OP4 - PROGRAMAÇÃO LINEAR

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Programação Linear (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/

Data:

Lisboa, janeiro de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO OP4 - Programação Linear

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 Explorando Pontos e Retas	Retas Retas verticais e horizontais Coordenadas de pontos de interseção entre retas	• Estudar gráfica, numérica e analiticamente retas verticais, horizontais e determinar as coordenadas de eventuais pontos de interseção entre duas retas. • Utilizar sistemas de eixos coordenados para obter equações e condições que representam retas.	Trabalho individual ou a pares, com discussão final, item a item, em turma	• Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
3	Tarefa 2 Missão (Im)possível: Encontros no território das retas	Retas verticais, horizontais e oblíquas Coordenadas de pontos de interseção entre retas	• Estudar gráfica, numérica e analiticamente retas verticais, horizontais e oblíquas e determinar as coordenadas de eventuais pontos de interseção entre duas retas. • Reconhecer os efeitos da mudança do sinal no coeficiente do polinómio de grau 1 na representação das retas oblíquas. • Utilizar sistemas de eixos coordenados para obter equações e condições que representam retas.	Trabalho individual ou a pares, com discussão final, item a item, em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática(A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

3	Tarefa 3 Operação Domínio: pontos retas e planos em ação!	Retas verticais, horizontais e oblíquas Coordenadas de pontos de interseção entre retas Domínios planos	• Estudar gráfica, numérica e analiticamente retas verticais, horizontais e oblíquas e determinar as coordenadas de eventuais pontos de interseção entre duas retas. • Reconhecer os efeitos da mudança do sinal no coeficiente do polinômio de grau 1 na representação das retas oblíquas. • Utilizar sistemas de eixos coordenados para obter equações e condições que representam retas e domínios planos.	Trabalho a pares, com discussão final, em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
4	Tarefa 4 A Matemática que revolucionou a logística	Exemplos históricos Variáveis de decisão Restrições Função objetivo Resolução de problemas de Programação linear	• Conhecer os primórdios da programação linear através do testemunho de George Dantzig. • Identificar, num problema de programação linear, as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo. • Resolver numérica, graficamente e com recurso a tecnologia gráfica, problemas de programação linear.	Trabalho individual ou a pares, orientado passo a passo pelo professor	• Comunicação matemática • História da Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

10	Tarefa 5 Decisões, doçuras e descansos	Resolução de problemas de Programação linear	• Identificar, num problema de programação linear, as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo. • Resolver numérica, graficamente e com recurso a tecnologia gráfica, problemas de programação linear.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas, modelação e conexões • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

4	Tarefa 6 Restrições à solta	Resolução de problemas de Programação linear	• Identificar, num problema de programação linear, as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo. • Resolver numérica, graficamente e com recurso a tecnologia gráfica, problemas de programação linear. • Elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais de planeamento.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Recurso à tecnologia • Resolução de problemas, modelação e conexões • Avaliação para a aprendizagem • Práticas enriquecedoras	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade. (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

Tarefa 1

Explorando Pontos e Retas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo revisitar os conceitos: coordenadas de pontos e representação (algébrica e geométrica) de equações de retas horizontais e verticais, num referencial cartesiano.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano. Equações de retas horizontais e verticais, num referencial cartesiano do plano.

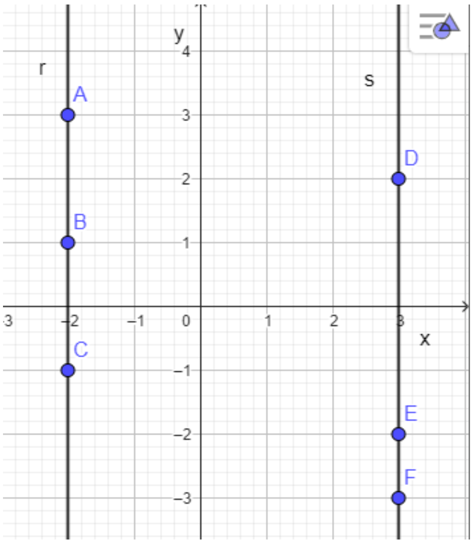
Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis.

Notas e sugestões:
A resolução de problemas de programação linear necessita de conceitos geométricos e algébricos que constam no módulo P3 - Geometria Analítica. Assim, no caso deste módulo ser abordado antes do módulo P3, esta tarefa terá que ser necessariamente trabalhada. Propõe-se que o professor acompanhe as resoluções individuais, de forma a identificar as dificuldades específicas de cada aluno e a existência dos conhecimentos prévios necessários. Além disso, sugere-se que as resoluções sejam apresentadas e discutidas item a item, promovendo uma análise detalhada e colaborativa, que favoreça o esclarecimento de dúvidas e o enriquecimento da aprendizagem.

