

P2 - ESTATÍSTICA

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024



Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Estatística (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em <https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/>

Data:

Lisboa, julho de 2024



Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação

de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:

Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO P2 - ESTATÍSTICA

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1,5	Tarefa 1 População ou amostra?	Problema estatístico Variabilidade de População, amostra e variável Fases de um procedimento estatístico	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico • Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente • Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) característica(s) a estudar, que se designa(m) por variável(variáveis) 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C)
1,5	Tarefa 2 Consumo da água	População, amostra e variável Fases de um procedimento estatístico	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer as fases de um procedimento estatístico: <ul style="list-style-type: none"> - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; - Interpretação tendo por base as representações obtidas 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas • Raciocínio matemático • Recurso sistemático à tecnologia • História da Matemática • Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia e valida a informação recolhida (B) • Analisa criticamente as conclusões (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável (G) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

4,5	<p>Tarefa 3 Organização de dados</p>	<p>Dados univariados</p> <p>Organização de dados</p> <p>Histograma</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las • Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, lembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis • Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos • Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude 	Trabalho a pares e de grupo, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas • Raciocínio matemático • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
2	<p>Tarefa 4 Classificações de final de módulo</p>	<p>Dados univariados</p> <p>Medidas de localização</p> <p>Propriedades das medidas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar as medidas de localização: média, mediana, moda e quartis • Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação de dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b” 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas • Recurso sistemático à tecnologia • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

<p>3</p>	<p>Tarefa 5 Remunerações na empresa <i>RealLife</i></p>	<p>Dados univariados Medidas de localização Propriedades das medidas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar as medidas de localização: média, mediana, moda e quartis • Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação de dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b” • Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: <ul style="list-style-type: none"> - Pouca resistência da média; - Amplitude interquartil igual a zero, não implicar a não existência de variabilidade. • Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar como medida de localização do centro de distribuição dos dados, a mediana em vez da média 	<p>Trabalho de grupo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas • Recurso sistemático à tecnologia • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
<p>2</p>	<p>Tarefa 6 Saúde Infantil e Juvenil</p>	<p>Dados univariados Medidas de localização</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar as medidas de localização percentis 	<p>Trabalho a pares, com discussão final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à Tecnologia • Avaliação para a aprendizagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	<p>Tarefa 7 FITescola e as medidas de dispersão</p>	<p>Dados univariados Medidas de dispersão Propriedades das medidas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas • Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: <ul style="list-style-type: none"> - Pouca resistência do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à Tecnologia • Avaliação para a aprendizagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Analisa criticamente as conclusões a que chega (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	<p>Tarefa 8 Idas ao ginásio</p>	<p>Dados univariados Medidas de dispersão</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à Tecnologia • Avaliação para a aprendizagem • Organização dos trabalhos dos alunos • Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Analisa criticamente as conclusões a que chega (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

<p>3</p>	<p>Tarefa 9A Relações entre variáveis</p> <p>Tarefa 9B Peso e altura de jogadores(as) de futebol</p>	<p>Dados bivariados</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados. ● Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis. ● Identificar o coeficiente de correlação linear r, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a $[-1, 1]$, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear. ● Compreender que no caso em que o diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão. ● Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou explanatória. ● Compreender que a existência de outliers influencia estes procedimentos. ● Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados. 	<p>Trabalho de pares e em grupo com discussão o final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Resolução de problemas ● Recurso sistemático à Tecnologia ● Práticas enriquecedoras e criatividade ● Organização dos trabalhos dos alunos ● Comunicação matemática 	<ul style="list-style-type: none"> ● Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza informação recolhida (D) ● Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) ● Analisa criticamente as conclusões a que se chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) ● Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) ● Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
----------	--	--------------------------------	---	--	--	---

Tarefa 1

População ou amostra?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa introduz o tema da Estatística a partir da análise de tabelas e gráficos resultantes de estudos estatísticos. Pretende-se que os alunos relembrem conceitos já trabalhados ao longo do ensino básico. Pretende-se ainda que, a partir de situações problemáticas, os alunos consigam compreender em que circunstâncias faz sentido proceder à recolha de dados estatísticos.

Conhecimentos prévios dos alunos: População, amostra e análise/leitura de tabelas e gráficos.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:

No início da aula, o professor poderá introduzir o estudo ao tema da Estatística a partir de uma notícia, colocando questões relacionadas com a identificação da população e amostra. A partir da discussão da notícia (questão 1), terá oportunidade para promover um debate que conduza ao surgimento de conceitos já abordados/trabalhados ao longo do ensino básico.

Os alunos devem resolver a tarefa, a pares, enquanto o professor acompanha o trabalho desenvolvido..

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 1

População ou amostra?

1. Lê o seguinte excerto da notícia publicada na revista Visão em 17/10/2023.

“Seis em cada dez jovens com 18 anos usam a Internet durante quatro horas ou mais, por dia, anunciou hoje o Serviço de Intervenção nos Comportamentos Aditivos e nas Dependências (SICAD). De acordo com a mesma fonte, cinco em cada dez dos jovens nesta faixa etária usa as redes sociais durante quatro horas ou mais. As pesquisas online, os jogos e as apostas, são outras atividades que prendem a atenção dos jovens durante o período indicado.

O trabalho permitiu identificar que três em cada 10 jovens naquela idade “experenciaram recentemente um de sete problemas” que atribuíram à utilização da internet (31%), principalmente em situações de mal-estar emocional (18%).

(Inquérito realizado aos jovens participantes no Dia da Defesa Nacional em 2023, sobre consumos de substâncias psicoativas e utilização da internet, no âmbito de uma parceria com o Ministério da Defesa Nacional).”

- 1.1. Qual é a população e a amostra em estudo?
 - 1.2. Identifica as variáveis observadas neste estudo e classifica-as.
2. No dia-a-dia existem muitas situações que exigem recolha de dados para que seja possível dar respostas a um problema ou tomar decisões.
Na tua opinião, qual ou quais das situações I, II, III ou IV dependem da necessidade de se proceder à recolha de dados? Fundamenta a tua resposta.
 - **Situação I:** Quanto tempo (em horas) por dia, estás a jogar no telemóvel?
 - **Situação II:** Quais são os cursos profissionais existentes na tua escola?
 - **Situação III:** Quais são os desportos preferidos dos alunos da tua escola?
 - **Situação IV:** A diretora de uma escola pretende saber a percentagem de alunos que almoça diariamente no refeitório da escola.

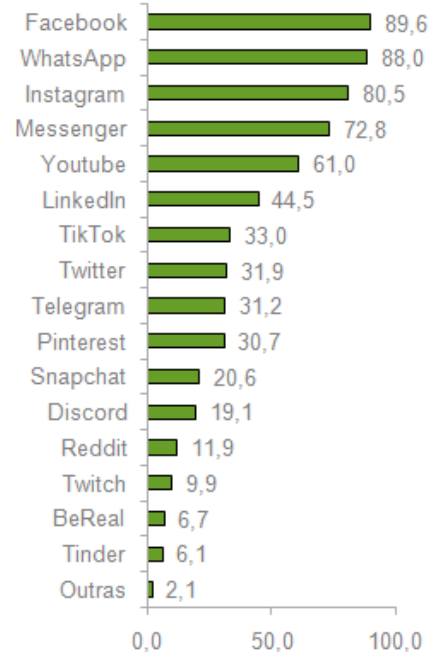


3. Com base num estudo estatístico pela *Marktest* em setembro de 2023 - “Portugueses e as Redes Sociais 2023” sabe-se que, relativamente à questão “Redes sociais onde tem perfil criado ou possui conta” obtiveram-se os seguintes dados:

	Universo (em milhares)	1. Amostra
Masculino	2 679	2. 392
Feminino	2 762	409
15/24 anos	1 024	151
25/34 anos	1 032	183
35/44 anos	1 259	200
45/64 anos	2 126	267
Grande Lisboa	1 285	176
Grande Porto	656	100
Litoral Norte	1 068	155
Litoral Centro	834	130
Interior Norte	999	154
Sul	599	86
Total	5 441	801

Fonte: Marktest, setembro de 2023

Redes sociais onde tem perfil criado ou possui conta
(em %)



- 3.1. Qual é a população e a amostra?
- 3.2. Identifica a variável observada neste estudo e classifica-a?
- 3.3. Justifica se existem indícios para supor que seja verdadeira ou falsa a afirmação seguinte:

“Pela observação dos dados, podemos concluir que o Facebook é a rede social mais utilizada pela população portuguesa” .



