FUNÇÕES

Matemática A
10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:
Coletânea de tarefas das turmas piloto - Funções (Matemática A 10.º ano)

Autoria e adaptação:
Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:
Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:
Lisboa, julho de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - GEOMETRIA ANALÍTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 No tempo dos babilónicos	**Generalidades acerca de funções** Evolução histórica do conceito de função e formas de representação Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente	• Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas. • Pode ser feito através de tabelas numéricas (quadrados, cubos, recíprocos, raízes quadradas e raízes cúbicas), tabelas trigonométricas de Ptolomeu/Copérnico ou lançamento de projéteis.	Trabalho a pares	• Práticas enriquecedoras e criatividade • História da Matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)
2	Tarefa 2 A tabela de Copérnico	**Generalidades acerca de funções** Evolução histórica do conceito de função e formas de representação Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente	• Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas.	Trabalho a pares	• Práticas enriquecedoras e criatividade • História da Matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B)

2	Tarefa 3a Imitar o gráfico	**Generalidades acerca de funções** Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente Domínio, conjunto de chegada, contradomínio, variável independente e variável dependente	• Identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função em contextos históricos, de modelação, ou abstratos, com recurso a vários tipos de representações (tabelas, gráficos e expressões analíticas).	Trabalho em grupo	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)
2	Tarefa 3b Modelar com gráficos	**Generalidades acerca de funções** Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente Domínio, conjunto de chegada, contradomínio, variável independente e variável dependente	• Identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função em contextos históricos, de modelação, ou abstratos, com recurso a vários tipos de representações (tabelas, gráficos e expressões analíticas).	Trabalho individual	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
2	Tarefa 4 Vela a arder	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função afim	• Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia.	Trabalho em grupo	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

2	Tarefa 5 Estudar a função afim	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função afim	• Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia.	Trabalho em grupo	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas, modelação e conexões	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
2	Tarefa 6 Generalizar a resolução de equações do 1.º grau	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função afim	• Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia.	Trabalho em grupo	• Recurso sistemático à tecnologias • Tarefas e recursos educativos	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
2	Tarefa 7 Galileu e a parábola	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente. • Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	Trabalho em grupo	• História da matemática • Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)

2	Tarefa 8 Sobe e desce	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente. • Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas. • Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	Trabalho a pares	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação matemática	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 9 Retângulo de área máxima	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente. • Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas. • Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	Trabalho em grupo	• História da matemática • Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspectivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 10 Da afim à quadrática	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente. • Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	Trabalho em grupo	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspectivas e a construir consensos (E)
2	Tarefa 11 Resolvendo equações do 2.º grau	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas	Trabalho em grupo	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia.	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 12 Transformações de funções	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \, . \, f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.	Trabalho a pares	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 13 Transformações de funções quadráticas	**Funções polinomiais de grau não superior a 2** Função quadrática	• Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função f(x-a), f(x)+b, c .f(x), com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função de domínio ℝ, definida por f(x)=x2, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.	Trabalho a pares	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 14 Água e não só	**Funções definidas por ramos**	• Estudar gráfica e analiticamente funções definidas por ramos e utilizá-las em contexto de modelação. • Estudar funções definidas por ramos relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e sinal, em casos simples.	Trabalho em grupo	• Tarefas e recursos educativos • Resolução de problemas, modelação e conexões. • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
1	Tarefa 15 Funções definidas por ramos	**Funções definidas por ramos**	• Estudar gráfica e analiticamente funções definidas por ramos e utilizá-las em contexto de modelação. • Estudar funções definidas por ramos relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e sinal, em casos simples.	Trabalho a pares	• Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)

2	Tarefa 16 Função módulo	**Funções definidas por ramos**	• Estudar funções definidas por ramos relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e sinal, em casos simples. • Reconhecer a função módulo como um caso particular de uma função definida por ramos.	Trabalho a pares	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Tarefa 1

No tempo dos babilónicos

Um dos primeiros povos a usar tabelas com valores numéricos, há mais de 4000 anos, foram os Babilónicos (2000 a.c.).

Supõe-se que este tipo de tabelas era utilizado para tornar os cálculos aritméticos mais simples, nomeadamente para auxílio aos cálculos com volumes.

Considera a tabela abaixo, adaptada de uma utilizada pelos Babilónicos:

1	2	3	4	5	6	7
1	8	27	64	125	216	343

1. Consegues identificar, na segunda linha da tabela, alguma lei de formação dos números?

2. Atendendo a esta relação, responde às questões seguintes:

2.1. Qual é o cubo de 3?

2.2. Qual é o número cujo cubo é 343?

2.3. Para cada valor de x, o seu cubo é dado por: _________, logo, para representar um ponto P(x, y) cuja abcissa seja x, a sua ordenada, y, é dada por: $y =$ _____

2.4. Marca os valores da tabela num referencial cartesiano, tomando os pontos *P(x, y),* em que os valores de x são as abcissas e os seus cubos as ordenadas, y.

2.5. Qual é o domínio e o contradomínio da função definida pela tabela e pelo gráfico?

2.6. Se utilizarmos a regra do cubo de um número e a estendermos a todos os números reais, qual é o domínio e o contradomínio da nova função?

Tarefa 1

No tempo dos babilónicos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo fazer a introdução do tema funções. Para isso, a tarefa é baseada nas tabelas de quadrados e cubos existentes nos tempos dos Babilónios, na antiga Mesopotâmia.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de Funções do Ensino Básico.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 1 tempo letivo (50 minutos).

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares para a sua resolução .

Propõe-se 30 minutos para a sua resolução, a qual poderá passar pelo recurso à tecnologia (calculadora gráfica ou folha de cálculo), e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões em grupo turma.

O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.

Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades em:

- conhecer o vocabulário específico, como por exemplo domínio e contradomínio;
- representar os pontos da tabela num referencial cartesiano, mantendo uma mesma escala para o eixo das ordenadas.

Tarefa 2

A tabela de Copérnico

Introdução

Nicolau Copérnico (1473-1543) foi um astrónomo e matemático polaco

Copérnico, no século XVI, estudou os movimentos dos planetas e escreveu a obra: "As Revoluções dos Orbes Celestes", que foi publicada em 1566.
Nesta obra, Copérnico precisava de relacionar a medida de uma corda subtensa (correspondente) a um arco com a medida do ângulo ao centro. Na figura 1 temos a corda CD subtensa ao arco CAD, associado ao ângulo ao centro $C\hat{O}D$.
Por exemplo, sabe-se que numa circunferência uma corda subtensa num ângulo de 60 graus tem exatamente o mesmo comprimento do raio da circunferência.
Copérnico refere ainda que:

> *"Contudo, penso que será suficiente indicar na Tabela simplesmente as metades das cordas correspondentes ao dobro dos arcos, pois com esta simplificação incluiremos num quadrante o que teria de ser incluído em todo um semicírculo. Isto é particularmente apropriado porque as metades das cordas são mais frequentemente utilizadas nas demonstrações e cálculos do que as cordas inteiras."* (p. 71)

Os termos usados por Copérnico neste parágrafo estão ilustrados na figura 1: o arco CA está associado ao ângulo COA, que varia de 0 graus a 90 graus, sendo que o arco duplo é o arco CAD; a corda subtensa ao arco é CD; e, a semi-corda que subtende o arco duplo é CE.

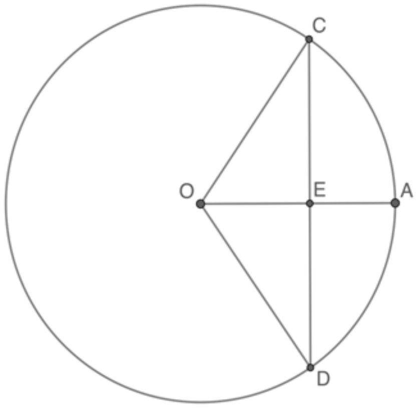


Figura 1 - "Semi-cordas subtendendo arcos duplos"

Para as medidas dos segmentos há uma convenção adotada por Copérnico:

> *"Também nós adotámos uma divisão do diâmetro em 200000 unidades como suficiente para excluir qualquer erro apreciável. Naturalmente, quando as quantidades não correspondem umas às outras, como num número inteiro a outro, é suficiente usar uma aproximação."* (p. 64)

Com um diâmetro de 200000 unidades, o raio será de 100000 unidades. Considera-se que assim a precisão é suficiente para não serem usadas frações na expressão das medidas dos segmentos. Na época não se usava a representação decimal das partes fracionárias dos números.
Nas figuras em anexo podes ver algumas partes da tabela de Copérnico. Nota que as medidas dos ângulos estão em graus e minutos de grau, sabendo-se que 10 minutos de grau correspondem a ⅙ de um grau.

Tarefa

1. Consulta a tabela em anexo e responde aos dois itens seguintes:
   - 1.1. Qual é a medida da semi-corda subtensa ao arco que é o dobro de 9 graus?
   - 1.2. Se a semi-corda for de 98378, qual é o arco associado?

2. Copérnico não tinha calculadoras, pelo que teve de desenvolver métodos geométricos para fazer os cálculos que levaram a esta tabela. Os cálculos em princípio estarão corretos, mas queremos usar as nossas calculadoras para verificar alguns dos resultados de Copérnico. Para isso podemos usar as teclas "*sin*" e "*cos*".
   - 2.1. Tendo em conta a definição geométrica e usando as relações trigonométricas que conheces para triângulos retângulos (seno, cosseno e tangente), que expressão designatória poderá ter uma correspondência que permita relacionar um dado ângulo e a sua correspondente semi-corda? Nota que na figura 1 o triângulo $[OCE]$ é retângulo em E;
   - 2.2. Recorrendo à calculadora, experimenta alguns valores constantes na tabela, em anexo, e verifica se a expressão que obtiveste produz os mesmos resultados da tabela.

   Nota: Tem em conta que os valores da tabela se encontram arredondados às unidades.

Extensão

3. Verifica que, num círculo de raio 100000, os polígonos inscritos de 3, 4 e 6 lados têm os lados indicados por Copérnico, quando ele refere que "o lado do hexágono contém 100000 unidades, o do quadrado 141421 e o do triângulo 173205." (p. 64)

Referência: Copérnico, N. (2014). *As revoluções dos orbes celestes*. 3ª edição. Fundação Calouste Gulbenkian.

