

TRIGONOMETRIA

Matemática A

11.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025



Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Trigonometria (Matemática A 11.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em <https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/>

Data:

Lisboa, janeiro de 2025



Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação

de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:

Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - TRIGONOMETRIA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
8	Tarefa 1 Resolução de triângulos	Trigonometria Resolução de problemas que envolvam triângulos	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do EB, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D)
4	Tarefa 2 Construção de uma nova unidade de amplitude de ângulo	Trigonometria Resolução de problemas que envolvam triângulos	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a unidade de medida radiano. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • História da matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
2	Tarefa 3 Às voltas na praça Ângulo e arco generalizado	Trigonometria Ângulo e arco generalizados	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar e aplicar, na resolução de problemas, as noções de ângulo e arco orientados e de ângulo e arco generalizados e a respetiva amplitude. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)

5	Tarefa 4 Círculo trigonométrico	Trigonometria Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar e interpretar o círculo trigonométrico. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
3	Tarefa 5 Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$. Redução ao primeiro quadrante	Trigonometria Redução ao primeiro quadrante	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar o círculo trigonométrico, na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Raciocínio e lógica Matemático 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
5	Tarefa 6 Funções trigonométricas como funções reais de variável real	Trigonometria Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D)
4	Tarefa 7 Mudar o período	Trigonometria Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de Problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Práticas enriquecedoras e criatividade 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

2	<p>Tarefa 8 Às voltas no London Eye</p>	<p>Trigonometria Fenómenos periódicos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos. ● Identificar fenómenos periódicos e usar conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo de fenómenos periódicos. ● Determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica. 	<p>Trabalho a pares, com discussão final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Resolução de Problemas, modelação e conexões ● Recurso sistemático à tecnologia ● Práticas enriquecedoras e criatividade 	<ul style="list-style-type: none"> ● Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C) ● Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
---	-------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

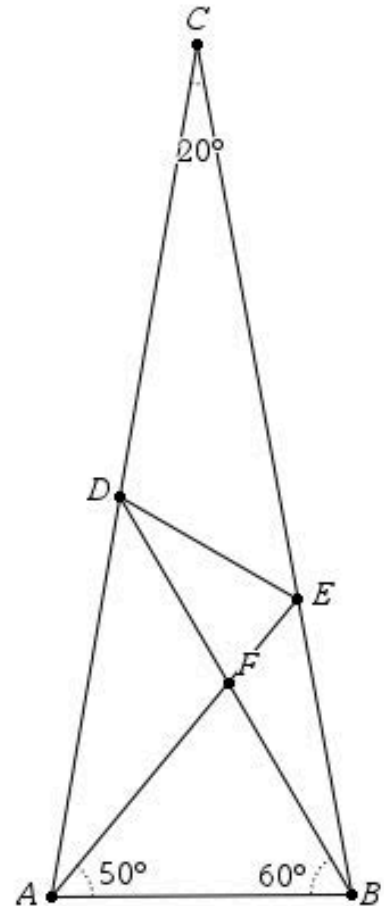
Tarefa 1

Resolução de triângulos

Parte I

Na figura encontra-se um modelo de um triângulo $[ABC]$, isósceles ($\overline{CA} = \overline{CB}$), em que a amplitude do ângulo C é 20° . Sabe-se ainda que as amplitudes dos ângulos BAE e ABD são, respetivamente, 50° e 60° , e ainda que os triângulos $[AED]$ e $[FED]$ são semelhantes.

1. Quantos ângulos se podem observar no interior do triângulo $[ABC]$, determinados pelos segmentos de reta assinalados?
Desses, escreve um par de ângulos suplementares e um par de ângulos complementares.
2. Determina as medidas da amplitude de todos os ângulos a que se refere a questão anterior.



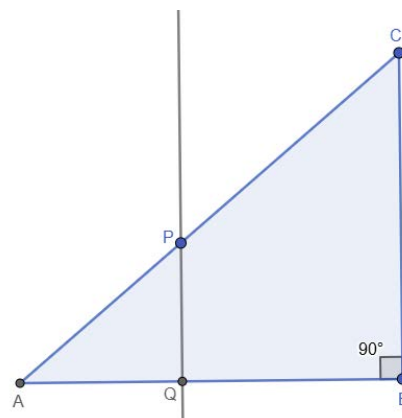
Parte II

1. No GeoGebra, constrói um triângulo qualquer ABC , retângulo em B .
 - 1.1. Resolve o triângulo, utilizando as ferramentas disponíveis no software.

Nota: Resolver um triângulo consiste em determinar as medidas dos comprimentos dos três lados e as medidas das amplitudes dos três ângulos internos.



- 1.2. De seguida, marca um ponto móvel (P) sobre a hipotenusa do triângulo, traça a reta paralela ao cateto $[BC]$ que passa por esse ponto, e que intersesta o outro lado do triângulo num ponto (Q), também móvel. Preenche a tabela seguinte, na qual a primeira linha é relativa ao triângulo $[ABC]$ e as linhas seguintes são relativas ao triângulo $[APQ]$, onde vais considerar duas posições diferentes para o ponto P à tua escolha.



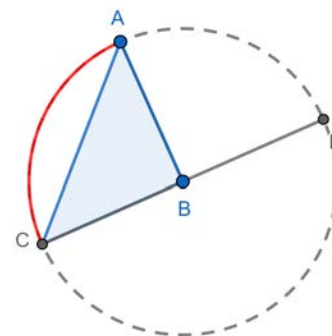
Triângulo	Amplitude do ângulo interno de vértice A	Comprimento do cateto oposto (a)	Comprimento do cateto adjacente (b)	Comprimento da hipotenusa (c)	Razão $\frac{a}{c}$	Razão $\frac{b}{c}$	Razão $\frac{a}{b}$
$\Delta[ABC]$							
$\Delta[APQ]$ (1.ª posição de P)							
$\Delta[APQ]$ (2.ª posição de P)							

- 1.3. Altera a posição de um dos dois vértices A ou B , do triângulo, e verifica se existe alteração nos valores das três últimas colunas. Como se designam as três razões trigonométricas representadas nessas colunas?
2. Considera um triângulo retângulo em B em que um dos seus ângulos agudos tem de amplitude 30° .
- 2.1. Abre a apliqueta <https://www.geogebra.org/calculator/pxqtvumk>. Através da manipulação da aplicação interativa, conjectura a razão entre as medidas de comprimento do cateto BC e da hipotenusa.
- 2.2. Determina as razões trigonométricas do ângulo de 30° , considerando $\overline{BC} = a$.



- 2.3. Qual é a amplitude do ângulo ACB ? Determina as suas razões trigonométricas e estabelece uma relação com as encontradas na alínea anterior.
- 2.4. Qual é a amplitude do ângulo ACB , se a amplitude do ângulo BAC for igual a α ? Estabelece uma relação entre as razões trigonométricas dos dois ângulos.

3. A figura ao lado, apresenta uma circunferência de centro no ponto B e onde a amplitude do arco AC é 90° .



- 3.1. Classifica, quanto aos ângulos e quanto aos lados, o triângulo ABC . Justifica.
- 3.2. Considera $\overline{AB} = 3$.
- 3.2.1. Resolve o triângulo.
- 3.2.2. Determina as razões trigonométricas do ângulo CAB .
- 3.3. Responde novamente às questões do item 3.2. considerando $\overline{AB} = r$.

Podes confirmar os resultados obtidos na apliqueta:

<https://www.geogebra.org/calculator/wmktq4am>.

Parte III

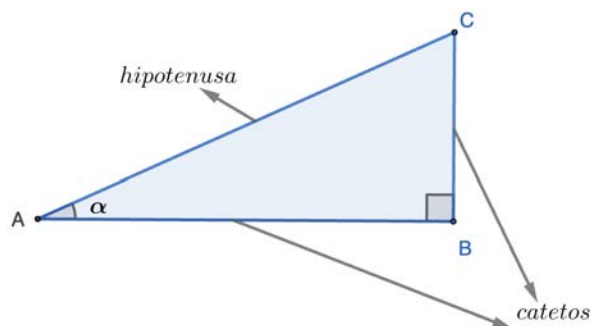
A trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre os ângulos e os comprimentos dos lados dos triângulos. A palavra **trigonometria** decompõe-se em: **trigonon** (triângulo) e **metron** (medir).

