PADRÕES GEOMÉTRICOS

Matemática B

10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Padrões Geométricos (Matemática B - 10.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática B

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/grupo-de-pessoas-assistindo-no-laptop-1595385/

Data:

Lisboa, setembro de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - PADRÕES GEOMÉTRICOS

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Revisões	**Padrões Geométricos**	• Isometrias: revisão e consolidação de conceitos trabalhados no ensino básico	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
2	Tarefa 2 Almada Negreiros	**Padrões Geométricos** A Matemática no património	• Analisar geometricamente problemas históricos ou exemplares do património artístico. • Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico no estudo de problemas históricos ou do património artístico.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma Mural da turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais (H)

2	Tarefa 3 Amplitude dos ângulos internos de um polígono regular	**Padrões Geométricos** Pavimentações	• Determinar a amplitude dos ângulos internos de um polígono regular.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F)
2	Tarefa 4 Pavimentações regulares e semirregulares	**Padrões Geométricos** Pavimentações	• Reconhecer e construir as pavimentações regulares e semirregulares no plano e classificá-las. • Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma Mural da turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais (H)
2	Tarefa 5 Amadeo de Souza Cardoso	**Padrões Geométricos** A Matemática no património Isometrias	• Reconhecer e aplicar isometrias no plano. • Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

2	Tarefa 6 *Mandala*	**Padrões Geométricos** A Matemática no património Rosáceas	• Reconhecer e aplicar isometrias em rosáceas. • Estudar padrões geométricos em rosáceas.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma Mural da turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Práticas enriquecedoras e criatividade • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)
3	Tarefa 7 Carpa Koi	**Padrões Geométricos** A Matemática no património Frisos e Rosáceas	• Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas. • Estudar padrões geométricos planos, em particular frisos e rosáceas. • Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma Mural da turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais (H)
4	Tarefa 8 Pavimentações de Escher	**Padrões Geométricos** A Matemática no património Pavimentações	• Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas. • Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.	Trabalho individual com apresentação à turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Avaliação para a aprendizagem • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) • Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio (F) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais (H)

Tarefa 1

Revisões

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos revejam e consolidem conceitos trabalhados ao longo do ensino básico, nomeadamente isometrias e vetores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Isometrias e vetores.

Materiais e recursos: Régua e transferidor.

Notas e sugestões:

A aula deverá começar com a visualização do vídeo "ISOMETRIA-O-MANIA" ("Isto é Matemática" T12 E11).

Seguidamente os alunos, organizados em pequenos grupos começam a resolver a tarefa.

Quando surgirem dúvidas, o professor deverá pedir/incentivar a colaboração dos outros alunos no esclarecimento das mesmas.

Se os alunos manifestarem dificuldades na utilização do Geogebra sugere-se que o professor comece a aula com uma breve introdução das ferramentas necessárias para a realização da tarefa.

No final, o professor poderá sistematizar os conteúdos/assuntos revistos, de modo a facilitar os trabalhos das próximas tarefas.

Tarefa 1

Revisões

Começa por visualizar o vídeo "ISOMETRIA-O-MANIA" ("Isto é Matemática" T12 E11).

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. Os ângulos mantêm também a sua amplitude.
Existem quatro isometrias: translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante.

Abre o ficheiro disponível em: https://www.geogebra.org/classic/fnev9jas, para responderes às questões 1., 2. e 3. .

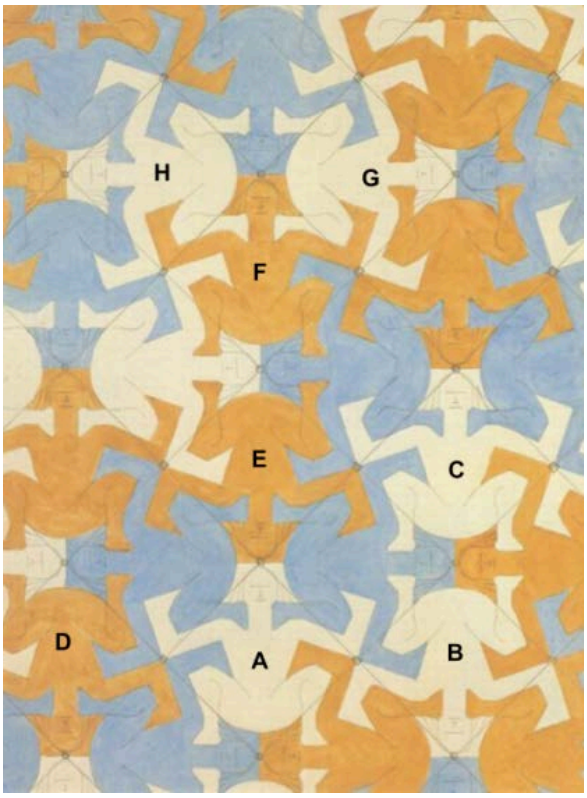
1. Quais as simetrias que tem esta figura, isto é, que isometrias deixam a figura invariante? Se achares necessário, marca pontos ou retas no azulejo para descrever essas isometrias.
Nota: Tem em conta que o desenho do azulejo é feito manualmente e as simetrias podem ser aproximadas.