Tarefa 1

Explorando Pontos e Retas

1. Na figura ao lado, num referencial cartesiano, estão representadas as retas r e s.



1.1. Considera a reta r.

1.1.1. Escreve as coordenadas dos pontos A, B, C e do ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas.

1.1.2. Considera as coordenadas dos pontos anteriores e identifica o que têm em comum.

1.1.3. O ponto de coordenadas $(50, \; -2)$ pertence à reta r? E o ponto $(-2, \; 50)$? Justifica a tua resposta.

1.1.4. Escreve uma equação da reta r.

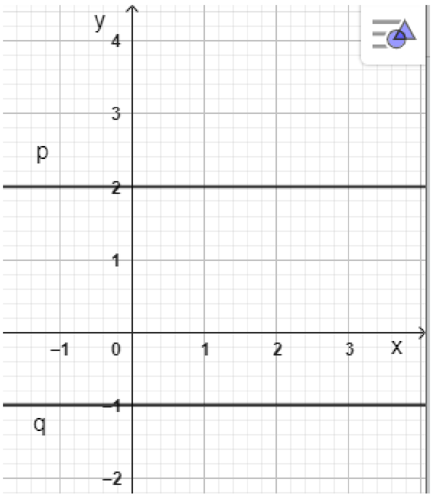
1.2. Considera agora a reta s.

1.2.1. Escreve as coordenadas dos pontos D, E, F e do ponto de interseção da reta s com o eixo das abcissas.

1.2.2. Diz se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Os pontos D, E e F têm todos ordenada igual a 3."

1.2.3. Escreve uma equação da reta s.

2. Na figura ao lado, num referencial cartesiano, estão representadas as retas p e q.



2.1. Escreve as coordenadas de três pontos pertencentes à reta p e verifica o que esses pontos têm em comum.

2.2. Escreve uma equação da reta p.

2.3. Diz, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Todos os pontos da reta q têm abcissa igual a -1."

2.4. Escreve uma equação da reta q.

3. Completa as seguintes afirmações, de forma a obteres proposições verdadeiras:
   - Uma reta vertical que passe num ponto P, de coordenadas $(a,\ b)$, tem uma equação da forma: ______________
   - Uma reta horizontal que passe num ponto P, de coordenadas $(a,\ b)$, tem uma equação da forma: ______________

Tarefa 2

Missão (Im)possível: Encontros no território das retas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Os objetivos da tarefa são estudar, num referencial cartesiano, graficamente, numericamente e analiticamente retas verticais, horizontais e oblíquas, e determinar as coordenadas de pontos de interseção entre duas retas, caso existam. Pela análise das equações das retas, os alunos deverão antecipar a existência ou não de pontos comuns entre elas e serem capazes de reconhecer os efeitos da mudança do sinal no coeficiente do polinómio de grau 1 na representação das retas oblíquas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano num referencial cartesiano. Equações de retas horizontais, verticais e oblíquas, num referencial cartesiano do plano. Resolução algébrica e gráfica de sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. GeoGebra.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a tarefa seja realizada individualmente (para uma melhor identificação das dificuldades) ou em pares.
Recomenda-se o uso do GeoGebra para verificação de resultados, e/ou para a resolução dos itens, de modo a ultrapassar eventuais dificuldades, por parte dos alunos, na compreensão e manipulação algébrica.
O item 6. pode ser resolvido analiticamente ou graficamente, consoante as características da turma e os conhecimentos prévios. As soluções encontradas podem ser confirmadas com a utilização de um programa de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra).

Tarefa 2

Missão (Im)possível: Encontros no território das retas

1. Escreve as coordenadas do ponto de interseção, sempre que exista, entre os seguintes pares de retas:

   1.1. $y = -1$ e $x = 6$;

   1.2. $y = x$ e $y = -3$;

   1.3. $y = 2$ e $y = -4$;

   1.4. $y = -x$ e $y = 5$;

   1.5. $y = x + 1$ e $y = x - 5$;

   1.6. $2y - 4x = 8$ e $y - 2x + 4 = 0$.

   Sugestão: Podes recorrer ao GeoGebra para verificar as soluções encontradas.

> **Posição relativa de duas retas no plano:**
> Duas retas dizem-se **concorrentes** quando têm um ponto em comum.
> Se as retas não são concorrentes, dizem-se **paralelas**.
> Se não tiverem nenhum ponto em comum, denominam-se por retas estritamente paralelas. Caso todos os pontos sejam comuns, dizem-se **coincidentes**.

> **Recorda:**
> Se duas retas têm o **mesmo declive** dizem-se **paralelas**.