Anexo

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
0	10	291	291	6	10	10742	289
0	20	582		6	20	11031	
0	30	873		6	30	11320	
0	40	1163		6	40	11609	
0	50	1454		6	50	11898	
1	0	1745		7	0	12187	
1	10	2036		7	10	12476	
1	20	2327		7	20	12764	288
1	30	2617		7	30	13053	
1	40	2908		7	40	13341	
1	50	3199		7	50	13629	
2	0	3490		8	0	13917	
2	10	3781		8	10	14205	
2	20	4071		8	20	14493	
2	30	4362		8	30	14781	
2	40	4653		8	40	15069	
2	50	4943	290	8	50	15356	287
3	0	5234		9	0	15643	
3	10	5524		9	10	15931	
3	20	5814		9	20	16218	
3	30	6105		9	30	16505	
3	40	6395		9	40	16792	
3	50	6685		9	50	17078	
4	0	6975		10	0	17365	
4	10	7265		10	10	17651	286
4	20	7555		10	20	17937	
4	30	7845		10	30	18223	
4	40	8135		10	40	18509	
4	50	8425		10	50	18795	
5	0	8715		11	0	19081	
5	10	9005		11	10	19366	285
5	20	9295		11	20	19652	
5	30	9585		11	30	19937	
5	40	9874		11	40	20222	
5	50	10164	289	11	50	20507	
6	0	10453		12	0	20791	

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
72	10	95195	89	78	10	97875	59
72	20	95284	88	78	20	97934	58
72	30	95372	87	78	30	97992	
72	40	95459	86	78	40	98050	57
72	50	95545	85	78	50	98107	56
73	0	95630		79	0	98163	55
73	10	95715	84	79	10	98218	54
73	20	95799	83	79	20	98272	
73	30	95882	82	79	30	98325	53
73	40	95964	81	79	40	98378	52
73	50	96045		79	50	98430	51
74	0	96126	80	80	0	98481	50
74	10	96206	79	80	10	98531	49
74	20	96285	78	80	20	98580	
74	30	96363	77	80	30	98629	48
74	40	96440		80	40	98676	47
74	50	96517	76	80	50	98723	46
75	0	96592	75	81	0	98769	45
75	10	96667	74	81	10	98814	44
75	20	96742	73	81	20	98858	43
75	30	96815	72	81	30	98902	42
75	40	96887		81	40	98944	
75	50	96959	71	81	50	98986	41
76	0	97030	70	82	0	99027	40
76	10	97099	69	82	10	99067	39
76	20	97169	68	82	20	99106	38
76	30	97237		82	30	99144	
76	40	97304	67	82	40	99182	37
76	50	97371	66	82	50	99219	36
77	0	97437	65	83	0	99255	35
77	10	97502	64	83	10	99290	34
77	20	97566	63	83	20	99324	33
77	30	97630		83	30	99357	
77	40	97692	62	83	40	99389	32
77	50	97754	61	83	50	99421	31
78	0	97815	60	84	0	99452	30

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
84	10	99482	29	87	10	99878	14
84	20	99511	28	87	20	99892	13
84	30	99539	27	87	30	99905	12
84	40	99567		87	40	99917	
84	50	99594	26	87	50	99928	11
85	0	99620	25	88	0	99939	10
85	10	99644	24	88	10	99949	9
85	20	99668	23	88	20	99958	8
85	30	99692	22	88	30	99966	7
85	40	99714		88	40	99973	6
85	50	99736	21	88	50	99979	
86	0	99756	20	89	0	99985	5
86	10	99776	19	89	10	99989	4
86	20	99795	18	89	20	99993	3
86	30	99813		89	30	99996	2
86	40	99830	17	89	40	99998	1
86	50	99847	16	89	50	99999	0
87	0	99863	15	90	0	100000	0

Tarefa 2

A tabela de Copérnico

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo continuar a efetuar a introdução ao tema funções. Para isso, a tarefa é baseada na obra: "As Revoluções dos Orbes Celestes", da autoria de Copérnico, publicada em 1566.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noções de Funções e de Trigonometria do Ensino Básico.

Materiais e recursos: Material de escrita e calculadora

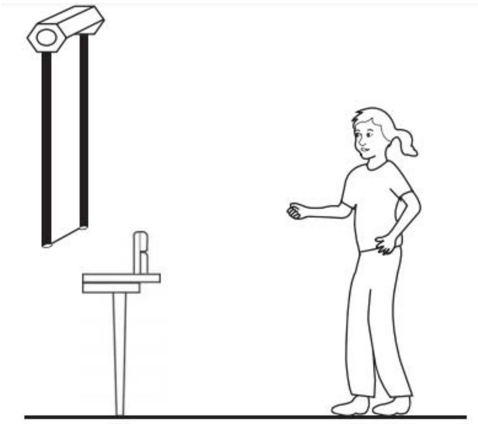
Notas e sugestões:
Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 2 tempos letivos (100 minutos).
O professor deve dispor os alunos em grupos de dois, apresentando a tarefa e lançando o tema à discussão.
Propõe-se 60 minutos para a sua resolução e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões no grupo turma.
O professor acompanha o desempenho dos alunos, proporcionando o feedback necessário, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo.
Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades em:

- conhecer o vocabulário específico, como, por exemplo, a noção de semi-corda;
- utilizar a noção de seno para triângulos retângulos;
- utilizar a calculadora, em graus, para determinar o seno para algumas amplitudes de ângulos.

Tarefa 3a

Imitar o gráfico

Se ocorrer, durante algum tempo, um movimento de aproximação e afastamento entre um objeto e um sensor de movimento que o detete, há pelo menos duas variáveis que se relacionam, o tempo decorrido desde que se inicia o movimento e a respetiva distância do objeto ao sensor.



Considera a situação sugerida pela figura, em que o sensor de movimento está fixo sobre uma mesa e em que um aluno se desloca à sua frente, de modo a fazer um movimento que se traduza numa representação gráfica como a que se pode observar abaixo, ou outra fornecida pelo software utilizado para gerar as representações gráficas e para interpretar os dados recolhidos com o sensor. Nota que a imagem pode ser observada num ecrã onde se projete o software de computador, ao qual o sensor estará conectado, ou numa calculadora gráfica conectada ao sensor.

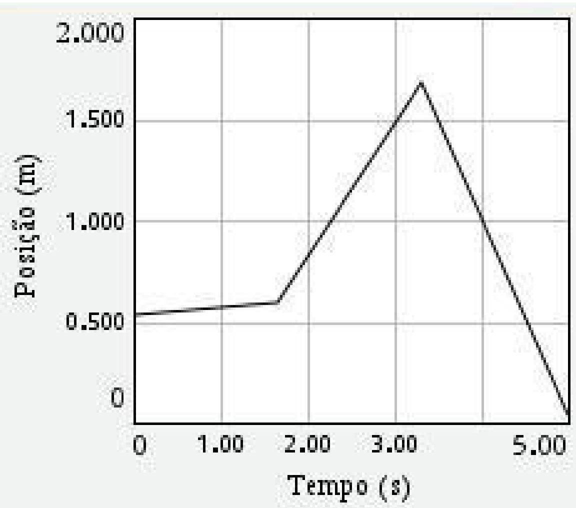


Imagem obtida a partir de uma calculadora gráfica
("Posição" refere-se à distância do aluno ao sensor)

Aciona o dispositivo para que este forneça uma representação gráfica, que deverá tentar repetir (a) (b), movendo-se em frente ao sensor na questão 7. Mas antes disso, responde a algumas questões prévias (1 a 6).

(a) [Texas Instruments]

(b) [Casio]

(a) *Através do QR Code pode obter informações mais técnicas sobre a utilização do sensor de movimento CBR2, com o software TI-Nspire CX II-T.*
(b) *Através do* QR *Code pode obter informações mais técnicas sobre a utilização do sensor de movimento BT55I, com o CILAB, sob software da CASIO.*

1. Qual é a variável representada no eixo horizontal (eixo das abcissas ou eixo dos xx) e qual é a variável representada no eixo vertical (eixo das ordenadas ou eixo dos yy)?
   Quais são as respetivas unidades e a que valores corresponde cada marca em cada eixo?
2. Para iniciar o movimento, a que distância deverás estar do sensor? Antes de realizares o movimento descreve o movimento que necessitas fazer.
3. O que observas na representação gráfica que te permite obter esta informação?
4. Quando iniciares a contagem de tempo, deves iniciar de imediato o movimento ou esperar algum tempo para o iniciar? Logo que inicias o movimento, deves fazê-lo de modo a aproximar-te do sensor ou a afastar-te? Explique/explica a sua/tua resposta.
5. Durante quanto tempo será realizada a experiência? Há algum momento em que a deslocação deve mudar de sentido? Há algum intervalo de tempo em que deve estar parado? Explica a tua resposta.
6. Escreve um plano com uma sequência de ações para que imite o gráfico, desde o início da contagem de tempo.

7. Desloca-te para a área onde será realizada a experiência e começa.

8. Depois da primeira tentativa, faz uma apreciação ao movimento real, por comparação com o modelo fornecido. Se a imitação não foi perfeita, tenta identificar a causa do(s) erro(s) e faz as correções necessárias para voltar a repetir a experiência com mais sucesso.

9. Repete a experiência, duas vezes no máximo, e faz um breve relatório do ocorrido para partilha com os colegas numa discussão coletiva.

Tarefa 3b

Imitar o gráfico

Esta tarefa será desenvolvida na plataforma Desmos Classroom.
Para tal deverás aceder a partir do endereço seguinte:
(o professor deverá fornecer, aqui, um endereço para a tarefa criada na plataforma, conforme instruções nas notas pedagógicas para a ação do professor).

Após completar a resolução da atividade "Gráficos em vídeo", para cada uma das situações modeladas, responde às seguintes questões:

1. Qual é a variável representada no eixo horizontal (eixo das abcissas ou eixo dos xx) e qual é a variável representada no eixo vertical (eixo das ordenadas ou eixo dos yy)?

2. Quais são as respetivas unidades das variáveis representadas?

3. Qual é o domínio e o contradomínio da função?

Tarefa 3a/3b

Imitar o gráfico / Modelar com gráficos

Notas pedagógicas para a ação do professor

As tarefas 3a e 3b são apresentadas em alternativa uma da outra.