Seja ABC o triângulo retângulo em B e α o ângulo agudo BAC , definem-se as seguintes razões trigonométricas do ângulo α :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

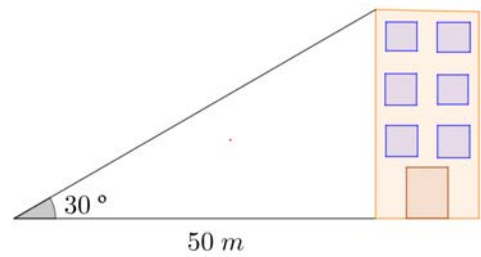
$$\operatorname{cos}\alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto}}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

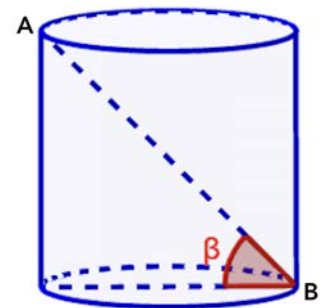


APLICAÇÕES PRÁTICAS:

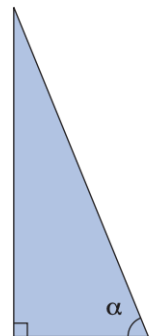
1. Supõe que a Maria está a uma distância de 50 metros de um edifício e que o ângulo de elevação até o topo desse edifício é de 30° . Determina a altura do edifício, com arredondamento às unidades.



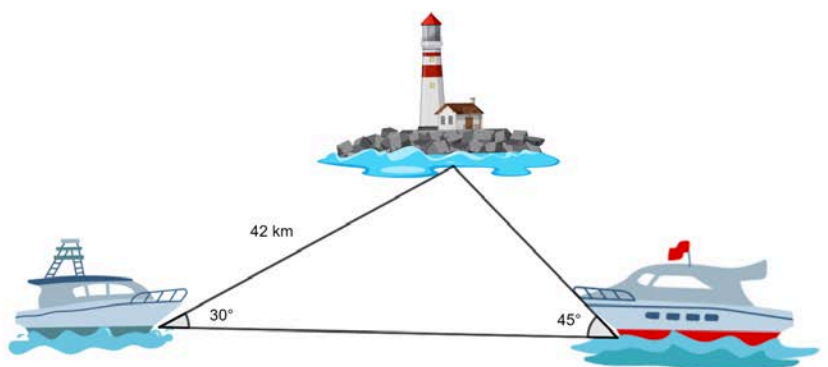
2. Na figura ao lado está representado o cilindro com raio da base 3,5 cm e a altura 24 cm.
 - 2.1. Determina a medida do comprimento do segmento de reta $[AB]$.
 - 2.2. Determina, em graus, com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo β , formado pelas semirretas que contém $[AB]$ e o diâmetro da base de extremo em B , conforme a figura.



3. Num certo triângulo retângulo, considerando α um dos ângulos agudos, verifica-se que $\cos \alpha = \frac{5}{9}$.
 - 3.1. Determina possíveis comprimentos para os três lados do triângulo retângulo.
 - 3.2. Determina os valores de $\sin \alpha$ e de $\operatorname{tg} \alpha$.



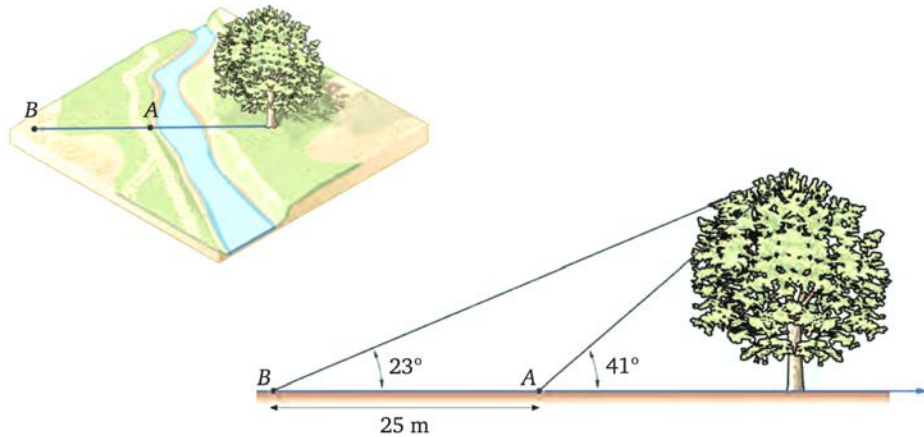
4. Na figura ao lado estão representados dois navios e um farol. De acordo com os dados da figura, determina a distância, em metros, arredondada às unidades, a que se encontram os dois navios. (Sempre que nos cálculos intermédios procederes a arredondamentos, conserva um mínimo de três casas decimais.)



Adaptado de Aleph 11



5. O João avista uma árvore na margem oposta a um rio e pretende determinar a sua altura.



Para isso, colocou-se em frente à árvore (ponto A da figura) e mediu o ângulo que formava com a horizontal em direção ao topo da árvore e obteve 41° . Seguidamente, afastou-se da árvore, numa direção perpendicular à margem, percorrendo 25 metros (Ponto B da figura). Voltou a medir o ângulo que formava com a horizontal em direção ao topo da árvore e obteve agora 23° . Qual é a altura da árvore? Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Adaptado de Aleph 11

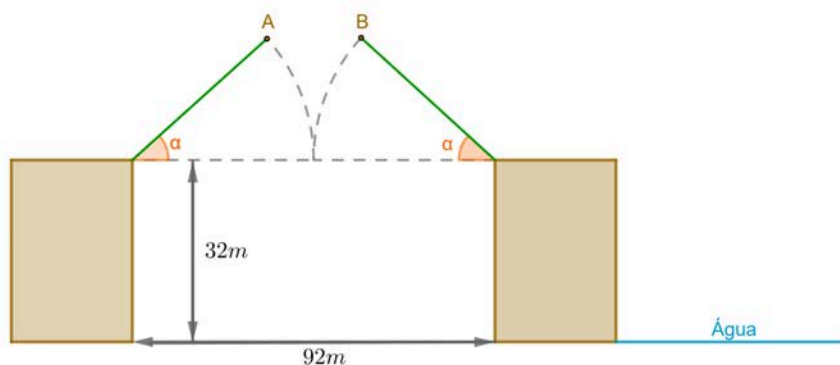
6. A figura ao lado é uma imagem da ponte móvel de Leça, situada no porto de Leixões.

Admite que o sistema de abertura da ponte móvel representada na figura ao lado é ativado a partir do registo prévio da amplitude, em graus, do ângulo, que varia consoante as dimensões da embarcação que faz a travessia.



Considera os dados da figura seguinte, onde se representa um esquema de uma ponte semelhante.





- 6.1. Determina a distância entre os pontos A e B no caso do registo ser para α igual a 50° .
Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.
- 6.2. Se a abertura da ponte é de 24 metros, distância entre os pontos A e B , qual é a amplitude de α ?
Apresenta o resultado, em graus, arredondado às unidades.
- 6.3. Considera um cargueiro com as seguintes dimensões:
- altura acima do nível da água: 41 metros;
 - largura na parte mais alta da embarcação: 17 metros.
- Será possível a sua passagem com um registo em que α é igual a 63° ?
Justifica a tua resposta.

Adaptado de Novo Espaço 11

7. Na figura ao lado, em referencial $Oxyz$, está representada a pirâmide quadrangular regular $[ABCOD]$.

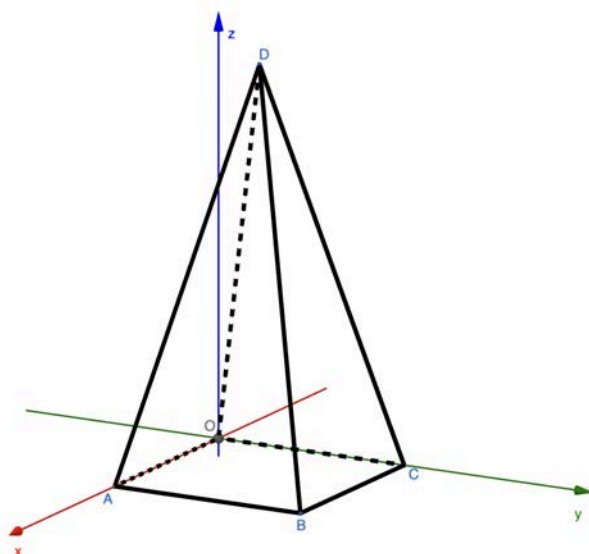
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0, 0)$;
- o ponto B pertence ao plano xOy ;
- o ponto C pertence ao eixo Oy ;
- o volume da pirâmide é de 32 ua.