2. Desenha na folha de trabalho dois vetores, com direções paralelas aos lados do azulejo, e com comprimento igual a esses lados. Usando a ferramenta "Translação por vetor", faz várias translações do azulejo, usando os vetores desenhados, obtendo assim um início de um padrão.

O azulejo que usaste chama-se um **motivo** para o padrão, por se conseguir obter o padrão, a partir dele, usando apenas translações.

3. Quais as simetrias que tem este padrão? Se pensares que ele se estende infinitamente na horizontal e na vertical, que translações o deixam invariante? Pode ser útil marcar pontos ou retas no azulejo para descrever essas isometrias.

4. Maurits Cornelis Escher (Leeuwarden, 17 de junho de 1898 — Hilversum, 27 de março de 1972) foi um artista gráfico holandês conhecido pelas suas representações de padrões. Este artista também era conhecido pela execução de transformações geométricas (isometrias) nas suas obras.
Esta obra de Escher é caracterizada pela repetição de um único motivo, em 3 cores diferentes, onde assinalamos alguns deles.



Fonte: Imagem retirada de https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/systematic-study)

4.1. Em cada caso, identifica uma isometria que te permite obter:
4.1.1. o motivo B a partir do A;
4.1.2. o motivo C a partir do B.

4.2.2. Com os motivos identificados, e sem repetir os mesmos exemplos para cada uma das isometrias usadas na questão anterior, dá exemplo de:
4.2.1. uma translação;
4.2.2. uma reflexão deslizante.

(Fonte: Adaptado de "Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico - Coletânea de tarefas para o 8.º ano - Geometria, Julho de 2023")

Tarefa 2

Almada Negreiros

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo a identificação de simetrias e do motivo mínimo do padrão, de uma fachada de um edifício da autoria de Almada Negreiros.

Conhecimentos prévios dos alunos: Isometrias e vetores.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet.

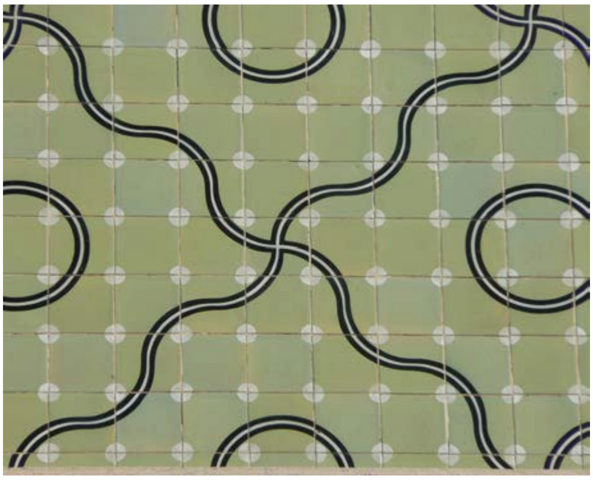
Notas e sugestões:

Na aula anterior à aplicação desta tarefa, o professor deverá pedir aos alunos que acedam à página de Internet do projeto Atractor e instalem a aplicação GeCla.
Alerta-se para o facto de que a instalação nos computadores disponibilizados pela escola poderá não ser automática, lembrando que a instalação é fácil no telemóvel ou em tablets.
Sugere-se que a aula comece com a visualização do vídeo "ISOMETRIA-O-MANIA" (“Isto é Matemática” T12 E11) , caso não tenha sido aplicada a Tarefa 1.
Os alunos resolvem o item 1. organizados em pequenos grupos, durante, aproximadamente 30 min.
Seguidamente, discutem-se as conclusões de cada grupo.
Para a resolução do item 2., os grupos deverão aceder ao GeCla e realizar as atividades propostas, fazendo capturas de ecrã do seu trabalho.
Se surgirem dificuldades no trabalho com o GeCla, os alunos poderão aceder à funcionalidade indicada com o ícone para visualizar pequenos tutoriais.
Finalmente, para o item 3., sugere-se que o professor crie um mural digital (ex. padlet) onde os alunos coloquem o material recolhido e as suas conclusões. Todos os alunos devem analisar e comentar o trabalho disponibilizado pelos colegas.

Tarefa 2

Almada Negreiros

1. Na Rua do Salitre, em Lisboa, podes observar nos azulejos da fachada de um edifício um pouco da arte do Pintor Almada Negreiros. Esta obra remonta aos anos quarenta do século passado e é um bom exemplo do uso de padrões na arte.



Nota: estes azulejos têm forma quadrangular.

1.1. Quantos azulejos diferentes são necessários para construir este padrão? Identifica-os.

Chama-se um ***motivo*** para o padrão quando se consegue obter o padrão recorrendo apenas a translações dessa imagem (motivo).

1.2. Identifica um motivo para o padrão de azulejos anterior usando linhas paralelas aos lados dos azulejos como limite do motivo. Quantos azulejos tem esse motivo?

1.3. E se usares para limites do motivo linhas colocadas a 45°, em relação aos lados dos azulejos, que motivo consegues encontrar?

1.4. Determina as áreas de cada um dos dois motivos identificados anteriormente, se o lado do azulejo tiver comprimento 1.