Tarefa 2

Consumo da água

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A partir de situações problemáticas, os alunos fazem a análise de tabelas e gráficos resultantes de estudos estatísticos, nomeadamente sobre o consumo da água em alguns municípios portugueses, discutindo acerca da variabilidade dos dados e tirando algumas conclusões.

Conhecimentos prévios dos alunos: População, amostra, classificação de variáveis estatísticas e análise de tabelas e gráficos.

Materiais e recursos: Calculadora.

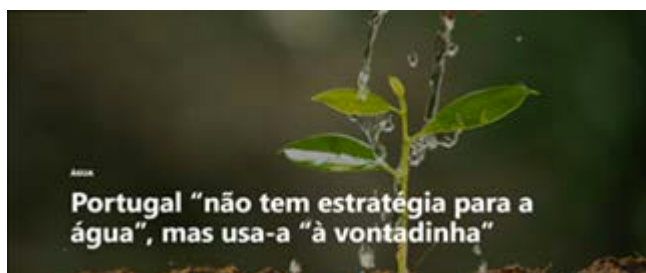
Notas e sugestões:

No início da aula, o professor deve ler a notícia, e assim iniciar um pequeno debate sobre o consumo da água e a situação de seca em Portugal. Sugere-se que coloque questões sobre os dados da tabela apresentada de modo a auxiliar na análise da mesma por parte dos alunos. De seguida, os alunos, a pares, resolvem a tarefa enquanto o professor acompanha o trabalho desenvolvido. A partir da questão 4, poderão surgir dificuldades relativamente à interpretação do enunciado das questões. Se tal acontecer, sugere-se que o professor coloque questões orientadoras ao grupo turma de modo que estes ultrapassem esses constrangimentos. No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 2

Consumo de água



“A incerteza e imprevisibilidade da seca e dos seus impactos justificam que se dedique uma atenção permanente a este fenómeno e não apenas uma actuação reactiva a situações extremas”, lê-se no texto da resolução n.º 80/2017 publicada em Diário da República.

Joaquim Poças Martins, por sua vez, recorda que, como estamos diante de um fenómeno global de mudança do clima, temos de nos “preparar para um novo normal”. E o que é essa nova normalidade? “São períodos de seca que se arrastam, um ano seco depois de outro. Praticamente estamos desde 2017 a enfrentar a seca”, diz o especialista em gestão hídrica, para quem uma comissão dedicada à seca acabaria por ser “um trabalho a tempo inteiro”. “Quase até poderíamos criar o Ministério da Seca”, refere o docente da FEUP.

Jornal o Público | 07.05.2023

<https://www.publico.pt/2023/05/07/azul/noticia/portugal-nao-estrategia-agua-usaa-vontadinha-2048760>

Recorreu-se aos dados sobre o volume de água abastecida pela rede pública, recolhidos pela Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos (ERSAR), disponíveis [AQUI](#)¹. Os dados têm proveniência de fontes como o INE, a ERSAR, a ERSAR Açores e DREM, a partir dos dados reportados pelos Sistemas Públicos Urbanos de Serviços de Águas /Vertente Física e de Funcionamento. Os valores apresentados referem-se ao consumo de água abastecida pela rede pública e correspondem ao volume de água faturada, per capita, em cada ano, entre 2015 e 2021.

¹ Os dados podem ser descarregados em diversos formatos, incluindo no formato Excel. Note-se que no quadro disponibilizado pelo INE os anos estão ordenados do mais recente para o mais antigo.



A tabela apresenta os valores o consumo de água anual, por habitante (em m³/hab) nalguns municípios de Portugal Continental, entre os anos de 2015 e 2021:

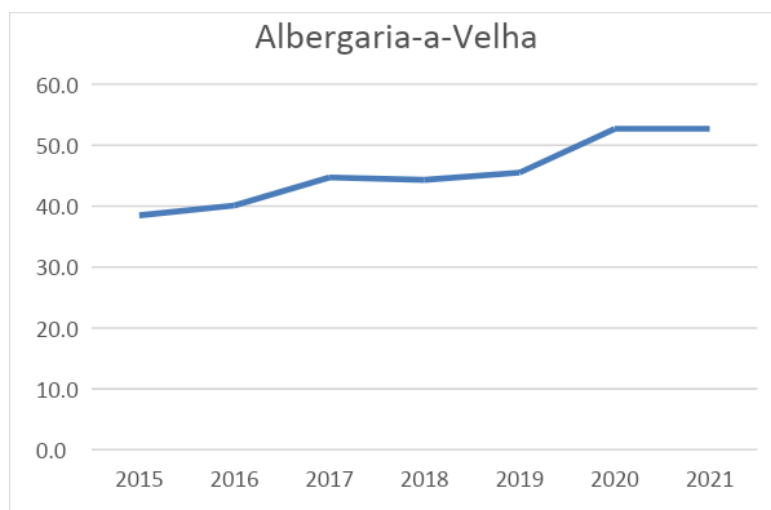
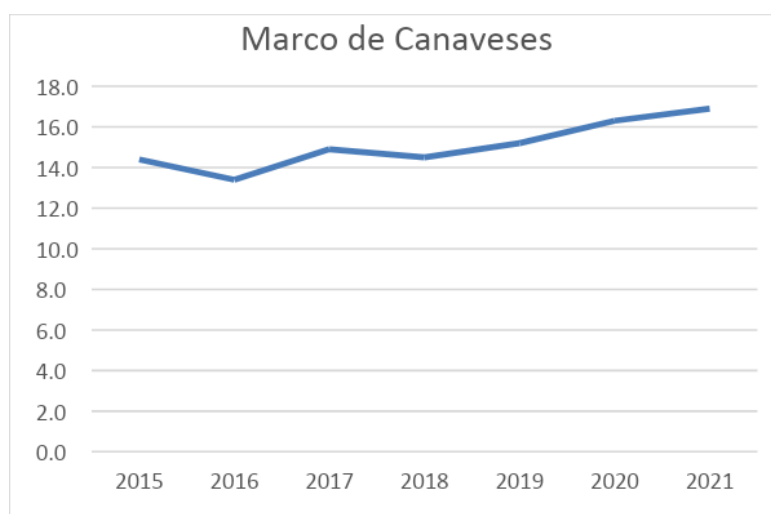
Distrito	Município	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
		m ³ /hab	m ³ /hab	m ³ /hab	m ³ /hab	m ³ /hab	m ³ /hab	m ³ /hab
Viana do Castelo	Vila Nova de Cerveira	61,1	62,6	54,7	55,4	52,6	52,5	50,9
Braga	Fafe	30,2	30,4	31,9	31,5	30,4	31,5	31,7
Viseu	Cinfães	14,2	14,8	15	14,5	15,1	25,8	25,7
Porto	Marco de Canaveses	14,4	13,4	14,9	14,5	15,2	16,3	16,9
Aveiro	Albergaria-a-Velha	38,5	40,1	44,7	44,3	45,5	52,7	52,7
Guarda	Celorico da Beira	53,3	62,6	65,4	64,9	68,3	65,1	68
Lisboa	Lisboa	185,6	174,3	175,5	165,6	158,7	150,2	149,9
Setúbal	Alcácer do Sal	94,3	77,2	71	82	84,2	95,4	99,2
Beja	Alvito	58,8	56,7	61,6	55,8	57,4	68,4	64,2
Santarém	Santarém	67,7	71,6	73,5	71,3	75,5	78	77,3
Évora	Montemor-o-Novo	49,8	48,1	50,3	46,4	49,5	54	52,4
Faro	Vila Real de Sto. António	129,8	105,6	115,2	118,6	107,8	100,8	105

1. Qual é a variável estatística e a unidade de medida?
2. Classifica a variável estatística.
3. Relativamente ao ano de 2021, quais são os três municípios com maior consumo de água por habitante e os três municípios com menor consumo de água por habitante?
4. Para os municípios de Lisboa, Celorico da Beira e Santarém, analisa a diferença do consumo e a correspondente percentagem de variação, do ano de 2015 para o ano de 2021. Em qual destes municípios se poderia supor que começou a haver uma maior preocupação com o consumo da água? Explica a tua resposta.
5. De acordo com dados disponíveis no PORDATA², em 2021, existiam 49 637 habitantes em Marco de Canaveses e 18 946 em Vila Real de Sto. António. Com base nesta informação, compara os consumos de água anuais dos dois municípios.