2. Considera as retas r e s de equações, respetivamente $y = x$ e $y = x + 3$.

   2.1. Qual é o declive da reta r e da reta s?

   2.2. Qual é a posição relativa das retas r e s? Justifica a tua resposta.

   2.3. Escreve uma equação de uma reta concorrente à reta r e cuja ordenada na origem seja igual a -2.

3. Considera a reta t de equação $2y - 4x = 6$.

   3.1. Escreve a equação da reta t na forma $y = mx + b$.

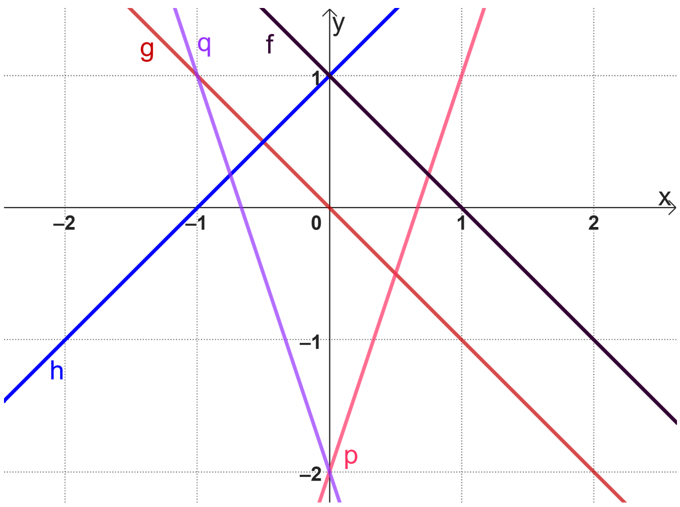
   3.2. Qual é o declive da reta t?

   3.3. Escreve a equação reduzida da reta paralela à reta t e que passa no ponto de coordenadas $(0, -2)$.

   3.4. Diz, justificando, qual é a posição relativa da reta t e da reta de equação $y = -2x$.

4. Associa a designação de cada uma das retas (f, g, h, p e q), representadas no referencial cartesiano da figura seguinte, à respetiva equação.

Nota: É de referir que apenas cinco das equações têm correspondência.



	$y =- x$
	$y =- 3x - 2$
	$y =- x + 1$
	$y =- 3x$
	$y = x + 1$
	$y = 3x - 2$
	$y = x$
	$y = 3x + 2$

5. Considera as retas definidas pelas respetivas equações: $r: y = 4$; $s: x = 2$ e $t: y = 2x - 1$.

5.1. Representa num referencial cartesiano xOy as retas: r, s e t.

5.2. Escreve as coordenadas do ponto de interseção das retas:

5.2.1. r e s;

5.2.2. r e t;

5.2.3. s e t.

Recorda:
Se duas retas r: $y = m_r x + b_r$ e t: $y = m_t x + b_t$ não são paralelas, ou seja, não têm o mesmo declive ($m_r \neq m_t$) então, intersetam-se num único ponto.
O ponto, de interseção entre as retas r e t será $P(x, y)$, cujas coordenadas são a solução do sistema das equações que representam essas retas (interseção das duas retas):

$$\begin{cases} y = m_r x + b_r \\ y = m_t x + b_t \end{cases}$$

6. Para cada um dos pares de retas seguintes, justifica se existe um ponto de interseção entre as retas r e s. Em caso afirmativo, determina as suas coordenadas.

   Com recurso ao GeoGebra verifica as soluções encontradas.

   6.1. $r: y = 3$ e $s: y = 6x + 1$;

   6.2. $r: y = -2x - 3$ e $s: 2y = x + 2$;

   6.3. $r: 6x = -3y + 12$ e $s: x + y = 2$.

Tarefa 3

Operação Domínio: pontos, retas e planos em ação!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Os objetivos da tarefa são estudar, num referencial cartesiano, graficamente, numericamente e analiticamente retas verticais, horizontais e oblíquas, determinar as coordenadas de pontos de interseção entre duas retas, caso existam, e definir domínios planos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano num referencial cartesiano. Equações de retas horizontais, verticais e oblíquas, num referencial do plano.

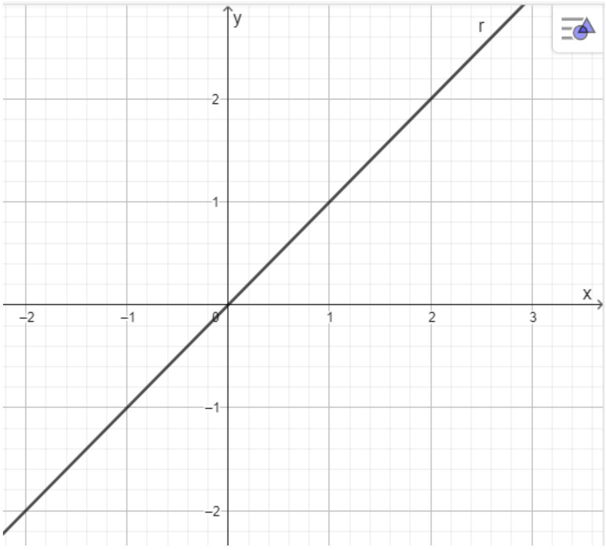
Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. GeoGebra.

Notas e sugestões:
O professor deve organizar os alunos em pares. A resolução da tarefa deve ser acompanhada pelo professor, e propõe-se a apresentação das resoluções e respetiva discussão, item a item.
Recomenda-se a utilização do GeoGebra como uma ferramenta de apoio, tanto para a verificação de resultados, quanto para a resolução dos diferentes itens propostos, especialmente, como estratégia para ajudar os alunos a superar possíveis dificuldades na compreensão e manipulação algébrica. Este software é um recurso, particularmente, eficaz para alunos que revelam dificuldades na manipulação algébrica, nomeadamente na definição de domínios planos, assim como na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Tarefa 3

Operação Domínio: pontos, retas e planos em ação!