Determina a amplitude do ângulo ADC .

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

8.

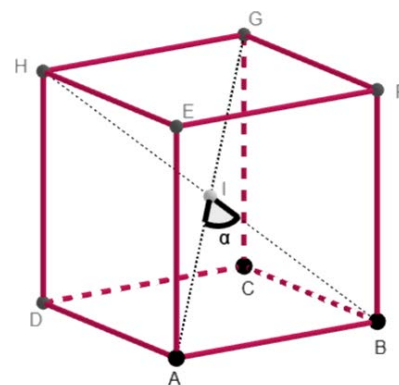


9. Considera o cubo da figura ao lado.

Abre a aplicueta disponível em

<https://www.geogebra.org/m/eewczfht>

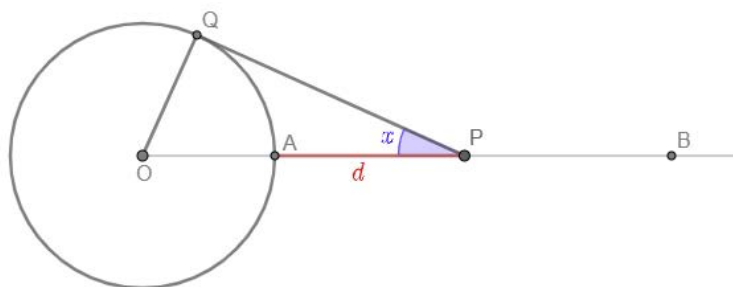
e movimenta o ponto A .



9.1. O que podes concluir sobre a variação da amplitude do ângulo α , o menor ângulo formado pelas duas diagonais espaciais, fazendo variar o comprimento da aresta?

9.2. Considera agora um cubo de aresta a , e calcula algebricamente a amplitude do ângulo α . Apresenta o resultado em graus com aproximação às centésimas.

10. Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio de comprimento 2.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O , A e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B ;
- o ponto P desloca-se ao longo da semirreta \overrightarrow{AB} , nunca coincidindo com o ponto A ;
- d é a distância do ponto A ao ponto P ;
- para cada posição do ponto P , o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a reta PQ é tangente à circunferência;
- x é a amplitude, em graus, do ângulo OPQ ($x \in]0^\circ, 90^\circ[$).

10.1. Justifica que o triângulo $[OPQ]$ é retângulo.

10.2. Determina $\text{sen}(x)$ em função da distância d .

10.3. Determina a distância $[QP]$ em função de d e em função de x .

Adaptado de Aleph 11 - Tarefas Semanais

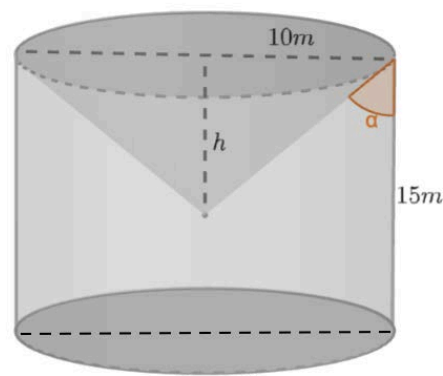


11. Uma fábrica produz depósitos para armazenar combustível, a partir de cilindros, com 15 metros de altura e bases com 10 metros de raio, nos quais se extraem cones no seu interior, que são os recipientes para o combustível (como se representa no modelo da figura ao lado).



As alturas dos cones extraídos são variáveis e representadas por h .

A figura representa um desses recipientes e a secção que resulta de um corte feito por um plano perpendicular às bases que passa pelos seus centros.



11.1. Determina:

- 11.1.1. a amplitude do ângulo α , com arredondamento às centésimas do grau, se a altura do cone for de 3 metros;
- 11.1.2. o comprimento da geratriz do cone no caso do ângulo α medir 38° .

11.2. Mostra que a capacidade de armazenamento do recipiente é dada, em função de α , pela expressão:

$$V(\alpha) = \frac{1000\pi}{3 \tan(\alpha)}$$

11.3. Um cliente faz um pedido de construção de um depósito com capacidade de armazenamento de $1,8 \times 10^6$ litros de combustível.

A resposta dada pelo setor de produção foi a seguinte :

“ É impossível satisfazer o pedido. A capacidade máxima dos nossos recipientes é de aproximadamente 1.57×10^6 litros.”

Num pequeno texto, comenta a resposta dada pelo setor de produção, fundamentando-a matematicamente.

Adaptado de Novo Espaço 11



Tarefa 1

Resolução de triângulos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa pretende-se resolver exercícios/problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar as razões trigonométricas estudadas no 3.º ciclo do EB, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos permitindo fazer a ligação aos conteúdos que irão ser trabalhados no 11.º ano.

Conhecimentos prévios dos alunos: Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Teorema de Pitágoras.

Materiais e recursos: Computador, tablet, telemóvel ou calculadora. Software de geometria dinâmica (por exemplo, Geogebra).

Notas para o professor:

Na Parte I da tarefa, apresenta-se um item que tem como propósito recapitular as propriedades dos triângulos e dos seus ângulos.

Na Parte II apresentam-se itens que deverão ser desenvolvidos recorrendo ao software de geometria dinâmica, para que os alunos recordem as razões trigonométricas estudadas no 9.º ano e algumas das suas propriedades.

Na Parte III apresenta-se um conjunto de itens que deverão ser resolvidos pelos alunos organizados em grupos de trabalho. Sobre estes exercícios considera-se que:

- o item 3.2, deverá ser resolvido, nesta fase, sem recorrer a quaisquer fórmulas trigonométricas;
- no item 5, considera-se proveitoso que sejam discutidas várias estratégias de resolução, por exemplo, decomposição em triângulos retângulos ou sistemas de duas equações a duas incógnitas;
- o item 10.3, é propício a um trabalho de grupo e a uma discussão coletiva com diferentes estratégias a serem partilhadas, fomentando, deste modo, a comunicação matemática.



- 5.2. Coloca, com a ajuda da fita adesiva, o pedaço de cordel de comprimento igual ao raio do prato, ao longo do seu bordo. Marca, com a ajuda do marcador, o ângulo ao centro cujos lados passam nos extremos do cordel. Quantos ângulos ao centro iguais a esse “cabem” no prato?

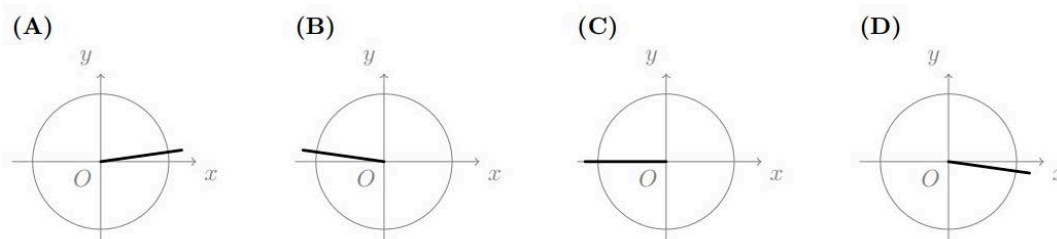
A amplitude de um ângulo ao centro a que corresponde um arco com o comprimento do raio designa-se por 1 radiano.

6. Sendo o perímetro de qualquer circunferência de raio r dado pela expressão $2\pi r$, quantos radianos cabem numa circunferência?
7. Que ângulos correspondem aos arcos com amplitude π , 2π , $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$?
8. Marca no prato os ângulos que correspondem aos arcos com amplitudes $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$.
9. Quantos ângulos iguais ao da marca $\frac{\pi}{4}$ “cabem” na circunferência?

Parte II

1. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox .

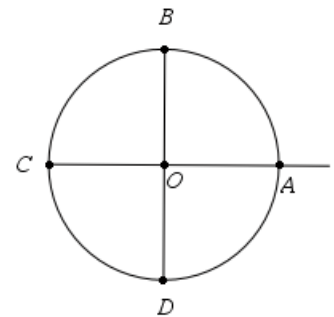
Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



Fonte: Teste Intermédio 11.º ano - 27.01.2010



2. Na figura ao lado, está apresentada a imagem de um moinho e também um modelo das suas pás, através de um círculo dividido em quatro setores circulares iguais.

