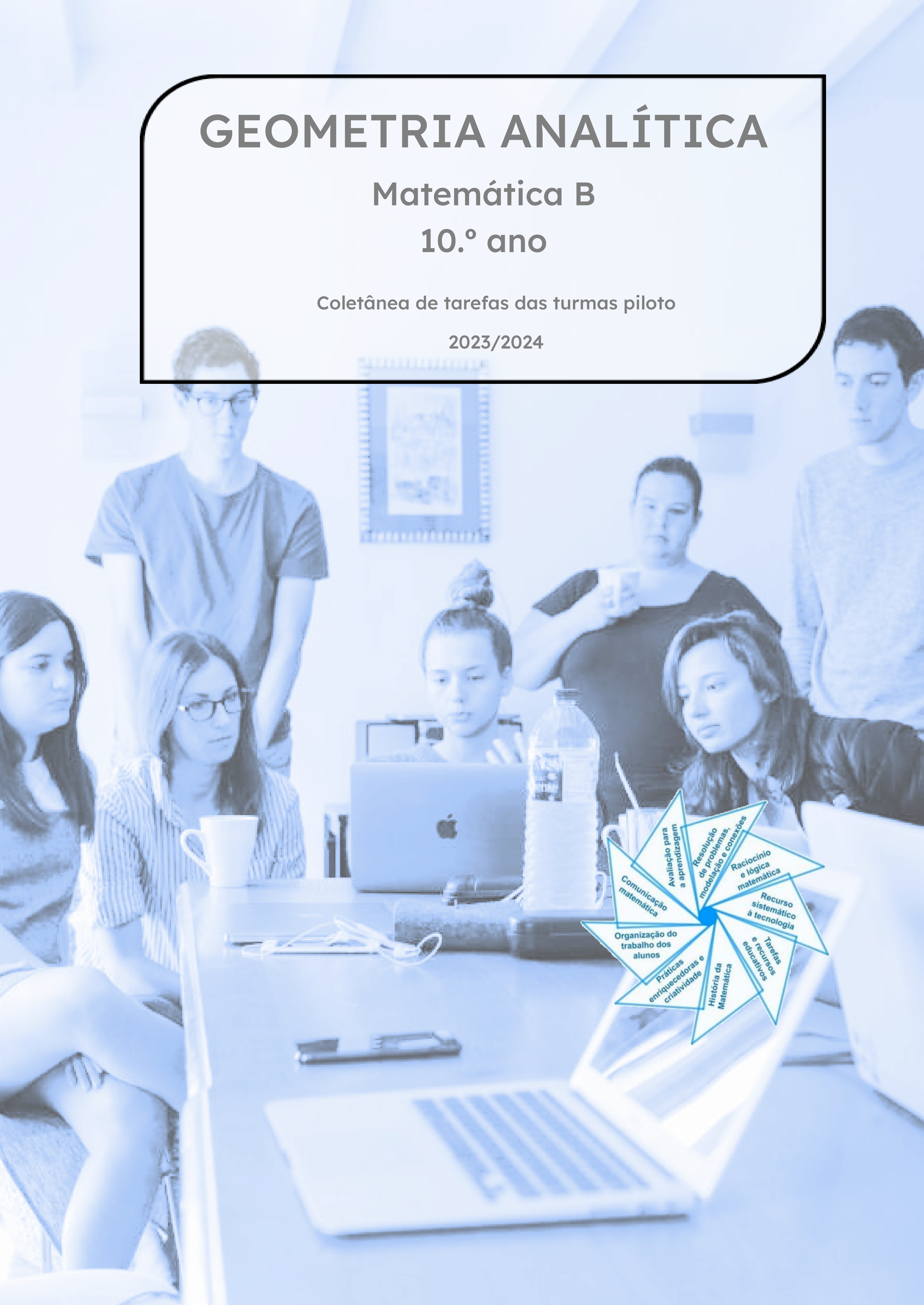
GEOMETRIA ANALÍTICA

Matemática B

10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024



Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Geometria Analítica (Matemática B - 10.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática B

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/grupo-de-pessoas-assistindo-no-laptop-1595385/

Data:

Lisboa, junho de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - GEOMETRIA ANALÍTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Batalha naval	**Geometria analitica no plano** Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano. Coordenadas de pontos num referencial cartesiano.	• Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas • Organização do trabalho dos alunos • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
5	Tarefa 2 Azulejo	**Geometria analitica no plano** Coordenadas de pontos num referencial cartesiano.	• Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico. • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - Transformados de pontos pela reflexão de eixos paralelos a Ox e a Oy - Transformados de pontos pela meia volta de centro na origem do referencial; - Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas • Recurso sistemático à tecnologia • Organização do trabalho dos alunos • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 3 Onde está o Wally?	**Geometria analitica no plano** Conjuntos de pontos e condições.	• Identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos: - semiplanos; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
4	Tarefa 4 A Rampa	**Geometria analitica no plano** Equação reduzida da reta no plano.	• Reconhecer, analisar e aplicar, a equação de uma reta, na resolução de problemas.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	[Tarefa 5](#) Vila Real de Santo António - A cidade do Marquês	**Geometria analítica no plano** Conjuntos de pontos e condições. Equação reduzida da reta no plano.	• Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico. • Identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos: - semiplanos; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples • Reconhecer, analisar e aplicar, a equação de uma reta, na resolução de problemas.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Tarefas e recursos educativos • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
4	[Tarefa 6](#) Viagens aéreas	**Geometria analítica no espaço** Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço. Coordenadas de pontos num referencial cartesiano.	• Identificar coordenadas de pontos num referencial cartesiano ortogonal e monométrico. • Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas • Recurso sistemático à Tecnologia • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

6	Tarefa 7 Condições no espaço	**Geometria analítica no espaço** Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço. Coordenadas de pontos num referencial cartesiano.	• Identificar coordenadas de pontos num referencial cartesiano ortogonal e monométrico. • Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional. • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - equações de planos paralelos aos planos coordenados; - equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Raciocínio matemático • Práticas enriquecedoras e criatividade • Organização dos trabalho dos alunos • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
3	Tarefa 8 Reproduz a obra de arte	**Geometria analítica no plano** Conjuntos de pontos e condições. Equação reduzida da reta no plano.	• Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática.	Trabalho a pares com elaboraçã o de um relatório	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à Tecnologia • Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A). • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F) • Percebe o valor estético das experimentações e criações a partir de intencionalidades artísticas e tecnológicas, mobilizando técnicas e recursos de acordo com diferentes finalidades e contextos socioculturais. (H) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Tarefa 1

Batalha Naval

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

O objetivo desta tarefa é recordar o conceito de referencial cartesiano no plano e as coordenadas de pontos. Ao resolver esta tarefa, pretende-se que os alunos identifiquem e marquem coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico, e escolham, também, referenciais adequados às figuras apresentadas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Referencial cartesiano, coordenadas de pontos e teorema de Pitágoras.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

Num primeiro momento, o professor deve distribuir o enunciado da tarefa e organizar os alunos em pares. De seguida, os alunos devem resolver a tarefa enquanto o professor acompanha o trabalho desenvolvido colocando questões orientadoras para ajudar no cumprimento dos objetivos. No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.

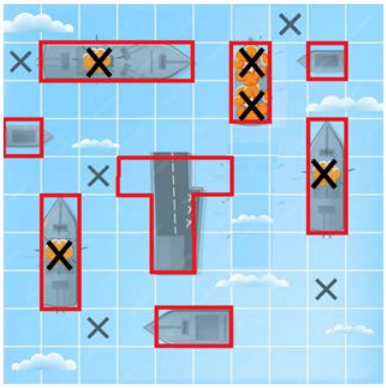
Para consolidação e aprofundamento da temática propõem-se várias situações envolvendo o uso de referenciais cartesianos.

Tarefa 1

Batalha Naval

A Batalha Naval é um jogo no qual dois jogadores jogam alternadamente. Cada jogador tem dois tabuleiros de jogo, duas grelhas de 10X10, uma onde coloca os seus barcos, sem que o adversário tenha conhecimento da sua localização e outra que representa a grelha do adversário. Cada jogador dá tiros na grelha do adversário com o objetivo de descobrir a sua frota, para a afundar. Todos os tiros, em cada jogada, devem ser sinalizados nas respetivas grelhas com um X. Quando um jogador atinge um navio do adversário, pode jogar novamente. Ganha o jogador que primeiro afundar toda a frota do seu adversário.

Na figura ao lado, podemos encontrar uma grelha de jogo (tabuleiro) com alguns barcos colocados, bem como as suas jogadas (tiros dados) assinaladas com X.



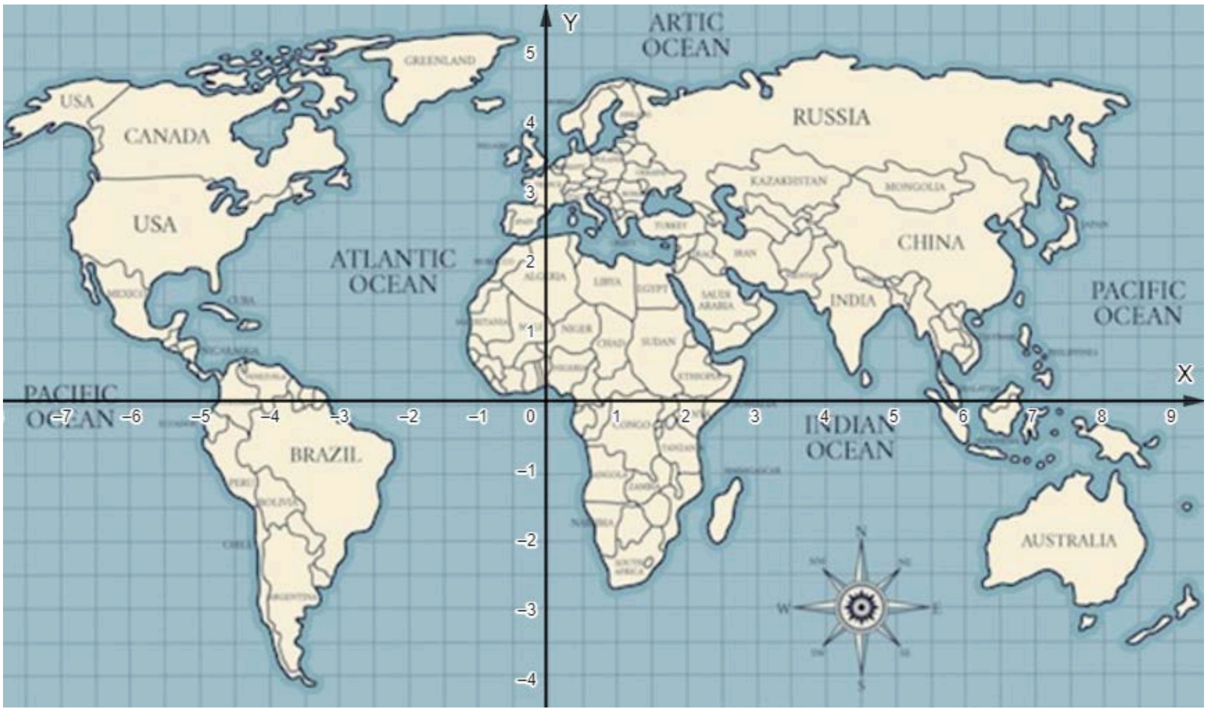
Como devemos proceder para identificar a localização exata dos tiros já dados? Apresentam-se duas alternativas. Qual será a mais eficiente/eficaz?

<u>Alternativa 1</u>: Localizar os tiros através de uma descrição da imagem;

<u>Alternativa 2</u>: Localizar os tiros com recurso a coordenadas, a partir de referencial previamente fixado.

1. Observa a grelha do jogo na qual foi fixado um referencial. Cada célula da grelha pode ser identificada por um par ordenado da forma $(a,\ b)$, onde a corresponde ao respetivo valor no eixo horizontal e b ao respetivo valor no eixo vertical. Aos valores a e b chamam-se coordenadas.
   - 1.1. Escreve as coordenadas dos tiros que não acertaram nos barcos, usualmente designados por "água".
   - 1.2. Escreve as coordenadas dos tiros que atingiram os barcos.
   - 1.3. Escreve as coordenadas dos tiros que afundaram o barco. O que têm essas coordenadas em comum?
   - 1.4. Conheces outras situações em que a utilização de referenciais é aconselhável? Quais?

2. A imagem apresenta o mapa-mundo onde se fixou um referencial ortonormado, no qual o eixo $0x$ coincide com o Equador e o eixo $0y$ com o Meridiano de Greenwich.