Resumo:

Com estas tarefas pretende-se consolidar os conceitos de função, domínio, contradomínio, variáveis independente e dependente através da modelação de situações reais.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano.

Materiais e recursos:

Tarefa 3a: Sensor de movimento ligado ao computador (com software apropriado) ou calculadora gráfica, projetor.

Tarefa 3b: Computador com ligação à Internet e plataforma Desmos Classroom.

Notas e sugestões:

Tarefa 3a

Entende-se que um desenvolvimento da tarefa em pequenos grupos terá vantagem, em especial na compreensão e na comunicação. A fase pós experiência deverá ser estrategicamente acompanhada pelo professor, de modo a evidenciar conceitos como o da velocidade (de forma intuitiva) no contexto da experiência.

Ao longo da implementação desta tarefa sugere-se uma revisão sobre o conceito de função.

Tarefa 3b

Numa fase preparatória da aula, o professor deverá criar as condições para aplicar a tarefa com o recurso ao Desmos Classroom. As instruções prévias estão disponíveis neste link.

Fases da aula:

Fase prévia: o professor deverá apresentar a plataforma Desmos Classroom, a partir da qual se irá realizar a tarefa proposta.

Lançamento da tarefa: nesta fase o professor deverá começar por apresentar a tarefa, salientando a forma como esta está estruturada e como irá ser conduzida. Preferencialmente, os alunos deverão trabalhar no computador ou tablet, podendo este trabalho ser realizado em pares (num único dispositivo partilhado ou, se possível, cada aluno com o seu próprio dispositivo).
Condução da tarefa: na condução da tarefa sugere-se que o professor defina o ritmo (quais as páginas a que os alunos têm acesso) ou sincronize o acesso a uma página específica.
O primeiro exemplo a apresentar (escorrega) deverá ser discutido antes de passar para as quatro propostas de modelação que se seguem.
Discussão da tarefa: nesta discussão poderão ser afloradas a relação entre as variáveis, a sua definição como função e posteriormente a identificação de domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função.

Tarefa 4

Vela a arder

Pretende-se estudar a forma como arde uma vela de aniversário de 6 cm de altura.

Para tal observa o vídeo disponível no seguinte endereço:

http://www.youtube.com/watch?v=OF1HB-yv4fY

1. Quantos píxeis mede a vela, antes de começar a arder[1]?

   Atenção: Regista o comprimento da vela, em píxeis (para a medição da altura da vela considera apenas a parte da cera, tal como a imagem sugere).

2. No vídeo, desloca o cursor do tempo para o momento em que a vela começa a arder, e regista a altura da vela (em píxeis) nesse instante (em segundos).

3. Escolhe oito momentos e regista-os na tabela abaixo, introduzindo os instantes (em segundos) e as respetivas alturas da vela (em píxeis[2]).

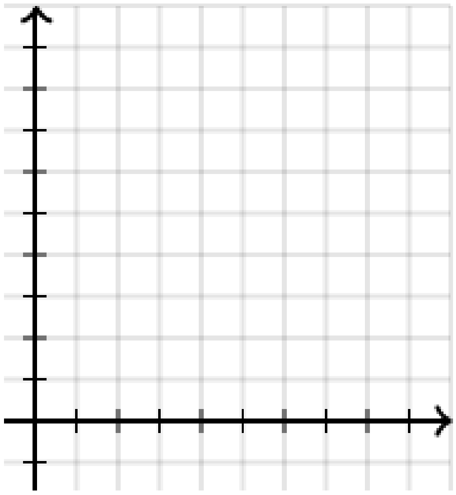
   Após converteres os píxeis para centímetros, regista na mesma tabela, para cada instante, a correspondente altura (em centímetros) e transfere os dados para a calculadora gráfica ou folha de cálculo.

Instantes (segundos)	Alturas (pixeis)	Alturas (cm)

[1] Para fazer medições (em pixeis) usa o programa "Pixel Ruler" (disponível para download em https://pixel-ruler.en.softonic.com/?ex=DINS-635.0).

[2] A utilização da régua de pixeis dá uma maior precisão na medição digital da altura da vela ardida.

4. Representa no referencial cartesiano os pontos que recolheste.



5. Os pontos que marcaste sugerem-te alguma representação gráfica familiar? Qual?

6. Na questão anterior percebeste o modelo que melhor se adequa àqueles pontos. Quais são as suas caraterísticas? Determina-as e encontra uma expressão algébrica do modelo.

7. A partir do modelo que obtiveste na questão 6, responde aos itens seguintes:
   - 7.1. Qual é o tamanho esperado da vela, em centímetros, ao fim de 11 minutos?
   - 7.2. Quanto tempo demora para que a vela:
     - 7.2.1. fique reduzida a metade?
     - 7.2.2. fique com 1 cm de altura?
     - 7.2.3. arda completamente?

Tarefa 4

Vela a arder

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se modelar situações da vida real com recurso à função afim.

Através da visualização de um vídeo os alunos irão recolher dados, relativos à altura de uma vela a arder em diferentes instantes, e registá-los numa tabela. Após representarem graficamente os pontos obtidos, os alunos são encaminhados, para obterem a expressão algébrica da função afim.

Conhecimentos prévios dos alunos: Representação de uma função através de tabelas e gráficos em contexto de modelação.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica e/ou folha de cálculo. Vídeo e software para efetuar medições em pixeis.

Notas e sugestões:

A tarefa pode ser simplificada através de medições feitas em centímetros, diretamente no ecrã do computador. Caso recorra à medição em pixeis, deverá ser usado um software apropriado para o efeito.

Sugere-se que esta tarefa seja realizada em pequenos grupos (2 ou 3 alunos).

A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/rz5qhmtr pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Neste caso, uma vez que os alunos encontram a expressão algébrica da função afim, usando a regressão linear, as questões da tarefa passam a ser as que se encontram na atividade do Geogebra.

Tarefa 5

Estudar a função afim

Parte I

Considera a família de funções, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = mx + b \ , \ m, b \in \mathbb{R}$$

1. Considera $b = 0$.
   Recorrendo à tua calculadora gráfica ou a um programa de representação gráfica de funções, estuda este tipo de funções.

   No menu das funções, escreve $f(x) = mx$ e cria um seletor para $m \in [-5, 5]$. Regista as tuas observações, nomeadamente, efetua a representação gráfica e indica, para quatro valores de m distintos, dois positivos e dois negativos: o declive; a abcissa do ponto de interseção da função com o eixo das abcissas; as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do gráfico são positivas e/ou negativas; e, as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do seu gráfico aumentam e/ou diminuem.

2. Considera agora um valor de m fixo, por exemplo, $m = 1$.
   Recorrendo à tua calculadora gráfica ou a um programa de representação gráfica de funções, estuda este tipo de funções.

   No menu das funções, escreve $f(x) = x + b$, e cria um seletor para $b \in [-5, 5]$.

   Regista as tuas observações, nomeadamente, efetua a representação gráfica e indica, para quatro valores de b distintos, dois positivos e dois negativos: a abcissa do ponto de interseção da função com o eixo das abcissas; as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do gráfico são positivas e/ou negativas; e, as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do seu gráfico aumentam e/ou diminuem.

3. Considera $m = 0$.

   Recorrendo à tua calculadora gráfica ou a um programa de representação gráfica de funções, estuda este tipo de funções.

   No menu das funções, escreve $f(x) = b$, e cria um seletor para $b \in [-5, 5]$.

   Regista as tuas observações, nomeadamente, efetua a representação gráfica e indica, para quatro valores de b distintos, dois positivos e dois negativos: a abcissa do ponto de interseção da função com o eixo das abcissas; as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do gráfico são positivas e/ou negativas; e, as abcissas para as quais as ordenadas dos pontos do seu gráfico aumentam e/ou diminuem.

4. Nas alíneas anteriores efetuaste o estudo das famílias de funções afins definidas por:

$$f(x) = mx + b, \ m, b \in \mathbb{R}$$

   Qual é o significado dos parâmetros m e b na função afim?

Parte II

1. Sem efetuar qualquer representação gráfica, determina o zero, estuda a monotonia e o sinal das funções representadas por:

   1.1. $f(x) = 2x + 3$

   1.2. $g(x) = -3x + \frac{1}{2}$

   1.3. $h(x) = -3$

2. Sabendo que 2 é o zero de uma família de funções afins f, determina:

   2.1. O valor real de m tal que $f(x) = mx + 3$

   2.2. O valor real de b tal que $f(x) = -3x + b$

Extensão:

3. Considera a família de funções afins f definida por: $f(x) = (1 + t)x - t$

   Determina os valores reais de t para os quais f:

   3.1. é crescente.

   3.2. é negativa em $]2, +\infty[$.

Parte III

A Jéssica é eletricista e costuma realizar trabalhos de reparação ao domicílio na sua cidade. O cálculo do valor a pagar pelo cliente comporta 30€ de deslocação e 60€ por cada hora de trabalho.

1. Se x for o tempo necessário para realizar uma reparação, e f a quantia gasta, em euros, define por uma expressão analítica $f(x)$ e reproduz o gráfico de f obtido na calculadora.
2. Sabendo que o António pagou 75€ à Jéssica, usa a calculadora gráfica para descobrires quanto tempo a Jéssica demorou a fazer a reparação.

Tarefa 5

Estudar a função afim

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A parte I desta tarefa é exploratória e tem como objetivo estudar o efeito da variação dos parâmetros de uma função afim (declive e ordenada na origem) em relação ao zero, ao sinal e à monotonia, com recurso à representação dinâmica da função na calculadora gráfica ou num programa de representação gráfica de funções.

Nas partes II e III da tarefa são propostas algumas questões e uma situação do quotidiano, respetivamente.

Conhecimentos prévios dos alunos: Equações e inequações do primeiro grau.
Função afim.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica

Notas e sugestões:

As informações relativas ao sinal e monotonia podem ser apresentadas usando, respetivamente, tabelas de variação de sinal e de monotonia.

A questão 3 da parte II deve ser considerada como uma extensão, no entanto, poderá ser pertinente aplicar em algumas turmas ou grupos de alunos.

Tarefa 6

Generalizar a resolução de equações do 1.º grau

Considera o exemplo de programa definido a seguir, que devolve as soluções de uma equação do 1.º grau.