1. Considera a reta r de equação $y = x$, representada no referencial cartesiano da figura seguinte.



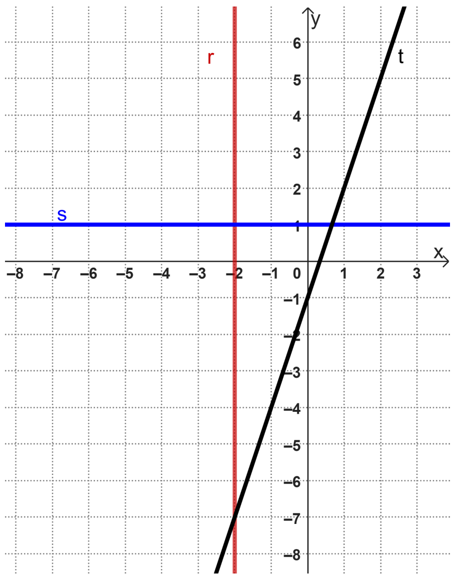
1.1. Escreve as coordenadas de três pontos, A, B e C, que pertençam à reta r e representa-os no referencial da figura.

1.2. Escreve as coordenadas de três pontos, D, E e F, que verifiquem a seguinte condição: $y < x$. Representa-os no referencial da figura.

1.3. Justifica se o ponto de coordenadas $(-1, 1)$ satisfaz a condição $y < x$.

1.4. Representa, no referencial da figura, o conjunto de todos os pontos do plano que verificam a condição $y \leq x$.

2. No referencial cartesiano da figura ao lado estão representadas as retas r, s e t definidas, respetivamente, por $x = -2$, $y = 1$ e $y = 3x - 1$.

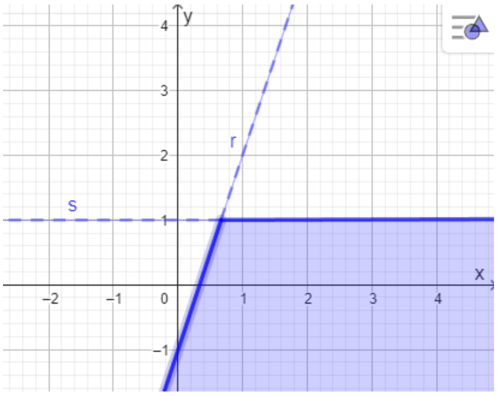


2.1. Escreve as coordenadas de três pontos que pertençam ao semiplano $x \leq -2$.

2.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção das retas r e t .

2.3. Representa (pinta) na figura a seguinte condição $x \leq -2 \quad \wedge \quad y \geq 1$.

2.4. Escreve uma condição que represente a parte sombreada da figura seguinte, sabendo que a reta r tem de equação $y = 3x - 1$ e que a reta s é paralela ao eixo Ox, e passa no ponto de coordenadas $(0,\ 1)$.



2.5. Representa, num referencial cartesiano xOy, a região do plano definida pela condição $y \geq 3x - 1 \wedge y \geq 1$.

3. Representa, num referencial cartesiano xOy, o conjunto-solução do seguinte sistema de inequações lineares: $x \leq 2 \wedge y \geq 1 \wedge y \leq 2x - 1$.

Nota: $x \leq 2 \wedge y \geq 1 \wedge y \leq 2x - 1$ é equivalente a $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 1 \\ y \leq 2x - 1 \end{cases}$.

Tarefa 4

A Matemática que revolucionou a logística

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo principal apresentar, de forma estruturada, as etapas essenciais para a resolução de um problema de programação linear, utilizando um exemplo concreto. Através deste exemplo, pretende-se fornecer aos alunos uma referência clara e prática que os auxilie na compreensão do processo e que sirva como modelo orientador para a resolução de problemas semelhantes em atividades futuras. Esta abordagem permitirá consolidar os conhecimentos e desenvolver a autonomia na aplicação das técnicas de programação linear em diferentes contextos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano num referencial cartesiano. Equações de retas, horizontais, verticais e oblíquas, num referencial do plano. Domínios planos.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. GeoGebra.

Notas e sugestões:
Sugere-se que o professor realize uma análise detalhada da resolução do primeiro problema, envolvendo ativamente a turma no processo. Esta tarefa poderá ser distribuída aos alunos com os quadros parcialmente preenchidos, sendo completados com a sua participação numa discussão em grande grupo. Esta abordagem deve privilegiar o esclarecimento e o reforço das etapas essenciais, promovendo a organização e a utilização adequada das informações disponíveis. Além disso, é importante que o professor destaque como a estrutura utilizada na resolução pode ser adaptada a situações futuras.
O professor deverá incentivar os alunos a refletir sobre a validade e coerência das soluções obtidas considerando o contexto do problema, e incentivar os alunos a transferir conhecimentos e estratégias adquiridos para a resolução de novos problemas, de forma autónoma e fundamentada.