Pretende-se descobrir uma palavra secreta, seguindo as seguintes instruções: Identifica o país onde se localiza cada um dos pontos, com as seguintes coordenadas, e seleciona, do nome desse país, a letra correspondente à posição indicada.

Exemplo:

$(4,\ 4)$ 3.ª letra	O país é a Rússia e a 3.ª letra da palavra é o **s**

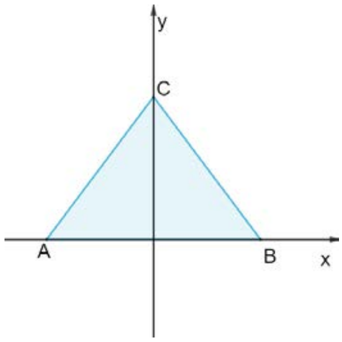
Palavra secreta:

(5, 3) 1.ª letra	(-6, 4) 2.ª letra	(8, -2) 4.ª letra	(-6; 1,5) 2.ª letra	(2,5;1,5) 1.ª letra	(8, -2) 6.ª letra	(-4;-2,5) 6.ª letra	(-3, -1) 5.ª letra	(6, 2) 1.ª letra	(0, 3) 3.ª letra

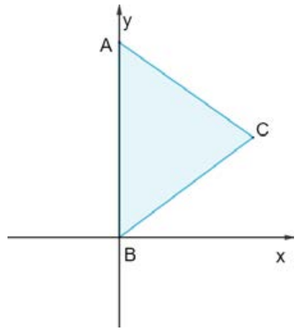
3. Do triângulo $[ABC]$, representado em cada referencial, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 6$ unidades de comprimento;
- $\overline{CA} = \overline{CB} = 5$ unidades de comprimento.

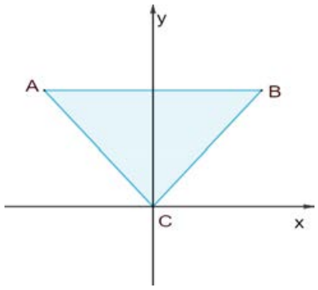
I



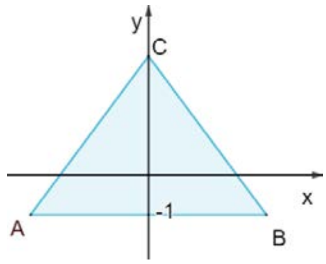
II



III



IV



3.1. Escreve as coordenadas dos vértices do triângulo $[ABC]$, em cada um dos referenciais.

3.2. Em qual dos referenciais é mais simples determinar as coordenadas dos pontos que representam os seus vértices?

4. Considera um quadrado $[ABCD]$.
Representa esse quadrado em dois referenciais cartesianos distintos à tua escolha. Determina as coordenadas dos pontos que representam os seus vértices em cada referencial, sabendo que:

4.1. a medida do lado do quadrado é 6 (unidades de comprimento);

4.2. a medida da diagonal do quadrado é 6 (unidades de comprimento).

5. **(Aprofundamento)** Considera um hexágono regular $[ABCDEF]$ em que a medida do lado é 6 unidades de comprimento. Representa o hexágono num referencial cartesiano, centrado na sua origem, e determina as coordenadas dos pontos que representam os seus vértices. (se necessário, utiliza valores aproximados às décimas).

Tarefa 2

Azulejo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é identificar retas paralelas aos eixos coordenados, através das suas equações, as coordenadas de transformados de pontos pela reflexão de eixos paralelos a Ox e a Oy e as coordenadas de transformados de pontos pela meia volta de centro na origem do referencial.

Conhecimentos prévios dos alunos: Reflexões e rotações.

Materiais e recursos: Computador e/ou telemóvel e um Ambiente de Geometria Dinâmica - por exemplo, o Geogebra (no computador ou telemóvel).

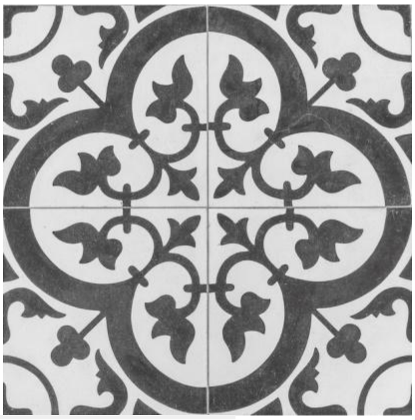
Notas e sugestões:
Num primeiro momento da aula, o professor deve fazer uma breve abordagem aos menus do Ambiente de Geometria Dinâmica (Geogebra).
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador facilitador. As resoluções dos alunos deverão ser apresentadas e discutidas no grupo turma, no fim do trabalho autónomo.
Poderão surgir dificuldades no uso do Geogebra, sobretudo quando se utiliza o telemóvel.
São propostas várias situações para consolidação dos conceitos envolvidos, que o professor deve selecionar de acordo com as dificuldades que prevê encontrar na sua turma.

Tarefa 2

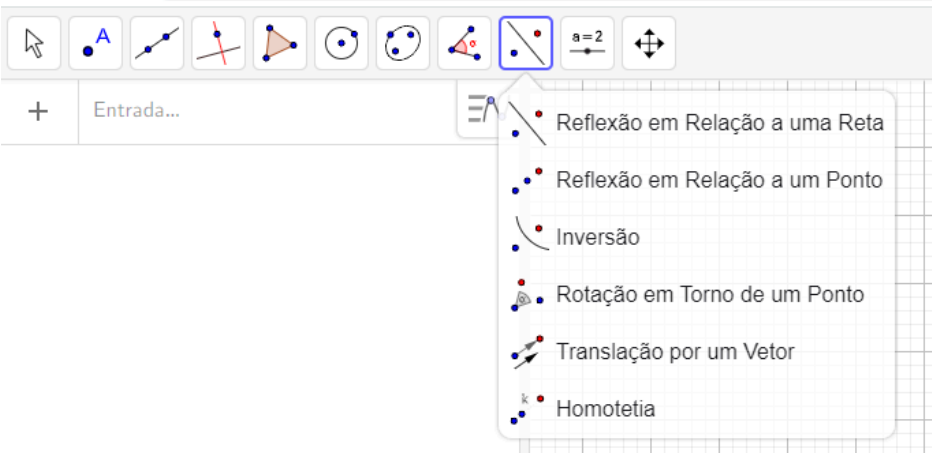
Azulejo

1.

1.1. Discute com os teus colegas as simetrias que consegues identificar na figura ao lado.



1.2. Acede à apliqueta Azulejo onde encontras parte deste azulejo.
Procura reproduzir o azulejo completo, usando isometrias adequadas, explorando o seguinte menu do Geogebra:



2.

2.1. Acede ao Geogebra e na "Folha 2D", marca os pontos:
$A(-1,\ 2)$, $B(5,\ 2)$, $C(5, -4)$ e $D(0,\ 2)$.

2.2. Desenha as retas paralelas aos eixos coordenados que passam por cada um dos pontos.

2.3. Depois de desenhares cada reta, na "Folha Algébrica" é apresentada uma equação que define essa reta. Completa a tabela escrevendo as equações das retas que visualizas na "Folha Algébrica:

	Equação da reta **paralela** a Ox que passa por:	Equação da reta **paralela** a Oy que passa por:
$A(-1,\ 2)$		
$B(5,\ 2)$		
$C(5, -4)$		
$D(0,\ 2)$		

2.4. Tendo por base o que observaste na questão anterior, conjetura sobre a equação da reta que passa por $P(a,\ b)$ e é paralela:

2.4.1. a Ox;

2.4.2. a Oy;

2.5. Completa a tabela seguinte, determinando as coordenadas dos transformados dos pontos A, B, C e D pela reflexão de eixo Ox, pela reflexão de eixo Oy e pela meia volta de centro na origem do referencial.

	Transformados		
	reflexão de eixo Ox	reflexão de eixo Oy	meia volta de centro na origem
$A(-\ 1,\ 2)$			
$B(5,\ 2)$			
$C(5, -\ 4)$			
$D(0,\ 2)$			

2.6. Tendo por base o que observaste na questão anterior, conjetura sobre as coordenadas do transformado de um ponto $P(a,\ b)$ pela:

2.6.1. reflexão de eixo Ox;

2.6.2. reflexão de eixo Oy;

2.6.3. meia volta de centro na origem do referencial.

2.7. Escreve na folha algébrica do Geogebra cada uma das equações seguintes: $x = 3$ e $y =- 2$. Determina as coordenadas dos pontos A' e A'', transformados de $A(-\ 1, 2)$ pelas reflexões cujos eixos são as retas de equação $x = 3$ e $y =- 2$, respetivamente.

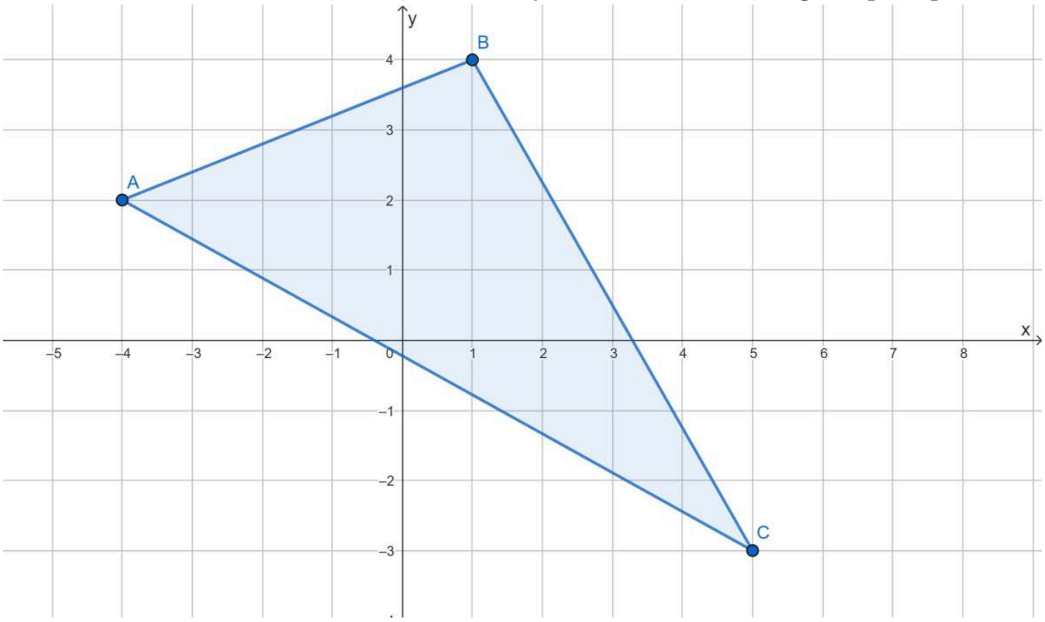
2.8. Escreve as coordenadas do ponto de interseção do segmento de reta $[AA']$ com a reta de equação $x = 3$ e do ponto de interseção do segmento de reta $[AA'']$ com a reta de equação $y =- 2$.

Os pontos determinados no item anterior designam-se por pontos médios dos segmentos de reta. Estes pontos médios dividem os respetivos segmentos de reta em dois segmentos de reta com o mesmo comprimento.

2.9. Considera agora o segmento de reta $[AC]$. Explora as ferramentas do Geogebra e determina as coordenadas do ponto médio de [AC]. Qual é a relação entre as coordenadas dos extremos do segmento de reta e as coordenadas do seu ponto médio?

2.10. (*grau de dificuldade mais elevado*)
Considera os pontos $P\left(x_P, y_P\right)$ e $Q\left(x_Q, y_Q\right)$. Tendo por base o que observaste na questão anterior, conjetura sobre as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[PQ]$, em função das coordenadas dos pontos P e Q.

3. No referencial ortonormado xOy, está representado o triângulo $[ABC]$.



3.1. Escreve as coordenadas dos vértices do triângulo $[ABC]$.

3.2. Determina as coordenadas dos vértices do triângulo $[A'B'C']$, sabendo que este é o transformado do triângulo $[ABC]$ pela reflexão:

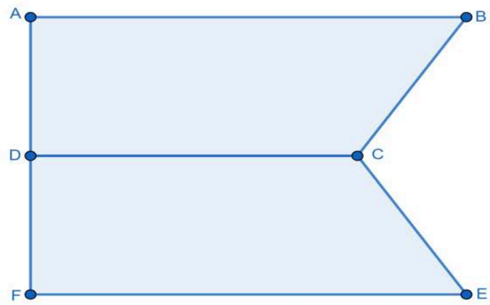
3.2.1. de eixo Ox;

3.2.2. de eixo Oy;

3.2.3. cujo eixo é a reta de equação $x = 5$;

3.2.4. cujo eixo é a reta de equação $y = -1$.