² <https://www.pordata.pt/municipios/populacao+residente+total+e+por+grandes+grupos+etarios-390>



6. Segundo a ONU, 110 litros de água por dia são suficientes para atender às necessidades básicas de consumo e higiene de uma pessoa. Com base nesta informação, quais os municípios em que o consumo da água, em 2021, está de acordo com esta recomendação da ONU?
7. Os gráficos seguintes comparam as tendências de evolução dos consumos de água, por habitante, nos municípios de Marco de Canaveses e de Albergaria-a-Velha. Comenta a afirmação: “A evolução do consumo é semelhante nos dois municípios, ao longo do tempo”.



Tarefa 3

Organização de dados

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se com esta tarefa que a partir da análise dos dados resultantes de estudos estatísticos, os alunos os organizem em tabelas e gráficos que melhor se adequem a esses dados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Organização de dados em tabelas de frequências e construção de gráficos.

Materiais e recursos: Folha de cálculo.

Notas e sugestões:

No início da aula, o professor deve lembrar alguns conceitos já abordados em anos e aulas anteriores.

Sugere-se que seja usada a primeira questão para recordar os conceitos. Os alunos, organizados a pares, devem resolver a tarefa enquanto o professor acompanha o trabalho.

O professor deve solicitar que os alunos participem oralmente e respondam às questões colocadas no primeiro exercício, apelando à discussão e sintetização das principais ideias.

No momento seguinte, o professor deve questionar os alunos sobre os gráficos que conhecem e que usualmente são usados para a organização dos vários tipos de dados.

Poderão surgir dificuldades relativamente à interpretação do enunciado das questões. Se tal acontecer, sugere-se que o professor leia as questões em voz alta e clarifique o pretendido.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos. Caso a tarefa não seja concluída na aula, deve continuar-se na aula seguinte, retomando assim a discussão sobre esta temática.



Tarefa 3

Organização de dados

1. Do estudo realizado pela Marktest em setembro de 2023 - “ Portugueses e as Redes Sociais 2023”, recolheram-se os seguintes dados acerca da idade dos inquiridos:

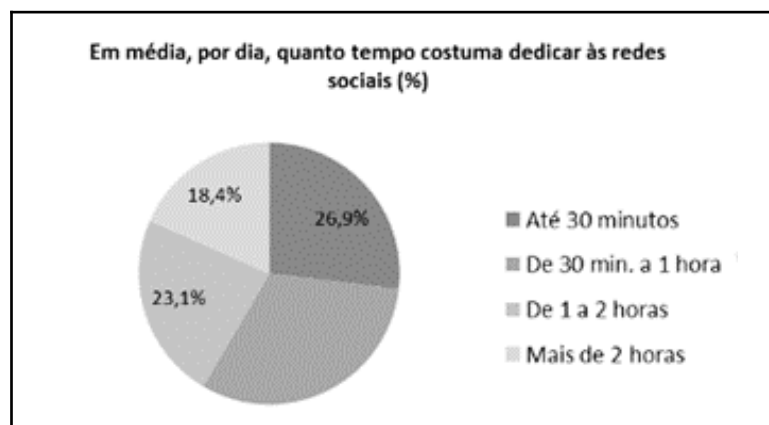
Idade (anos)	Inquiridos
15 a 24 anos	151
25 a 34 anos	183
35 a 44 anos	200
45 a 54 anos	267
Total	801

Fonte: Marktest, setembro de 2023 (adaptado)

- 1.1. Completa a tabela relativamente à idade dos inquiridos.
(Sugestão: usa uma folha de cálculo).

Idade (em anos)	Frequência Absoluta	Frequência Absoluta Acumulada	Frequência Relativa	Frequência Relativa (%)	Frequência Relativa Acumulada (%)
[15,25[151	151	0,1885	18,85	18,85
[25, 35[183				
[35, 45[200				
[45, 55[267				
Total	801		1	100	

- 1.2. Quantos inquiridos têm menos de 35 anos?
- 1.3. Qual é a percentagem dos inquiridos que têm pelo menos 35 anos?
- 1.4. Qual é a percentagem de inquiridos com idades iguais ou superiores a 25 anos e menores que 45 anos?
2. A partir dos dados recolhidos pela Marktest em setembro de 2023 - “ Portugueses e as Redes Sociais 2023”, foi construído o gráfico circular:

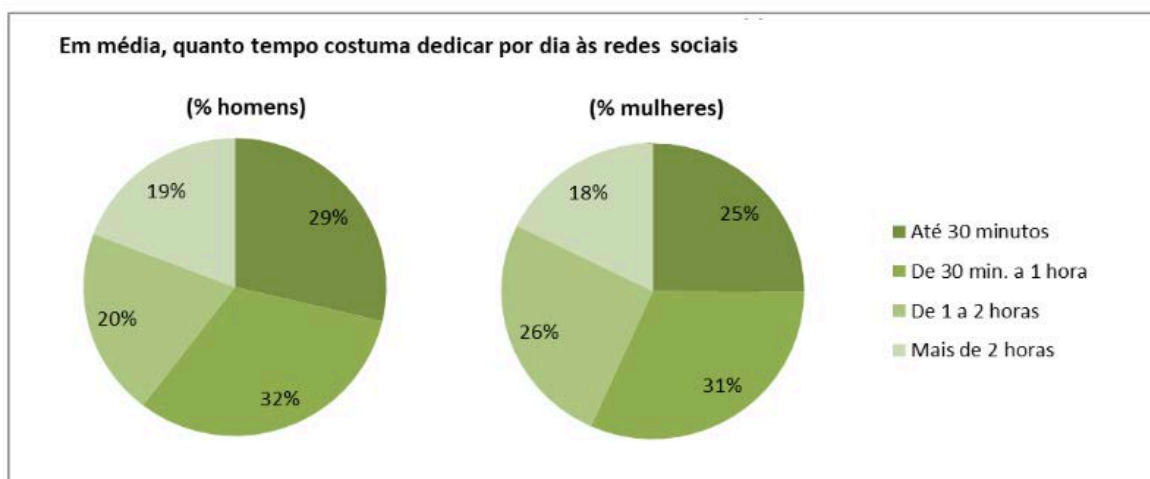
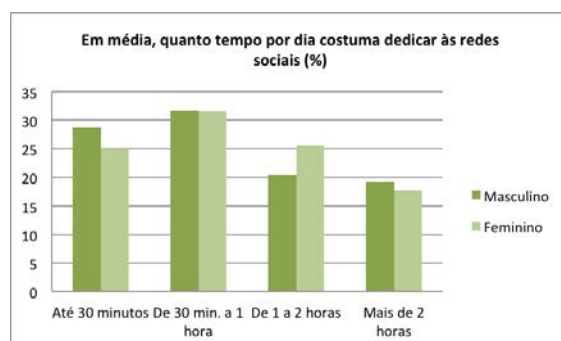


Fonte: Marktest, setembro de 2023 (adaptado)



- 2.1. Determina a percentagem de utilizadores que dedicam às redes sociais, em média por dia, de 30 minutos a 1 hora.
 - 2.2. Sabendo que, a esta questão responderam 785 pessoas, quantas declararam dedicar-se às redes sociais, por dia, até 1 hora ?
 - 2.3. Qual é, em graus, a amplitude do setor circular correspondente à utilização, por dia, “De 1 a 2 horas” ?
3. A tabela e os gráficos seguintes, construídos a partir do mesmo estudo da Marktest, apresentam o tempo, em média, dedicado às redes sociais, por sexo.

Tempo	TOTAL(%)	Sexo	
		Masc(%)	Fem(%)
Até 30 minutos	26,9	28,7	25,1
De 30 min. a 1 hora	31,6	31,7	31,6
De 1 a 2 horas	23,1	20,4	25,6
Mais de 2 horas	18,4	19,2	17,7



Fonte: Marktest, setembro de 2023

Tendo em conta os gráficos apresentados, qual é o mais adequado à comparação entre o tempo de utilização das redes sociais por cada um dos sexos? Justifica a tua resposta.



