencem à circunferência;
- M é o ponto médio da corda $[AB]$;
- a reta tangente à circunferência no ponto T interseta a reta AB no ponto P.



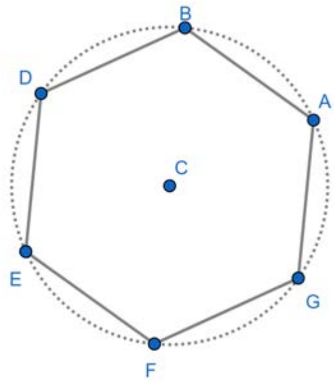
3.1. Indica, recorrendo a letras da figura, um ponto pertencente à mediatriz do segmento de reta $[AT]$.

3.2. Sabe-se que $T\widehat{P}C = 35^o$.

Calcula $P\widehat{C}T$.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2015) Prova Final 3.º Ciclo, Época especial)

4. Na figura ao lado está um hexágono regular inscrito numa circunferência.



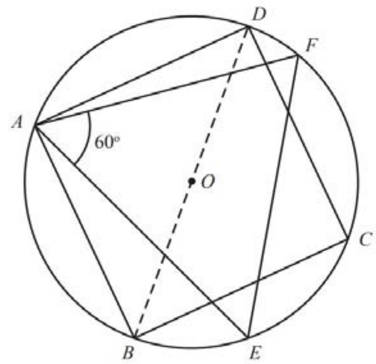
4.1. Qual a amplitude do ângulo ao centro ACB? E do arco AB?

4.2. Para uma circunferência com raio de 5 cm, determina a medida de comprimento do arco FG.

4.3. Acede à apliqueta com o código **PWD5 NAKM** e inscreve na circunferência apresentada um hexágono regular, apresentando o algoritmo de construção.

4.4. Acede à apliqueta com o código **HPDT PG4M** e, adaptando o algoritmo de construção da questão **4.3.**, inscreve um pentágono regular na circunferência apresentada.

5. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro no ponto O. Estão também representados o triângulo $[AEF]$ e o quadrado $[ABCD]$, cujos vértices pertencem à circunferência.



5.1. Identifica, usando as letras da figura, dois pontos pertencentes à mediatriz do segmento de reta $[BD]$.

5.2. Sabendo que a amplitude do arco FD é 20^o e que o ângulo FAB tem amplitude 60^o, determina a amplitude, em graus, do arco BE.

Mostra como chegaste à tua resposta.

(Fonte: Adaptado de IAVE (2014), Teste Intermédio 9.º ano)