O recurso do GeoGebra é altamente recomendado para auxiliar na determinação e interpretação dos pontos de interseção, permitindo uma abordagem mais visual e intuitiva que facilita a compreensão do problema e a validação das soluções obtidas.
O professor deve ter especial cuidado, ao utilizar o GeoGebra, na explicação da escrita de conjunções e na construção de seletores associados à função objetivo. Deve também dar enfoque às interseções da fronteira do polígono com a função objetivo, em particular nos seus vértices, e configurá-los de modo que sejam apresentadas as suas coordenadas.

Tarefa 4

A Matemática que revolucionou a logística

A programação linear é um dos ramos mais recentes da matemática. O seu início aconteceu em 1947, quando George Dantzig (1914-2005) criou o "Método Simplex", que resolve com precisão os problemas de programação linear. Este método era principalmente usado para resolver questões logísticas da Força Aérea dos Estados Unidos da América (E.U.A.) durante a Segunda Guerra Mundial. Após a Segunda Guerra Mundial, com o desenvolvimento da tecnologia e dos computadores, a programação linear evoluiu muito, tornando-se imprescindível para resolver problemas em diversas áreas, como, a indústria, a saúde, economia, etc.

Problema

Um navio de carga tem de transportar, num porão, dois tipos de materiais: espuma plástica e cobre.
O lucro obtido pelo transporte de cada tonelada de espuma é de 60 euros e por cada tonelada de cobre é de 35 euros.
O porão tem 1500 m^3 de volume e pode carregar no máximo 600 toneladas.
Sabe-se que cada tonelada de espuma ocupa 4m^3 e cada tonelada de cobre ocupa 2 m^3.
Atendendo a estas restrições/condicionantes, quantas toneladas de cada material deve o navio transportar para que a viagem dê o maior lucro possível à empresa?

O transporte de espuma dá mais lucro do que o transporte de cobre, logo, parece que será mais lucrativo levar só espuma, mas, por outro lado, ela ocupa mais espaço. Por isso, transportar só espuma poderá não ser a melhor solução.

Na resolução de um problema de programação linear devemos considerar as seguintes etapas:

- **1.ª Etapa:** Identificar as incógnitas em estudo

x - número de toneladas de espuma plástica
y - número de toneladas de cobre

- **2.ª Etapa:** Organizar a informação e definir a função objetivo

  Identificadas as incógnitas, poderá organizar-se toda a informação recorrendo, por exemplo, a uma tabela.

	espuma plástica (número de toneladas) x	cobre (número de toneladas) y	Total
toneladas transportadas	x	y	$x + y$
volume ocupado no porão	$4x$	$2y$	$4x + 2y$
lucro do transporte	$60x$	$35y$	$F(x, y) = 60x + 35y$

O **objetivo** da empresa é obter o lucro máximo. O lucro depende das incógnitas definidas anteriormente, e por isso dá-se o nome de **função objetivo.**

Escreve a função objetivo $F(x,\ y)$.

Função objetivo: $F(x, y) = 60x + 35y$

- **3.ª Etapa:** Definir as restrições

  As incógnitas consideradas têm restrições/condições que devem ser respeitadas.

O número de toneladas transportadas, de espuma plástica e de cobre, tem de ser igual ou superior a zero (será zero quando não é transportada espuma plástica e/ou cobre): $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

O número de toneladas transportadas será inferior ou igual a 600 (limite máximo do porão do navio), logo: $x + y \leq 600$.

De igual forma, o volume total da carga no porão não pode ultrapassar os 1500m^3, logo, $4x + 2y \leq 1500$.

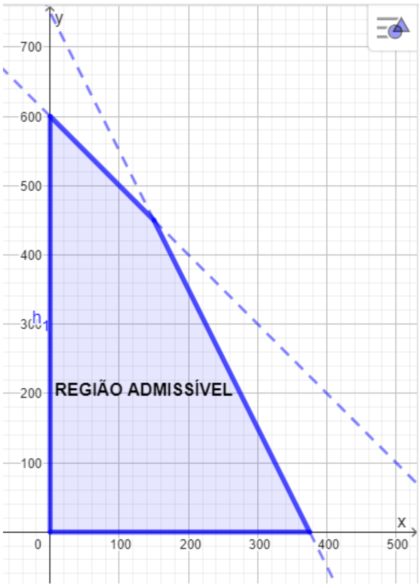
Ou seja: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 600 \\ 4x + 2y \leq 1500 \end{cases}$

- **4.ª Etapa:** Representar geometricamente as restrições

  Os pontos do plano cartesiano que verificam todas as restrições do problema designam-se por pontos admissíveis. O conjunto de todos os pontos admissíveis representa a região admissível (incluindo os pontos que formam a fronteira, neste caso).

  Sugestão: utiliza o Geogebra (ou uma calculadora gráfica) e representa graficamente as condições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 600 \\ 4x + 2y \leq 1500 \end{cases}$$



- **5.ª Etapa:** Determinar a solução ótima

  O valor do lucro máximo obter-se-á (sempre) para valores de x e y que se encontrem na região admissível.