4. A tabela apresenta, a partir do estudo da Marktteste “ Portugueses e as Redes Sociais 2023” os dados relativos às redes sociais em que as pessoas inquiridas têm perfil criado ou possuem conta, por sexo e por idade:

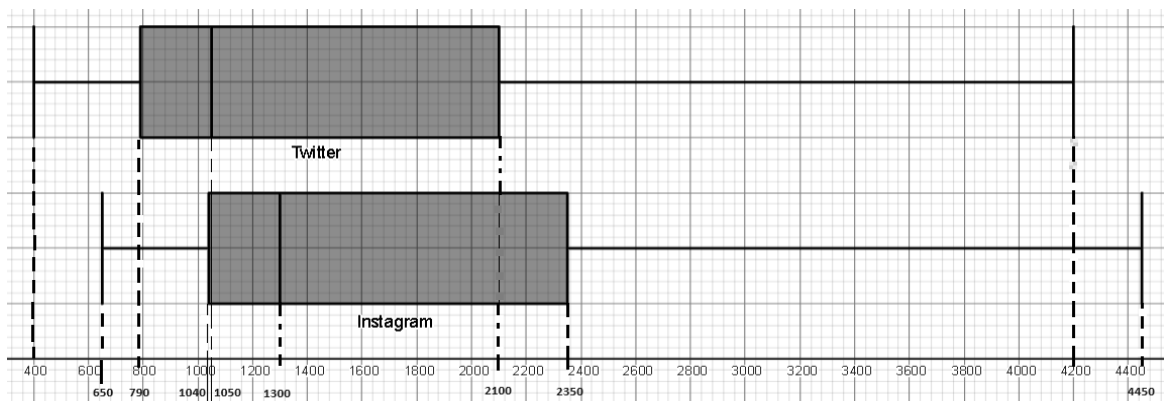
	TOTAL%	Sexo %		Idade %			
		Masc	Fem	15 a 24	25 a 34	35 a 44	45 a 54
Facebook	89,6	86,9	92,1	87,1	88,3	91,3	90,3
WhatsApp	88,0	86,9	89,0	97,7	93,6	85,5	82,0
Instagram	80,5	74,8	86,0	98,8	86,6	76,4	71,1
Messenger	72,8	68,6	76,8	81,3	83,6	74,4	62,5
Youtube	61,0	67,9	54,2	93,6	74,9	60,2	38,9
LinkedIn	44,5	48,6	40,5	59,7	49,6	36,8	39,2
TikTok	33,0	30,6	35,4	60,8	31,7	27,2	23,8
Twitter	31,9	39,2	24,9	65,7	34,8	22,6	19,7
Telegram	31,2	36,9	25,7	32,4	40,9	33,2	24,8
Pinterest	30,7	19,5	41,6	44,3	32,8	28,9	24,2
Snapchat	20,6	16,9	24,2	49,8	26,8	13,2	7,9
Discord	19,1	27,6	10,8	53,2	23,6	9,8	5,9
Reddit	11,9	17,4	6,5	28,1	17,9	8,6	3,0
Twitch	9,9	16,3	3,8	32,3	15,1	2,7	1,0
BeReal	6,7	7,2	6,3	28,2	6,6	0,8	0,0
Tinder	6,1	8,5	3,7	12,0	6,2	4,1	4,3
Outras	2,1	1,5	2,8	3,5	4,8	1,0	0,8

Fonte: Markttest, setembro de 2023 (Adaptado)

- 4.1. Organiza a informação, dada na tabela, num gráfico com barras, atendendo ao sexo dos inquiridos.
(sugestão: usa uma folha de cálculo).
- 4.2. Que conclusões podes tirar a partir da observação do gráfico?
5. Considera a tabela elaborada na questão 1.1. e constrói o histograma de frequências relativas.



6. Os diagramas de extremos e quartis apresentam a distribuição dos salários, em euros, de alguns dos trabalhadores do Twitter e do Instagram:



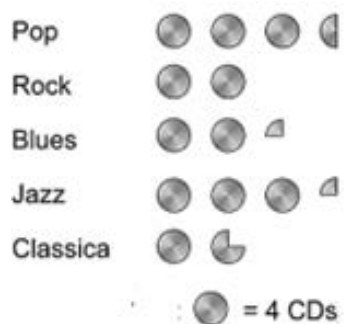
- 6.1. Qual das empresas paga os salários mais baixos?
- 6.2. Entre que valores se situam os 25% dos salários mais baixos de cada uma das empresas?
7. Na turma do Artem foi feito um questionário para estudar o tempo gasto (em horas), por mês, pelos alunos em três atividades: jogar no computador, ver televisão e praticar desporto. Os dados recolhidos foram organizados nos seguintes três diagramas de caule e folhas.

Tempo gasto a jogar computador		Tempo gasto a ver televisão		Tempo gasto a praticar desporto	
0	5	0	2 3 4 4 5 6 7 8	0	0 4
1	2	1	2 3 5 5 8	1	0 0 2 4 4
2	4	2	1 2 3	2	0 2 2 4 4 6
3	2 4	3	0 5	3	0 1 4 4 5
4	0 8	4	2 2	4	0 0 2
5	0 2 6	5	3	5	0
6	2 4 4 6 8	6			
7	0 2 2 5 5 5 8	7	2		

- 7.1. Quantos alunos tem a turma do Artem?
- 7.2. Quantos alunos “jogam no computador” durante mais de 60 horas por mês?
- 7.3. Quais são o maior e o menor número de horas que um aluno gasta por mês a “praticar desporto”?
- 7.4. Compara os diagramas respeitantes ao tempo gasto a “jogar no computador” e a “ver televisão”. O que podes dizer sobre o número de horas gastas com cada uma destas atividades?



8. A Leonor resolveu organizar os CDs de música do avô. O pictograma seguinte mostra o número de CDs de cada categoria que organizou.



Quantos CDs tem o avô da Leonor?

Tarefa 4

Classificações de final de módulo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar medidas de localização, relativas ao centro da distribuição dos dados, como a média e a mediana, e a outros pontos da distribuição dos dados, como os quartis. Nesta tarefa serão, ainda, estudadas propriedades das medidas de localização.

Conhecimentos prévios dos alunos: Medidas de localização: média, moda, quartis.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

O professor deve começar por lembrar alguns conceitos relacionados com as medidas de localização.

O professor deve solicitar a participação oral dos alunos, apelando à discussão e sintetização das principais ideias.

Poderão surgir dificuldades relativamente à interpretação do enunciado das questões, na explicação de raciocínios e na formulação de conjeturas. Outra dificuldade poderá estar relacionada com a interpretação do programa em Python. No entanto, este pode ser uma forma de levar à compreensão dos conceitos, e à testagem e validação de conjeturas, constituindo assim um momento propício ao desenvolvimento do pensamento matemático e computacional.

No final da tarefa o professor pode sugerir aos alunos que descrevam o programa em Python apresentado, solicitando que o copiem para a calculadora ou para a plataforma Colab e comparem os resultados com os cálculos efetuados e conjeturas estabelecidas. Desta forma, poderão validar ou refutar as conjeturas e mais facilmente chegarem a conclusões.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 4

Classificações de final de módulo

A seguir, apresentam-se as classificações finais obtidas na disciplina de Matemática no módulo P1: Modelos Matemáticos para a Cidadania, pelos 21 alunos da turma 1.º A, numa escala de 0 a 20 valores:

10	16	8	11	14	9	11
16	13	10	15	11	17	14
10	11	13	15	7	10	14

1. Resolve as questões seguintes, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Se nos cálculos intermédios procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, quatro casas decimais.
 - 1.1. Calcula a soma das classificações obtidas pelos 21 alunos da turma 1.º A.
 - 1.2. Se a professora de Matemática distribuísse esta soma, equitativamente, pelos alunos da turma, qual seria a classificação com que cada aluno ficaria?
 - 1.3. Determina a média das classificações da turma.
 - 1.4. Se a classificação de cada aluno fosse aumentada em 2 valores, qual passaria a ser a média das classificações dos alunos da turma 1.º A?
 - 1.5. Considera o valor da média das classificações calculada em 1.3. e adiciona-lhe 2 valores. O que podes concluir, tendo em conta o resultado obtido em 1.4.?
 - 1.6. Se a classificação de cada aluno fosse valorizada em 10%, qual passaria a ser a média das classificações, em valores, dos alunos da turma 1.º A?
 - 1.7. Considera o valor da média das classificações calculada em 1.3. e calcula 10% desse valor. O que podes concluir, tendo em conta o resultado obtido em 1.6?
 - 1.8. O que podes concluir sobre as alterações provocadas na média por transformação dos dados, pela adição a cada dado de uma constante “ a ”? E, pela multiplicação de cada dado por uma constante “ b ”, ?



2.