Programa em *Python*

```
print("Equação do tipo ax+b=0")
a=2
b=4
if a==0:
   if b==0:
      print("Todos os reais são solução")
   else:
      print("Não tem soluções")
else:
   x=-b/a
   print("A solução da equação é:", x)
```

1. Descreve em linguagem corrente os diversos passos descritos no programa (algoritmo).

2. Abre a plataforma Colab (https://colab.research.google.com/), ou outro editor de *Python* e cria um novo bloco de notas e copia o programa indicado.

   2.1. Executa o programa.

   2.2. Altera os valores de a e de b atribuídos no programa de forma a:

   2.2.1. obter uma equação impossível;

   2.2.2. obter uma equação cuja solução seja 2.

3. Altera o programa de forma a resolver equações do tipo: $ax + b = c$

4. Altera o programa de forma a resolver equações do tipo: $ax + b = cx + d$

Tarefa 6

Generalizar a resolução de equações do 1.º grau

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos desenvolvam práticas de pensamento computacional através da exploração de um programa em *Python*, envolvendo a resolução de equações do primeiro grau. A exploração do programa envolve a descrição do algoritmo em linguagem natural e, posteriormente, a modificá-lo para dar resposta às questões solicitadas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita.

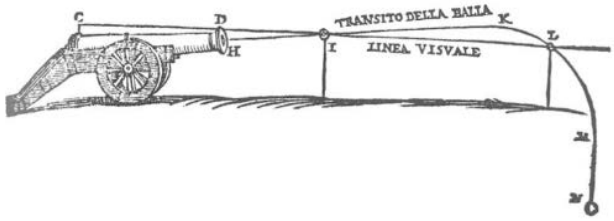
Materiais e recursos: Calculadora gráfica com editor *Python* ou computador com internet para recorrer ao Colab ou outro editor de *Python*.

Notas e sugestões:

Os alunos devem começar por executar o programa para diferentes valores de a e de b de modo a facilitar a descrição/interpretação do programa.

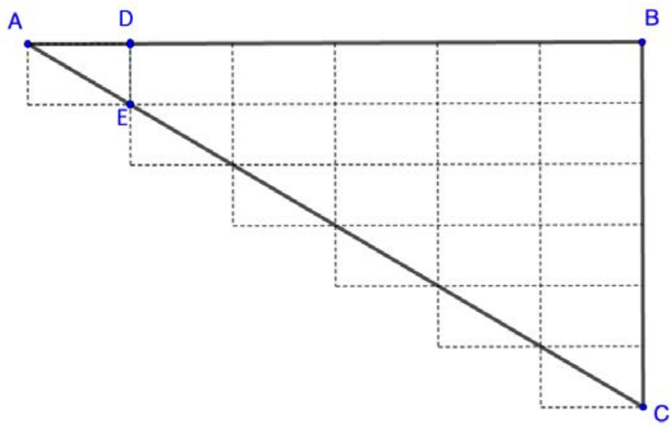
Tarefa 7

Galileu e a parábola



Na época do Renascimento, a parábola assume uma aplicação prática ligada à guerra na artilharia. Na obra *La Nova Scientia*, publicada em 1537, Tartaglia apresenta a parábola como modelo do percurso de um projétil, a propósito de um estudo sobre o movimento das balas de canhão.

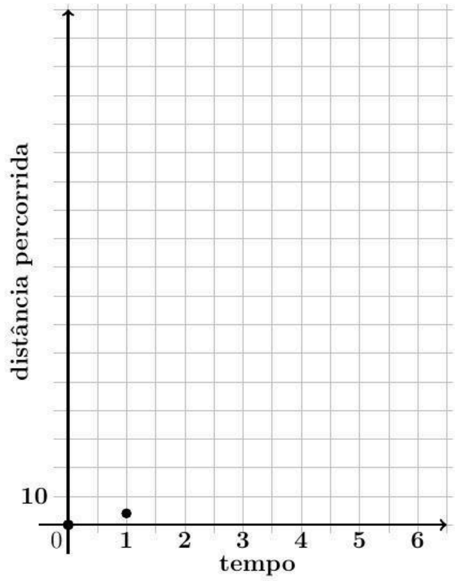
Mais tarde, Galileu escreveu uma obra na qual apresenta uma demonstração da parábola como modelo para a queda dos graves (ou dos corpos, como é mais comum).
Por exemplo, para um corpo que cai verticalmente, Galileu argumentava sobre a determinação da distância percorrida pelo corpo ao fim de um certo tempo em movimento, da forma como se ilustra a seguir.
Na queda livre, o corpo ganha tanta velocidade quantos são os instantes passados, ou seja, há uma relação de proporcionalidade direta entre estas duas grandezas. No primeiro instante, D, a gravidade comunica ao corpo uma velocidade, $\overline{DE}$, de módulo $9,8$ se o instante for de 1 segundo, a qual duplica no instante seguinte, dobro do 1°, triplica no seguinte, triplo do 1.°, e assim sucessivamente, até que ao fim de um certo tempo, $\overline{AB}$, a velocidade é $\overline{BC}$.



Diz Galileu que o espaço percorrido pelo corpo, em metros, no tempo $\overline{AB}$, em segundos, tem o valor da área do triângulo $[ABC]$.

1. Completa a tabela seguinte e continua a representar, no referencial abaixo, os pontos cuja abcissa são valores na 1.ª coluna da tabela e as ordenadas os respetivos valores da 3.ª coluna.

tempo (seg)	velocidade	Espaço percorrido (m)
0	0	0
1	9,8	4,9
2		
3		
4		
5		



2. Os pontos estão sobre uma curva que conheces. Procura obter uma equação dessa curva, sem recurso à calculadora gráfica, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

3. Utiliza a tua calculadora gráfica e obtém a equação de regressão quadrática, relativamente às grandezas representadas graficamente. Compara-a com a equação obtida no item anterior.

4. No referencial do item 1., o eixo vertical tem a origem associada ao local de onde o corpo é deixado cair e a posição do corpo em cada instante está associada à respetiva coordenada nesse eixo. À medida que o tempo passa, o objeto afasta-se da origem do referencial em direção ao solo, aumentando a sua distância relativamente ao ponto inicial. Diz-se em Física que o sentido positivo do movimento é de cima para baixo. Mas é comum considerar-se o sentido positivo, num referencial, de baixo para cima, podendo a posição deste corpo corresponder a um valor negativo.

   Mudando o sentido do eixo vertical do referencial, mas mantendo a origem, responde às seguintes questões:

4.1. Qual é a posição do corpo ao fim de 2 segundos?

4.2. Qual é agora a expressão que permite obter, em cada instante, a posição do corpo e, utilizando-a, diz quanto tempo demorou o corpo a embater no solo depois de ter caído livremente de uma altura de 23,7 metros?

5. Imagina que esta lei se aplica, de igual modo, à queda livre de um objeto no planeta Júpiter, considerando a gravidade à superfície deste planeta.
Qual seria agora a equação das posições, considerando o eixo das posições orientado de baixo para cima, e que efeito teria esta alteração na meia parábola do item 4?

6. Na figura estão representadas cinco parábolas, com o vértice na origem do referencial.
Sem recorrer à calculadora gráfica, associa a cada equação a respetiva parábola e explica as tuas escolhas.

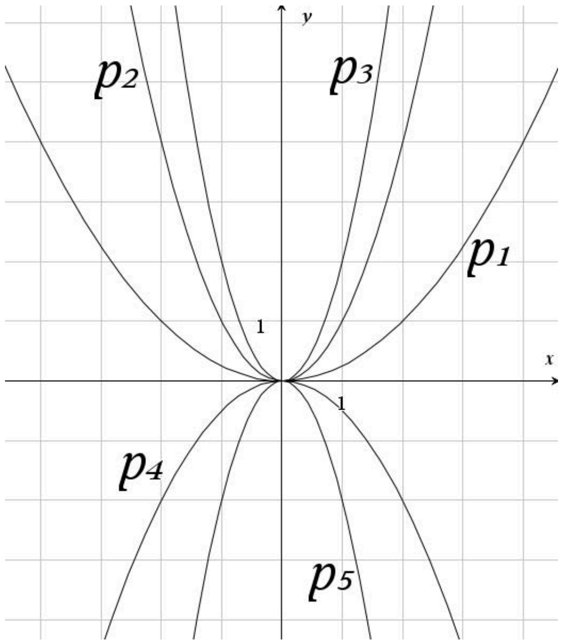
$y = x^2$ • • p_1

$y = \frac{1}{4}x^2$ • • p_2

$y = -\frac{1}{2}x^2$ • • p_3

$y = 2x^2$ • • p_4

$y = -2x^2$ • • p_5



Tarefa 7

Galileu e a parábola

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se fazer uma primeira abordagem à função polinomial de grau 2, num contexto histórico, de modo a que o aluno possa revisitar o que foi trabalhado no 9.º ano de escolaridade em relação à função definida por ax^2. A tarefa promove ainda, no referido contexto histórico, o trabalho com recurso à tecnologia para obter uma curva de regressão quadrática e a abordagem interdisciplinar de conceitos entre a Matemática e a Física.

Conhecimentos prévios dos alunos: Representação gráfica de funções.
Função quadrática do tipo ax^2.

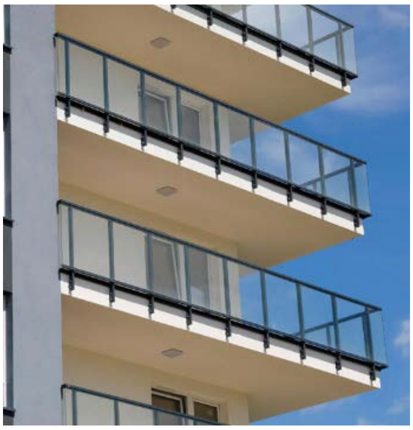
Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica. Folha de cálculo

Notas e sugestões:

A questão 1 só pode ser respondida com uma leitura atenta do texto que a precede, o qual expressa o contexto histórico, onde se encontram instruções em que a interpretação matemática é fundamental. Esta pode ser tratada, com vantagem para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, num trabalho de grupo. Nessa questão é importante, para a compreensão do conceito de gráfico de uma função quadrática, que, antes de representado com a tecnologia disponível, seja feita a representação de alguns dos seus pontos em papel e a expressão analítica seja deduzida com base no conhecimento prévio (9.º ano) sobre este tipo de funções. Na questão 4, o aluno lidará com a noção de posição de um corpo na queda de um grave e com a influência de diferentes sentidos para o eixo das posições, promovendo-se uma visão interdisciplinar das disciplinas de Matemática e de Física. Nas questões 5 e 6 é trabalhado o efeito da alteração do coeficiente no gráfico da função, já abordado no 9.º ano, mas mais uma vez integrado com o conceito de aceleração da gravidade trabalhado em Física.