Diz-se que uma figura tem simetria, quando existem isometrias que a deixam invariante.

2. Identifica as simetrias existentes em cada uma das seguintes figuras:



Sugestão: Acede à página do Atractor e descarrega a aplicação GeCla. Executa-a e seleciona a opção "Procurar simetrias".
Seleciona as imagens anteriores (clica nas opções "+" e depois "Local") e comprova a existência das simetrias identificadas no item anterior.

3. No teu dia-a-dia passas por sítios com padrões em varandas, calçadas, paredes, monumentos, etc. Identifica um padrão que consideres interessante, tira uma fotografia e identifica os diferentes tipos de simetria que o compõem.

No mural da turma:

- disponibiliza o teu trabalho;
- analisa e comenta o trabalho dos teus colegas.

Tarefa 3

Amplitude dos ângulos internos de um polígono regular

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Pretende-se que os alunos conjeturem e deduzam fórmulas que permitam determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.
Igualmente deverão conseguir deduzir a fórmula para o cálculo da amplitude de um ângulo interno de um polígono regular.

Conhecimentos prévios dos alunos: Ângulo interno de um polígono convexo.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet.

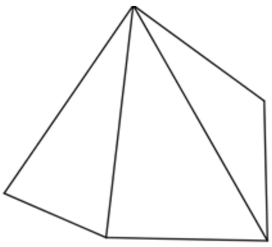
Notas e sugestões:
Os alunos, organizados em pequenos grupos, acedem ao Geogebra e resolvem o 1.º item.
Seguidamente, em grande grupo, discutem-se as conjeturas.
No item 2, com recurso ao Geogebra ou a material de desenho, os grupos deverão completar a tabela. O professor deverá acompanhar os trabalhos dos alunos e discutir as resoluções em grande grupo.
No item 3., os alunos poderão utilizar os resultados obtidos no item anterior.
Novamente o professor deverá acompanhar os trabalhos dos alunos e no final do trabalho autónomo discutir em grande grupo o resultado encontrado.

Tarefa 3

Amplitude dos ângulos internos de um polígono regular

1. Acede ao Geogebra e constrói um triângulo qualquer.
   1.1. Mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona as medidas obtidas.
   1.2. Arrasta um vértice qualquer de modo a obter outros triângulos. Verifica o que se passa com as amplitudes dos ângulos e com a respetiva soma. Escreve uma conjetura sobre o que observas.

2. Procede de igual modo para outros polígonos convexos (quadriláteros, pentágonos, hexágonos,...) e preenche a tabela seguinte.
   Na terceira coluna, deves colocar o número de triângulos que se obtém traçando todas as diagonais por um vértice; por exemplo, no pentágono (figura ao lado) obténs 3 triângulos.



Nome do polígono	**Número de lados**	**Número de triângulos que se obtém**	**Soma dos ângulos internos**
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Polígono de *n* lados			

3. Se considerarmos somente polígonos regulares, qual é o valor de cada um dos ângulos internos? Preenche a tabela seguinte.

Nome do polígono regular	**Número de lados**	**Soma dos ângulos internos**	**Amplitude do ângulo interno**
Triângulo equilátero			
Quadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Octógono			
Dodecágono (12 lados)			
Polígono regular de *n* lados			

Tarefa 4

Pavimentações regulares e semirregulares

Notas pedagógicas para a ação do professor

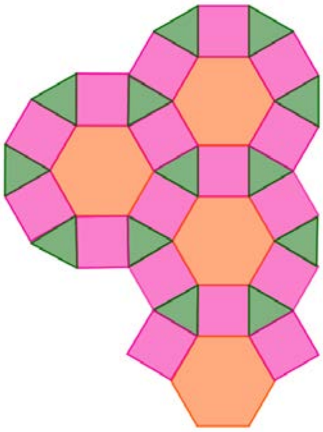
Resumo:
O objetivo da tarefa é a construção de pavimentações ajustadas lado-a-lado, regulares e semirregulares e respetiva classificação.

Conhecimentos prévios dos alunos: Amplitude dos ângulos internos de um polígono regular.

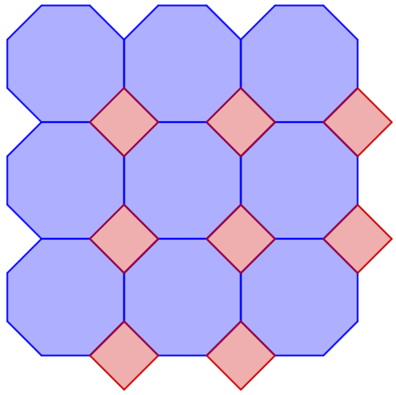
Materiais e recursos: *Polydron* ou outro material geométrico manipulável com polígonos regulares ou Ambiente de Geometria Dinâmica - por exemplo, o Geogebra (no computador ou telemóvel).