4. A figura apresenta o polígono $[ABCEF]$ constituído por dois trapézios retângulos congruentes $[ABCD]$ e $[CDFE]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{FE} = 8$ cm;
- $\overline{DC} = 6$ cm;
- $\overline{AD} = \overline{DF} = 3$ cm.

4.1. Escreve as coordenadas dos vértices do polígono $[ABCEF]$ considerando o referencial ortonormado xOy cuja origem é o ponto médio do segmento de reta $[DC]$ e o eixo Ox contém o segmento de reta $[DC]$. Considera como unidade de medida o centímetro.

4.2. De acordo com o referencial considerado, escreve:

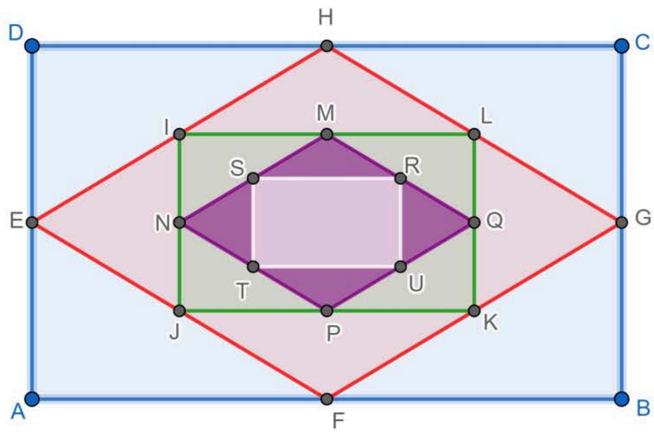
4.2.1. as equações das retas AB e AF;

4.2.2. as coordenadas do transformado do ponto médio do segmento de reta $[FB]$, pela meia volta de centro na origem do referencial.

5. Num retângulo $[ABCD]$ foram marcados os pontos médios de cada um dos lados, que passaram a ser os vértices de um novo quadrilátero $[EFGH]$.

Sobre os lados deste novo quadrilátero, marcaram-se de novo os pontos médios e surgiu um outro quadrilátero $[IJKL]$.

O processo repete-se e gera-se uma sequência de quadriláteros, como é sugerido na figura.



Admite ainda que $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm.

Aplica à figura um referencial ortonormado xOy em que a unidade de medida seja o centímetro.

Atendendo ao referencial escolhido, resolve os seguintes itens.

5.1. Determina as coordenadas dos vértices dos retângulos $[ABCD]$ e $[IJKL]$.

5.2. Escreve a equação da reta SR e da reta MP.

5.3. Determina as coordenadas do ponto U.

5.4. Calcula a área do retângulo $[RSTU]$.

Tarefa 3

Onde está o Wally?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas, condições que definem conjuntos de pontos: semiplanos e conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noção de inequação, teorema de Pitágoras, coordenadas de pontos e equações de retas paralelas aos eixos coordenados.

Materiais e recursos: Computador e/ou telemóvel e o Geogebra (preferencialmente no computador).

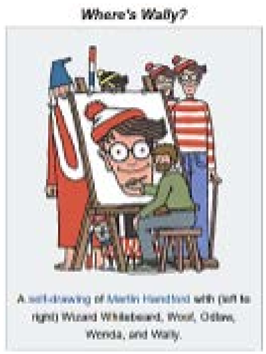
Notas e sugestões:
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador facilitador. O professor deve promover uma discussão sobre as resoluções dos alunos, com toda a turma, no fim do trabalho autónomo.
Na aplicação da tarefa poderão surgir dificuldades relativamente aos conceitos de conjunção e disjunção de condições. O professor deve colocar questões orientadoras que permitam clarificar todas as dúvidas.
Mais uma vez, o recurso ao telemóvel pode dificultar a utilização do Geogebra.

Tarefa 3

Onde está o Wally?

Onde está o Wally?

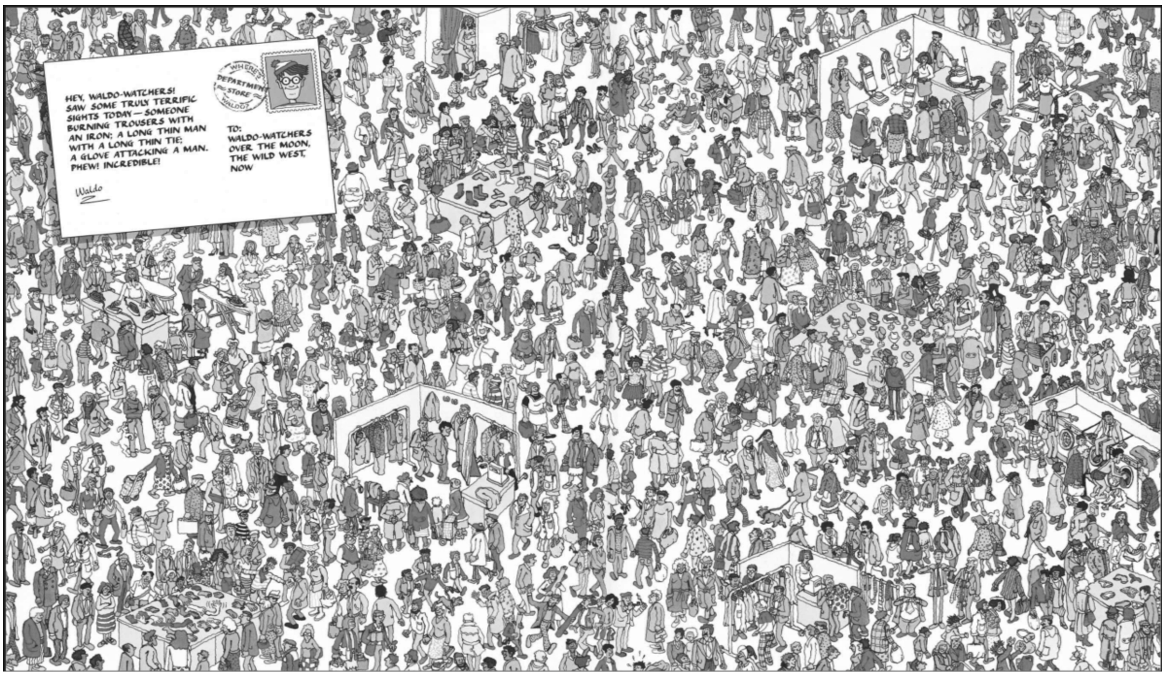
Martin Handford, um ilustrador Britânico criou nos anos 80 do Século XX uma personagem para entreter as crianças chamada Wally. Esta figura tem características muito identificativas: camisola e gorro com riscas vermelhas e brancas, o gorro tem um pompom, usa óculos, tem uma bengala… Nas ilustrações, tem de se encontrar o Wally em diferentes situações, em inúmeros lugares e até em épocas diferentes.



(1)

Mas, então porque é que as ilustrações se tornaram tão populares em todas as idades? Nas gravuras, o Wally costuma estar no meio da multidão e o grafismo inclui muitas pistas enganosas como muitos elementos com riscas vermelhas e brancas, como por exemplo na figura seguinte, que não está a cores.

Onde está o Wally? Não é fácil responder com certeza absoluta.



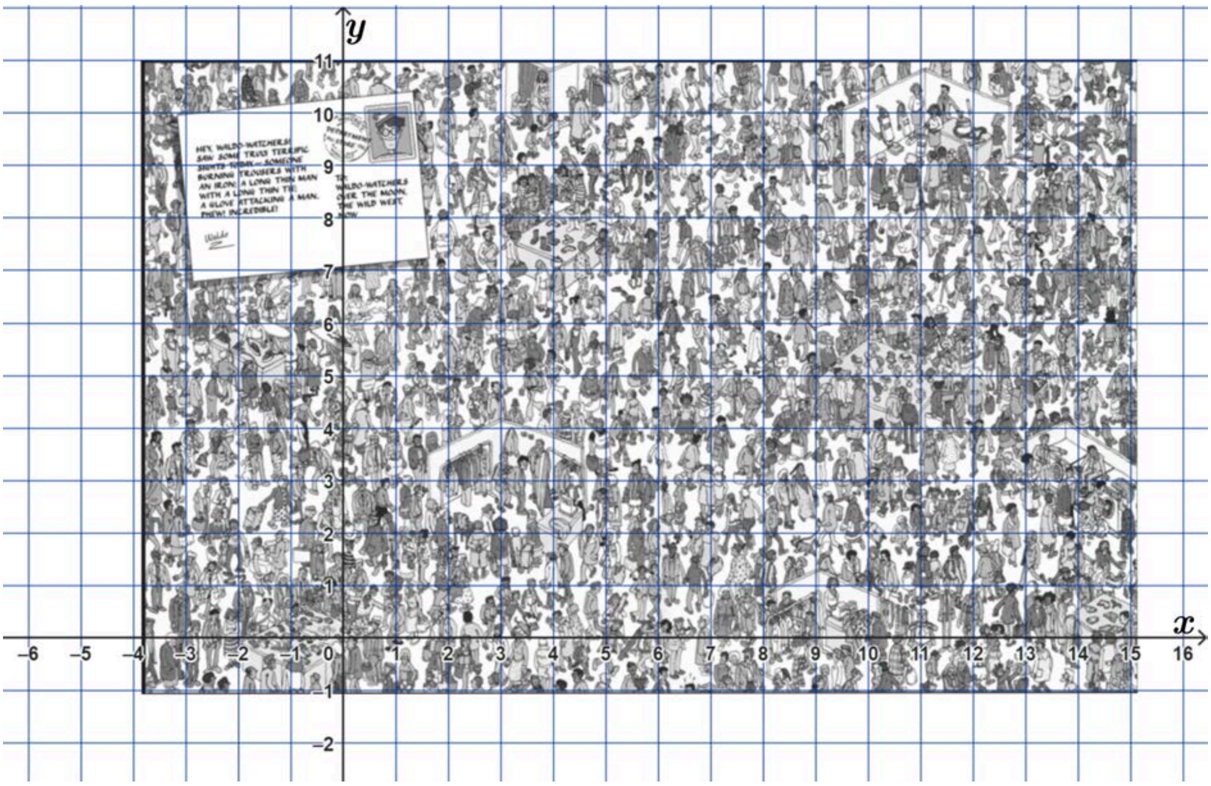
(2)

---

(1) Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/File:MartinHandfordWally%26Friends.PNG
(2) Fonte : https://img1.gratispng.com/20180429/fgw/kisspng-orcs-must-die-unchained-youtube-photoshop-contest-5ae6195e1b3b94.8834152515250292141116.jpg

Mas, se colocarmos num referencial a ilustração e se souberes que a imagem do Wally está enquadrada pelas retas de equação $x = 4$, $x = 5$, $y = 8$ e $y = 8$, fica mais fácil encontrares o Wally?

Assinala no referencial a região onde está o Wally.



Onde está o casal do sudoeste asiático na figura anterior?

A Alice disse ao Afonso que encontrou um casal que parecia ser do sudoeste asiático. O Afonso não o encontrou e a professora de Matemática propôs à Alice que ela utilizasse a Matemática para orientar o colega.

"Para localizares o casal considera $x > 8$, $x > 8$, $y > 2$ e, finalmente, $y < 4$".

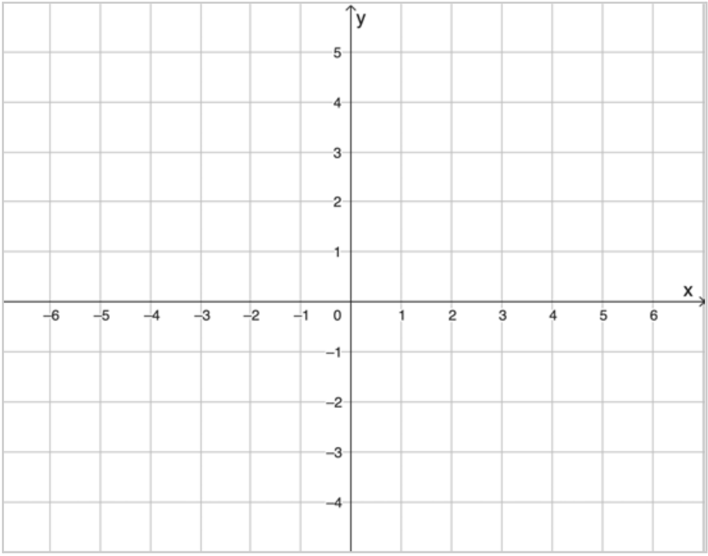
O Afonso, passado um bocado, respondeu que não tinha conseguido encontrá-los pois tinha obtido a imagem toda.

Qual dos dois amigos tem razão? Justifica.