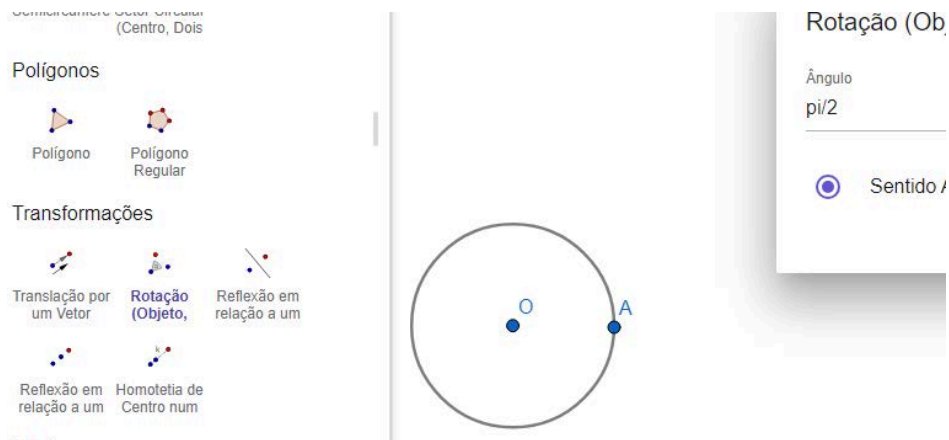


Como sabes, o ângulo ao centro de cada setor mede, em radianos, $\frac{2\pi}{4}$ ou seja $\frac{\pi}{2}$.

Constrói, no GeoGebra, o modelo referido, mas seguindo as seguintes instruções:

- utiliza rotações com o mesmo ângulo, o menor possível, utilizando a medida em radianos;
- começa por construir o ponto A e na 1.ª rotação constrói o ponto B .

Nota: Na figura seguinte poderás perceber que ferramentas utilizar para fazer a construção, começando por selecionar o objeto a transformar e depois o centro da rotação.



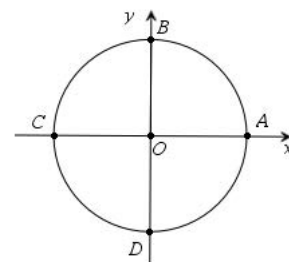
Imagina agora que se pretende transformar o ponto A nos outros pontos, apenas mantendo a regra da unidade de medida da amplitude do ângulo para a rotação, podendo variar essa medida.

- 2.1. Quais são as medidas dos ângulos, um no sentido anti-horário (sentido positivo) e outro no sentido horário (sentido negativo), que levam à construção do ponto D por rotação do ponto A em torno da origem O da circunferência?
- 2.2. Qual é o ponto em que, ao ser aplicada uma rotação de $-\frac{3}{2}\pi$ radianos, de centro em O , se obtém o ponto C ?



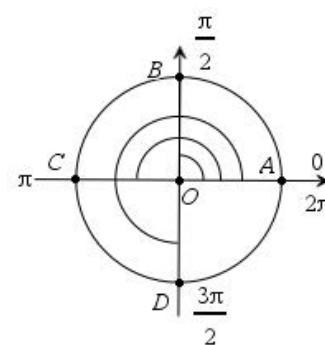
2.3. Considera o referencial Oxy do plano, representado na figura ao lado.

Mantendo como origem de rotação o ponto O , se for aplicada uma rotação de $\frac{13}{10}\pi$ radianos ao ponto A , em que quadrante se localiza o ponto resultante da transformação? E se a rotação fosse de -5 radianos?



Nota: Encontra as respostas sem utilizar o GeoGebra, recorrendo apenas para validares as tuas respostas.

3. Na figura ao lado, encontram-se representadas as medidas da rotação, em radianos, no sentido positivo (anti-horário), dos ângulos de lado origem $\dot{O}A$ e lados extremidade as semirretas com origem em O e que passam por cada um dos pontos marcados sobre a circunferência (A, B, C, D).



Nota: Para facilitar a leitura da figura, registou-se as medidas dos ângulos, em radianos, sem a referência “rad”, junto aos pontos marcados sobre a circunferência e não no vértice do ângulo (ponto O centro da circunferência) como é usual.

Desenha modelos geométricos, com setores circulares iguais, num referencial em que a origem é o centro de rotação, que representem cada um dos objetos ilustrados abaixo (relacionados com polígonos regulares).

Assinala as medidas dos ângulos como na figura acima. Considera também o primeiro ponto (A), a partir do qual se consideram todas as rotações, o que está no semieixo positivo Ox .



(I)



(II)



(III)



(IV)



Tarefa 2

Construção de uma nova unidade de amplitude de ângulo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo introduzir o radiano como unidade de medida do sistema circular. Nos últimos itens apresentados na parte I, a par do conhecimento do radiano, pretende-se que os alunos consigam representar as medidas de amplitudes de ângulos e de arcos numa circunferência, considerando o radiano como unidade de medida. A segunda parte da tarefa tem por objetivo a consolidação e aplicação dos conceitos, nomeadamente, a unidade de medida da amplitude de ângulos no sistema circular.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer o conceito de perímetro de uma circunferência e de setor circular; ângulo ao centro; relação entre as amplitudes de ângulo ao centro e do arco correspondente.

Noção de ângulo e arco orientados e a respetiva amplitude em radianos.

Materiais e recursos: Pratos de papel (o mais plano possível) e de tamanhos diferentes, marcador, fita adesiva, fita métrica e cordel.

Computador, tablet, telemóvel ou calculadora. Software de geometria dinâmica (por exemplo, Geogebra).

Notas para o professor:

O professor poderá organizar os alunos em pares.

Depois de finalizada a parte I da tarefa deverá ser feita a discussão com a turma. No momento da discussão coletiva, os alunos serão levados a descrever quantas vezes o arco correspondente ao radiano cabe na circunferência (ou seja, quantas vezes o radiano cabe num ângulo giro), o professor deverá informar que estão a utilizar o radiano como unidade de medida angular - sistema circular. Os alunos deverão ser conduzidos a escrever a definição correta de Radiano.

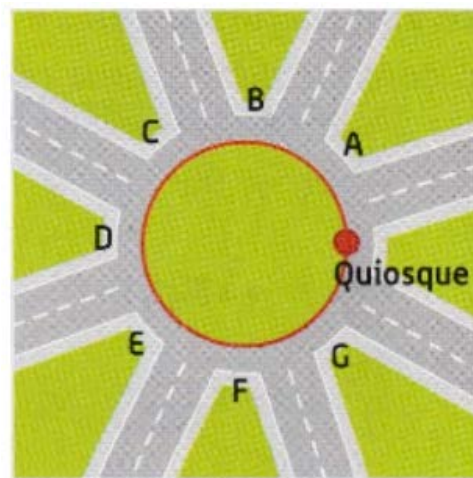
O professor deverá ter especial atenção às construções, nomeadamente as rotações no sentido horário e anti-horário, nos diferentes dispositivos onde for realizada a tarefa.



Tarefa 3

Às voltas na praça Ângulo e arco generalizado

1. Nas férias, o Vasco visitou uma cidade com uma bela praça, famosa pelos seus cafés e esplanadas. Trata-se de uma praça circular, com um grande lago no meio, com cafés, gelatarias e esplanadas que estão assinalados através das letras de *A* a *G*.



- 1.1. Uns amigos recomendaram-lhe o “melhor gelado do mundo”, mas o Vasco não se lembra das indicações que lhe deram, a não ser que deveria partir do quiosque e andar cerca de $\frac{1}{4}$ de circunferência.

Onde poderá estar localizada a gelataria que o Vasco procura?

- 1.2. Imagina que o Vasco partia do quiosque no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido positivo) e que, distraidamente, circulava à volta de toda a praça, sem se dar conta disso a não ser quando se encontrava de novo no quiosque. A partir daí, continuava a andar, no mesmo sentido, mais $\frac{1}{4}$ de circunferência.

Qual é a amplitude do arco descrito pelo percurso do Vasco desde que saiu pela primeira vez do quiosque?

- 1.3. O Vasco acabou por encontrar a gelataria em frente ao entroncamento *B*. À saída da gelataria, lembrou-se que tinha visto uma loja de livros em frente ao entroncamento *E*. Qual é a amplitude do arco que terá de descrever se quiser ir em seguida à livraria, optando pelo sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido positivo)? E se optar pelo sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo)?
- 1.4. Escreve cinco amplitudes de ângulos aos quais correspondem arcos de circunferência que permitam ir do quiosque até um ponto em frente ao entroncamento *G*.