  Seja k o lucro obtido nesta situação.

  Considera a função objetivo $F(x, y) = k$. Pretende-se determinar k de modo que o lucro seja máximo.

Teorema Fundamental da Programação Linear

Se a região admissível é um polígono, a função objetivo tem **máximo e mínimo** nessa região, e cada um destes valores **ocorre, pelo menos, num dos vértices da região admissível.**

Utilizando o método gráfico

Representa-se graficamente:

- a reta de nível zero (reta que passa na origem do referencial e que corresponde ao lucro zero);
- determina-se a reta paralela a esta, com a maior ordenada na origem, que intersete a região admissível;
- determinam-se as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção da reta (paralela de maior ordenada na origem) e da região admissível;
- calcula-se o valor de k, da função objetivo, substituindo os valores de x e de y pelos respetivos valores das coordenadas do(s) ponto(s), que verificam todas as restrições.

Determina o valor de k, usando esta apliqueta do GeoGebra: [OP4_T4]

Utilizando o método analítico

Temos de calcular o valor da função objetivo nos vértices da região admissível e procurar a solução ótima. Para determinar os valores das coordenadas destes vértices, determinam-se os pontos de interseção das retas que delimitam a região admissível.

x	y	$F(x,y) = 60x + 35y$
0	0	$60\ x\ 0 + 35\ x\ 0 = 0$
0	600	$60\ x\ 0 + 35\ x\ 600 = 21\ 000$
375	0	$60\ x\ 375 + 35\ x\ 0 = 22\ 500$
150	450	$60\ x\ 150 + 35\ x\ 450 = 24\ 75$

O lucro máximo (k) obtido é: $k = 24\ 750$ (€ de lucro)
pelo transporte de
$x = 150$ (toneladas de espuma plástica) e $y = 450$ (toneladas de cobre)

Sistematizando, podemos seguir as seguintes etapas:

1.ª Etapa: Identificar as incógnitas em estudo;
2.ª Etapa: Organizar a informação e definir a função objetivo;
3.ª Etapa: Definir as restrições;
4.ª Etapa: Representar geometricamente as restrições;
5.ª Etapa: Determinar a solução ótima.

Tarefa 5

Decisões, doçuras e descansos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivos, desenvolver a capacidade de resolver problemas reais usando Programação Linear, estimular o raciocínio lógico e a competência de modelação matemática e promover a utilização de ferramentas tecnológicas (como por exemplo, o GeoGebra).

Conhecimentos prévios dos alunos: Compreender a importância das etapas da resolução de problemas.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis.

Notas e sugestões:

Sugere-se a utilização do GeoGebra para resolução dos problemas, uma vez que é uma ferramenta facilitadora para os alunos com dificuldades em dominar conceitos geométricos/algébricos. Mesmo utilizando esta ferramenta, reforça-se a necessidade da clarificação e interpretação, do processo de resolução, de forma a evitar a mecanização da mesma.

No item 1.6., sugere-se que sejam dadas indicações no sentido de todos os alunos designarem os pontos com as mesmas letras (facilitará a discussão conjunta na turma).

No item 5, realça-se o facto de existirem cinco combinações possíveis (se x representar o número de bolos de cenoura e y o número de bolos de chocolate, ter-se-ão as soluções: $(4, 12)$; $(5, 10)$; $(6, 8)$; $(7, 6)$ e $(8, 4)$. Propõe-se a chamada de atenção para o Teorema Fundamental da Programação Linear que assegura a existência de máximo e de mínimo, da função objetivo, pelo menos num dos vértices da região admissível (quando esta for um polígono). Estes valores (máximo ou mínimo) poderão ser encontrados noutros pontos da região admissível diferentes dos vértices do polígono.

Tarefa 5

Decisões, doçuras e descansos

1. Os alunos de uma Escola Profissional Agrícola decidiram vender, num mercado solidário, cestos de frutas frescas e compotas artesanais .

   Os lucros por unidade de cada produto vendido são os seguintes:

   - Compota: 4€ por frasco.
   - Cesto de frutas: 10€ por cesto.

   A escola tem os seguintes recursos disponíveis:

   - Frutas: 140 kg.
   - Por cada frasco de compota gasta-se 1 kg de fruta.
   - Em cada cesto colocam-se 4 kg de fruta.
   - Frascos e cestos: a escola apenas pode disponibilizar 50 recipientes no total (entre frascos e cestos).

   O objetivo é determinar quantos frascos de compota (x) e cestos de frutas (y) devem ser produzidos para maximizar o lucro, respeitando os recursos disponíveis.

   1.1. Define as incógnitas em estudo.

   1.2. Organiza os dados numa tabela.

   1.3. Escreve as restrições do problema.

   1.4. Escreve a função objetivo a maximizar.

   1.5. Usa o GeoGebra para desenhar, num referencial, a região admissível.

   1.6. Escreve as coordenadas de cada um dos vértices da região admissível.

   1.7. Determina quantos frascos de compota e cestos de frutas devem ser produzidos para maximizar o lucro, respeitando os recursos disponíveis.