1. Considera o referencial xOy.
   1.1. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença ao conjunto definido pela condição $x > 2$.
   1.2. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença ao conjunto definido pela condição $y > 3$.

1.3. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença simultaneamente aos dois conjuntos referidos nos dois itens anteriores.

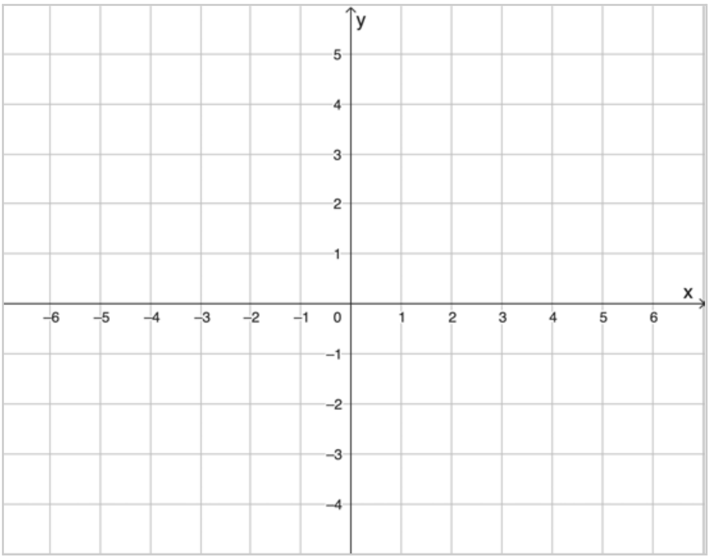
1.4. Representa no referencial todos os pontos do plano que verificam simultaneamente as duas condições. Esse conjunto de pontos representa-se analiticamente por: $x > 2 \wedge y > 3$.



> Nota: O símbolo matemático ∧ (lê-se “e”) usa-se para representar a conjunção de condições, a que corresponde a interseção de conjuntos.

1.5. Abre o Geogebra e na Folha Algébrica escreve a condição $x > 2 \wedge y > 3$. Observa se a representação geométrica que surge no Geogebra é igual à que fizeste no item anterior.

1.6. Representa no referencial todos os pontos que verificam pelo menos uma das condições $x > 2$ ou $y > 3$. Esse conjunto de pontos do plano representa-se analiticamente por: $x > 2 \vee y > 3$.



> Nota: O símbolo matemático ∨ (lê-se “ou”) usa-se para representar a disjunção de condições, a que corresponde a união de conjuntos.

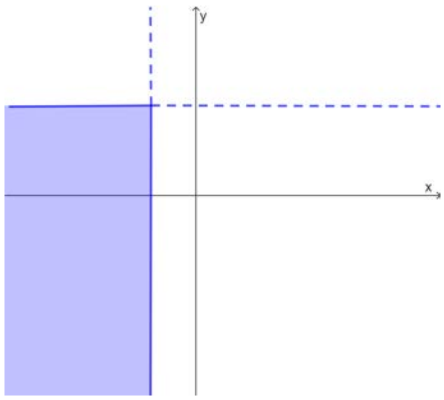
1.7. Abre o Geogebra e na Folha Algébrica escreve a condição $x > 2 \vee y > 3$. Observa se a representação geométrica que surge no Geogebra é igual à que fizeste no item anterior.

2. Faz corresponder a cada uma das condições uma das regiões sombreadas representadas nos referenciais seguintes.

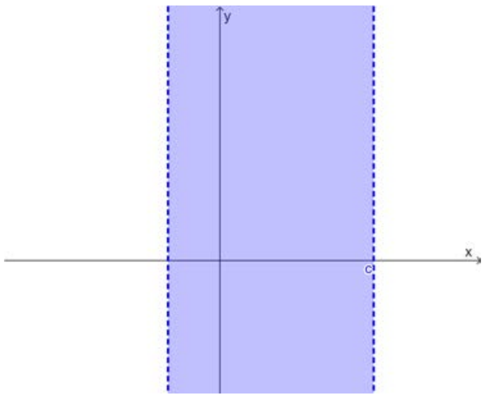
A) $x \leq -1 \wedge y \leq 2$ B) $x \leq -1 \vee y \leq 2$

C) $x < 3 \wedge x > -1$ D) $x < 3 \vee x > -1$

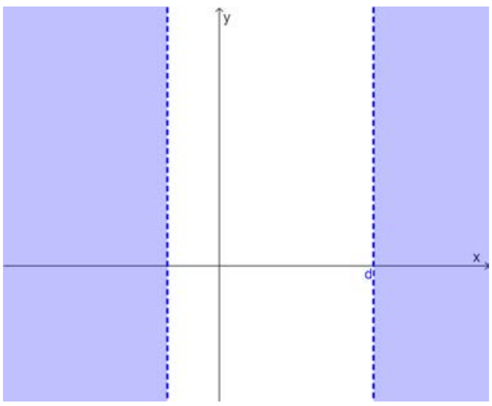
I)



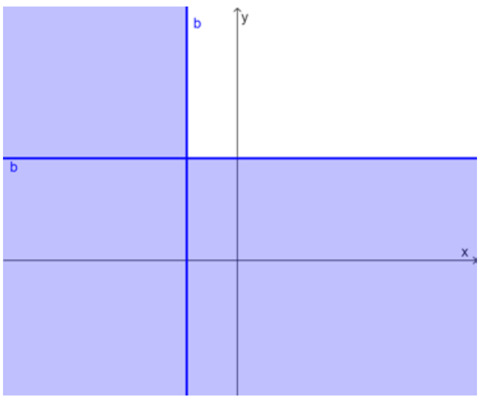
II)



III)



IV)



3. Representa, no Geogebra, cada uma das seguintes condições e descreve (em texto) a região obtida.

3.1. $x \leq 2,3$

3.2. $y >- 5$

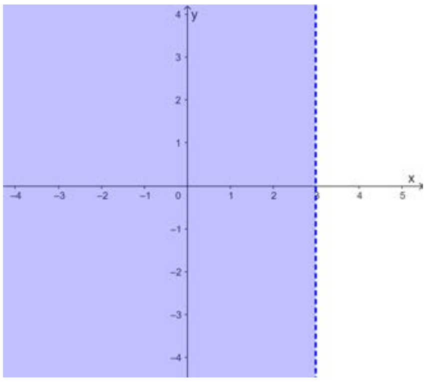
3.3. $-5 \leq y < 0$

3.4. $x < 4 \wedge y \leq 2$

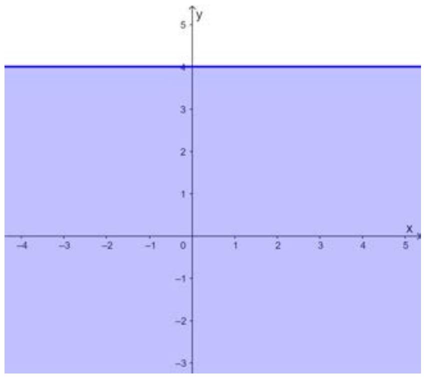
3.5. $x \geq 7 \vee y \geq - 5$

4. Define, através de condições, cada uma das regiões do plano sombreadas.

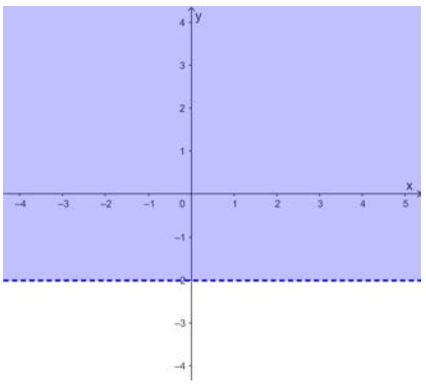
4.1.



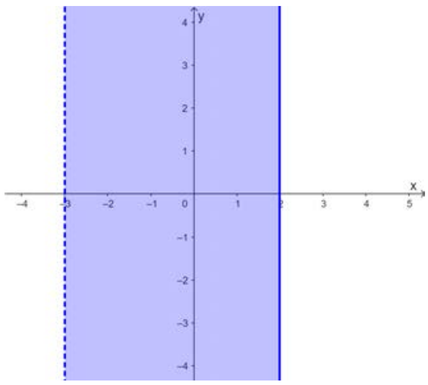
4.2.



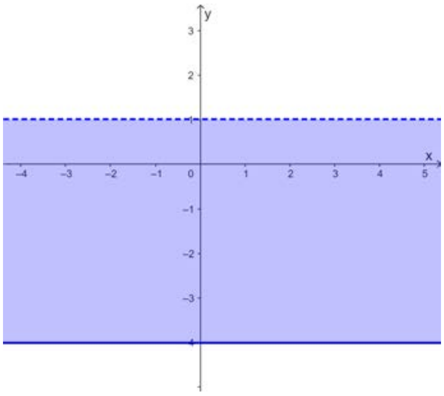
4.3.



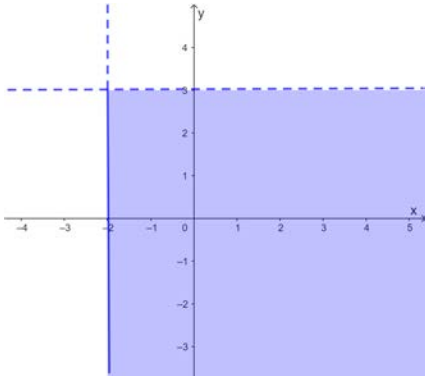
4.4.



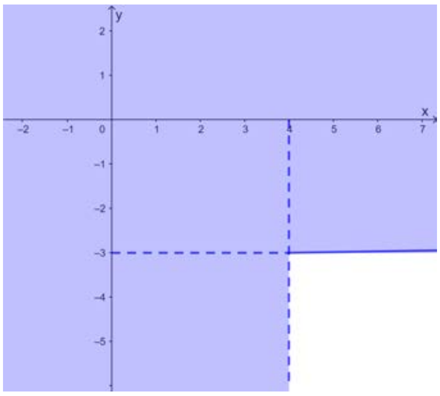
4.5.



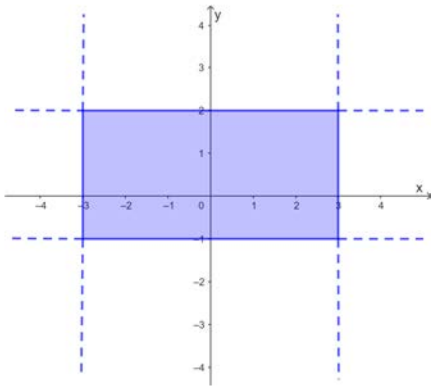
4.6.



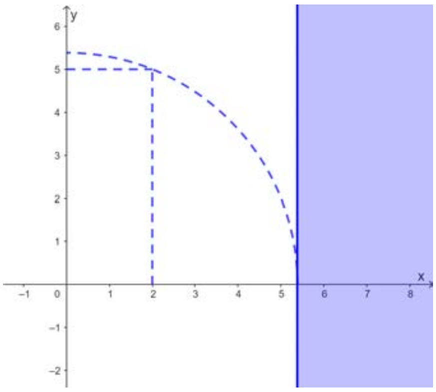
4.7.



4.8.



4.9. (Aprofundamento)

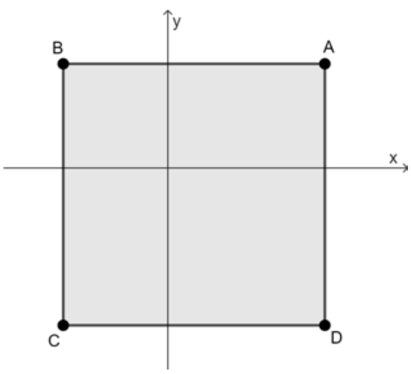


5. No referencial o.m. xOy, no qual uma unidade corresponde a 1 centímetro, está representado o quadrado $[ABCD]$.

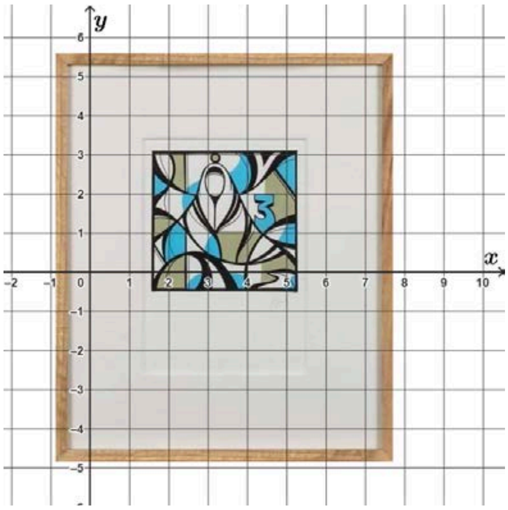
Sabe-se que:

- O quadrado $[ABCD]$ tem 25 cm^2 de área.
- As coordenadas do vértice A são $(3, 2)$.