Notas e sugestões:
Nas turmas piloto, optou-se por recorrer a materiais manipuláveis, mas a hipótese de desenvolver um trabalho muito semelhante com recurso ao GeoGebra pode ser considerada, sendo necessário substituir a referência a materiais manipuláveis pela referência ao GeoGebra no enunciado da tarefa.
Os alunos, organizados em pequenos grupos, respondem, durante 20 minutos, aos itens da Parte I. Seguidamente, em grande grupo, sistematizam-se as conclusões e os alunos, individualmente, registam-nas.
Na Parte II, os alunos devem ter disponíveis os polígonos regulares de três a doze lados, se estiverem a trabalhar com materiais manipuláveis. Se o material existente na escola não o permitir, o professor deverá levar impressas cópias desses polígonos, tendo em atenção que estes devem ter a mesma medida de lado.
Salienta-se que no item 5, a classificação 3366 não origina uma pavimentação semirregular (ao longo do padrão não se mantém constante) mas a 3636 já é possível.
No item 6, pretende-se que cada grupo de alunos encontre apenas mais uma ou duas pavimentações semirregulares. Em grande grupo, o professor deverá valorizar a diversidade e apresentar as pavimentações não identificadas pelos alunos. As configurações esperadas são as que se apresentam a seguir.

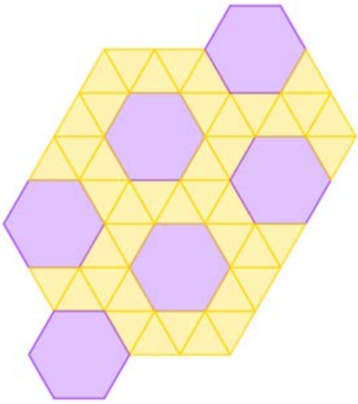
Configuração 4.3.4.6



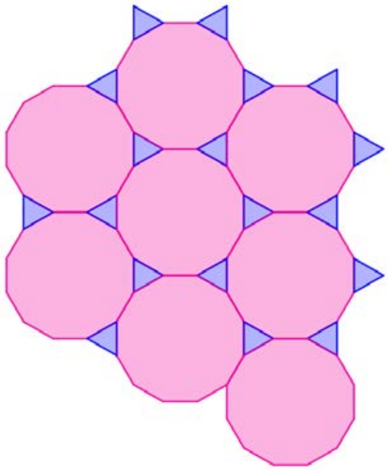
Configuração 8.8.4



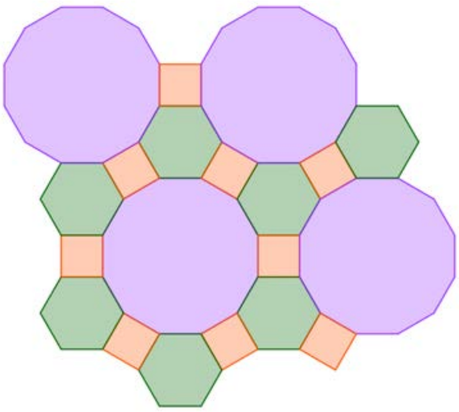
Configuração 3.3.3.3.6



Configuração 12.3.12



Configuração 4.6.12



Finalmente, para a Parte III, sugere-se que o professor crie um mural digital (ex. padlet) onde os alunos coloquem o material recolhido e as suas conclusões. Todos os alunos devem analisar e comentar o trabalho disponibilizado pelos colegas.

Tarefa 4

Pavimentações regulares e semirregulares

São muitos os lugares onde podem ser visualizados exemplos de pavimentações, algumas propositadas outras felizes “acasos”.

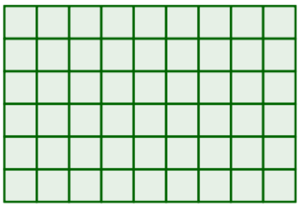




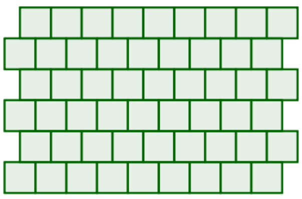

Parte I

Chamamos **pavimentação regular** do plano a uma cobertura do plano por polígonos regulares, usando um e um só tipo de polígonos, que se ajustam lado a lado.

Pavimentação ajustada lado a lado (Pormenor do painel de azulejos, da autoria de Maria Helena Vieira da Silva (1988), que se encontra na [estação de metro da Cidade Universitária]() em Lisboa).



Pavimentação não ajustada lado a lado:



Vamos estudar apenas as pavimentações ajustadas lado a lado, e descobrir que polígonos regulares podem gerar uma pavimentação regular.

1. Completa a tabela seguinte:

N.º de lados do polígono regular (n)	Ângulo interno (α)	Números de polígonos em cada vértice ($360/\alpha$)
3	60º	6
4		
5		
6		
7		
8		

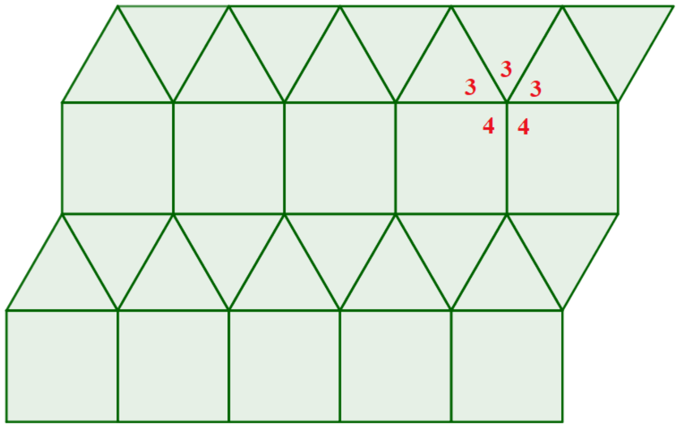
2. Observando a tabela, que polígonos regulares podem gerar pavimentações regulares?