2. Considera uma circunferência de centro O e os pontos A e M que lhe pertencem, sendo que M resulta da rotação de A em torno de O , formando ângulos ao centro AOM variáveis, e completa a tabela seguinte:

Partes de 1 volta	Amplitude do ângulo AOM descrito	
	Sistema sexagesimal	Sistema circular
1		
$\frac{1}{6}$		
	120°	
2,5		
	450°	
		$\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$
$\frac{1}{2}$		
		$-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
$\frac{3}{4}$		
	- 135°	
$3 + \frac{1}{4}$		
	- 540°	

3. Considera o ângulo β de amplitude $\frac{423\pi}{8} \text{ rad}$.

Desenha uma semirreta de origem O e que passa num ponto A e a semirreta $\dot{O}M$, que resulta da rotação de $\dot{O}A$ e amplitude β , no sentido positivo.

Quantas voltas completas deu $\dot{O}M$? Indica a amplitude, em radianos, positiva e inferior a 2π , dum ângulo α , cujas semirretas que o definem coincidam com as do ângulo β .



Tarefa 3

Às voltas na praça Ângulo e arco generalizado

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se que os alunos mobilizem experiências do dia-a-dia onde podem ser identificados arcos e ângulos orientados e generalizados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Ângulos e arcos. Ângulo ao centro e arco correspondente numa circunferência.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:

A partir de uma situação do quotidiano, uma praça circular, pretende-se que os alunos descrevam amplitudes de ângulos e de arcos que correspondam a qualquer número real, nos sistemas sexagesimal e circular.

No preenchimento da tabela do item 2, poderá considerar-se o sentido de amplitude de ângulos, positivo ou negativo.

O professor deverá promover a discussão coletiva para que os alunos partilhem conclusões, em particular, relativamente às diferentes amplitudes de ângulos, que diferem de 2π , e que são definidos pelo mesmo par de semirretas com a mesma origem.



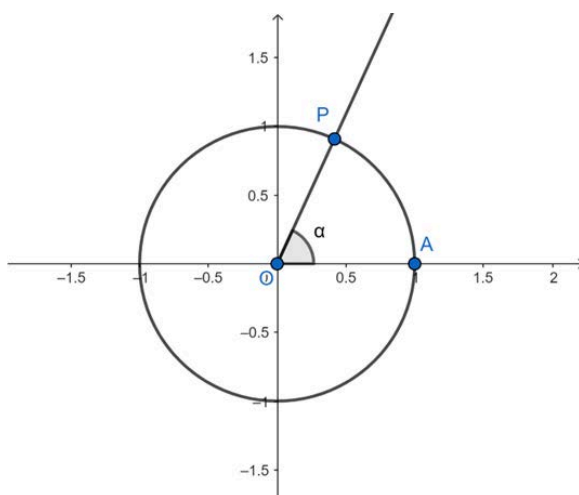
Tarefa 4

Círculo trigonométrico

Parte I

Utiliza o GeoGebra, com um referencial do plano visível, e constrói, sucessivamente:

- uma circunferência centrada na origem, O , e com raio 1 (a esta circunferência está associado um círculo que se chama “círculo trigonométrico”);
- o ponto A de coordenadas $(1, 0)$;
- um ponto P da circunferência situado no 1.º quadrante e regista as suas coordenadas;
- a semirreta \dot{OP} e mede a amplitude do ângulo AOP (designa-a por α).



1. Calcula, na janela algébrica, as razões trigonométricas, $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \alpha$, e compara-as com as coordenadas do ponto P .
2. Move o ponto P , mantendo-o no 1.º quadrante, regista as novas coordenadas e os valores de $\text{sen } \alpha$ e de $\text{cos } \alpha$. O que podes concluir?
3. Considera o triângulo retângulo $[OPP']$, sendo P' o pé da perpendicular a Ox , relativamente ao ponto P , e justifica o que concluíste.
4. Constrói a reta de equação $x = 1$ e o ponto Q (interseção da reta construída com a semirreta \dot{OP}). Exprime o comprimento \overline{QA} em função de $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \alpha$.



Parte II

Na circunferência construída anteriormente, move o ponto P para localizações em outros quadrantes.

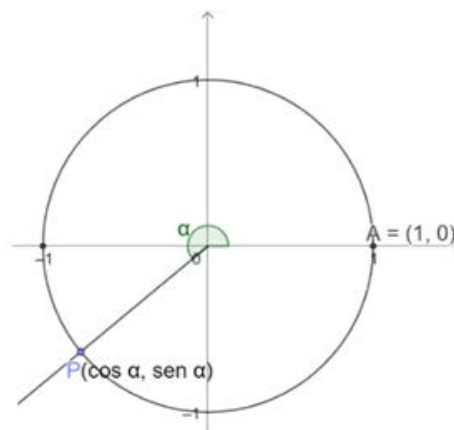
Regista os valores de $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \alpha$, a partir da janela algébrica e verifica se a relação entre esses valores e as coordenadas do ponto P se mantém válida.

Tendo um círculo trigonométrico construído num referencial e sendo α a amplitude de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade a semirreta \dot{OP} , onde P é um ponto da circunferência que limita o círculo trigonométrico, define-se:

$$\text{sen } \alpha = \text{ordenada de } P$$

$$\text{cos } \alpha = \text{abscissa de } P$$

1. Tendo em conta a definição anterior, escreve a equação da circunferência trigonométrica em função de α , onde α é a amplitude do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade a semirreta \dot{OP} , tal como mostra a figura.



2. Justifica que $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$. Pode ser útil considerar os comprimentos dos lados do triângulo retângulo $[OPP']$, em que P' é o pé da perpendicular a Ox , relativamente ao ponto P .
3. Relaciona a ordenada do ponto de interseção da reta de equação $x = 1$ com a semirreta \dot{OP} e o valor de $\text{tg } \alpha$.

Define-se tangente de um ângulo generalizado como o valor da ordenada do ponto de interseção da reta OP , com a reta de equação $x = 1$.







Parte III

1. Recorrendo à construção no GeoGebra que fizeste na Parte I, completa a tabela seguinte:

α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tan } \alpha$
2 rad			
220°			
-40°			
90°			
$\pi \text{ rad}$			
270°			
15.67 rad			
1500°			
0°			
$-3,14 \text{ rad}$			
$-\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$			

2. Completa a tabela seguinte com o sinal e a monotonia do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo α , em cada um dos quadrantes.

Nota: Por monotonia, em cada quadrante, entende-se o aumento ou a diminuição dos valores de $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$ e $\text{tg } \alpha$, à medida que aumenta o valor de α .

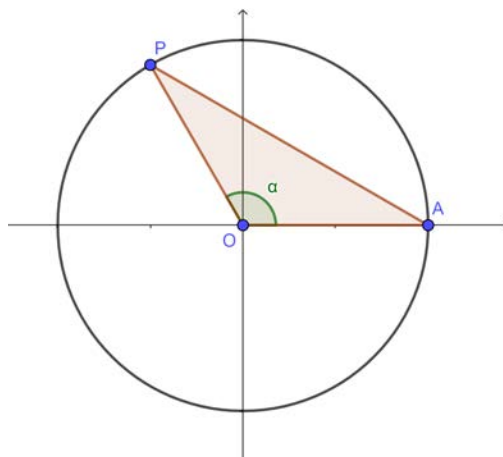
α		1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
$\text{sen } \alpha$	Sinal	+			-
	Monotonia				
$\text{cos } \alpha$	Sinal		-		
	Monotonia				
$\text{tg } \alpha$	Sinal			+	
	Monotonia				



3. Considera o triângulo $[AOP]$ representado no círculo trigonométrico da figura ao lado.

Sabe-se que:

- A e P são pontos da circunferência.
- O ponto A tem coordenadas $(1, 0)$ e o ponto P pertence ao 2.º quadrante.



3.1. Determina, em função da amplitude do ângulo AOP , a medida da área do triângulo.

3.2. Mostra que a medida do perímetro do triângulo $[AOP]$ é dada por $2 + \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$.

[Aprofundamento]

4. Calcula:

$$\operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 2^\circ + \operatorname{sen}^2 3^\circ + \operatorname{sen}^2 4^\circ + \dots + \operatorname{sen}^2 358^\circ + \operatorname{sen}^2 359^\circ + \operatorname{sen}^2 360^\circ$$



Tarefa 4

Círculo trigonométrico

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo explorar o círculo trigonométrico, para representar ângulos e respectivas razões trigonométricas. Os alunos irão aprender a localizar ângulos em radianos e graus, identificar os valores de seno e cosseno para diferentes ângulos e compreender a relação entre as coordenadas de um ponto do círculo trigonométrico e o cosseno e seno do ângulo correspondente. Deverão, ainda, identificar na reta $x = 1$ a tangente do respectivo ângulo.