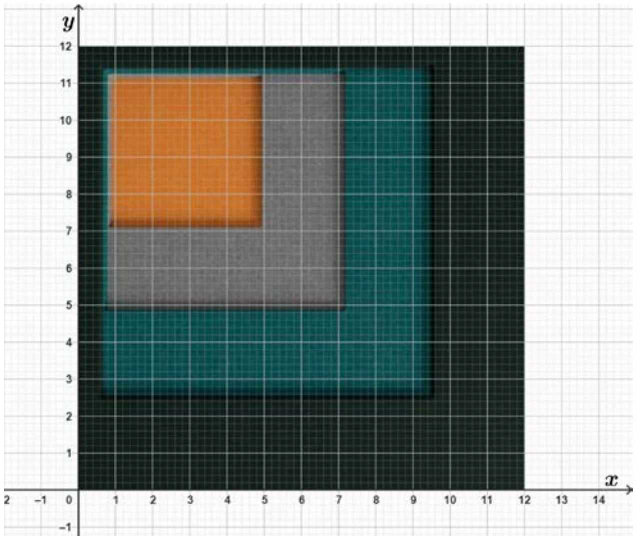
Define o quadrado $[ABCD]$ por uma condição.



6. O artista Hazul que não deixa que lhe fotografem o rosto encheu a cidade do Porto de mulheres sem rosto e figuras animadas por ondas e formas geométricas, condensando na sua obra a evolução da relação da cidade com os graffitis (3). Numa das obras de Hazul (4) foi colocado um referencial o.m. xOy. Na obra está representado o número 3. Define por uma condição a localização desse número.



7. (Aprofundamento) Na obra Dream (5) foi colocado um referencial o.m. xOy.



   7.1. Define por uma condição o quadrado cor-de-laranja.
   7.2. Define por uma condição a região cinzenta.

8. (Aprofundamento) Representa os conjuntos de pontos definidos por cada uma das seguintes condições. Recorre ao Geogebra para verificares as tuas respostas.
   8.1. $x > 3 \wedge x < 3$
   8.2. $(x \geq -1 \wedge x \leq -1) \vee (y \geq 2 \wedge y \leq 2)$
   8.3. $(x > 5 \wedge x < 5) \vee y > 4$

(3) Fonte: https://www.publico.pt/2015/05/17/local/noticia/hazul-por-hazul-1695771
(4) Fonte: https://www.p55.art/cdn/shop/products/hazul-pintura-p55-art-28946994495573.jpg?v=1664477875
(5) Fonte: https://www.p55.art/cdn/shop/products/jngkVLORIA.jpg?v=1674819269Neste

Tarefa 4

A rampa

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é reconhecer, analisar e aplicar a equação reduzida da reta na resolução de problemas. Pretende-se, também, interpretar o valor do declive e da ordenada na origem, num contexto real.

Conhecimentos prévios dos alunos: Reconhecer uma reta não vertical como representação gráfica de uma função afim. Conhecer a importância da variação de cada parâmetro da sua expressão analítica. Regressão linear.

Materiais e recursos: Calculadora, computador e/ou telemóvel e Geogebra (no computador ou telemóvel).

Notas e sugestões:
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo, de forma autónoma pelos alunos, o professor acompanha o trabalho desenvolvido colocando questões orientadoras para ajudar no cumprimento dos objetivos. No fim do trabalho autónomo deve realizar-se uma discussão com toda a turma para analisar e discutir as resoluções dos alunos.
Os alunos poderão manifestar dificuldades na obtenção da equação reduzida da reta e na interpretação dos respetivos parâmetros.
Aconselha-se o uso do computador para facilitar a visualização com o Geogebra.
No final da tarefa encontram-se três questões (5, 6 e 7) de grau de dificuldade superior. Com estas, estabeleceu-se a relação entre conhecimentos já adquiridos noutros temas: regressão linear e função afim. Os alunos poderão manifestar dificuldades em converter unidades na questão 5 e na interpretação das questões 6 e 7, nomeadamente, na identificação do instante inicial, no contexto do problema.

Tarefa 4

A rampa

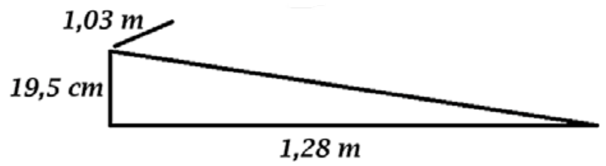
A Teresa, aluna da Escola Secundária José Saramago, resolveu visitar os amigos da Escola Secundária Pedro Nunes. Estes decidiram levá-la à sua pastelaria favorita. A Teresa é muito independente, apesar de se deslocar em cadeira de rodas .

A pastelaria tem uma pequena rampa amovível na entrada. Porém, o Miguel, que é muito consciencioso, resolveu ir verificar se as características da rampa estavam de acordo com a legislação que consultou e que apresentou aos colegas.

> Decreto-Lei n.º 163/2006 de 8 de agosto: Aprova o regime da acessibilidade aos edifícios e estabelecimentos que recebem público, via pública e edifícios habitacionais.
> ANEXO: Normas técnicas para melhoria da acessibilidade das pessoas com mobilidade condicionada.
>
> Capítulo 2, Secção 2.5 – Rampas
>
> 2.5.1 - As rampas devem ter a menor inclinação possível e satisfazer uma das seguintes situações ou valores interpolados dos indicados:
> 1) Ter uma inclinação não superior a 6%, vencer um desnível não superior a 0,6 m e ter uma projeção horizontal não superior a 10 m;
>
> 2.5.4 - As rampas devem possuir uma largura não inferior a 1,2 m, exceto nas seguintes situações:
> 1) Se as rampas tiverem uma projeção horizontal não superior a 5 m, podem ter uma largura não inferior a 0,9 m;

Apesar da linguagem utilizada, os colegas conhecem as expressões desnível e projeção horizontal e, então, resolveram tirar as medidas da rampa e verificar as condições.

A figura seguinte apresenta o esquema da rampa de acesso à pastelaria e os valores das dimensões recolhidas pelo Miguel e colegas.



Ao analisarem os dados recolhidos, confirmaram que o desnível era não superior a $0,6$ m ($0,195$ m) e a projeção horizontal também era não superior a 10 m ($1,28$ m). Mas como interpretar a **inclinação não superior a 6%**, e como determiná-la? Concluíram que estaria relacionada com o desnível e a projeção horizontal. Então, a Matilde disse: “repararam que se dividirmos 0,6 por 10 dá 0,06 que é 6 %?”.

Decidiram então proceder de igual forma com os dados da sua rampa

$\frac{0,195}{1,28} = 0,152 = 15,2\ \%$.

Verificaram então que a inclinação era superior a 6%, pelo que não obedecia aos requisitos legais.

Quanto à largura da rampa, não há problema, pois cumpre a legislação.

Quando informaram a Teresa sobre o que tinham feito, ela disse-lhes que não percebia nada de projeção horizontal, mas que os cálculos que eles tinham feito lhe recordava a determinação do declive da reta.

1. Ajuda o Miguel e os colegas a descobrirem como deveria ser a rampa para que a inclinação não fosse superior a 6 %. Começa por identificar o que poderia ser alterado.

> Recorda a **EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA**
>
> $$y = mx + b$$
>
> Em que
>
> $m \rightarrow$ declive da reta $\left(m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{variação\ do\ valor\ da\ ordenada}{variação\ do\ valor\ da\ abcissa}\right)$
>
> $b \rightarrow$ ordenada na origem ($ordenada$ quando $x = 0$)

2. Recorre à seguinte aplíqueta do Geogebra para encontrares as equações das retas que melhor se sobrepõem aos telhados da casa representados na a imagem.

Discute com os teus colegas e regista as conclusões:

(A) É importante conhecer o valor da ordenada na origem? Porquê? Será que podem existir duas retas distintas com o mesmo declive?

(B) Qual é o declive de uma reta paralela ao eixo $0x$? Qual é a equação dessa reta?

(C) Qual é o declive de uma reta paralela ao eixo $0y$? Qual é a equação dessa reta?

(D) Pode haver retas com declive negativo? Se sim, em que situações isso acontece?

Sugestão: Recorre a um Ambiente de Geometria Dinâmica, por exemplo o Geogebra, como suporte de ajuda para responderes a estas questões.

3. O gráfico apresenta o crescimento de uma árvore a uma taxa constante durante um período de 4 anos. A altura está em dezenas de centímetros.

3.1. Determina o declive da reta que contém os pontos assinalados.

Nota: $\left(m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{variação do valor da ordenada}}{\textit{variação do valor da abcissa}}\right)$

3.2. Interpreta o valor que obtiveste no contexto apresentado.

3.3. Será que conseguirias determinar o crescimento previsto decorridos 50 anos? Porquê?

(Adaptado de https://pt.slideshare.net/jjennings04241/slope-and-y-intercept-in-real-world-examples)

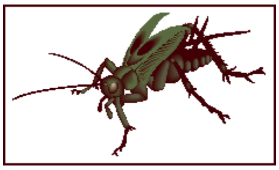
4. Resolve este item com recurso à equação reduzida da reta

O Paulo comprou um cone de gelado no Jardim da Celeste. O dia está muito quente e o gelado começou logo a derreter. Considera que a altura do gelado era 12,7 cm e que derrete a uma taxa constante de 2,1 cm por minuto. Se o Paulo esperar 3,4 minutos para começar a comer, qual é a altura expectável do gelado nesse momento?

Nota: começa por identificar o valor do declive e da ordenada na origem, da equação reduzida da reta que poderá ser um bom modelo para relacionar a altura do gelado a derreter em função do tempo.

(Adaptado de https://pt.slideshare.net/jjennings04241/slope-and-y-intercept-in-real-world-examples)

5. (Aprofundamento) O som dos grilos e a previsão da temperatura ambiente.



Para alguns seres vivos, nomeadamente os grilos, quanto mais altas forem as temperaturas, mais rápido eles cantam. Podes consultar no site da NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) Cricket Chirp Convertor, para verificares a relação entre o canto de um grilo e a temperatura ambiente.

Em laboratório obtiveram-se os seguintes dados:

Número de cantos, em cada 15 segundos	Temperatura (°C)
20	15,6
30	21,1
45	29,4
60	37,8

5.1.

5.1.1. Considera que dos 20 aos 30 cantos, por cada 15 segundos, a temperatura varia a uma taxa constante. Escreve uma equação para determinar a temperatura, T, em função do número de cantos, N, por minuto.

5.1.2. Qual é o significado do valor do declive da reta nesta situação ?

5.1.3. Qual é o valor da temperatura se o grilo cantar 96 vezes por minuto?

5.1.4. Se a temperatura for de 20 °C, qual será o número de cantos do grilo?

5.2.

5.2.1. Considera agora todos os valores da tabela e, utilizando a ferramenta "regressão linear" da tua calculadora, escreve uma equação da reta que melhor se ajusta ao conjunto de pontos. A reta que obtiveste é a mesma da questão 5.1.1?

5.2.2. Qual é o valor da temperatura se o grilo cantar 64 vezes por minuto?

5.2.3. Qual é o valor da temperatura se o grilo parar de cantar?

(Adaptado de: https://www.ck12.org/user:bs10zwftqgljc3ouy2g./book/integrated-mathematics-iii-myp3/section/2.12/)

6. (Aprofundamento): O problema da poluição

Num dia de verão, numa grande cidade, o índice de poluição aumenta a uma taxa aproximadamente constante, entre as 8:00 e as 16:00. Num dia normal, o índice às 10:00 é cerca de 43 ppm e às 13:00 é 80,5 ppm.

6.1. Escreve uma equação que relaciona o índice de poluição, P, em ppm, e as horas desse dia de verão.

6.2. Constrói o respetivo gráfico. Como é que escolheste a escala para o tempo?

6.3. O que é que significa a ordenada na origem em termos de poluição?

6.4. O que significa o valor do declive neste contexto?

6.5. Qual será o valor do índice de poluição às 11:30? Às 14:15? Às 22:40? Estes resultados são coerentes? Porquê?

6.6. O médico do António disse-lhe para não fazer *jogging* quando o índice for superior a 100 ppm. Qual será o horário mais favorável para o António realizar as suas corridas?

(Adaptado de: https://www.ck12.org/user:bs10zwftqgljc3ouy2g./book/integrated-mathematics-iii-myp3/section/2.12/)

7. (Aprofundamento): A população da Suíça

A tabela apresenta os valores, em milhões, da população da Suíça entre 1950 e 2013.