2.1. Escreve as classificações dos alunos da turma 1º A , por ordem crescente.

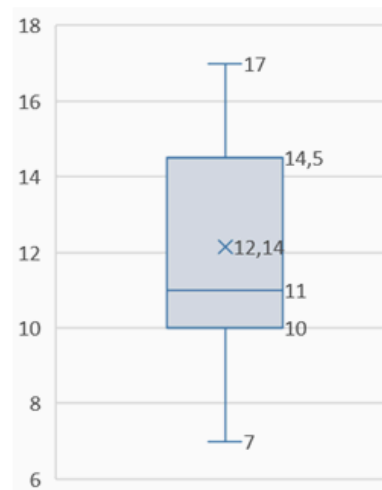
2.2. Qual é a classificação mediana, ou seja, a classificação que se encontra na posição central (tendo em conta a organização realizada em 2.1.).

2.3. Determina o 1.º e o 3.º quartis da distribuição das classificações.

2.4. A figura ao lado apresenta-se um diagrama de extremos e quartis das classificações da turma (o símbolo \times localiza o valor da média).

Das afirmações seguintes assinala a correta:

- As classificações média e mediana são iguais.
- Só metade das classificações da turma é superior a 10 valores.
- 75% das classificações situam-se entre 10 e 17 valores.
- Mais de 25% das classificações são inferiores a 10.



3. Durante o primeiro período, um novo aluno foi inserido na turma, tendo concluído o módulo P1 com a classificação de 20 valores.
- 3.1. Na tua opinião, o que vai acontecer a cada uma das medidas (média e mediana) anteriormente determinadas?
- 3.2. Verifica se a tua conjectura está correta, fazendo os ajustes necessários (para as 22 classificações) no programa de Python seguinte que permite calcular a média, a mediana, o máximo, o mínimo e os quartis das classificações dos 21 alunos:

Programa em *Python* para calcular a média, a mediana, máximo, mínimo e os quartis das classificações dos 21 alunos da Turma 1.º A.

```
classificações=[10, 16, 8, 11, 14, 9, 11, 10, 15, 16, 13, 10, 15, 11, 17,
14, 14, 7, 10, 11, 13]
classificações.sort()
soma=0
for i in range(21) :
    "a localização dos dados organizados é igual à sua posição-1"
    soma=soma+classificações[i]
print('Classificações:', classificações)
print("Média:", soma/21)
print ("Mínimo:", classificações[0])
print ("1.º Quartil:",(classificações[4]+classificações[5])/2)
print ("Mediana:", classificações[10])
print("3.º Quartil:",(classificações[15]+classificações[16])/2)
print ("Máximo:", classificações[20])
```



Tarefa 5

Remunerações na empresa *RealLife*

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar propriedades das medidas de localização.

Conhecimentos prévios dos alunos: Medidas de localização: média, moda, quartis.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Os alunos devem resolver a tarefa em grupo.

O professor deve solicitar que os alunos participem oralmente e respondam às questões colocadas, apelando à discussão e sintetização das principais ideias.

Poderão surgir dificuldades relativamente à interpretação do enunciado das questões e na explicação de raciocínios.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 5

Remunerações na empresa *RealLife*

Um grupo de funcionários da empresa RealLife reuniu-se com o seu representante sindical no sentido de negociar com a direção da empresa melhores salários, uma vez que os ordenados não têm acompanhado o aumento do custo de vida.

Na reunião, o Presidente da direção da empresa, disponibilizou a tabela salarial dos funcionários da empresa, para justificar a justiça da política de salários:

Cargo	N.º de colaboradores	Salário Mensal (€)
Presidente	1	15 850€
Vice-Presidente	1	10 870 €
Diretor de serviço	2	6 580 €
Secretário	4	1 874 €
Encarregado	2	1 534€
Operário	32	934 €

1. Segundo o Presidente da direção, os salários da empresa têm acompanhado o aumento do custo de vida, dado que o **salário médio** dos trabalhadores está acima dos 1 900€, sendo mais do que o dobro do salário mínimo nacional. Verifica se a afirmação do Presidente da empresa é verdadeira, justificando a tua resposta com os cálculos que realizaste.
2. O representante sindical argumentou que o **salário mediano** dos funcionários da empresa é menos de metade (950€) do **salário médio** referido pelo Presidente. Verifique se a afirmação do representante sindical está correta, apresentando os cálculos que tiveres de efetuar.



3. Face ao argumento apresentado pelo representante sindical, o Presidente da empresa propôs um aumento de todos os salários em 5% . Nesse caso, qual passa a ser o valor do salário médio?
4. O representante sindical contrapôs que um aumento de 95,63€ para todos os funcionários seria bastante mais justo. Para a empresa, o valor despendido em salários seria o mesmo. Contudo, a amplitude entre salários seria menor do que com o aumento de 5% proposto pelo presidente.
Verifica se a afirmação do representante sindical está correta, apresentando os cálculos que tiveres de efetuar.
5. Com o aumento de 95,63€, em cada um dos salários, calcula a mediana, o 1.º quartil e o 3.º quartil.
6. Calcula para a situação anterior, a amplitude interquartil.
De acordo com o resultado obtido, assinala a resposta correta:
 - A amplitude interquartil dos ordenados dos funcionários é diferente de zero, isso significa que 50% dos funcionários têm o mesmo ordenado.
 - A amplitude interquartil dos ordenados dos funcionários é diferente de zero, no entanto, não há variabilidade entre os ordenados.
 - A amplitude interquartil dos ordenados dos funcionários é zero, no entanto, há variabilidade entre os ordenados.
 - A amplitude interquartil dos ordenados dos funcionários é zero, isso significa que não há variabilidade entre os ordenados.



Tarefa 6

Saúde Infantil e Juvenil

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar e interpretar os valores dos percentis.

Conhecimentos prévios dos alunos: Arredondamentos e percentagens.

Materiais e recursos: Vídeo e folha de cálculo..

Notas para professor:

Sugere-se que numa aula anterior à implementação da tarefa o professor solicite aos alunos que tragam o seu boletim de saúde infanto-juvenil.

No início da aula o professor pode solicitar que consultem para uma determinada idade qual era o seu peso e altura. A partir daí pode promover uma discussão inicial sobre o significado dos valores tendo em conta a curva que representa os percentis onde a sua altura ou peso se enquadram. Será interessante verificar se para a mesma idade e percentil, os valores do peso e da altura, entre rapazes e raparigas, é igual ou não.

No item 4.1., se se recorrer ao Google Sheets deverá utilizar-se a função "= PERCENTILE.EXC (A1:A21; p)", com $p = 0,25$, $p = 0,75$ e $p = 0,50$, para obter os 1.º e 3.º quartis e a mediana.

Para concluir o debate, o professor deve/pode mostrar o vídeo "Isto é Matemática-Percentis" https://youtu.be/u4wMrVL_YsM?si=FiNFYmu01M7kZ-BL
Os alunos devem resolver a tarefa em pares ou em grupo enquanto o professor acompanha o trabalho desenvolvido.

O professor deve solicitar que os alunos participem oralmente e respondam às questões colocadas, apelando à discussão e sintetização das principais ideias. Poderão surgir dificuldades relativamente à interpretação do enunciado das questões e na explicação de raciocínios.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.