A dedução da fórmula fundamental da trigonometria deverá decorrer da resolução do item 1 da Parte II, a partir da equação da circunferência.

Esta tarefa tem também o objetivo de explorar o sinal e a monotonia das razões trigonométricas de um ângulo situado em qualquer dos quadrantes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Razões trigonométricas de um ângulo; equação da circunferência; o radiano.

Materiais e recursos: Computador, tablet, telemóvel ou calculadora. Software de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra)

Notas para o professor:

No item 1 da Parte III, o complemento da tabela deverá ser feito recorrendo ao manuseamento de ângulos no círculo trigonométrico criado no GeoGebra.

A fórmula $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ poderá ser deduzida a partir da fórmula fundamental da trigonometria, caso surja a sua necessidade.



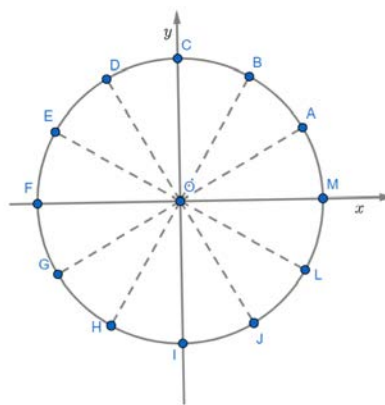
Tarefa 5

Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$.

Redução ao primeiro quadrante

1. Constrói, no GeoGebra, um modelo de uma roda-gigante, desenhando um círculo com centro em O , origem de um referencial o.n., e raio 5 unidades.

Desenha segmentos de reta, para dividir o círculo em ângulos de amplitude 30° , cada um, com vértice em O , como mostra a figura seguinte.



- 1.1. Preenche a tabela seguinte.

α (em $^\circ$)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
α (em rad)													
$\text{sen } \alpha$													
$\text{cos } \alpha$													

- 1.2. Considerando o referencial o.n. representado, escreve as coordenadas dos pontos: M, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, e L.

- 1.3. Considera $M\hat{O}A = \alpha$ e completa as seguintes igualdades:

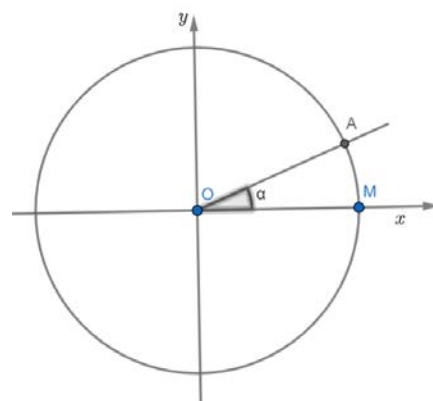
$$M\hat{O}B = \underline{\hspace{2cm}} - \alpha \qquad M\hat{O}D = \underline{\hspace{2cm}} + \alpha \qquad M\hat{O}E = \underline{\hspace{2cm}} - \alpha$$

$$M\hat{O}G = \underline{\hspace{2cm}} + \alpha \qquad M\hat{O}H = \underline{\hspace{2cm}} - \alpha \qquad M\hat{O}J = \underline{\hspace{2cm}} + \alpha$$

$$M\hat{O}L = \underline{\hspace{2cm}} - \alpha$$



2. Considera o círculo trigonométrico da figura ao lado, onde está representado um ângulo de amplitude α , pertencente ao 1.º quadrante, e um referencial Oxy.



2.1. Reproduz, no teu caderno, um desenho análogo e escreve as coordenadas do ponto A, em função de α .

2.2. Representa o ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$ e escreve as coordenadas do ponto B que resulta da interseção do lado extremidade desse ângulo com a circunferência do círculo trigonométrico. Que relação existe entre as razões trigonométricas do ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ e as do ângulo α ?

2.3. Representa o ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2} + \alpha$ e escreve as coordenadas do ponto C que resulta da interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência do círculo trigonométrico. Estabelece uma relação entre:

2.3.1. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ e $\sin \alpha$

2.3.2. $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ e $\cos \alpha$

2.3.3. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ e $\operatorname{tg} \alpha$

2.4. Tendo por base a figura obtida no item 2.3., representa C', simétrico de C relativamente ao eixo Ox.

Exprime a amplitude do ângulo MOC' em função de α e, seguidamente, relaciona as razões trigonométricas desse ângulo com o de amplitude α .

2.5. Representa o ângulo de amplitude $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ e escreve as coordenadas do ponto D que resulta da interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência do círculo trigonométrico. Estabelece uma relação entre:

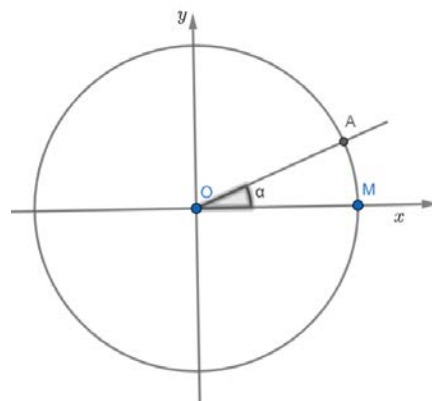
2.5.1. $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ e $\sin \alpha$

2.5.2. $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ e $\cos \alpha$

2.5.3. $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ e $\operatorname{tg} \alpha$



3. Considera, de novo, o círculo trigonométrico da figura ao lado, onde está representado um ângulo de amplitude α , pertencente ao primeiro quadrante, e um referencial o. n. (O, x, y) .



- 3.1. Representa, no círculo trigonométrico, os ângulos de amplitudes $\alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, 2\pi - \alpha$ e $-\alpha$.
- 3.2. Completa as seguintes frases de modo a obteres proposições verdadeiras:
- 3.2.1. $\text{sen}(\pi - \alpha)$ e $\text{sen} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.2. $\text{cos}(\pi - \alpha)$ e $\text{cos} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.3. $\text{tg}(\pi - \alpha)$ e $\text{tg} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.4. $\text{sen}(\pi + \alpha)$ e $\text{sen} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.5. $\text{cos}(\pi + \alpha)$ e $\text{cos} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.6. $\text{tg}(\pi + \alpha)$ e $\text{tg} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.7. $\text{sen}(2\pi - \alpha)$ e $\text{sen} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.8. $\text{cos}(2\pi - \alpha)$ e $\text{cos} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.9. $\text{tg}(2\pi - \alpha)$ e $\text{tg} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.10. $\text{sen}(-\alpha)$ e $\text{sen} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.11. $\text{cos}(-\alpha)$ e $\text{cos} \alpha$ têm os valores _____.
- 3.2.12. $\text{tg}(-\alpha)$ e $\text{tg} \alpha$ têm os valores _____.



Tarefa 5

Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$.

Redução ao primeiro quadrante

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se que os alunos relacionem as razões trigonométricas de um ângulo do primeiro quadrante com as razões trigonométricas dos ângulos

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$, através da exploração do círculo trigonométrico.

Visa também consolidar a conversão de amplitudes de ângulos de graus para radianos, com ângulos escolhidos estrategicamente no círculo dividido em doze setores de igual amplitude, percorrendo o intervalo $[0, 2\pi]$, refletindo e verificando que existem valores das razões trigonométricas iguais, simétricos ou inversos.

Conhecimentos prévios dos alunos: A representação das razões trigonométricas de um ângulo no círculo trigonométrico..

Materiais e recursos: Computador, tablet, telemóvel ou calculadora. Software de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra).

Notas para o professor:

No item 1 desta proposta, o raio do modelo da roda gigante é diferente de 1 com o objetivo dos alunos compreenderem a influência da medida do raio da circunferência nas coordenadas do ponto P . Contudo, se o professor entender, poderá considerar o raio do modelo da roda gigante com 1 unidade de comprimento.

É importante que os alunos construam os seus modelos, usando material de desenho, para se apropriarem das razões trigonométricas dos diferentes ângulos, interpretando o círculo trigonométrico e analisando rotações, simetrias, etc., não privilegiando a memorização das mesmas.