   Sugestão: Se recorreres ao método gráfico usando o GeoGebra, deverás seguir as seguintes etapas:

   - cria um seletor, no GeoGebra, que vai representar o valor do lucro (discute com os teus colegas entre que valores deverá variar o seletor);
   - faz corresponder o seletor ao valor da função objetivo (a função objetivo deverá ter a mesma designação do seletor);
   - faz variar o seletor, de forma a obteres o valor máximo para o lucro dentro da região admissível;
   - escreve as coordenadas do ponto da região admissível que corresponde ao valor do lucro máximo.

2. Para um determinado evento, uma empresa espera receber pelo menos 500 pessoas. Para assegurar este serviço, a empresa contratou um restaurante.

O restaurante apresentou dois tipos de menu:

- Menu premium: Custa 1000€, e serve 50 pessoas, por lote;
- Menu normal: Custa 450€, e serve 30 pessoas, por lote.

O restaurante, devido à capacidade da cozinha, pode preparar no máximo 7 lotes de menu premium e 15 lotes de menu normal.

Por restrições de logística e espaço, o restaurante não pode produzir mais do que 14 lotes de menus, no total.

Designa por x o número de lotes do Menu premium e por y o número de lotes de Menu normal.

O objetivo da empresa é gastar o mínimo possível no evento.

2.1. Representa graficamente a região admissível. Começa por identificar as incógnitas e escrever as restrições do problema. Para desenhar a região admissível, podes usar o GeoGebra).

2.2. Escreve a função objetivo.

2.3. Determina o valor mínimo que a empresa precisa despender no evento.

2.4. Quantos menus de cada tipo deverão ser elaborados, de forma a minimizar os custos da empresa com o referido evento?

3. Os alunos de uma turma de um curso profissional decidiram angariar fundos para um passeio convívio que pretendem organizar no final do ano letivo. Conseguiram patrocínio de duas empresas que ofereceram 200 porta-chaves e 500 canetas com os quais tencionam fazer dois tipos de lotes para vender.

Lote tipo A: um porta-chaves e uma caneta.

Lote tipo B: um porta-chaves e três canetas.

Os lotes do tipo A serão vendidos a 3€ e os do tipo B a 5€.

3.1. Determina o número de lotes do tipo A e o número de lotes do tipo B que os alunos devem fazer para que o lucro de vendas seja máximo.

3.2. Entretanto, receberam de uma outra empresa a oferta de 450 marcadores de livros. Decidiram incluí-los, também, nos dois tipos de lotes, e assim aumentar o seu preço:

Lote tipo A: um porta-chaves , uma caneta e dois marcadores de livros;

Lote tipo B: um porta-chaves ,três canetas e três marcadores de livros;

Um lote do tipo A daria um lucro de 5€ e um lote do tipo B um lucro de 7€.

Determina o número de lotes do tipo A e o número de lotes do tipo B que os alunos devem fazer para que o lucro de vendas seja máximo.

Na tua resposta deves percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas:
- identificar as incógnitas em estudo;
- escrever a função objetivo;
- escrever as restrições do problema;
- representar graficamente a região admissível (podes usar o GeoGebra);
- calcular o número de lotes do tipo A e o número de lotes do tipo B que os alunos devem fazer para que o lucro de vendas seja máximo (não esquecer de apresentar o valor do lucro).

4. O Bruno está a planear alguns dias de férias, nas cidades de Lisboa e Porto.

Ele decidiu que:

- queria passar, pelo menos, um dia em cada cidade;
- gostaria de gozar, pelo menos, seis dias de férias (divididos pelas duas cidades);
- não queria passar mais de 4 dias em nenhuma das cidades;
- desejava ficar no Porto tantos dias ou mais do que em Lisboa;

Sabe, ainda, que o custo do alojamento no Porto é de 25 euros e em Lisboa é de 30 euros, por dia.

4.1. Determina o número máximo de dias, que o Bruno poderá passar em cada uma das cidades e qual é o valor correspondente que será gasto no alojamento.

Na tua resposta deves percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas:
- identificar as incógnitas em estudo;
- escrever a função objetivo;
- escrever as restrições do problema;
- representar graficamente a região admissível (podes usar o GeoGebra);
- calcular o número máximo de dias de férias em Lisboa e no Porto.

4.2. Sabendo que para a despesa de alojamento, o Bruno, dispõe de apenas 160 euros, quantos dias poderá passar em cada uma das cidades? Justifica a tua resposta.

5. Uma turma de alunos de um curso profissional decidiu angariar dinheiro para o Canil/Gatil Municipal. A realização de uma campanha, permitiu recolher ingredientes suficientes para fazer dois tipos de bolos. A escola permitiu a utilização dos fornos da cantina, de forma gratuita. Os alunos optaram por cozinhar e vender dois tipos de bolos: bolo de cenoura e bolo de chocolate. O objetivo é maximizar o valor das vendas.