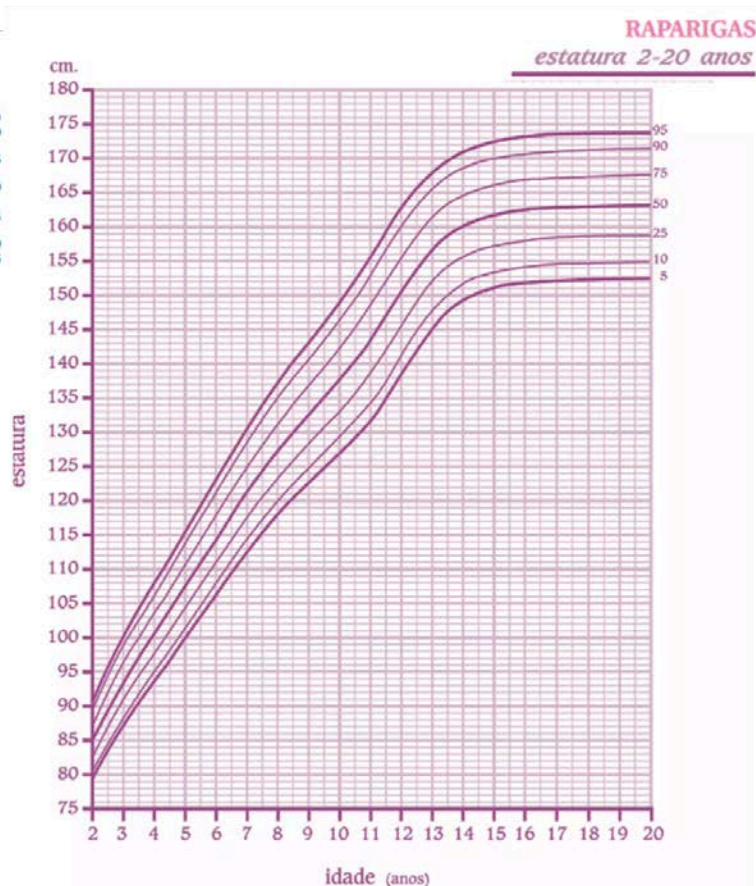
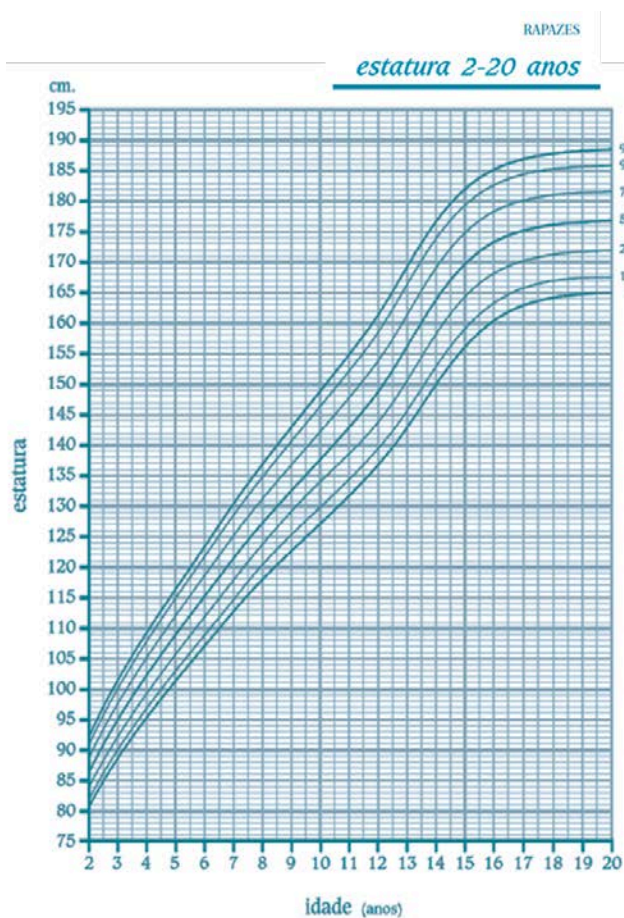


Tarefa 6

Boletim Individual de Saúde

1. Como o crescimento difere nos rapazes e nas raparigas, um rapaz com 20 anos e 172 cm de altura não se encontra no mesmo percentil que uma rapariga exatamente com a mesma idade e altura.

Assinala, com X em cada um dos gráficos, das representações das alturas de rapazes e raparigas, o local onde se situam um rapaz e uma rapariga, ambos com 20 anos de idade e 172 cm de altura.



2. Completa o texto seguinte, selecionando da tabela abaixo, os valores e/ou palavras adequados a cada espaço.

Um rapaz com 20 anos e 172 cm de altura encontra-se no percentil _____, o que significa que _____ % dos jovens, com 20 anos, têm no _____ 172 cm de altura.

Uma rapariga com 172 cm de altura e com 20 anos de idade, encontra-se no percentil _____, o que significa que _____ % dos jovens com 20 anos de idade têm 172 cm ou _____ de altura.

Opções de resposta:

5, 10, 25, 50, 75, 90 ou 95	máximo ou mínimo	mais ou menos
-----------------------------	------------------	---------------

3. No centro de saúde de um determinado concelho, registaram-se as alturas de 600 jovens com 15 anos, do sexo feminino. A partir dos dados do gráfico, qual é o número de jovens de 15 anos que é esperado encontrar com alturas entre 157 e 166 cm?
4. No âmbito da promoção de comportamentos saudáveis em crianças e adolescentes e com vista a educar e a estimular a população estudantil para uma melhor qualidade de vida, o professor de Educação Física registou os dados referentes a esta avaliação na plataforma FITescola, após aplicação de testes.

A estatura dos alunos é um entre muitos dados registados pelo professor na plataforma FITescola. As alturas dos alunos, da turma 1º A, estão apresentadas na tabela:

157	182	169	168	172	171	171	163	173	171	177
178	174	168	173	176	165	184	168	157	168	

- 4.1. Utilizando uma folha de cálculo obtém os 1.º e 3.º quartis e a mediana.
- 4.2. O percentil 40, é 168,8 cm, o que significa que 40% dos 21 alunos têm alturas inferiores ou iguais a 168,8 cm. Qual o número esperado de alunos desta turma que tem estatura inferior ou igual a 168,8 cm.
- 4.3. Determina, utilizando uma folha de cálculo, o percentil 60 e indica o significado do seu valor, no contexto da situação apresentada.



Tarefa 7

FITescola e as medidas de dispersão

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar e calcular as medidas de dispersão de um conjunto de dados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Medidas de localização.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

No início da aula o professor poderá resolver a questão 1., atendendo ao contexto de turma, para explorar estes conceitos e justificar a necessidade de os calcular e interpretar de modo a melhor caracterizar o conjunto de dados.

Os alunos devem resolver a tarefa em grupo.

O professor deve solicitar a participação dos alunos, apelando à discussão e sintetização das principais ideias.

A questão 1.7 constitui uma boa oportunidade para promover a comunicação matemática em sala de aula.

Poderão surgir dificuldades relativamente à compreensão dos conceitos e para ultrapassar esse constrangimento, o professor pode apresentar outros exemplos em contexto real para clarificar o objetivo e o interesse do estudo das medidas de dispersão.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 7

FITescola e as medidas de dispersão

1. A lista seguinte apresenta o registo feito na plataforma FITescola, pelo professor de educação física da turma 1.º A, sobre o número de flexões realizadas por alguns dos rapazes da turma:

15 5 23 11 30 17 32

- 1.1. Coloca os dados por ordem crescente.

- 1.2. Qual é a mediana, o 1.º e 3.º quartis.

Nota: Para calcular os quartis, medianas de cada uma das partes em que fica dividido o conjunto dos dados (ordenados) pela mediana, não se considera a mediana pertencente e essas partes. Outra metodologia possível, seria considerar a mediana pertencente às duas partes.

- 1.3. Qual é a amplitude da amostra?

- 1.4. Qual é a amplitude interquartil? Explica o significado deste valor, no contexto da situação.

- 1.5. Calcula a média do número de flexões.

- 1.6. Para tentar uma melhor interpretação dos dados, o professor de educação física pediu para cada um dos rapazes calcular a diferença entre o número de flexões por si realizado e a média do número de flexões (desvio em relação à média). Calcula essas diferenças e regista-as numa tabela.

- 1.7. Seguidamente, o professor decidiu calcular a soma dos desvios em relação à média obtidos na tabela construída na questão 1.6.. Qual foi o resultado obtido?

- 1.8. Calcula a variância amostral, com recurso à folha de cálculo (VAR.S).

- 1.9. Calcula a raiz quadrada da variância amostral (SQRT).

- 1.10. Calcula o desvio-padrão amostral (STDEV.S). Que relação existe entre o valor da raiz quadrada da variância amostral e o desvio padrão amostral?



1.11. Diz, justificando, se as afirmações que se seguem são verdadeiras ou falsas:

- I. “O desvio padrão pode ser um número negativo”.
- II. “Se numa distribuição os dados forem todos iguais então o desvio-padrão é igual a 1”.
- III. “Se o desvio padrão de um conjunto de dados é nulo, então não existe variabilidade.”

2. A lista seguinte apresenta o registo feito na plataforma FITescola, pelo professor de educação física da turma 1.º A, sobre o número de flexões realizadas por algumas raparigas da turma:

2 5 4 11 15 9 3

- 2.1. Coloca os dados por ordem crescente.
- 2.2. Qual é a mediana, o 1.º e 3.º quartis.
- 2.3. Qual é a amplitude da amostra?
- 2.4. Qual é a amplitude interquartil? Explica o significado deste valor, no contexto da situação.
- 2.5. Calcula a média do número de flexões.
- 2.6. Calcula o desvio-padrão amostral.
- 2.7. Sabendo que o **desvio-padrão** é tanto maior quanto maior for a variabilidade presente nos dados, relativamente à média, relaciona os valores dos desvios padrão dos dados referentes ao número de flexões realizadas pelos rapazes e pelas raparigas, com a dispersão/concentração relativamente às respetivas médias.