Tarefa 6

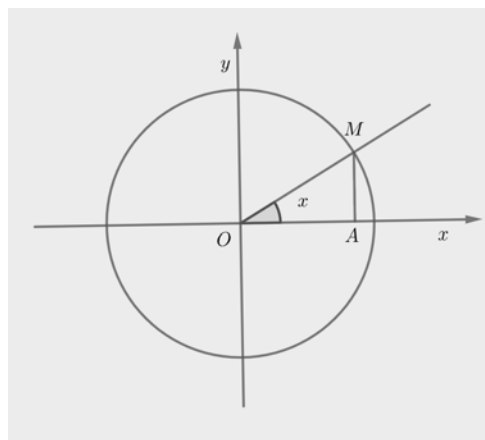
Funções trigonométricas como funções reais de variável real

Parte I

Considera um ângulo de amplitude x , em radianos, no círculo trigonométrico.

Seja f a função que associa a cada amplitude, em radianos, do ângulo AOM o valor do seu respectivo seno:

$$f: x \mapsto \text{sen } x$$



Acede à apliqueta do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/kjb8knwy>.

Para cada ponto representado, a abcissa, x , corresponde ao valor da amplitude de um ângulo, em radianos, e a ordenada o respectivo valor do seno ($\text{sen } x$). No referencial cartesiano são marcados os pontos de coordenadas $(x, \text{sen } x)$, à medida que são preenchidos, na tabela, os valores das coordenadas.

1. Preenche os espaços vazios, de cada ponto, na tabela, usando apenas valores pertencentes a $[0, 2\pi]$, para a amplitude do ângulo.
2. Altera os valores das abcissas dos pontos para os valores simétricos dos que consideraste na questão anterior. Descreve o que observas.
3. Insere agora valores para as amplitudes dos ângulos maiores que 2π . Descreve o que observas.
4. Desenha no teu caderno um esboço do gráfico da função f .



Parte II

1. No teu caderno, desenha um referencial o. n. e representa o gráfico da função $g: x \mapsto \cos(x)$, de domínio \mathbb{R} .

Começa por marcar alguns pontos até conseguires prever o aspeto global do gráfico.

1.1. Indica:

1.1.1. Contradomínio.

1.1.2. Valores extremos.

1.1.3. Três maximizantes consecutivos.

1.1.4. Três minimizantes consecutivos.

1.1.5. Três zeros consecutivos.

- 1.2. Qual é o menor valor positivo, k , para o qual temos que $\cos(0) = \cos(k)$? E para $\cos(x) = \cos(x + k)$?

Uma função f , diz-se periódica, de período k , quando $f(x) = f(x + k)$, para todos os valores de x e de $x + k$ pertencentes ao seu domínio.

2. Considera a função que a cada valor de x associa $\operatorname{tg} x$.

Faz variar o ângulo, assinalado pelo ponto vermelho, no eixo Ox , na apliqueta

<https://www.geogebra.org/m/j3qxx6m> e responde às questões seguintes:

- 2.1. O domínio da função representada é \mathbb{R} ?
- 2.2. Se a amplitude do ângulo tomar valores inferiores, cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, qual é o valor da tangente correspondente?
- 2.3. E se forem superiores a $\frac{\pi}{2}$, mas cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, o que acontece às imagens?
- 2.4. Qual é o contradomínio da função?
- 2.5. O que podes afirmar sobre os zeros e os extremos da função $\operatorname{tg} x$?
- 2.6. A função é periódica. Qual te parece ser o seu período?



Parte III (Proposta de trabalho autônomo)

1. Qual é o valor máximo que a função, de domínio \mathbb{R} , $f(x) = 4 - 3 \operatorname{sen} x$ pode tomar?
2. Considera uma função, de domínio \mathbb{R} , $g(x) = \cos(x) + k$, ($k > 0$) que não tem zeros. Quais são os valores possíveis para o parâmetro k ?
3. Recorrendo à calculadora gráfica, analisa as representações gráficas das funções, de domínio \mathbb{R} , $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = f(x + 3)$, e escreve:
 - 3.1. O domínio, o contradomínio e o período da função g .
 - 3.2. O valor do menor zero positivo da função g .
 - 3.3. O valor do maior zero negativo da função g .
 - 3.4. Dois maximizantes de g maiores que 2π .
4. Quais são os pontos de interseção dos gráficos das funções $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $f_2(x) = \cos x$ em $[-2\pi, 4\pi]$?



Tarefa 6

Funções trigonométricas como funções reais de variável real

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo trabalhar a representação gráfica das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, partindo do círculo trigonométrico como referência, e relacionar os valores das razões trigonométricas com as coordenadas de pontos num referencial.

Conhecimentos prévios dos alunos: Generalidades de funções.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo generalizado definidos no círculo trigonométrico.

Materiais e recursos: Computador, tablet ou telemóvel. Software de geometria dinâmica (por exemplo, Geogebra)

Notas para o professor:

Os alunos vão trabalhar com funções, sendo-lhe apresentada a função que a cada x - amplitude de um ângulo em radianos - faz corresponder o valor do seu seno, $\text{sen } x$. Na apliqueta do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/kjb8knwy> têm várias coordenadas de pontos para preencherem, apelando ao seu conhecimento do seno de um ângulo; podem colocar os valores da abcissa e da ordenada, mas também podem solicitar ao GeoGebra que calcule a ordenada do ponto depois de escolherem o valor da abcissa, através do uso do menu das funções. Vão visualizando coordenadas de pontos e a aplicação mostra-os no respetivo referencial, começando a identificar um padrão.

São conduzidos, na tarefa, a identificarem que se está perante uma função ímpar - os pontos traçados são simétricos em relação à origem do referencial, tendo-se oportunidade para, perante esta simetria, relembrar ou definir o que se entende por função ímpar.

Ainda se pretende, com as questões colocadas, que conjeturem que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, para todo o número real x , ou seja, que traduzam que o comportamento gráfico, por exemplo para $x \in [0, 2\pi]$, se repete noutros intervalos;



constituindo a primeira abordagem a uma função periódica. O professor no momento da discussão coletiva, terá oportunidade para formalizar esta definição de período de uma função, no caso de ela ser periódica.

A par do uso da aplicação, que permite visualizar pontos corretamente marcados e o esboço da primeira sinusóide para o aluno, também será importante, logo de seguida - Parte II, construir em papel e lápis, neste caso, o gráfico da função $y = \cos x$.

As fórmulas de redução ao primeiro quadrante, estudadas anteriormente devem ser entendidas como transformações de funções.

No item 2 da parte II, os alunos são convidados a explorarem a função tangente para se aperceberem que esta não tem domínio \mathbb{R} . A exploração do comportamento do gráfico da função tangente, quando x tende para $\frac{\pi}{2}$, deverá ser feita de forma intuitiva, concluindo que as imagens tomam valores muito grandes em valor absoluto e conjecturando, assim, o contradomínio da função $tg x$.

O formalismo algébrico necessário para a definição da expressão geral dos zeros, maximizantes ou minimizantes ou do domínio da função tangente não é um objetivo da tarefa. Os alunos devem ser encorajados a identificar que estes elementos ocorrem uma infinidade de vezes no gráfico e com uma regularidade que pode ser identificada e descrita, valorizando a comunicação matemática.



Tarefa 7

Mudar o período

Parte I

1. Acede à apliqueta “Mudar o Período” (<https://www.geogebra.org/m/zqxs4mrp>) e, consoante o caso, escolhe a função em causa e altera o valor de c de modo a preencheres as tabelas dos itens 1.1. e 1.2. e para cada um desses valores escreve o período, positivo mínimo, da respetiva função.