Foram decididos os seguintes preços e apurados os seguintes valores:

Preço de venda (por unidade):

- Bolo de cenoura: 10€
- Bolo de chocolate: 5€

Recursos disponíveis:

- A turma tem o forno disponível por 10 horas.
- Por cada bolo de cenoura o forno será utilizado por 1 hora.
- Por cada bolo de chocolate o forno será utilizado por 0,5 hora.

Para evitar desperdício, a turma não fará mais do que 8 bolos de cenoura e 12 bolos de chocolate.

Determina o lucro máximo e escreve todas as combinações de bolos (número de bolos de cenoura e número de bolos de chocolate) que permitem que o lucro seja máximo.

Na tua resposta deves percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas: • identificar as incógnitas em estudo; • escrever a função objetivo; • escrever as restrições do problema; • representar graficamente a região admissível (podes usar o GeoGebra); • calcular o lucro máximo angariado; • escrever todas as combinações possíveis de bolos que permitem que o lucro seja máximo.

Tarefa 6

Restrições à solta

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa pretende promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas reais usando programação linear, estimular o espírito crítico e a competência de modelação matemática e incentivar a utilização de ferramentas tecnológicas (como o GeoGebra). Esta tarefa tem como objetivo, ainda, promover a compreensão, interpretação e o desenvolvimento da comunicação matemática. Pretende-se que o aluno seja criativo e que formule problemas de programação linear em contextos reais.

Conhecimentos prévios dos alunos: Restrições de um problema, região admissível, função objetivo e compreender a importância das etapas da resolução de problemas de programação linear.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis.

Notas para professor:
No item 1., sugere-se que o professor organize pequenos grupos de trabalho e que cada grupo crie um enunciado para um dos três conjuntos de restrições apresentadas. Após a conclusão do trabalho por parte dos grupos, deve proceder-se à apresentação a toda a turma dos diferentes enunciados .
No item 2., o professor deve orientar os alunos, caso identifique dificuldades na obtenção da função objetivo, de forma a que sejam capazes de resolver o problema.

Tarefa 6

Restrições à solta

1. Considera os sistemas I, II e III que representam restrições de três problemas de programação linear.

I

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 28 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 5x + 15y \geq 70 \\ 48x + 8y \geq 128 \\ 8 \geq x \geq 0 \\ 10 \geq y \geq 0 \end{cases}$$

III

$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 3y \leq 30 \\ x \geq 2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

1.1. Para cada sistema de restrições (I, II e III), faz uma representação gráfica da região admissível (usa o GeoGebra e reproduz um esboço).

1.2. Para cada sistema de restrições, cria um enunciado de um problema de programação linear, identifica os valores das variáveis para os quais seja máxima ou mínima a função objetivo e resolve o problema.
Na tua resposta, para além do enunciado de um problema, deves:

- identificar as incógnitas em estudo;
- escrever a função objetivo;
- resolver o problema;
- escrever o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema;
- interpretar o seu significado no contexto do problema.

2. A Beatriz resolveu corretamente um problema de programação linear sobre mobiliário português do século XVIII e elaborou um relatório do qual constavam o enunciado e a resolução detalhada do mesmo.
Entretanto, devido a um problema informático, perdeu parte do enunciado e parte da resolução.
Do enunciado, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte:
«Uma empresa de mobiliário produz, artesanalmente, cadeiras de estilo português do século XVIII, estilo D. José e estilo D. Maria I, estando assegurada a venda de todas as cadeiras que produza.
Na produção destas cadeiras, estão envolvidas três secções da empresa: a secção de marcenaria, a secção de revestimento e a secção de acabamento.

Para o efeito, a secção de marcenaria dispõe de 720 horas mensais, a secção de revestimento dispõe de 320 horas mensais e a secção de acabamento dispõe de 440 horas mensais.

A empresa obtém 300 euros de lucro com a venda de cada cadeira estilo D. José.»

Quanto à resolução, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte:

«*Designo por* x *o número de cadeiras estilo D. José produzidas, mensalmente, pela empresa.*

A limitação das horas mensais na secção de marcenaria traduz-se pela condição $60x + 40y \leq 720$ *.*

A limitação das horas mensais na secção de revestimento traduz-se pela condição $20x + 20y \leq 320$ *.*

A limitação das horas mensais na secção de acabamento traduz-se pela condição $40x + 20y \leq 440$ *.* »

A Beatriz sabe que a função objetivo é o lucro obtido pela empresa com a venda das cadeiras dos dois estilos e que o lucro máximo, 3600 euros, se obtém no ponto de coordenadas $(8, 6)$.

Ajuda a Beatriz a reescrever o relatório do qual constavam o enunciado e a resolução detalhada do mesmo. Em particular, não te esqueças de,

- na resolução, identificar o significado da incógnita y; representar graficamente a região admissível (podes usar o GeoGebra); escrever a função objetivo;
- no enunciado, referir o número de horas utilizadas em cada uma das secções da empresa para a produção de uma cadeira de cada um dos estilos, e escrever o lucro obtido na venda de cada cadeira estilo D. Maria I.

Adaptado de Exame de Matemática B, 2.ª fase, 2014