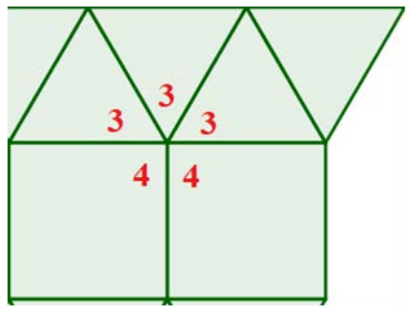
3. Utiliza o material geométrico manipulável indicado pelo teu professor para construíres representações dessas pavimentações.

Parte II

Chamamos **pavimentação semirregular** a uma cobertura do plano por polígonos regulares, não todos do mesmo tipo, que se ajustam lado a lado, e tal que a disposição dos polígonos à volta de cada vértice é sempre idêntica.

Estas pavimentações são identificadas pelo padrão que apresentam à volta de cada vértice. Por exemplo, a pavimentação semirregular ilustrada na figura seguinte, é a pavimentação semirregular 3.3.3.4.4, porque quando circundamos um qualquer dos vértices da pavimentação encontramos, triângulo, triângulo, triângulo, quadrado, quadrado. Convém mencionar que esta pavimentação e as designadas, por exemplo, por 3.3.4.4.3 ou por 3.4.4.3.3 são exatamente a mesma.





1. Utiliza o material geométrico manipulável indicado pelo teu professor para construíres e explorares a existência de uma pavimentação do tipo 3.3.4.3.4.

2. Justifica se podem existir pavimentações semirregulares com quatro ou mais polígonos regulares distintos.

3. Supõe que só pretendemos usar dois tipos de polígonos e um deles é o triângulo equilátero e o outro é o quadrado. Haverá alguma outra possibilidade, para além das indicadas. Porquê?

4. Existem pavimentações semirregulares formadas por triângulos e pentágonos? Porquê?

5. Podemos ligar à volta de um vértice dois triângulos e dois hexágonos regulares de forma a que se ajustem lado a lado. De quantas maneiras “distintas” o podemos fazer?
   Utiliza o material geométrico manipulável indicado pelo teu professor para construíres, essas configurações locais, caso existam, e averigua se se podem estender de modo a definirem pavimentações semirregulares.

6. Utiliza o Polydron, o GeoGebra ou esboços no teu caderno para averiguares a existência de outras pavimentações semirregulares. Lembra-te que podes experimentar com outros polígonos regulares como por exemplo um octógono ou um dodecágono.

Parte III

No teu dia-a-dia passas por sítios com pavimentações (regulares ou semirregulares) - fachadas de edifícios, passeios, chão em edifícios, carpetes, etc. Identifica uma pavimentação regular e uma semirregular que consideres interessantes, tira uma fotografia e classifica o tipo de pavimentação.

No mural da turma:

- disponibiliza o teu trabalho;
- analisa e comenta o trabalho dos teus colegas.

TAREFA 5

Amadeo de Souza Cardoso

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com esta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam e apliquem isometrias no plano, e compreendam e utilizem propriedades e relações em geometria.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de mediatriz e isometrias.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet.

Notas e sugestões:
Os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos e sugere-se que a resolução seja feita de forma autónoma.
Deverão utilizar as apliquetas disponibilizadas na tarefa para resolverem os itens propostos em cada uma das partes.
O professor deve solicitar/incentivar os alunos a participarem oralmente e responderem às questões colocadas, apelando à discussão e sistematização das principais ideias que deverão ser registadas individualmente.

TAREFA 5

Amadeo de Souza Cardoso

Amadeo de Souza Cardoso (1887-1918) é um dos maiores pintores portugueses e foi pioneiro em Portugal das novas correntes artísticas do século XX.

Pintada em 1913, a obra “Procissão Corpus Christi” (Centro de Arte Moderna, Gulbenkian), é um bom exemplo do período do cubismo.

Numa entrevista ao jornal “O Dia” em 1916 afirmou: “Nós, os novos, só procuramos a originalidade. Sou impressionista, cubista, futurista, abstracionista? De tudo um pouco.”

Parte I

Abre o ficheiro https://www.geogebra.org/classic/rjhpjv6h para responderes às seguintes questões.

1. Constrói o transformado do triângulo $[DEF]$ pela rotação de centro C e ângulo RPQ (o ângulo RPQ tem amplitude a).

2. Identifica, na figura, os pontos D', E' e F', transformados dos vértices D, E, e F, respetivamente.

3. Usando as propriedades da rotação, indica
   (Nota: Dois segmentos de reta são congruentes se tiverem a mesma medida de comprimento).
   3.1. um segmento de reta congruente com $[DE]$;
   3.2. um segmento de reta congruente com $[E'F']$;
   3.3. um segmento de reta congruente com $[CF']$;
   3.4. um segmento de reta congruente com $[CD]$.