Tarefa 8

Sobe e desce



A partir de uma janela de um apartamento, atira-se um berlinde verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 10 m/s, a qual vai diminuindo por causa da influência da força gravítica.

Um modelo matemático que traduz, com boa aproximação, a altura do berlinde ao solo (s, em metros) em função do tempo decorrido desde o lançamento (t, em segundos) até atingir o solo, é:

$$s(t) = -4.9t^2 + 10t + 20$$

Nota: Neste modelo é considerado o sentido positivo do movimento de baixo para cima, o valor da aceleração correspondente à gravidade de $9.8\ m/s^2$, o valor da velocidade inicial de 10 m/s (coeficiente de t) e despreza-se a resistência do ar.

Representa graficamente este modelo, escolhendo uma janela adequada, e responde às seguintes questões.

1. A que altura está o berlinde quando é lançado ao ar?
2. Qual é o domínio e o contradomínio da função descrita por este modelo, escrevendo-os na forma de intervalo? Explica o significado dos extremos dos intervalos.
3. A parábola representada tem um eixo de simetria. Quais são as coordenadas do ponto de interseção dessa reta com a parábola e qual é o seu significado?
4. Quanto tempo demorou o berlinde até passar novamente pela altura inicial?
5. Durante quanto tempo esteve o berlinde no ar a uma altura superior a 22 metros?

6. Considera, agora, que o berlinde é lançado com a mesma velocidade inicial, mas da varanda do apartamento do piso superior, que fica 3 metros acima.
   Quais os efeitos que tem esta alteração no modelo e na parábola (concavidade, interseção com o eixo das ordenadas e vértice)?

7. Para responder aos dois itens seguintes, considera que a velocidade inicial com que o berlinde é lançado ao ar **não foi de 10 m/s**.

   7.1. Se fosse lançado com uma velocidade de 12 m/s, vai atingir uma altura máxima superior ou inferior? Vai atingir o solo mais tarde ou mais cedo?

   7.2. Com que velocidade deve ser lançado o berlinde para que ultrapasse o topo do prédio, que se encontra a 30 metros do solo?
   Sugestão: Faz variar o valor da velocidade inicial, com que o berlinde é lançado ao ar, recorrendo a tecnologia.

Extensão:

7.3. À medida que a velocidade com que se lança o berlinde é alterada, o que podes observar relativamente ao vértice das parábolas que representam os diferentes exemplos de funções da família de funções definidas por
$f(t) = -4.9t^2 + bt + 20$?
Completa a tabela abaixo, com os valores arredondados às centésimas.
Sugestão: insere os dados numa folha de cálculo, ou na calculadora gráfica, representa a nuvem de pontos e procura uma curva que melhor relacione as abcissas e as ordenadas dos diferentes vértices.

valor de b	abcissa do vértice	ordenada do vértice
0		
5		
10	1.02	25.10
12	1.22	27.35
14	1.43	30.00
15		
20		
25		

Tarefa 8

Sobe e desce

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A propósito de uma situação em contexto real e tratada na disciplina de Física, pretende-se ampliar o conceito de função quadrática com expressões que vão para além de ax^2.

A tarefa destina-se também a uma primeira abordagem do efeito decorrente da variação dos coeficientes da expressão quadrática, em que o significado de cada um está presente, onde o contexto real favorece a compreensão desse efeito.

A resolução de equações do 2.º grau é tratada nesta tarefa. Nesta fase, esta resolução é feita com recurso a tecnologia, a partir da representação gráfica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Generalidades de funções.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica. Folha de cálculo.

Notas e sugestões:

A potencialidade da tarefa pode ser traduzida de forma mais plena se o trabalho for realizado em grupo, sobretudo as questões 5 e 6. Estas questões constituem uma oportunidade de discussão em grupo, de produção e demonstração de conjeturas. Por isso, deve ser proporcionada uma discussão coletiva na turma sobre a atividade realizada nos grupos, o que poderá levar a um momento muito significativo de aprendizagens.

Tarefa 9

Retângulo de área máxima

Há referência à relação entre as áreas de retângulos com igual perímetro, pelo menos desde o Império Babilónico (1800 a.C.), embora considerassem, erradamente, que retângulos de igual perímetro teriam a mesma área.
Mais tarde, cerca de 300 a.C., Euclides trata essa relação na sua obra "Os Elementos", naquele que será, porventura, o mais antigo problema de otimização conhecido, ou seja, um problema para o qual se procura a solução considerada ótima. Esse problema pode ser enunciado da seguinte forma:

"*De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual é o que tem área máxima?*"

Neste contexto, considera a seguinte situação:

O Departamento do Ambiente da Câmara Municipal de **Vila Branca** disponibilizou aos particulares, residentes no concelho, canteiros com formatos retangulares de $32\ m^2$ **de área** para cultivarem **hortas biológicas**.

O município vizinho, **Vila Rosa,** tem um programa idêntico, mas fornece aos seus munícipes $26\ m$ **de rede**, que deve ser utilizada para cercar por completo o seu canteiro retangular, cujas dimensões deverão comunicar atempadamente aos serviços camarários responsáveis pelo projeto das hortas biológicas.

O Sr. José, habitante **de Vila Rosa**, fez algumas explorações no planeamento do seu canteiro, com os 26 metros de rede a que terá direito, e concluiu que um vizinho de Vila Branca teria canteiros maiores, ou seja, com mais área.

1. Apresenta dois exemplos de dimensões que o Sr. José terá considerado nas suas explorações e apresenta outros dois exemplos que demonstrem que a sua conclusão não é correta.

2. No quadro seguinte apresenta-se um programa em *Python* que fornece a medida da área do canteiro em Vila Rosa, em metros quadrados, com arredondamento às centésimas, depois de introduzida a medida, em metros, do comprimento do canteiro.

```
x=float(input("comprimento = "))
m=26/2
if 0<x<m:
  a=round(x*(m-x),2)
  print("A área do canteiro retangular é",a,"metros quadrados")
else:
  print("Não é possível construir o canteiro.")
```

Nota: Na primeira linha do programa é pedido a entrada de um valor, na forma de dízima, para o comprimento do retângulo.

2.1. Explica o significado de m, neste contexto, e a razão pela qual o programa apresenta a mensagem indicativa de que não é possível construir um canteiro quando o utilizador introduz uma medida de comprimento fora do intervalo $]0, m[$?

2.2. Explica a expressão utilizada na 4.ª linha de código do programa para representar a área em função da medida do comprimento fornecida.

2.3. Explora o problema da obtenção de canteiros retangulares, em Vila Rosa, com a maior área possível , executando o programa em *Python* que está disponível no *Google Colab*, acessível também através do QR code da figura ao lado.

Quais serão as dimensões do canteiro com maior área?

3. Considera a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x(13 - x)$.

3.1. Recorrendo à representação gráfica de f, responde às duas questões seguintes:

3.1.1. Determina os zeros e as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função f .

3.1.2. Qual é o contradomínio da função f?

3.2. Qual é a relação entre o valor da abcissa do vértice e os zeros da função?

3.3. Resolve o item 3.1.1. recorrendo a processos analíticos.

3.4. Considera agora a família de funções definidas por $g(x) = -x^2 + bx$ e determina, analiticamente, e em função de b, os zeros e as coordenadas do vértice. Verifica o resultado obtido em 3.1.1..

3.5. Resolve graficamente a equação $x(13 - x) = 32$ e interpreta a solução (com arredondamento às décimas) no contexto das experiências de planeamento do Sr. José.

Extensão:

4. Imagina que Vila Rosa pondera reduzir a quantidade de rede para cercar os canteiros.
   Qual deverá ser a quantidade mínima de rede que permita a um habitante deste municipio ter um canteiro com a mesma área dos de Vila Branca?

Tarefa 9

Retângulo de área máxima

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como finalidade principal um trabalho de otimização, sendo relevante o vértice de uma parábola, representação gráfica de uma função quadrática que modela uma situação real. Esta tarefa visa também a contextualização histórica do problema, bem como uma abordagem com recurso à tecnologia, seguida de um trabalho analítico, em que a resolução de equações do 2.º grau, são revisitadas. Também se pretende, nesta tarefa, estabelecer uma relação entre as coordenadas do vértice de uma parábola e os zeros da respetiva função quadrática.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de perímetro e área de um retângulo. Resolução analítica de equações incompletas do 2.º grau. Representação gráfica de funções quadráticas e os seus pontos notáveis.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica. Folha de cálculo.

Notas e sugestões:

A tarefa propicia o recurso a uma variabilidade considerável de conhecimentos e de procedimentos matemáticos, num contexto de resolução de problemas, o que faz dela uma tarefa adequada ao trabalho em grupo de modo a permitir formular e testar conjeturas, assim como consolidar conhecimentos trabalhados anteriormente. Sugere-se também que se proceda a momentos de discussão em grupo turma, no final da questão 2 e no final da questão 4, para gerir o tempo de resolução da tarefa.

Tarefa 10

Da afim à quadrática

Na figura, num referencial cuja unidade é o lado de cada quadrícula, estão representadas as funções afim f e g.

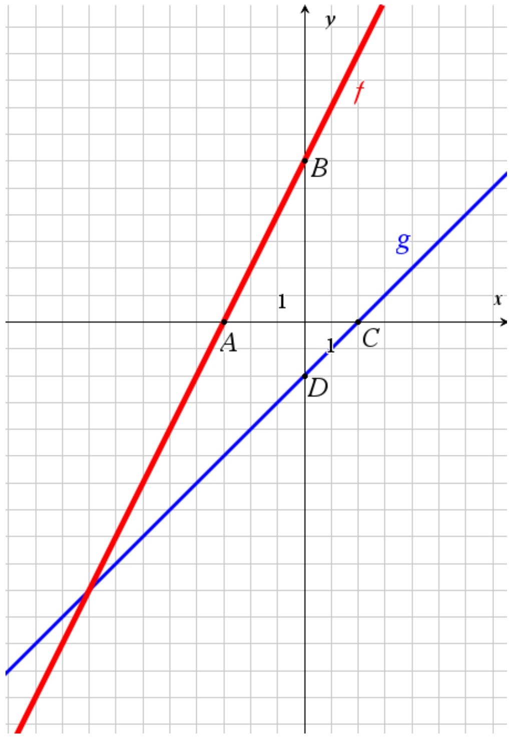
Sabe-se que A, B, C e D são os pontos de interseção de cada um dos gráficos com os eixos do referencial.