Ano	População (em milhões)
1950	4,72
1960	5,36
1970	6,19
1980	6,34
1990	6,75
2000	7,20
2010	7,87
2013	8,14

7.1. Recorrendo a uma calculadora gráfica, determina uma equação da reta de regressão linear que permite modelar esta situação. Considere que x=0 corresponde ao ano 1950, sendo x o número de anos que decorrem a partir do início da contagem.
Nota: arredonda às centésimas os valores que obtiveres.

7.2. Qual é o valor do declive? Qual é o seu significado neste contexto?

7.3. Qual é o valor da ordenada na origem? Qual é o seu significado neste contexto?

7.4. Qual é o valor esperado para a população suiça em 1989?

7.5. Será possível determinar o ano em que a população atingiu os 6 milhões?

7.6. Em 2022 a população da Suíça foi de 8,8 milhões (aproximadamente). Verifica se o modelo que obtiveste na questão 7.1. poderia ter sido utilizado na previsão da dimensão da população nesse ano.

(Adaptado de: https://www.ck12.org/user:bs10zwftqgljc3ouy2g./book/integrated-mathematics-iii-myp3/section/2.12/)

TAREFA 5

Vila Real de Santo António – A cidade do Marquês

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é a resolução de problemas de modelação matemática, envolvendo os conteúdos já trabalhados neste tema.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conteúdos de Geometria Analítica no plano abordados nas tarefas anteriores. Resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e Geogebra.

Notas e sugestões:
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo (pares) de forma autónoma. O professor acompanha o trabalho desenvolvido colocando questões orientadoras, sempre que necessário, para ajudar os alunos enquanto resolvem a tarefa em trabalho autónomo. No final deverá haver uma discussão com toda a turma onde serão analisadas as resoluções dos alunos.
O Geogebra (no computador ou telemóvel) pode ser utilizado para a validação de resultados obtidos de forma analítica.
Podem surgir dificuldades:

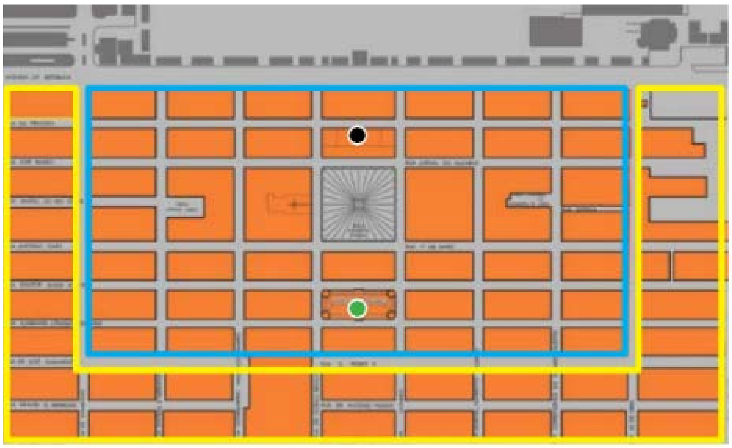
- na interpretação dos itens propostos, uma vez que são apresentados em contexto real. Isto é, por exemplo, a unidade de medida utilizada no referencial é diferente da unidade de medida real.
- na resolução de sistemas de equações, graficamente e analiticamente.

TAREFA 5

Vila Real de Santo António – A cidade do Marquês

Vila Real de Santo António guarda uma memória *sui generis*. O seu nascimento foi definido em data certa, 30 de dezembro de 1773, aquando da assinatura da Carta Régia da sua fundação. Como cidade construída de raiz, a primeira em Portugal, é o exemplo da cidade do Iluminismo, planeada pela mão férrea do Marquês de Pombal, ministro do rei D. José I (1714-1777), depois do terramoto de 1755, para a reconstrução da aldeia piscatória de Vila de Santo António de Arenilha.

O centro foi inspirado na chamada Baixa Pombalina, em Lisboa. O traçado geométrico das ruas (quarteirões retos e perfeitos), a prolongarem-se nas radiais da bela calçada portuguesa da praça principal marcada pelos paços municipais e a igreja matriz. Desta época ainda existem 190 edifícios, alguns originais, onde se destaca o belo trabalho em ferro forjado das varandas. (1)

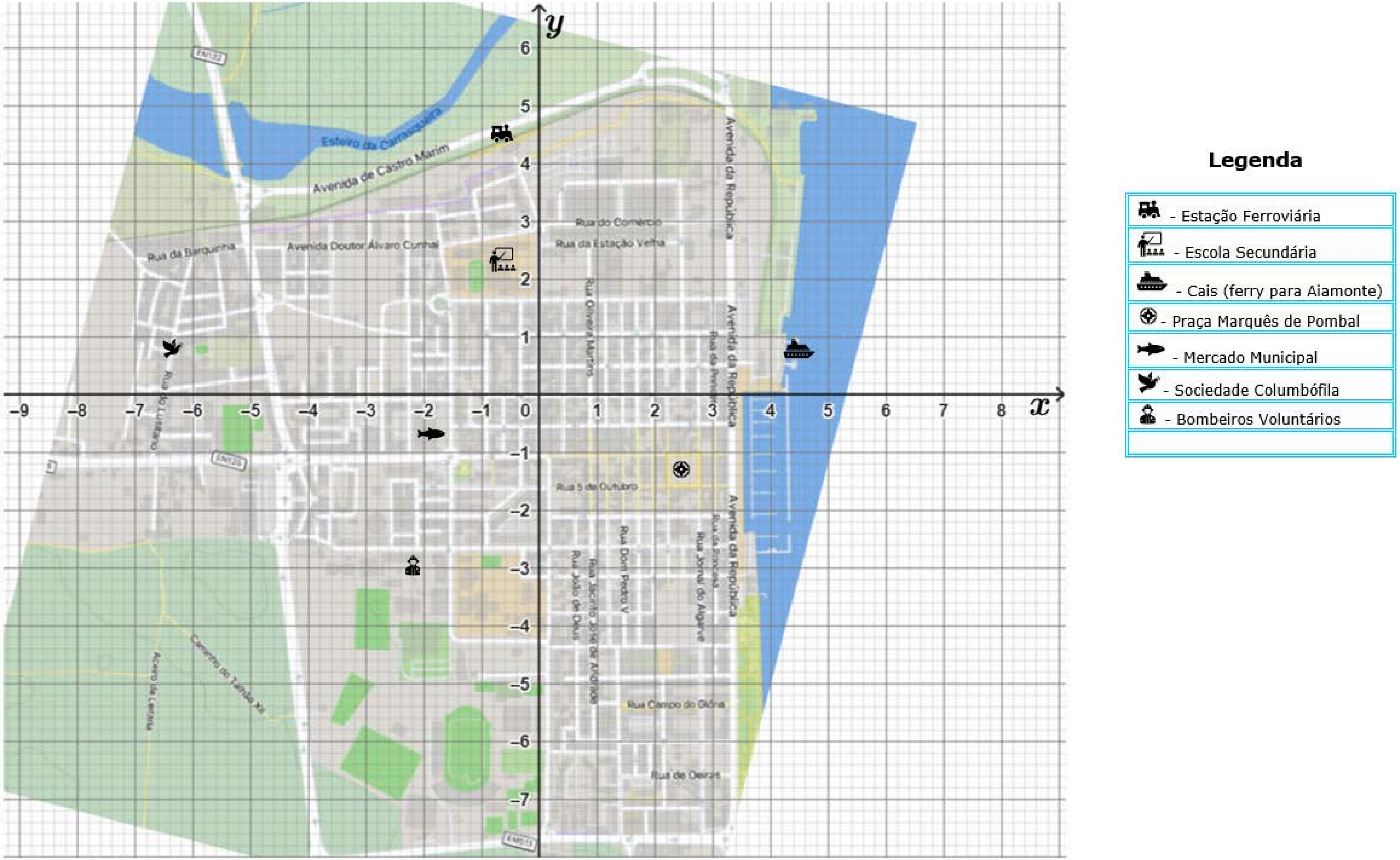


Trata-se de uma "vila regular", pois foi pensada de raiz segundo princípios que resultaram na regularidade do seu traçado. A planta da vila apresenta a forma de um retângulo. Contudo, não apresenta um reticulado perfeito, pois os seus quarteirões não são todos iguais e a Praça não se encontra no centro geométrico.

---

(1) Fonte: https://cms.cm-vrsa.pt/upload_files/client_id_1/website_id_1/Concelho/Turismo/GuiaTuristicoPortugues.pdf

Na figura abaixo, está representada parte do mapa da cidade de Vila Real de Santo António, onde foi fixado um referencial o.m. xOy, onde cada unidade representa 121 metros.



1. A Praça Marquês de Pombal tem a forma de um quadrado e tem um imponente obelisco no seu centro. (nesta questão utiliza valores aproximados arredondados às décimas).
   1.1. Localiza o obelisco através das suas coordenadas.
   1.2. Determina, em metros quadrados, a área da Praça Marquês de Pombal.
   1.3. Escreve uma condição que representa o quadrado onde está situada a Praça Marquês de Pombal.

2. A Sociedade Columbófila está a treinar um novo pombo. Admite que num dos treinos o pombo voou, em linha reta, da Sociedade Columbófila, representada pelo ponto de coordenadas $(-\ 6,4\ ;0,8)$, até ao Quartel dos Bombeiros Voluntários, representado pelo ponto de coordenadas $(-\ 2,2\ ;-\ 3)$.
   Determina a distância real que o pombo voou neste treino. Apresenta o resultado, em metros, arredondado às décimas.

3. Escreve uma condição que representa o retângulo onde está situado o mercado municipal.

4. Escreve uma condição que representa o quadrilátero onde se situa a Escola Secundária de Vila Real de Santo António.

5. A empresa AdVRSA – Águas de Vila Real de Santo António S.A., informou a comunidade/população que irá proceder à suspensão do serviço de abastecimento de água às habitações situadas na área geográfica representada pelas condições apresentadas em cada uma dos seguintes itens. Para cada item, representa na figura a região afetada.
   5.1. $y \geq -\ 2x - 1 \ \wedge\ x < 1 \ \ \wedge y \leq 4$
   5.2. (Aprofundamento) $y < -\frac{1}{2}x + 6 \ \wedge\ x \leq 4 \ \wedge\ y > 1,6 \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \leq \frac{1}{2}x + 4$

6. Um armazém portuário está situado no cruzamento de duas ruas de equações $y = 0,5$ e $x = 4,2$.
   Escreve as coordenadas do ponto que representa o armazém e assinala esse ponto na figura.

7. A estação ferroviária está situada no cruzamento da linha férrea de equação $y = 0,37x + 4,6$ e de uma rua de equação $y = -\ 2,5x + 3$.
   Determina as coordenadas do ponto que representa a estação ferroviária.

Tarefa 6

Viagens aéreas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é introduzir o estudo da geometria no espaço: identificar coordenadas de pontos num referencial cartesiano ortogonal e monométrico e desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.
Os alunos são convidados a analisar criticamente os percursos/viagens aéreas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conteúdos de Geometria Analítica no plano.

Materiais e recursos: Computador e/ou telemóvel e internet.

Notas e sugestões:
No início da aula, o professor poderá introduzir a necessidade da geometria no espaço, por exemplo, com a visualização do vídeo "Is a straight line the shortest path".
Seguidamente, os alunos podem explorar, com recurso à aplíqueta, a marcação de pontos num referencial tridimensional.
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo (pares), de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador facilitador. Nesta tarefa, o uso do Geogebra permite visualizar mais facilmente a localização dos pontos no espaço.
O professor poderá usar a Versão Interativa da tarefa, atribuindo-a aos alunos, o que permitirá acompanhar e avaliar o progresso dos alunos.
Nesta tarefa, as principais dificuldades poderão resultar da utilização do Geogebra no telemóvel e do facto de, na disciplina de Geometria Descritiva, utilizarem uma linguagem e um procedimento diferente para marcar pontos no espaço.

Tarefa 6

Viagens aéreas

O que é que se passa com as companhias de aviação comercial? Porque é que os voos de longa distância não são em linha reta? As distâncias não são mais curtas em linha reta?

O vídeo "Is a straight line the shortest path" é exemplificativo do que se passa no transporte aéreo:

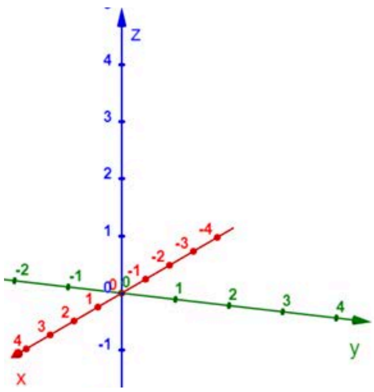
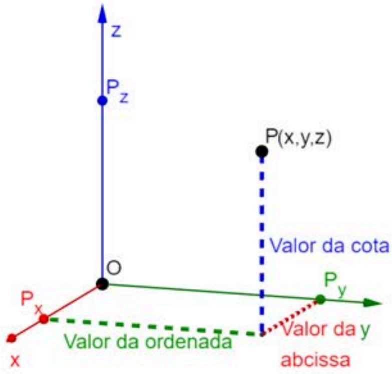
Há numerosos sites em que podes observar o espaço aéreo em tempo real.