4. Quantos pontos fixos tem a rotação? Quais são?

5. Que valor (ou valores) deveria ter a amplitude do ângulo de rotação para que os segmentos $[DE]$ e $[D'E']$ fossem paralelos?

6. Constrói a mediatriz dos segmento $[DD']$, $[EE']$ e $[FF']$. O que observas?

Parte II

Abre o ficheiro https://www.geogebra.org/classic/kwtdukh6 .

1. Sabendo que o triângulo $[D'E'F']$ é o transformado do triângulo $[DEF]$ por uma rotação, constrói o centro de rotação. Designa este ponto por C.

2. Constrói duas semirretas com origem em C, de modo que o ângulo formado por elas seja o ângulo da rotação.

Parte III

Abre o ficheiro https://www.geogebra.org/classic/vcafhqbp para responderes às seguintes questões.

1. Constrói o transformado do triângulo $[DEF]$ pela reflexão de eixo PQ.

2. Identifica, na figura, os pontos D', E' e F', transformados dos vértices D, E e F, respetivamente.

3. Usando as propriedades da reflexão, indica:
   3.1. um segmento de reta congruente com $[EF]$;
   3.2. um segmento de reta congruente com $[D'E']$;
   3.3. um segmento de reta congruente com $[PF']$;
   3.4. um segmento de reta congruente com $[QD]$.

4. Quais são os pontos fixos da reflexão?

5. Considera o segmento $[DD']$. Qual é a posição relativa da reta PQ em relação a este segmento?

6. Imagina que és uma formiga que está a passear sobre os lados do triângulo $[DEF]$. Se te deslocares do ponto D para o ponto E, e quiseres prosseguir para o lado $[EF]$, tens de virar à direita ou à esquerda? Imagina agora que estás a fazer o mesmo sobre o triângulo $[D'E'F']$. Se te deslocares do ponto D' para o ponto E', e quiseres prosseguir para o lado $[E'F']$, tens de virar à direita ou à esquerda?

> O que acabas de verificar em relação aos triângulos $[DEF]$ e $[D'E'F']$ é que têm **orientações opostas**. A rotação e a translação conservam a orientação, mas a reflexão e a reflexão deslizante trocam-na.

Parte IV

Abre o ficheiro https://www.geogebra.org/classic/w4xsrrdb .

Sabendo que o triângulo $[D'E'F']$ é o transformado do triângulo $[DEF]$ por uma reflexão, constrói o seu eixo.

Tarefa 6

Mandala

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem por objetivo reconhecer e aplicar isometrias em rosáceas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Isometrias e rosáceas.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet.

Notas e sugestões:
O professor deve organizar os alunos em pequenos grupos, e sugere-se que a resolução seja feita de forma autónoma. O professor acompanha o trabalho desenvolvido solicitando que participem oralmente e respondam a questões colocadas, apelando à discussão e sintetização das principais ideias e ao rigor na comunicação matemática.
Finalmente, para a Parte II, sugere-se que o professor crie um mural digital (ex. *padlet*) onde os alunos coloquem o material recolhido e as suas conclusões. Todos os alunos devem analisar e comentar o trabalho disponibilizado pelos colegas.

Tarefa 6

Mandala

Mandala é um símbolo espiritual e ritual no hinduísmo e no budismo.

A *mandala* é formada por desenhos e símbolos de formas geométricas concêntricas, ou seja, todos os seus elementos estão distribuídos ao redor de um mesmo ponto central.

Atualmente, estas imagens são usadas para praticar *mindfulness*.

Irás usar a figura ao lado no estudo seguinte.

Parte I

Abre o ficheiro https://www.geogebra.org/m/ygbgdega .

Seleciona as caixas "centro e ângulo (rotação)" e "transformado (rotação)". Podes ver o transformado da figura original por uma rotação, e também o centro e o ângulo da rotação. Arrasta o centro e o ponto P para observares diferentes rotações aplicadas à figura.

1. Identifica a localização do centro e as amplitudes dos ângulos (diferentes da identidade), para que a rotação deixe a figura invariante (isto é, o transformado fica sobre a figura original).

2. Qual é a relação que existe entre os ângulos que encontraste e 360°?

3. Esta figura, para além de simetrias de rotação, também admite simetrias de reflexão. Desseleciona as caixas anteriores e seleciona as caixas "eixo de reflexão" e "transformado (reflexão)". Podes ver o transformado da figura original pela reflexão de eixo QR. Arrasta os pontos Q e R, para ver quais são as reflexões que deixam a figura invariante. Quantas encontras?

Uma **rosácea** é uma figura plana que tem um número finito de simetrias de rotação e/ou de reflexão.

Todas as rotações (diferentes da identidade) que deixam a figura invariante estão centradas no mesmo ponto.

Os eixos de reflexão intersetam-se no centro de rotação.