Considera ainda a função quadrática p, definida pelo produto de f por g:

$$p(x) = f(x)\times g(x)$$

Observa que, por exemplo,

$p(-1) = f(-1) \times g(-1) = 4 \times (-3) = -12$



1. Quais são as coordenadas dos pontos A, B, C e D ?

2. Estuda a função p e o respetivo gráfico, recorrendo apenas aos gráficos de f e de g, representados ao lado, em relação:
   2.1. aos zeros de p;
   2.2. ao sinal de p;
   2.3. ao sentido da concavidade da parábola;
   2.4. ao eixo de simetria da parábola;
   2.5. às coordenadas do vértice da parábola.

3. Determina uma expressão analítica da função p e explica como poderias obter analiticamente os zeros de p e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.

4. Escreve, sem recorrer à calculadora gráfica, um polinómio que seja expressão analítica de uma função quadrática que se anula em -2 e em 5 e cujo gráfico seja uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Extensão:

5. Nos itens anteriores poderás observar a existência de uma relação entre os coeficientes do polinómio do 2.º grau e o produto e a soma das respetivas raízes. Consegues dizer qual é essa relação?

   Sugestão: Começa por considerar exemplos de funções afim de modo que o coeficiente do termo do 2.º grau seja 1.

   Será essa relação válida para qualquer polinómio do 2.º grau com raízes reais?

Tarefa 10

Da afim à quadrática

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa permite ao aluno descobrir que o produto de duas funções afins é uma função quadrática, alertando-o para uma das relações existentes entre estas duas famílias de funções.

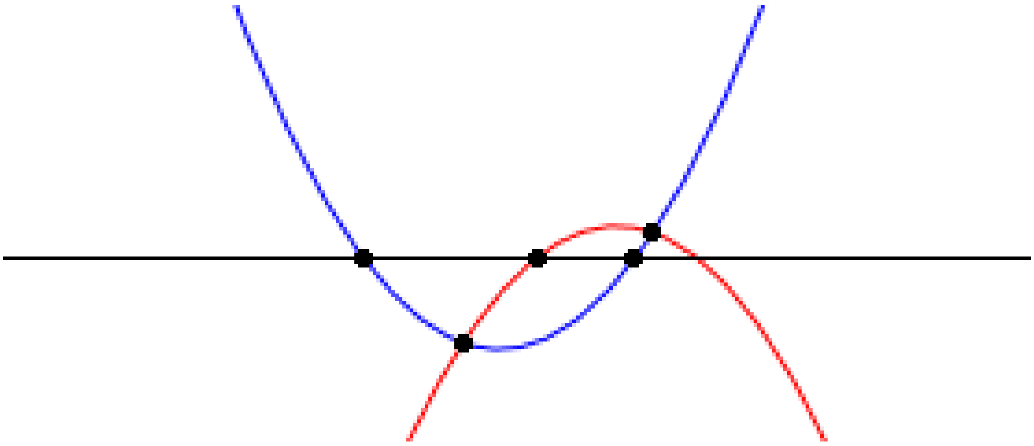
Conhecimentos prévios dos alunos: Função afim e função quadrática.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:
Com o trabalho realizado nesta tarefa, os alunos têm a possibilidade de se aperceberem que há polinómios do 2.º grau que se podem fatorizar e que existe uma relação entre esses polinómios do 2.º grau e os seus fatores do primeiro grau.
Para além dessa discussão, poder-se-á estabelecer outras relações, nomeadamente quanto ao sinal, à variação e às coordenadas do vértice da parábola.
Ainda há uma possível extensão nesta tarefa, como aprofundamento, onde os alunos podem descobrir a relação entre os coeficientes de um polinómio do 2.º grau e as suas possíveis raízes reais.

Tarefa 11

Resolvendo equações do 2.º grau



1. Considere a função quadrática g, definida por $g(x) = x^2 - 2x - 8$.

   Determine, por processos analíticos, os zeros de g e as coordenadas do vértice do seu gráfico.

   Sugestão: Comece por escrever a expressão de g na forma $(x - h)^2 + k$.

2. Considere a família de funções f, definidas por $f(x) = x^2 + bx + c$.

   2.1. Escreve a expressão de f na forma $(x - h)^2 + k$ e estude esta família de funções em relação à existência de zeros.

   2.2. Nas situações em que f tem zeros:

   2.2.1. Justifique que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2} \vee x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

   Note que esta fórmula soluciona a equação f(x)=0.

   2.2.2. Justifique que os vértices das parábolas desta família têm abcissas que se podem escrever na forma $-\frac{b}{2}$.

   E as ordenadas dos vértices das parábolas, como se podem escrever em função dos parâmetros b e c ?

3. Considera o seguinte programa em *Python* que permite obter, caso existam, o número de soluções e o seu valor, para equações do tipo das referidas no item anterior.

```
from math import *
print("Equação do tipo x^2+bx+c=0")
b=4
c=5
d=b**2-4*c
if d<0:
  print("A equação é IMPOSSÍVEL")
elif d==0:
  print("A equação tem UMA solução, x=",-b/2)
else:
  s1=0.5*(-b-sqrt(d))
  s2=0.5*(-b+sqrt(d))
  print("A equação tem DUAS soluções, x=",s1," e x=",s2)
```

Para obteres um programa análogo para resolver equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0, a\neq0$, segue as seguintes instruções:

- Analisa o funcionamento deste programa e descreve em linguagem corrente os diversos passos descritos no programa (algoritmo);
- abre a plataforma [Google Colab](), cria um novo bloco de notas e copia o programa anterior;
- executa o programa e observa o output. Utiliza outros valores para b e para c de modo a resolveres a equação do item 2;
- estuda alterações que poderás fazer ao programa, para resolver uma equação do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0, a\neq0$;
  Sugestão: Começa por encontrar uma equação equivalente em que o coeficiente do termo do 2º grau seja 1, e toma em consideração as alterações ocorridas nos restantes coeficientes.
- altera o programa desta equação geral e executa-o em equações com coeficiente do termo $de\ x^2$ não nulo.

4. Mostra que a fórmula que resolve equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0, a\neq0$ pode ser escrita como:

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(Fórmula resolvente de equações do 2.º grau)

5. Considera a equação impossível: $x^2 + 4x + 5 = 0$.

5.1. Representa graficamente a função quadrática definida por

$g(x) = x^2 + 4x + 5$.

A partir da representação gráfica, explica como podes concluir que a equação dada é impossível.

5.2. Que alteração podes fazer no termo independente para que uma nova equação seja possível?

5.3. Determina, analiticamente, as coordenadas do vértice da parábola, gráfico da função g.

Tarefa 11

Resolvendo equações do 2.º grau

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo da tarefa é a de que os alunos façam a dedução da fórmula resolvente de uma equação do segundo grau.

Conhecimentos prévios dos alunos: Adicionar e multiplicar polinómios. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de monómios.

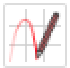
Materiais e recursos: Calculadora gráfica (com *Python*) ou computador com ligação à Internet (editor de código *Python*, por exemplo: Google Colab).

Notas e sugestões:
Começa-se por pedir que resolvam uma equação completa do 2.º grau, escrevendo o polinómio na forma $(x - h)^2 + k$, para depois se generalizar e chegarem à fórmula resolvente.
O conteúdo de resolução de equações é adequado para a utilização de um programa em *Python*. Assim, é apresentado um programa para o aluno interpretar e pedem-se alterações que lhe permitem aplicar os conhecimentos que lhe estão associados.

Tarefa 12

Transformações de funções

Parte I

Acede à tarefa do GeoGebra “Transformações de funções” e, usando a ferramenta “Função à mão livre”  , traça o gráfico de uma função com pelo menos 3 zeros, e designa-a por f.

1. Na janela algébrica define a função com a expressão algébrica $f(x) + p$, $p \in \mathbb{R}$.
   1.1. Movimenta o seletor que define o valor de p e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $p = 0$; $p > 0$ e $p < 0$.
   1.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $f(x) + p$, para $p \neq 0$?
      1.2.1. Domínio
      1.2.2. Contradomínio
      1.2.3. Zeros
      1.2.4. Sinal
      1.2.5. Extremos (máximos e mínimos)
      1.2.6. Maximizantes e minimizantes
      1.2.7. Monotonia

2. Na janela algébrica define a função com a expressão algébrica $f(x + q)$, $q \in \mathbb{R}$.
   2.1. Movimenta o seletor que define o valor de q e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $q = 0$; $q > 0$ e $q < 0$.
   2.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $f(x + q)$, para $q \neq 0$?
      2.2.1. Domínio
      2.2.2. Contradomínio
      2.2.3. Zeros
      2.2.4. Sinal
      2.2.5. Extremos (máximos e mínimos)
      2.2.6. Maximizantes e minimizantes
      2.2.7. Monotonia

3. Na janela algébrica define a função com a expressão algébrica $r \times f(x)$, $r \in \mathbb{R}$.

 3.1. Movimenta o seletor que define o valor de r e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $r = 0, r > 0$ e $r < 0$.

 3.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $r \times f(x)$, para $r \neq 0$?

  3.2.1. Domínio

  3.2.2. Contradomínio

  3.2.3. Zeros

  3.2.4. Sinal

  3.2.5. Extremos (máximos e mínimos)

  3.2.6. Maximizantes e minimizantes

  3.2.7. Monotonia

Parte II

Na calculadora gráfica, no menu de funções, insere a função $f(x) = x^3 - x$, definida no intervalo $[-2, 2]$.

1. Considera a função com a expressão algébrica $f(x) + p$, $p \in \mathbb{R}$.

 1.1. Movimenta o seletor que define o valor de p e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $p > 0$; $p < 0$.

 1.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $f(x) + p$, para $p \neq 0$?