(obtido em 31/12/2023, às 17:10 a partir de Flightradar24)

Se só se trabalhasse em duas dimensões isto seria impossível.

Porque é tão importante a geometria tridimensional (geometria no espaço ou 3D)? Porque no mundo real quase tudo tem 3 dimensões, até mesmo uma simples folha de papel ou um fio de cabelo têm espessura.

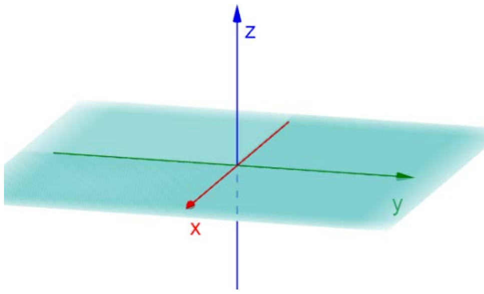
À semelhança do que se passa na geometria no plano, também na geometria no espaço os pontos são definidos pelas suas coordenadas, só que em vez de duas vão ter 3 coordenadas ($P(x, y, z)$), cada coordenada é relativa a um eixo distinto: eixo das abcissas (Ox), eixo das ordenadas (Oy) e eixo das cotas (Oz).

Sistema de eixos coordenados no espaço	Coordenadas de um ponto no espaço
	

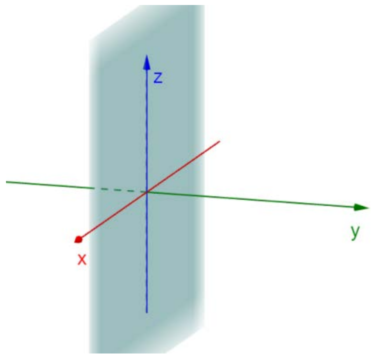
Recorre à [apliqueta]() e observa a marcação de pontos num referencial no espaço.

Os eixos coordenados, organizados dois a dois, definem três planos coordenados:

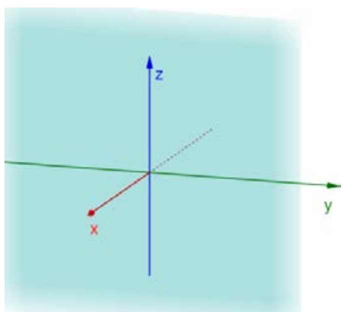
- O plano xOy, constituído por todos os pontos de cota 0 ;



- O plano xOz, constituído por todos os pontos de ordenada 0;

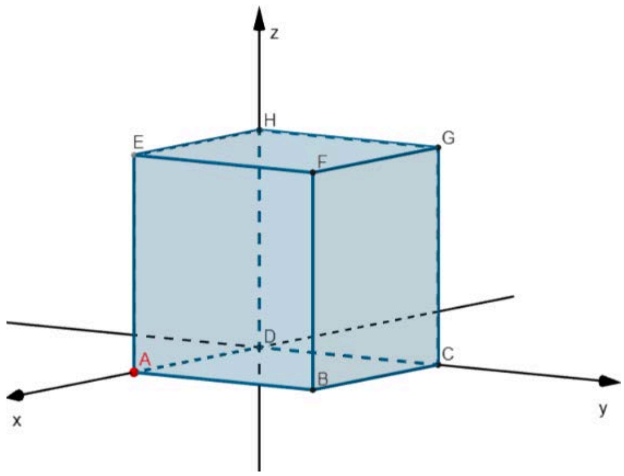


- O plano yOz, constituído por todos os pontos de abcissa 0;



1. Na figura, num referencial ortonormado $Oxyz$, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.
Sabe-se que:
   - as arestas são paralelas aos eixos coordenados;
   - $\overline{AB} = 4$.

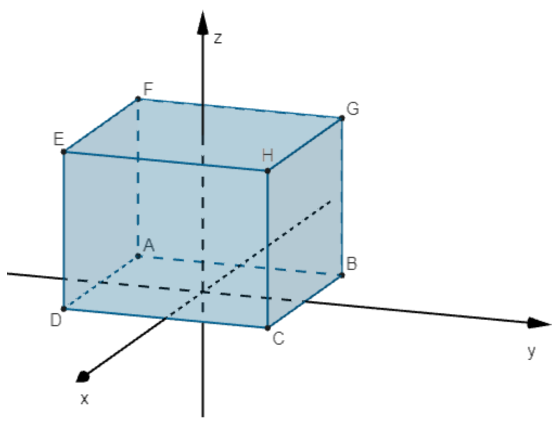
   Podes aceder à [apliqueta do Geogebra]() que te permitirá manipular a figura.



   1.1. Escreve as coordenadas dos vértices do cubo, sabendo que a origem do referencial coincide com o vértice D e a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy (como se apresenta na figura).

   1.2. Na [apliqueta do Geogebra](), podes arrastar o ponto A para colocares o cubo noutras localizações. Escreve as coordenadas dos vértices correspondentes a cada uma dessas novas posições do cubo.

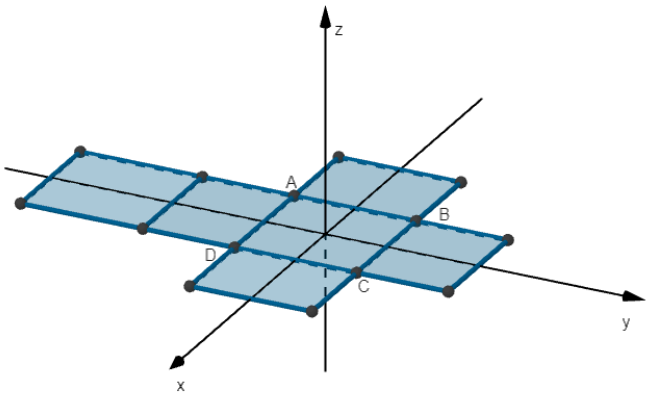
2. Na figura, num referencial ortonormado $Oxyz$, está representado o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.
Sabe-se que:
   - a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
   - a origem do referencial coincide com o centro da base do prisma;
   - as arestas da base são paralelas aos eixos coordenados;
   - $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ e $\overline{BG} = 3$.



   2.1. Escreve as coordenadas dos vértices do prisma.
   Podes aceder à [apliqueta do Geogebra]() que te permitirá manipular a figura.

2.2. Considera, agora, a planificação do prisma e escreve as coordenadas dos vértices do polígono que corresponde à planificação do prisma, que está representada no plano xOy.

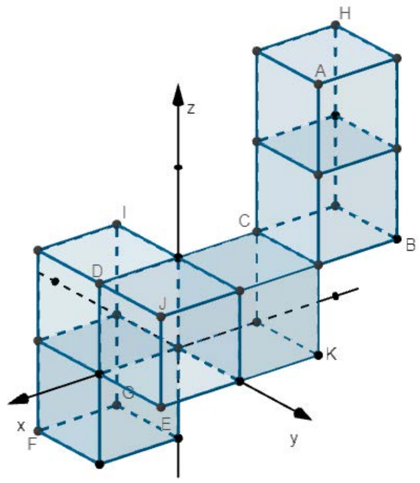
Podes aceder à [apliqueta do Geogebra]() que te permitirá manipular a figura.



3. Na figura, num referencial o.n. $Oxyz$, estão representados seis cubos com 8 cm^3 de volume cada um. Cada cubo tem identificados alguns dos seus vértices com letras.

Escreve as coordenadas dos pontos da figura assinalados com uma letra.

Podes aceder à [apliqueta do Geogebra]() que te permitirá manipular a figura.

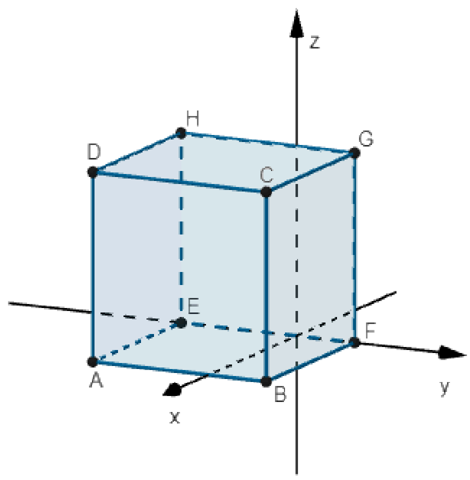


4. Na figura, num referencial ortonormado, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$, em que:

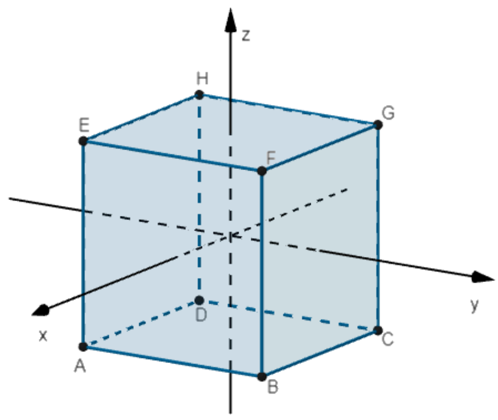
- os vértices E e F pertencem ao eixo Oy;
- $A(3, \ -2, \ 0)$.

Escreve as coordenadas dos outros vértices do cubo.

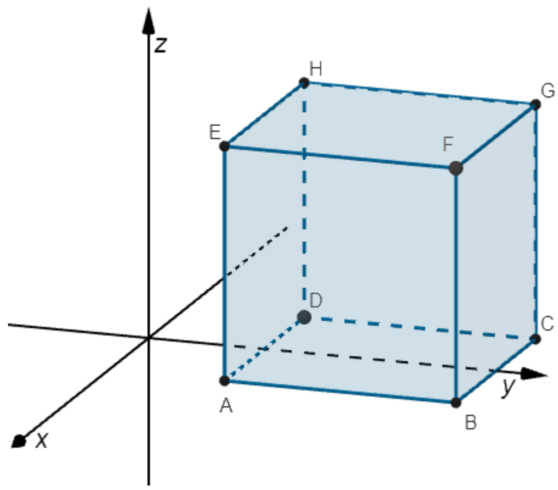
Podes aceder à [apliqueta do Geogebra]() que te permitirá manipular a figura.



5. Na figura, num referencial o.n. $Oxyz$, está representado um cubo de aresta 6, centrado na origem do referencial e de faces paralelas aos planos coordenados.
Escreve as coordenadas dos vértices do cubo.
Podes aceder à [apliqueta do Geogebra] que te permitirá manipular a figura.

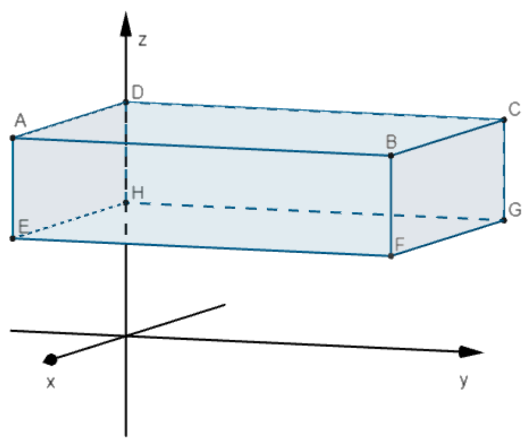


6. Na figura, num referencial ortonormado,está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta 4.
Sabe-se que:
- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- os pontos A e D são vértices consecutivos, simétricos em relação ao eixo Oy;
- o ponto A tem ordenada 2.



Escreve as coordenadas dos vértices do cubo.
Podes aceder à [apliqueta do Geogebra] que te permitirá manipular a figura.

7. Na figura, num referencial o.n. $Oxyz$, está representado um prisma retangular de faces paralelas aos planos coordenados.
Sabe-se que:
- $\overline{AB} = 7$;
- $\overline{BC} = 5$;
- $\overline{AE} = 3$;
- $D(0,\ 0,\ 7)$.