Tarefa 8

Idas ao ginásio

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar, calcular e comparar medidas de dispersão de um conjunto de dados a fim de compreender a necessidade do conhecimento das mesmas para conhecer melhor os dados e a sua variabilidade.

Conhecimentos prévios dos alunos: Medidas de localização.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica ou Geogebra.

Notas e sugestões:

No início da aula o professor distribui o enunciado da tarefa e organiza os alunos em pares. Deve solicitar aos alunos que recorram a uma tecnologia para auxiliar na resolução desta tarefa.

Se surgirem constrangimentos relacionados com o recurso à tecnologia, o professor deve esclarecer as dúvidas em pequeno ou em grande grupo.

No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma, comparando respostas e a partir dessa reflexão conjunta deve ser feita uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 8

Idas ao ginásio

1. O *Personal Trainer* (PT) de um ginásio decidiu premiar um de seus alunos com uma mensalidade gratuita.

Os requisitos para a seleção do vencedor são, em dez registos, ter:

- A maior mediana do número de abdominais;
- A maior média do número de abdominais;
- Em caso de empate, vencerá o aluno que apresente valores (número de abdominais) mais próximos da média.

Como estava indeciso entre dois de seus alunos, o PT decidiu fazer um registo do número máximo de abdominais que cada um dos alunos conseguia fazer, em 3 minutos, durante **dez** dias. Os resultados estão representados na tabela seguinte::

Aluno A:	60	55	57	45	68	63	26	70	21	35
Aluno B:	60	58	42	39	25	60	59	41	54	62

Qual será o aluno premiado com a mensalidade gratuita? Justifica a tua resposta.

2. Durante seis dias, o PT registou o número de idas ao ginásio de alguns dos seus alunos. Os gráficos seguintes apresentam os resultados obtidos dos 50 alunos que frequentam o espaço durante a manhã e dos 50 alunos que o utilizam na parte de tarde.



- 2.1. Calcula a média do número de idas ao ginásio no período da manhã e no período da tarde. O que podes concluir sobre as médias obtidas?
 - 2.2. Compara os dois gráficos. Qual dos gráficos mostra uma maior variabilidade dos dados, relativamente à média?
 - 2.3. Calcula o desvio-padrão nas duas situações.
 - 2.4. O que podes concluir sobre a variabilidade dos dados em relação à média, em cada uma das situações, a partir dos valores dos respetivos desvios-padrão?
3. A tabela seguinte apresenta os resultados do levantamento feito pelo Ginásio, durante um dia, sobre o tempo, em minutos, que cada utilizador se encontra a realizar prática desportiva na sala de *cardiofitness*:

Tempo (em minutos)	[0, 15[[15, 30[[30, 45[[45, 60[[60, 75[[75, 90[
Frequência absoluta	11	60	45	84	32	18

Calcula a média e o desvio padrão da distribuição deste conjunto de dados.
(Sugestão: utiliza o ponto médio do respetivo intervalo como representante de cada uma das classes em que os dados estão agrupados)



Tarefa 9A

Relações entre variáveis

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo estudar a associação existente entre duas variáveis quantitativas e compreender qual o grau e intensidade dessa associação.

Pretende-se, ainda, usar a reta de regressão linear para estimar os valores da variável resposta dados os valores da variável explanatória. Para além desta tarefa é ainda proposto um trabalho a pares com o mesmo objetivo.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função afim e média.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Em algumas turmas, devido às dificuldades dos alunos relativamente à compreensão dos conceitos, pode haver necessidade de se fazer uma leitura acompanhada/explicação da questão 1.

O professor pode começar por explorar com o grupo turma a importância da análise do diagrama de dispersão e do valor do coeficiente de correlação linear para compreender o grau e intensidade da associação linear entre duas variáveis. Deve explorar com os alunos situações em que seja possível fazer previsões a partir da reta de regressão linear.

Poderão surgir constrangimentos relacionados com o recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o professor deve esclarecer as dúvidas que possam surgir, ou em pequeno ou em grande grupo.

Numa aula seguinte, o professor pode propor ainda um trabalho a pares sobre a relação que poderá existir entre o peso e a altura de jogadores(as) de futebol, como é sugerido na tarefa 9B. Este trabalho poderá constituir uma boa oportunidade para consolidar estes conceitos e promover a comunicação matemática em sala de aula. No final, deve ser feita uma discussão com toda a turma, comparando respostas e a partir dessa reflexão conjunta deve ser feita uma síntese dos conceitos envolvidos.



Tarefa 9A

Relações entre variáveis

A importância da análise de dados bivariados

A análise bivariada de dados é um método estatístico importante uma vez que permite determinar se duas variáveis quantitativas estão associadas linearmente e qual a intensidade dessa associação. Esta informação é muito importante em diferentes áreas como, por exemplo, na medicina, na economia e no marketing.

Eis algumas das razões que justificam a relevância da análise de dados bivariados:

- Ajuda a identificar tendências e padrões;
- Ajuda a estimar valores;
- Ajuda a tomada informada de decisões.

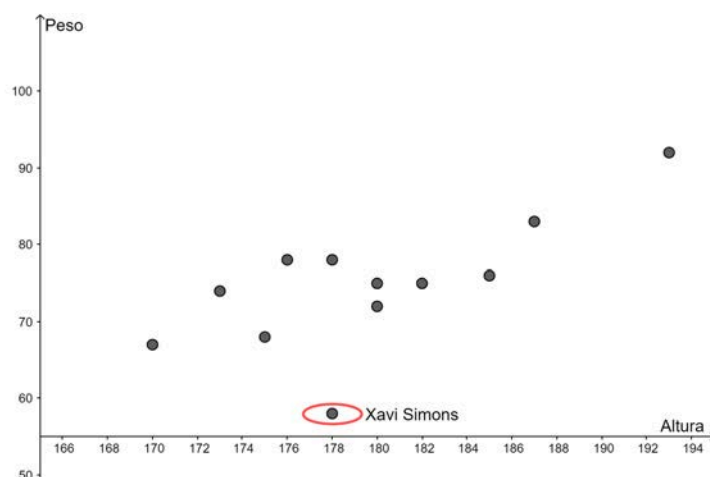
1. Existe alguma associação linear entre o peso e a altura de uma pessoa?

Vamos estudar essa possível relação entre o peso e a altura de alguns jogadores holandeses, registados na tabela seguinte. Repara que nesta população as variáveis em estudo são a altura e o peso (a variável peso representa a massa corporal).

Jogador	Altura (cm)	Peso (kg)	Jogador	Altura (cm)	Peso (kg)
Jasper Cillessen	187	83	Virgil van Dijk	193	92
Nathan Aké	180	75	Tyrell Malacia	170	67
Daley Blind	180	72	Georginio Wijnaldum	173	74
Davey Klaassen	178	78	Donyell Mailen	175	68
Memphis Depay	176	78	Steven Berghuis	182	75
Xavi Simons	178	58	Marten de Roon	185	76



- 1.1. Representa num diagrama de dispersão os pares de dados da tabela, ou seja, representa num sistema de eixos coordenados, os pontos de coordenadas (x, y) correspondentes à altura e ao peso de cada atleta. Que tendência se observa nos valores do peso à medida que os valores da altura aumentam?
- 1.2. Com o auxílio de uma calculadora gráfica ou folha de cálculo pode obter-se o coeficiente de correlação (linear) que permite quantificar o grau de associação ou correlação de duas variáveis e a equação da reta que melhor se aproxima de todos os pontos do diagrama (reta de regressão). Se no item anterior concluíste da existência de associação linear, obtém o coeficiente de correlação e a equação reduzida da reta de regressão linear. Apresenta o coeficiente de correlação, o declive e a ordenada na origem da reta de regressão, arredondados às milésimas.
- 1.3. Classifica o tipo e o grau da associação entre as variáveis x e y , a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação.
- 1.4. Utiliza a reta de regressão obtida para estimar o peso do jogador Matthijs de Ligt cuja altura é 189 cm e do jogador Guus Til cuja altura é 186 cm.
- 1.5. O peso real do Matthijs de Ligt é 89 kg e do Guus Til é 79 kg, compara estes valores com os valores estimados.
- 1.6. Quando analisamos os dados anteriores e o respetivo diagrama de dispersão verificamos que o ponto (178, 58) correspondente ao jogador Xavi Simons, se encontra fora do contexto dos restantes ou seja é um *outlier*.