  1.2.1. Domínio

  1.2.2. Contradomínio

  1.2.3. Zeros

  1.2.4. Sinal

  1.2.5. Extremos (máximos e mínimos)

  1.2.6. Maximizantes e minimizantes

  1.2.7. Monotonia

2. Considera a função com a expressão algébrica $f(x + q)$, $q \in \mathbb{R}$.

2.1. Movimenta o seletor que define o valor de q e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $q = 0;\ q > 0\ e\ q < 0$.

2.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $f(x + q)$, para $q \neq 0$?

2.2.1. Domínio

2.2.2. Contradomínio

2.2.3. Zeros

2.2.4. Sinal

2.2.5. Extremos (máximos e mínimos)

2.2.6. Maximizantes e minimizantes

2.2.7. Monotonia

3. Considera a função com a expressão algébrica $r \times f(x)$, $r \in \mathbb{R}$.

3.1. Movimenta o seletor que define o valor de *r* e descreve a relação entre os dois gráficos, nomeadamente para os casos em que $r = 0$, $r > 0$ e $r < 0$.

3.2. Quais das seguintes características da função f se alteram na função $r \times f(x)$, para $r \neq 0$?

3.2.1. Domínio

3.2.2. Contradomínio

3.2.3. Zeros

3.2.4. Sinal

3.2.5. Extremos (máximos e mínimos)

3.2.6. Maximizantes e minimizantes

3.2.7. Monotonia

Tarefa 12

Transformações de funções

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo interpretar e prever as alterações, no gráfico de uma qualquer função f, de domínio $\mathbb{R}$, ocorridas para a obtenção dos gráficos das famílias de funções $f(x-a)$, $f(x)+b$, $c \times f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, descrevendo essas alterações com recurso à linguagem das transformações geométricas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Generalidades de funções.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra (Parte I) . Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra / Calculadora gráfica (Parte II).

Notas e sugestões:
A tarefa é constituída pelas "Parte I" e "Parte II". Cada professor pode adaptar à sua realidade, optando entre a resolução, recorrendo ao GeoGebra ou a uma calculadora gráfica, respetivamente.
No momento da aplicação desta tarefa é expectável que os alunos estejam bastante familiarizados com os recursos propostos. Considera-se essencial que toda a tarefa seja realizada pelos alunos de forma autónoma, sendo de extrema importância que tenham oportunidades de descobrir, explorar e generalizar.
Num momento final é imprescindível que seja feita uma síntese com a descrição dos resultados, utilizando a linguagem das transformações geométricas.

Tarefa 13

Transformações de funções quadráticas

Famílias de funções do tipo $f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ **.**

1. Representa, recorrendo à calculadora gráfica, as funções:

$$f_1(x) = x^2$$

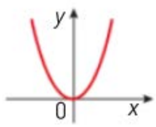
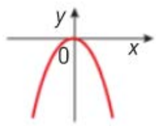
$$f_2(x) = 2f_1(x)$$

$$f_3(x) = 0,5f_1(x)$$

$$f_4(x) =- f_1(x)$$

$$f_5(x) =- 0,5f_1(x)$$

2. Preenche a tabela seguinte a partir da observação dos gráficos anteriores :

ax^2	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Sentido da concavidade		
Domínio		
Contradomínio		
Zero		
Sinal		
Monotonia		
Extremos		
Coordenadas do Vértice		
Eixo de Simetria		

3. Completa a frase seguinte:

   Quanto maior for o valor absoluto de a, ___________ é a abertura dos ramos da parábola.

Famílias de funções do tipo $f(x) = x^2 + k,\ k \in \mathbb{R}$.

1. Representa, recorrendo à calculadora gráfica, as funções:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = f_1(x) + 1$$

$$f_3(x) = f_1(x) - 2$$

$$f_4(x) = f_1(x) + 17$$

2. Preenche a tabela seguinte a partir da observação dos gráficos anteriores:

$x^2 + k$	$k > 0$	$k < 0$
Gráfico		
Domínio		
Contradomínio		
Número de zeros		
Coordenadas do Vértice		
Eixo de Simetria		

3. Completa as frases seguintes:

   Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, o gráfico de qualquer função $f(x) = x^2 + k$, é o transformado do gráfico da função $g(x) = x^2$ pela translação vertical associada ao vetor com comprimento ___________ no sentido ascendente se __________ ou descendente se ___________.

   As coordenadas do vértice da parábola, que é o gráfico da função $f(x) = x^2 + k$, são: V(,).

Famílias de funções do tipo $f(x) = (x - h)^2, \ h \in \mathbb{R}$.

1. Representa, recorrendo à calculadora gráfica, as funções:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = f_1(x - 1)$$

$$f_3(x) = f_1(x + 2)$$

$$f_4(x) = f_1\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

2. Preenche a tabela seguinte a partir da observação dos gráficos anteriores:

$(x - h)^2$	$h > 0$	$h < 0$
Gráfico		
Domínio		
Contradomínio		
Zero		
Coordenadas do Vértice		
Eixo de Simetria		

3. Completa as frases seguintes:

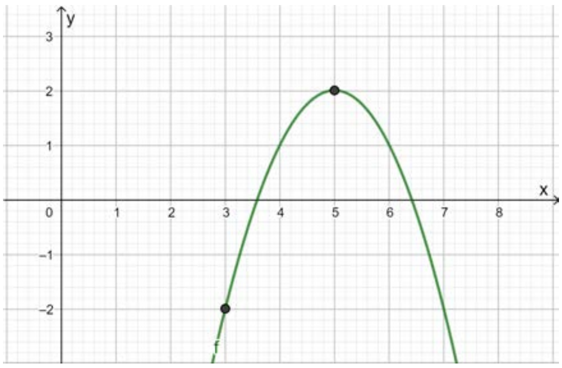
Para cada valor de $h \in \mathbb{R}$, o gráfico de qualquer função $f(x) = (x - h)^2$, é o transformado do gráfico da função $g(x) = x^2$ pela translação horizontal associada ao vetor com comprimento ___________ no sentido positivo se ___________ ou negativo se ___________.

As coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função $f(x) = (x - h)^2$ são V(,   ) e a equação do eixo de simetria é ___________.

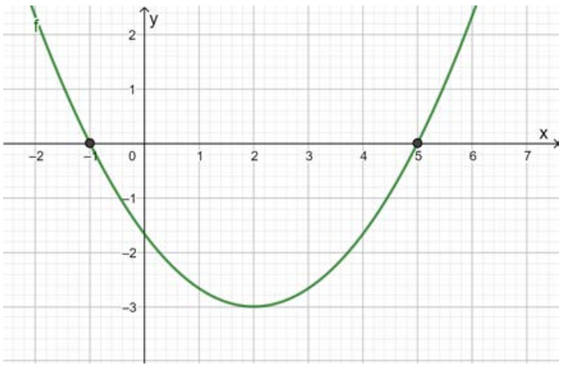
Famílias de funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

1. Para cada uma das representações gráficas seguintes, indica, justificando, o sinal de $a,\ h$ e k e indica ou determina os respectivos valores.

1.1.



1.2.



Extensão

2. Abre o ficheiro do Geogebra a partir do link https://www.geogebra.org/m/dmzsmvwh ou a partir do QR Code abaixo.

   Para cada um dos gráficos, altera os valores de a, h e k, de forma que o gráfico da função f coincida com a parábola representada a tracejado.

Tarefa 13

Transformações de funções quadráticas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

O objetivo da tarefa é interpretar e prever as alterações no gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, ocorridas para a obtenção dos gráficos de famílias das funções $f(x-a)$, $f(x)+b$, $c \times f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, em particular a partir do gráfico da função definida por $f(x)=x^2$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função quadrática. Generalidades de uma função. Transformações geométricas do gráfico de uma função.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

No início da aula, o professor deverá fazer o ponto de situação das aprendizagens adquiridas com a tarefa anterior, pois na presente tarefa, esses conhecimentos são aplicados ao caso particular das transformações do gráfico da função $f(x)=x^2$.
Na discussão, em grupo turma, deve dar-se ênfase à influência dos parâmetros a, h e k no gráfico da família de funções $f(x)=a(x-h)^2+k,\ h,\ k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
É de realçar a vantagem da utilização/exploração dos seletores no recurso utilizado na concretização dos objetivos propostos neste tópico.

Tarefa 14

Água e não só

A água é um bem essencial e a sua gestão é vital! Todas as Câmaras Municipais têm o seu próprio tarifário para a gestão de águas e resíduos, sendo publicados em Diário da República e divulgados nos respetivos sites autárquicos. Estes tarifários contemplam diferentes tipos de utilizadores, domésticos e não domésticos, e apresentam, ainda, tarifas diárias e mensais.

Apesar de popularmente referirmos sempre a "conta da água", na realidade não pagamos só o consumo de água. Pagamos também o Saneamento e os Resíduos Urbanos associados na mesma proporção do consumo da água. Para os utilizadores domésticos há três tipos de tarifas, a Normal, a Social e a de Famílias numerosas.

A figura seguinte apresenta uma parte do tarifário para 2023 na cidade de Faro:

Utilizadores domésticos	Água	Saneamento	Resíduos urbanos
Tarifa de disponibilidade (€/dia):			
Doméstico — Q_3 até 4m^3/hora	0,1481	0,2029	0,1592
Q_3 Superior 4m^3/hora — Igual ao não doméstico			
Tarifa variável:			
1.º Escalão: 0 a 5 m^3/mês	0,5659	0,5106	0,7388
2.º Escalão: 6 a 15 m^3/mês	1,1318	0,6808	0,7388
3.º Escalão: 16 a 25 m^3/mês	1,4714	1,4297	0,7388
4.º Escalão: mais de 25 m^3/mês	2,5219	2,6861	0,7388
Domésticos especiais:			
Tarifa de disponibilidade (€/dia)			
Social	Isento	Isento	Isento
Famílias numerosas	0,1481	0,2029	0,1592
Tarifa variável (€/m^3):			
Social:			
1.º Escalão: 0 a 10 m^3/mês	0,4237	0,5106	0,3950
2.º Escalão: 11 a 15 m^3/mês	1,1318	0,6808	0,7388
3.º Escalão: 16 a 25 m^3/mês	1,4714	1,4297	0,7388
4.º Escalão: mais de 25 m^3/mês	2,5219	2,6861	0,7388
Famílias numerosas:			
1.º Escalão: 0 a 10 m^3/mês	0,5659	0,5106	0,7388
2.º Escalão: 11 a 20 m^3/mês	1,1318	0,6808	0,7388
3.º Escalão: 21 a 30 m^3/mês	1,4714	1,4297	0,7388
4.º Escalão: mais de 30 m^3/mês	2,5219	2,6861	0,7388

1. A família Tavares tem três filhos, pelo que é considerada uma família numerosa. No mês de janeiro esta família consumiu 15 m^3 de água. Qual é o valor que a família teve que pagar pelo consumo?