Parte II

No teu dia-a-dia, facilmente encontras lugares onde existem rosáceas, por exemplo, em fachadas de igrejas, nos passeios, no chão de edifícios, em tapetes, etc. Escolhe uma rosácea que consideres interessante, tira uma fotografia, identifica o centro e a amplitude de um ângulo de rotação que deixe a figura invariante.

No mural da turma:

- disponibiliza o teu trabalho;
- analisa e comenta o trabalho dos teus colegas.

Tarefa 7

Carpa Koi

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam e sejam capazes de utilizar propriedades e relações em geometria. Estudem frisos e rosáceas, representando e construindo modelos de composição de objetos geométricos no plano.

Conhecimentos prévios dos alunos: Isometrias, frisos e rosáceas.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet.

Notas para professor:

O professor deve organizar os alunos em pequenos grupos, e sugere-se que a resolução seja feita de forma autónoma. O professor acompanha o trabalho desenvolvido solicitando que participem oralmente e respondam a questões colocadas, apelando à discussão e sintetização das principais ideias.

Se o professor assim o entender, poderá optar por aplicar apenas as partes II e III da tarefa, uma vez que as rosáceas já foram estudadas na tarefa anterior.

Para resolver a parte III da tarefa, os alunos deverão recorrer ao GeCla. Na aula anterior à resolução da tarefa, o professor deverá pedir aos alunos que acedam ao Atractor e instalem a aplicação GeCla. Alerta-se para o facto de que a instalação nos computadores disponibilizados pela escola poderá não ser automática, lembrando que no entanto, essa instalação é fácil no telemóvel ou em tablets.

Sugere-se que o professor crie um mural digital (ex. padlet) onde os alunos coloquem o material recolhido no GeCla e as suas conclusões. Todos os alunos devem analisar e comentar o trabalho disponibilizado pelos colegas.

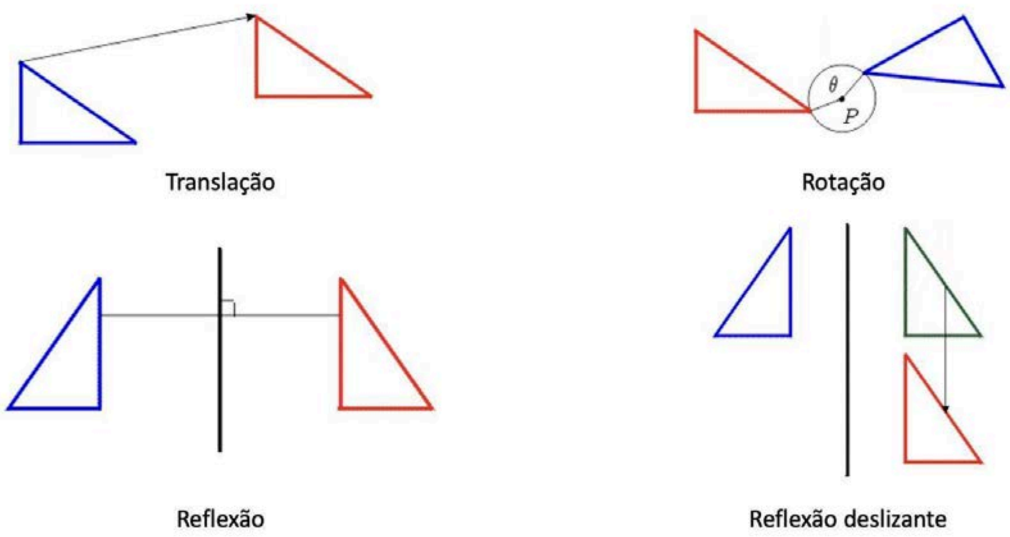
Tarefa 7

Carpa Koi

A carpa Koi é um peixe originário do Japão, onde é vista como um símbolo de perseverança e força, pois é um peixe que pode sobreviver a condições muito adversas. Apresenta cores diversificadas e padrões, tornando-o num dos peixes mais populares de todo o mundo.

Irás usar a figura de uma carpa Koi no estudo seguinte.

Relembra que existem apenas quatro tipos de isometrias:



Parte I

Acede à apliqueta https://www.geogebra.org/geometry/tc3xduk3 onde está a figura da carpa Koi.

1. Aplica à figura da carpa Koi três rotações, de 90°, 180° e 270°, com centro num dos pontos assinalados. Considera a figura agora obtida depois da aplicação das três rotações para responderes às seguintes perguntas.
   1.1. Existem rotações que deixam a figura que construíste invariante? Se sim, quais?
   1.2. Existem reflexões que deixam a figura que construíste invariante? Se sim, quais?

Parte II

Acede à apliqueta https://www.geogebra.org/geometry/q6sck8mf onde está a figura da carpa Koi.

1. Aplica à figura translações associadas aos vetores $\vec{AB}$, $2\vec{AB}$, $3\vec{AB}$ e $-\vec{AB}$. Supõe que a figura que obtiveste se prolonga indefinidamente. Que simetrias tem?

2. Acede à apliqueta https://www.geogebra.org/m/b7p3taab.
   2.1. Se a figura encontrada se prolongasse indefinidamente, que simetrias teria?
   2.2. Arrasta o ponto P para observares diferentes frisos. Se as figuras que se obtêm se prolongassem indefinidamente, que simetrias teriam?