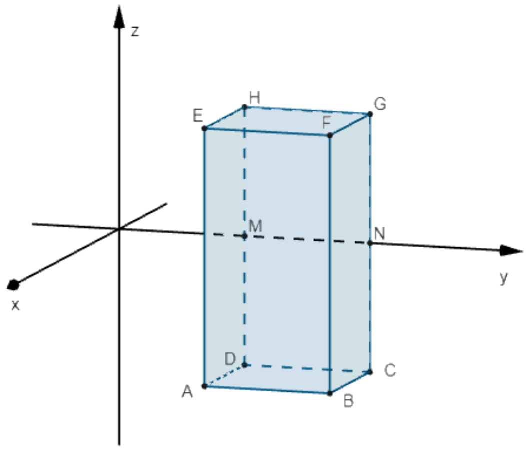


Escreve as coordenadas dos vértices do prisma retangular.
Podes aceder à [apliqueta do Geogebra] que te permitirá manipular a figura.

8. Na figura, num referencial ortonormado $Oxyz$, está representado o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- as faces são paralelas aos planos coordenados;
- o retângulo $[CDHG]$ está contido no plano yOz;
- os pontos M e N pertencem ao eixo Oy e são os pontos médios das arestas $[HD]$ e $[GC]$, respetivamente;
- $A(3, 3, -3)$.



Podes aceder à apliqueta do Geogebra que te permitirá manipular a figura.

8.1. Qual é o vértice do prisma que tem coordenadas $(3, 6, 3)$?

8.2. Identifica todos os vértices do prisma que têm abcissa 0.

8.3. Identifica os vértices do prisma que têm ordenada 3 e cota 3.

8.4. Escreve as coordenadas dos pontos M e N.

Tarefa 7

Condições no espaço

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas equações de planos paralelos aos planos coordenados e equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos. Continua-se a estimular o desenvolvimento da capacidade de visualização no espaço.

Conhecimentos prévios dos alunos: Geometria no plano e coordenadas de pontos no espaço.

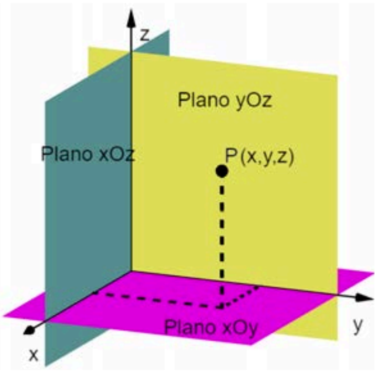
Materiais e recursos: Computador e/ou telemóvel e internet.

Notas para professor:
O professor pode começar por recordar alguns conceitos abordados na tarefa 7 (eixos coordenados e planos coordenados).
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pequeno grupo (pares), de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador facilitador. Nesta tarefa, o uso do Geogebra é uma mais valia para a realização da tarefa.
O professor poderá usar a Versão Interativa da tarefa, atribuindo-a aos alunos, o que permitirá acompanhar e avaliar o progresso dos alunos.
A utilização do Geogebra no telemóvel pode trazer algumas dificuldades aos alunos, talvez por se estar a trabalhar com exemplos de Geometria no Espaço, sendo o ecrã do telemóvel, por vezes, pequeno para permitir uma boa visualização.

Tarefa 7

Condições no espaço

Como já observaste na tarefa 6, no espaço, um referencial cartesiano tem 3 eixos coordenados: eixo das abcissas (eixo Ox), eixo das ordenadas (eixo Oy) e o eixo das cotas (eixo Oz). Se considerares esses eixos dois a dois, há um plano que os contém a ambos e, assim, obtêm-se 3 planos coordenados: plano xOy, plano xOz e plano yOz.



1. Para preencheres a tabela seguinte, recorre à apliqueta do Geogebra, G3D.

Representa no Geogebra o plano que contém	Regista a equação que observas na janela de álgebra
os eixos Ox e Oy (plano xOy)	
os eixos Ox e Oz (plano xOz)	
os eixos Oy e Oz (plano yOz)	

2. Considera a um número real.
   - 2.1. Acede à apliqueta G3D 1.
     - 2.1.1. Faz variar os valores do seletor e observa o que vais visualizando na Folha 3D e na Folha Algébrica. O que é que esses planos têm em comum?
     - 2.1.2. Marca 3 pontos que pertençam a um desses planos. Observa, na Folha Algébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum?
     - 2.1.3. Faz variar de novo o seletor. Qual é a posição relativa dos planos que vais obtendo?

2.2. Acede à apliqueta G3D 2.

2.2.1. Faz variar os valores do seletor e observa o que vais visualizando na Folha 3D e na Folha Algébrica. O que é que esses planos têm em comum?

2.2.2. Marca 3 pontos que pertençam a um desses planos. Observa, na Folha Algébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum?

2.2.3. Faz variar de novo o seletor. Qual é a posição relativa dos planos que vais obtendo?

2.3. Acede à apliqueta G3D 3.

2.3.1. Faz variar os valores do seletor e observa o que vais visualizando na Folha 3D e na Folha Algébrica. O que é que esses planos têm em comum?

2.3.2. Marca 3 pontos que pertençam a um desses planos. Observa, na Folha Algébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum?

2.3.3. Faz variar de novo o seletor. Qual é a posição relativa dos planos que vais obtendo?

3. Considera a e c números reais.

3.1. Acede à apliqueta G3D 4.

3.1.1. Faz variar os valores dos seletores e observa o que vais visualizando na Folha 3D relativamente à interseção dos dois planos representados. Qual é o lugar geométrico dos pontos da interseção dos dois planos?

3.1.2. Marca 3 pontos que pertençam à interseção destes dois planos. Observa, na Folha Algébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum com as equações dos planos?

3.1.3. Qual é a condição que define esse lugar geométrico?

3.2. Acede à apliqueta G3D 5.

3.2.1. Faz variar os valores dos seletores e observa o que vais visualizando na Folha 3D relativamente à interseção dos dois planos representados. Qual é o lugar geométrico dos pontos da interseção dos dois planos?

3.2.2. Marca 3 pontos que pertençam à interseção destes dois planos. Observa, na Folha Algébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum com as equações dos planos?

3.2.3. Qual é a condição que define esse lugar geométrico?

3.3. Acede à apliqueta G3D 6.

3.3.1. Faz variar os valores dos seletores e observa o que vais visualizando na Folha 3D relativamente à interseção dos dois planos representados. Qual é o lugar geométrico dos pontos da interseção dos dois planos?

3.3.2. Marca 3 pontos que pertençam à interseção destes dois planos. Observa, na FolhaAlgébrica, as coordenadas desses pontos. O que têm em comum com as equações dos planos?

3.3.3. Qual é a condição que define esse lugar geométrico?

4. Define por uma condição:

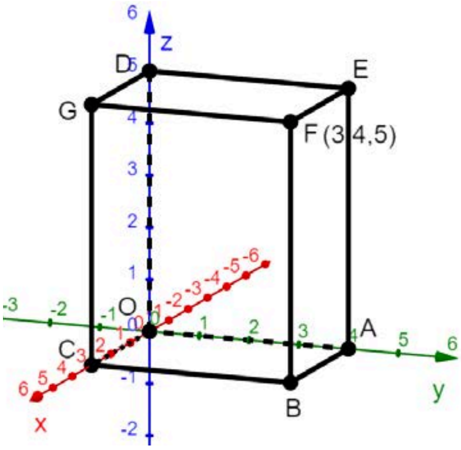
4.1. a reta que é paralela ao eixo Ox e que contém o ponto de coordenadas $(-2, 3, 4)$;

4.2. o plano paralelo ao plano coordenado yOz que contém o ponto de coordenadas $(-2, 3, 4)$;

4.3. o plano perpendicular ao eixo Ox que contém o ponto $(-2, 3, 4)$.

Sugestão: em caso de dúvidas recorre às apliquetas anteriores do Geogebra.

5. Na figura ao lado está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, um prisma retangular. Sabe-se que as coordenadas do vértice F são $(3, 4, 5)$.



5.1. Determina:

5.1.1. as coordenadas dos restantes vértices (A, B, C, D, E, G, O);

5.1.2. o comprimento do segmento de reta $[CG]$;

5.1.3. a distância entre os vértices G e F;

5.1.4. o comprimento da aresta $[AB]$.

5.2. Define por uma condição:

5.2.1. o plano DEF;

5.2.2. o plano BCG;

5.2.3. a reta AB;

5.2.4. a reta BF.

Tarefa 8

Reproduz a obra de arte

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é reproduzir uma obra de arte, recorrendo a condições que definem conjuntos de pontos, no Ambiente de Geometria Dinâmica - Geogebra.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conjuntos de pontos e condições, equação reduzida da reta e equação de retas paralelas aos eixos coordenados.

Materiais e recursos: Computador e software de geometria dinâmica - Geogebra.

Notas e sugestões:
Pretende-se com esta tarefa que os alunos em trabalhos de grupo ou a pares selecionem uma das obras de arte do movimento De Stijl (Neoplasticismo) e recriem-na utilizando condições no plano recorrendo ao Geogebra, preferencialmente no computador.
Em anexo há alguns exemplos de obras que podem ser utilizados. As obras de arte apresentadas na tarefa são sugestões que poderão ser substituídas por outras do agrado dos alunos ou do professor.
Podem surgir dificuldades:
- na escolha do referencial adequado e facilitador da representação;
- na obtenção das equações das retas que definem as fronteiras das diferentes regiões a representar.

O professor deve certificar-se que os alunos reproduzem a obra de arte a partir de condições e não recorrendo às ferramentas de construção de polígonos do Geogebra.

Tarefa 8

Reproduz a obra de arte

Neoplasticismo

Neoplasticismo é um movimento de arte abstrata que surgiu em 1917 e teve como principais representantes os pintores Piet Mondrian e The Van Doesburg.

Podemos afirmar que o Neoplasticismo é um movimento de contraponto às artes figurativas, um estilo artístico que se baseia na representação das formas, seja de seres humanos, objetos, animais, paisagens, entre outros.

O propósito dos criadores do Neoplasticismo é encontrar uma nova forma de expressão artística, compostas de elementos mínimos que formam figuras assimétricas de perfeito equilíbrio.

Para Mondrian, tudo o que existe tem uma essência por trás da aparência, e essa essência está em harmonia com o Universo.

Esse equilíbrio perfeito, segundo o movimento, pode ser alcançado por meio de linhas, ângulos retos e cores puras.

Diante desse contexto, o Neoplasticismo busca a limpeza das formas e a redução de detalhes ao essencial.

Por esse motivo, as figuras geométricas, cores primárias - azul, vermelho e amarelo, além do preto, branco e cinza são as principais características das obras de Neoplasticismo.

Adaptado de: https://www.vivadecora.com.br/pro/neoplasticismo/

Objetivo do Trabalho

Escolhe uma das obras de arte do movimento De Stijl (Neoplasticismo) e recria-a utilizando condições no plano recorrendo ao Geogebra.

Começa por colocar um referencial à escolha na obra escolhida, de modo a facilitar a definição das condições.

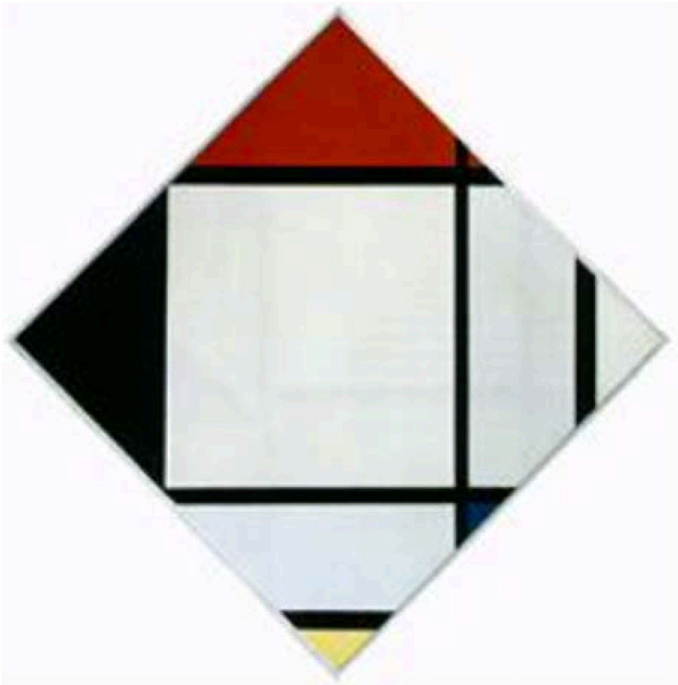
Em anexo tens alguns exemplos de obras que poderás utilizar.

ANEXO

Obras do movimento De Stijl (Neoplasticismo)

Piet Mondrian

https://www.wikiart.org/pt/piet-mondrian/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry



Lozenge Composition with Red, Black,Blue and Yellow

Piet Mondrian • 1925

Theo van Doesburg

https://www.wikiart.org/pt/theo-van-doesburg/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry

Counter composition V

Theo van Doesburg • 1924