Exclui agora os dados do jogador Xavi Simons e determina o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão com os restantes jogadores. Compara o resultado obtido para o coeficiente de correlação com o que obtiveste anteriormente.

2. Relação entre o peso de uma espécie e o peso do seu cérebro.

Um grupo de biólogos de várias reservas naturais estão a estudar se existe alguma relação entre o peso de uma dada espécie e o peso do respetivo cérebro. Na tabela estão registados o peso (em kg) de 8 espécies diferentes e o peso (em g) dos respetivos cérebros. (Nota: por peso entenda-se a massa).

Espécie	x - Peso (kg)	y - Peso do cérebro (g)
Humano	75	1400
Golfinho	119,96	1535
Babuíno	9,88	155,44
Leão	142,82	240,60
Hipopótamo	1351	732
Baleia azul	58059	6800
Girafa	529	380
Elefante Africano	6654	5712

Os biólogos concluíram que a relação entre as duas variáveis x e y da tabela anterior é, aproximadamente, linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação, escrita na forma

$$y = ax + b$$

- 2.1. Calcula o valor do coeficiente de correlação e classifica a associação entre as duas variáveis quanto ao tipo e à intensidade.
- 2.2. Estima o peso do cérebro do rinoceronte, sabendo que o seu peso médio é de 2 300 kg. Na tua resposta, apresenta os valores de a e de b com duas casas decimais.

Adaptado de um exame da Austrália

(Victorian Certificate of Education, FURTHER MATHEMATICS, Written examination 1 November 2009)



3. Relação entre o tempo de esperança de vida de uma espécie e o tempo gasto a dormir

Um grupo de biólogos de várias reservas naturais está a estudar se existe alguma relação entre o tempo médio de esperança de vida de uma espécie (em anos) e o tempo gasto a dormir (em horas/dia). Na tabela seguinte estão registados o tempo médio de esperança de vida (em anos) de oito espécies diferentes e o respetivo tempo gasto a dormir (em horas).

Espécie	x - tempo de esperança de vida (anos)	y - tempo gasto a dormir (horas/dia)
Vaca	30	4
Cabra	20	4
Babuíno	27	10
Porco da Índia	8	8
Cavalo	46	3
Ratazana	5	13
Macaco	29	10
Coelho	18	8

Os biólogos concluíram que a relação entre as duas variáveis x e y da tabela anterior é, aproximadamente linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação, escrita na forma

$$y = ax + b$$

- 3.1. Calcula o coeficiente de correlação e classifica a associação quanto ao tipo e à intensidade.
- 3.2. Podes estimar o tempo gasto a dormir do homem, sabendo que o seu tempo médio de esperança de vida é 79 anos? Porquê? Se tentasses fazer, que valor irias obter?

Adaptado de um exame da Austrália
(Victorian Certificate of Education, FURTHER MATHEMATICS, Written examination 1 November 2009)



4. Relação entre a temperatura mínima e o número de chamadas relativas a avarias de equipamento de aquecimento

Neste inverno, uma empresa que fornece equipamento de aquecimento a gás, registou durante dez dias a temperatura mínima durante a noite (em graus Celsius) e o número de chamadas recebidas relativamente a avarias do equipamento de aquecimento a gás. A informação encontra-se registada na seguinte tabela:

x - Temperatura mínima ($^{\circ}C$)	y - número de chamadas
-0,5	34
0,5	37
3	35
3,5	22
6	19
8	21
8	16
8,5	15
10	14
11	11

- 4.1. Representa os dados num diagrama de dispersão. Existe alguma associação entre as variáveis? Se existe, indica qual.
- 4.2. Determina as coordenadas do centro de gravidade do diagrama de dispersão e representa-o no diagrama de dispersão.
- 4.3. Indica o coeficiente de correlação (arredondados às centésimas) e classifica a associação quanto ao tipo e à intensidade.
- 4.4. Estima o número de chamadas recebidas quando a temperatura mínima durante a noite foi de $0^{\circ}C$. Na tua resposta, utiliza os valores de a e de b com três casas decimais.

Adaptado de um exame da Austrália
(Western Australian Certificate of Education Examination, 2015, MATHEMATICS 3A/3B Section Two:
Calculator-assumed)



Tarefa 9B

Peso e altura de jogadores(as) de futebol

Agora que já tens alguns instrumentos que te permitem verificar se existe algum tipo de associação entre variáveis, propomos-te pôr em prática esses instrumentos para os dois conjuntos de dados que apresentamos a seguir. Para cada conjunto de dados, percorre as seguintes etapas:

1. Deverás optar pelas jogadoras ou pelos jogadores de futebol das seleções que a seguir te apresentamos.
2. Recorrendo à calculadora gráfica (ou GeoGebra) constrói o diagrama de dispersão que relaciona a altura e o peso dos jogadores(as).
3. Verifica se existe algum tipo de associação linear entre as variáveis.
4. Se existir, determina o coeficiente de correlação, traça a reta de regressão e escreve a sua equação.
5. Consideras que existe algum “outlier” nesta distribuição? Em caso afirmativo, elimina-o e posteriormente verifica se o grau e o tipo de associação entre as variáveis se altera.

Jogadoras

Jogadora	País da seleção	Posição	Idade	Altura	Peso
Inês Pereira	Portugal	Guarda-Redes	24	170	64
Patrícia Morais	Portugal	Guarda-Redes	31	178	63
Joana Marchão	Portugal	Defesa	27	161	57
Carole Costa	Portugal	Defesa	33	171	61
Kika Nazareth	Portugal	Médio	20	168	67
Andreia Jacinto	Portugal	Médio	21	171	63
Jéssica Silva	Portugal	Avançada	28	170	54
Ana Borges	Port	Avançada	33	159	54
Enith Salón	Espanha	Guarda-Redes	22	167	62
Misa Rodríguez	Esp	Guarda-Redes	24	173	66
Ivana Andrés	Esp	Defesa	29	163	60



Rocío Gálvez	Esp	Defesa	26	174	68
Claudia Zornoza	Esp.	Médio	33	164	57
Irene Guerrero	Esp.	Médio	27	168	54
Jenni Hermoso	Esp.	Avançada	33	174	59
Salma Paralluelo	Esp.	Avançada	19	168	60

Jogadores

Jogador	País da seleção	Posição	Idade	Altura	Peso
Bruno Fernandes	Portugal	Médio	29	180	69
João Félix	Portugal	Avançado	23	181	73
Pepe	Portugal	Defesa	40	187	79
Cristiano Ronaldo	Portugal	Def	38	187	79
Diogo Costa	Portugal	Guarda- Redes	24	186	82
Rafael Leão	Portugal	Avançado	24	188	82
Gonçalo Ramos	Portugal	Avançado	22	185	80
Bernardo Silva	Portugal	Médio	29	173	65
David Raya	Espanha	Guarda-Redes	28	183	80
Lamile Yamal	Espanha	Avançado	16	180	66
Pablo Gavi	Espanha	Médio	19	173	66
Álvaro Morata	Espanha	Avançado	31	189	84
Pedri González	Espanha	Médio	20	174	66
Sergio Busquets	Espanha	Médio	35	189	76
Nico Williams	Espanha	Avançado	21	186	78
Rodri Hernández	Espanha	Médio	27	191	83
Alexander Isak	Suécia	Avançado	24	192	78
Viktor Gyökeres	Suécia	Avançado	25	187	90
Robin Olsen	Suécia	Guarda - Redes	33	198	89
Linus Wahlqvist	Suécia	Defesa	26	184	80
Albin Ekdal	Suécia	Médio	34	186	75
Jens Cajuste	Suécia	Médio	24	188	80
Anthony Elanga	Suécia	Avançado	21	178	70



Isak Hien	Suécia	Defesa	24	191	90
Jude Bellingham	Inglaterra	Médio	20	186	81
Jordan Pickford	Inglaterra	Guarda- Redes	29	185	77
Lewis Carl Dunk	Inglaterra	Defesa	31	192	88
James Maddison	Inglaterra	Médio	26	175	67
Mason Mount	Inglaterra	Médio	24	181	75
Phil Foden	Inglaterra	Avançado	23	171	63
Decan Rice	Inglaterra	Médio	24	188	83
Jack Grealish	Inglaterra	Avançado	28	180	77