2. Define um processo que permita determinar o valor a pagar por uma família numerosa, dado o consumo mensal de água, em m^3.

Tarefa 14

Água e não só

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo confrontar os alunos, a partir de uma situação real (utilizando a informação contida numa fatura da água), com a necessidade de terem de utilizar o modelo de uma função definida por ramos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Domínio de uma função aplicado a uma situação real. Função afim e diferentes modos de representação.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica. Folha de cálculo.

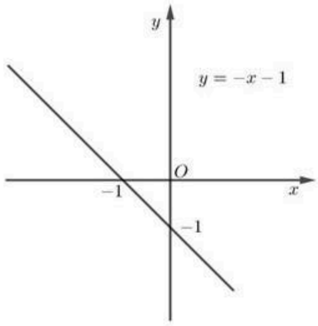
Notas e sugestões:
É de esperar que, ao quererem explicar como se calcula o valor a pagar, em função do consumo efetuado, os alunos recorram a uma função por ramos. Depois de ouvir os diferentes grupos de trabalho, o professor poderá introduzir uma simbologia mais adequada que explicite o que cada grupo de alunos expressou eventualmente sem a formalização adequada.
A questão 2 está propositadamente aberta para que os grupos de trabalho a possam abordar, utilizando recursos já conhecidos, como a folha de cálculo, a programação em *Python* e a calculadora gráfica. O professor, ao circular pelos grupos, deve ouvir e deixar pistas para que possam ir mais além, perguntando, por exemplo: "não será pertinente usarem uma folha de cálculo?" ou "não gostariam de definir um programa, que calcule o valor a pagar a partir do consumo realizado?".
O momento de discussão é fundamental para que todos se apropriem das diversas formas que os vários intervenientes usaram.
A síntese também deve ter um lugar de destaque, uma vez que se tem a oportunidade de introduzir a simbologia adequada às funções definidas por ramos.

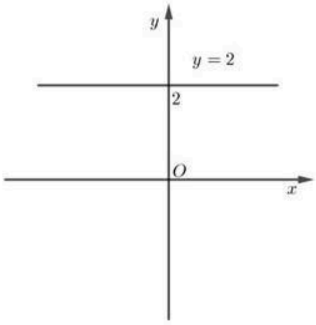
Tarefa 15

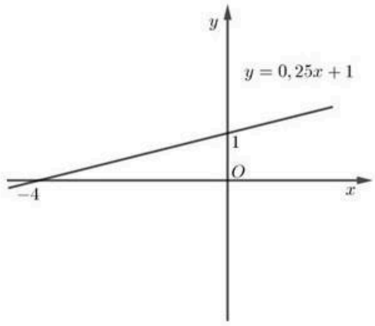
Funções definidas por ramos

1. Considera as seguintes representações gráficas das funções

   $y =- x - 1;\quad y = 2 \quad e \quad y = 0,25x + 1$:







Os gráficos seguintes foram construídos usando parte de cada um dos gráficos anteriormente apresentados.

1.1. Define analiticamente as funções a, b e c :

GRÁFICO I

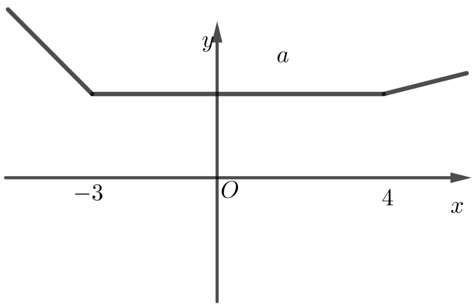


GRÁFICO II

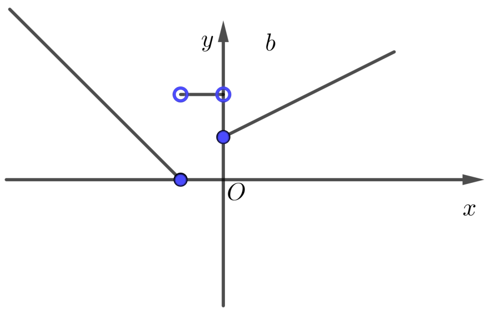
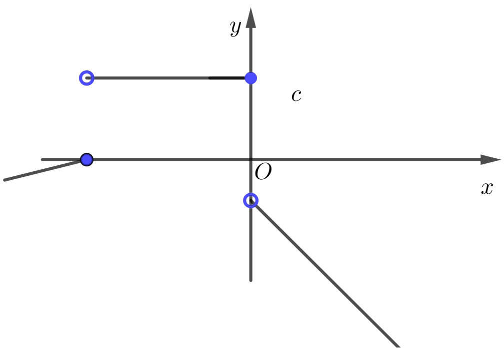


GRÁFICO III



1.2. Calcula os valores seguintes:

1.2.1. $a(-5)$

1.2.2. $a(1)$

1.2.3. $a(6)$

1.2.4. $b(-1)$

1.2.5. $b(-\frac{1}{2})$

1.2.6. $b(2)$

1.2.7. $c(-6)$

1.2.8. $c(0)$

1.2.9. $c(1)$

1.3. Completa a tabela seguinte a partir dos gráficos de cada uma das funções, a, b e c:

Função	a	b	c
Domínio			
Contradomínio			
Coordenadas dos pontos de interseção com os eixos			
Sinal da função			
Extremos e “extremantes”			
Monotonia			

Tarefa 15

Funções definidas por ramos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como finalidade permitir que os alunos continuem a aprofundar as características das funções definidas por ramos. Pretende-se que os alunos se familiarizem com este tipo de funções, a nível de: domínio, contradomínio, sinal, monotonia e pontos notáveis.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função afim e função definida por ramos.

Materiais e recursos: Material de escrita ou tecnologia gráfica.

Notas e sugestões:
Com esta tarefa pretende-se que os alunos mobilizem os conhecimentos adquiridos sobre funções e os apliquem na definição analítica de funções definidas por ramos, nomeadamente, os conceitos de domínio, contradomínio, sinal, monotonia e pontos notáveis.
Será sempre vantajoso promover discussões de ideias após os alunos terem sido confrontados com as questões.

Tarefa 16

Função módulo

1. Considera as funções f e g, definidas por:

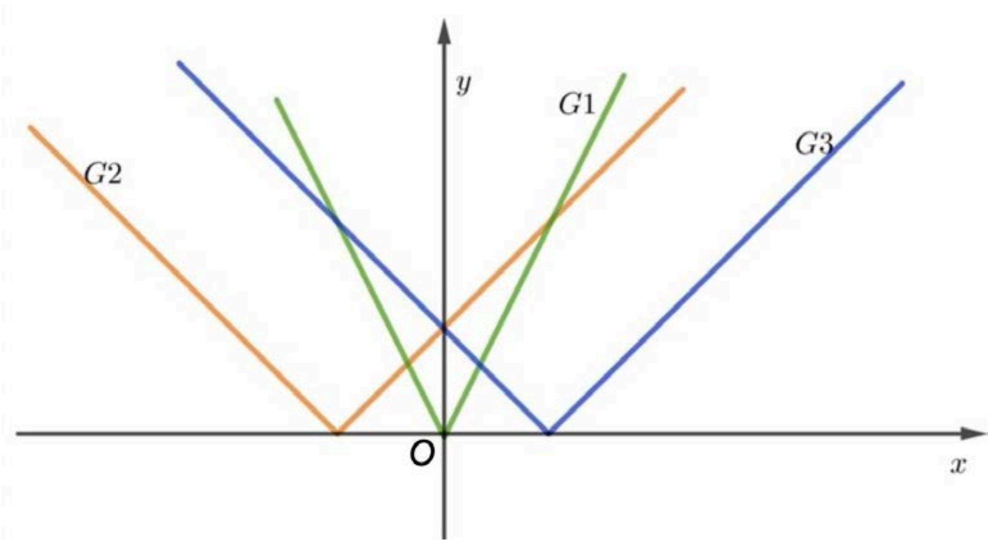
$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1.1. Recorrendo à calculadora gráfica, representa no mesmo referencial as funções f e g. O que podes concluir?

1.2. Qual é o domínio, o contradomínio, os zeros e os extremos?

1.3. Faz o estudo do sinal e da monotonia das funções.

2. Na figura seguinte estão representados os gráficos, $G1$, $G2$ e $G3$, de três funções reais de variável real g, h e i.



As funções são definidas algebricamente por:

- $g(x) = 2|x|$
- $h(x) = |x - 2|$
- $i(x) = |x + 2|$

2.1. Faz corresponder a cada função o respetivo gráfico.

2.2. Explica como podes obter os gráficos das funções g, h e i a partir do gráfico da função f definida por $f(x) = |x|$.

3. Na figura seguinte está um exemplo de um programa em *Python* para definir a função módulo.

```python
def modulo(x):
 if x<0:
   return -x
 else:
   return x
x=float(input("x="))
print("A imagem de",x,"é:",modulo(x))
```

3.1. Explica em linguagem natural o que faz o programa.

3.2. Se ao executarmos o programa e inserirmos o valor 3, qual será o valor devolvido? Explica a tua resposta.

3.3. Transcreve o programa para um editor de *Python* e executa-o. Qual é o valor de x que deves introduzir para obteres o valor 4? E o valor -5?

Tarefa 16

Equação vetorial da reta

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa pretende-se que os alunos estudem um caso particular das funções definidas por ramos, a função módulo.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função afim e função definida por ramos. Transformações de gráficos de funções.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra e/ou calculadora gráfica.

Notas e sugestões:
Pretende-se mobilizar a abordagem realizada com as funções definidas por ramos para a função módulo, evidenciando as especificidades deste modelo, em particular, a expressão analítica e a sua representação gráfica.
O professor deverá, de forma intencional, promover o desenvolvimento da prática de algoritmia nos seus alunos, ao propor a tradução, em linguagem natural, de um programa em *Python*, reforçando assim o conhecimento da função módulo, enquanto função definida por ramos.