A figura do plano que obtiveste na Parte I designa-se **rosácea**, por ter um número finito de simetrias. Aquelas que têm simetrias de translação numa direção apenas, como as obtidas nas perguntas da Parte II designam-se **frisos**.

Parte III

Nesta tarefa já estudaste as rosáceas e dois dos 7 tipos de frisos.

Acede ao GeCla e, atendendo às orientações, identifica todos os tipos de frisos e rosáceas e as simetrias que cada um apresenta.

Orientações para utilizar o GeCla neste item:

- "Geração de rosáceas, frisos e padrões";
- "Nível 7: Todos os frisos e rosáceas";
- Seleciona a opção ;
- seleciona o motivo que queres utilizar;
- para escolher o(s) tipo(s) de simetria a utilizar usa o botão ;
  (para aceder a outras simetrias, repete o último passo)
- exporta (usando o botão) para o teu dispositivo cada um dos frisos e rosáceas que criaste.

No mural da turma:

- disponibiliza o teu trabalho (rosáceas, frisos e identificação das simetrias);
- analisa e comenta o trabalho dos teus colegas.

Tarefa 8

Pavimentações de Escher

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo construir uma pavimentação criativa e original, inspirada nos trabalhos de Escher.

Conhecimentos prévios dos alunos: Pavimentações e isometrias.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet, material de desenho e papel quadriculado.

Notas e sugestões:
Este é um trabalho individual que poderá ser entendido como elemento de avaliação dos alunos.
Os alunos poderão começar a tarefa em sala de aula mas deverão dar continuidade a este trabalho de forma autónoma. Terminada a tarefa, os alunos deverão apresentar o produto final ao grupo turma explicando a sua construção.
O professor poderá organizar uma exposição, com os trabalhos dos alunos, aberta a toda a comunidade escolar.

Tarefa 8

Pavimentações de Escher

Escher produziu a sua primeira pavimentação em 1922. Passou muito tempo em Alhambra, em Granada, a desenhar os padrões pelas quais Alhambra é conhecida. Visualiza o vídeo: O estranho mundo de Escher.

Um dos padrões mais conhecidos de Escher é o dos répteis.

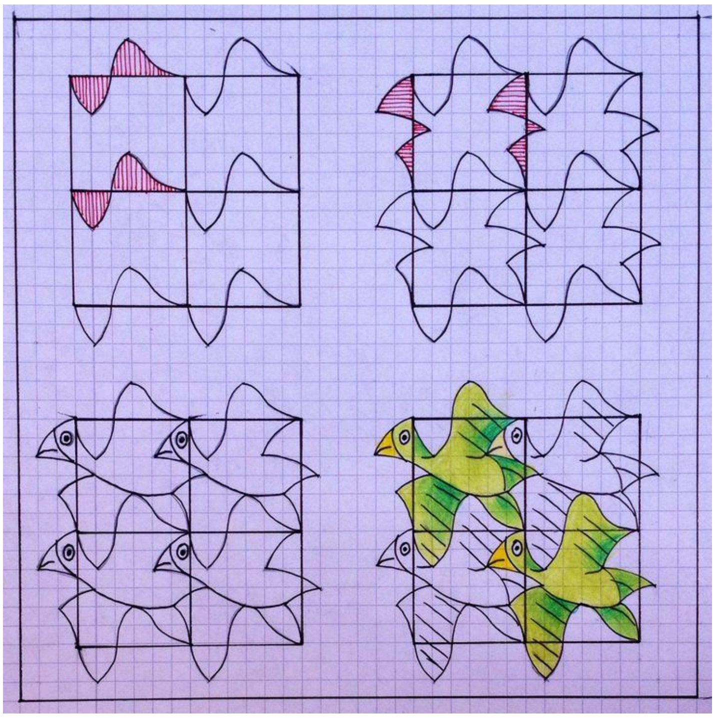
Fonte: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/reptiles

As suas obras inspiraram vários artistas e arquitetos como por exemplo a pavimentação colocada no edifício da Empresa de purificação de água em Haia.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Escher_The_Hague_2020.jpg

Escher costumava utilizar papel quadriculado e isométrico para criar os motivos e recorria a isometrias para construir as pavimentações como podes observar na apliqueta Lagartos de Escher Geogebra.

Uma das técnicas possíveis para criar o motivo é retirar uma parte de um dos lados do polígono e acrescentá-la no lado oposto como podes observar na figura seguinte.



Constrói agora a tua pavimentação criativa e original, inspirada nos trabalhos de Escher.

Podes orientar o teu trabalho de acordo com as etapas:

1. Escolhe uma pavimentação regular;
2. Em cada polígono base retira/acrescenta, num dos lados, parte(s) da(s) figura(s) e acrescenta/retira no lado oposto a(s) mesma(s) forma(s). Repete este procedimento tantas vezes quantas as necessárias para criares o teu motivo. Se escolheres um triângulo equilátero deverás retirar e acrescentar a forma no mesmo lado.
3. Repete a etapa anterior nos restantes polígonos base.
4. Prepara uma apresentação do teu trabalho para o apresentares à turma.