- 1.1. Completa as seguintes tabelas, e compara os períodos obtidos para cada uma das funções, $\cos(cx)$ e $\sin(cx)$, com os respetivos períodos das funções $\cos x$ e $\sin x$.

c	função	período
1	$\cos(x)$	
2	$\cos(2x)$	
3	$\cos(3x)$	
10	$\cos(10x)$	
0.5	$\cos(0.5x)$	
0.8	$\cos(0.8x)$	

c	função	período
1	$\sin(x)$	
2	$\sin(2x)$	
3	$\sin(3x)$	
10	$\sin(10x)$	
0.5	$\sin(0.5x)$	
0.8	$\sin(0.8x)$	

- 1.2. Completa as seguintes tabelas e compara os períodos obtidos para cada uma das funções, $\cos(cx)$ e $\sin(cx)$, com os, respetivos períodos das funções $\cos x$ e $\sin x$.

c	função	período
- 0.5	$\cos(- 0.5x)$	
- 0.6	$\cos(- 0.6x)$	
- 2	$\cos(- 2x)$	
- 4	$\cos(- 4x)$	

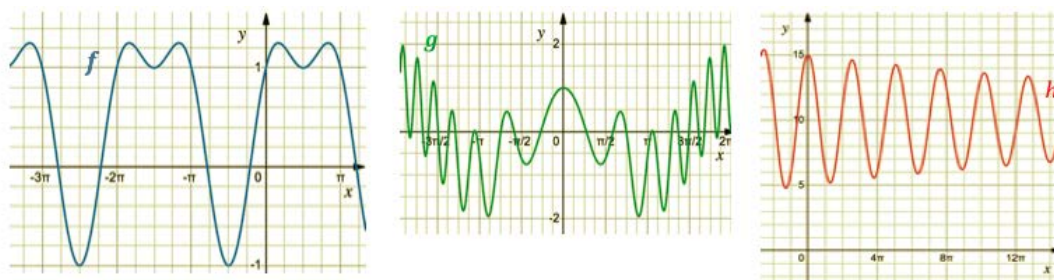
c	função	período
- 0.5	$\sin(- 0.5x)$	
- 0.6	$\sin(- 0.6x)$	
- 2	$\sin(- 2x)$	
- 4	$\sin(- 4x)$	



- 1.3. Conjetura uma relação entre os períodos positivos mínimos, das funções $\cos(x)$ e $\cos(cx)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Procede da mesma forma para as funções $\sin(x)$ e $\sin(cx)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O período positivo mínimo, P , das funções do tipo $f(x) = \cos(cx)$ ou $g(x) = \sin(cx)$ é dado, em função de c , por $P = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Nos gráficos seguintes estão representadas parte dos gráficos das funções f , g e h .



Um dos gráficos anteriores representa uma função periódica. Identifica esse gráfico e escreve o período positivo mínimo.

3. Qual é o período, positivo mínimo, das funções representadas pelas seguintes expressões analíticas?

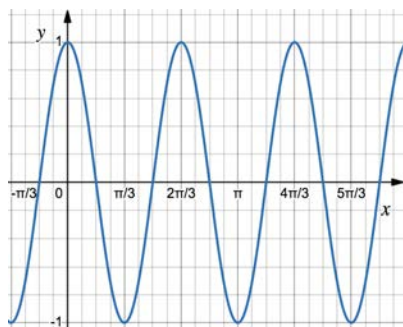
3.1. $\cos(7x)$.

3.2. $\sin(10\pi x)$.

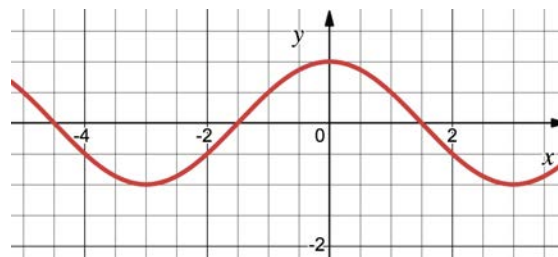
3.3. $\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$.

4. Nas figuras seguintes estão representados partes dos gráficos da família de funções do tipo $f(x) = \cos(cx)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para cada uma das funções representadas escreve os valores de c .

4.1.

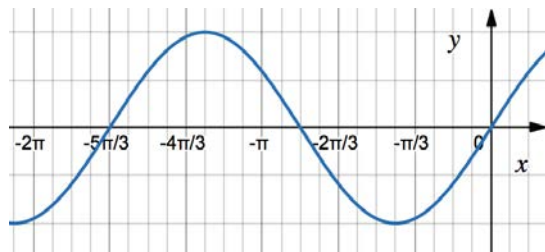


4.2.

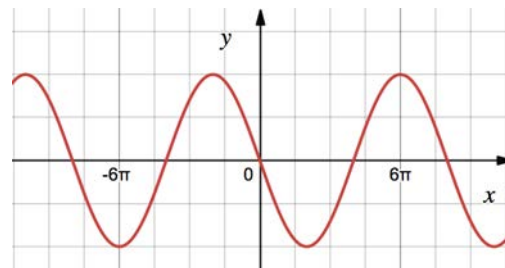


5. Na figura estão representados partes dos gráficos da família de funções do tipo $f(x) = \sin(cx)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para cada uma das funções representadas escreve o valor de c .

5.1.



5.2.



Parte II - Explorando a noção de frequência de uma função periódica

1. Na folha algébrica do GeoGebra insere a função $f(x) = \sin(2\pi x)$. Atendendo à sua representação gráfica, verifica-se que é uma função periódica, o que significa que o seu gráfico tem simetria de translação horizontal. Identifica visualmente quando é que a função completa um ciclo. Qual é o intervalo de valores de x que a função percorre desde o início de um ciclo até ao ponto onde começa a repetir-se novamente?
2. Quantos ciclos a função $f(x) = \sin(2\pi x)$ completa numa unidade da variável independente (x)?
3. Representa agora a função $g(x) = \sin(4\pi x)$.
 - 3.1. Qual é o período desta função? Quanto ciclos é que ela completa numa unidade da variável independente?

Frequência de uma função periódica é, por definição, a medida do número de ciclos completos que essa função executa numa unidade de medida da variável independente.

- 3.2. Tendo em conta a definição anterior, qual é a frequência da função $f(x) = \sin(2\pi x)$? E da função $g(x) = \sin(4\pi x)$?
- 3.3. Representa outras funções, por exemplo, $h(x) = \sin(6\pi x)$, $i(x) = \sin(10\pi x)$, ou outras, e responde aos itens 3.1 e 3.2, para cada uma das funções.
- 3.4. Estabelece uma relação entre período e frequência.



Parte III - Explorar Sons com Frequências Diferentes

O som é frequentemente representado por uma senoide, porque muitas ondas sonoras simples seguem o mesmo padrão matemático que a função seno ou cosseno. O som é produzido quando algo vibra e cria oscilações na pressão do ar ao seu redor. Essas oscilações propagam-se em forma de ondas até chegarem aos nossos ouvidos, onde são percebidas como sons.

1. Acede à aplicativa <https://www.geogebra.org/m/mbfczqda>.
O que representa a constante K , na função $f(x) = \text{sen}(2k\pi x)$?
2. Toca o som associado à função $f(x) = \text{sen}(2k\pi x)$, clicando no botão **Tocar Som**.
Reproduz novamente o som e altera o valor de K . Descreve o que observas sobre a relação entre o valor de K e:
 - 2.1. a forma da onda (mais comprimida ou mais espaçada);
 - 2.2. o som ouvido (mais agudo ou mais grave).



Tarefa 7

Mudar o período

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo explorar as propriedades das funções trigonométricas $\cos(cx)$ e $\sin(cx)$, permitindo aos alunos a compreensão da noção de período, identificando e descrevendo transformações de funções do tipo $f(cx)$, com $c \neq 0$, analisando como essas transformações acontecem a partir do gráfico da função original.

Com esta tarefa, pretende-se que os alunos trabalhem o conceito de Período, tanto a partir da expressão algébrica, como através da observação de gráficos.

A parte II da tarefa permite explorar o conceito de frequência de uma forma visual, utilizando o GeoGebra para perceber como as funções periódicas se comportam e como a frequência influencia a representação gráfica.

Entender como a frequência de uma função periódica afeta o som produzido e a forma da onda associada.

Esta tarefa ajuda a fazer a conexão entre a Matemática (funções periódicas) e a Física (som), de uma forma visual e interativa.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer as funções trigonométricas básicas $\cos(x)$ e $\sin(x)$, incluindo os seus períodos e propriedades gerais. Reconhecer, de forma intuitiva, o conceito de Período.

Materiais e recursos: Computador, tablet, telemóvel ou calculadora gráfica. Software de geometria dinâmica (por exemplo, Geogebra).

Notas para o professor:

O preenchimento da tabela deverá ser realizado através da manipulação dos seletores relacionados com as funções trigonométricas e com o parâmetro 'c', acedendo à apliqueta <https://www.geogebra.org/m/mbfczqda>.

Deve-se explorar transformações do tipo $f(-cx)$, com $c > 0$ e estabelecer uma conexão entre essas transformações e as propriedades trigonométricas das funções seno e cosseno, nomeadamente as reduções ao primeiro quadrante das funções



$\text{sen}(-x)$ e $\text{cos}(-x)$. Ou seja, quando se pretende determinar o valor de c , com $c \neq 0$, de uma representação gráfica de uma função do tipo $\text{cos}(cx)$, esta será igual a $\text{cos}(-cx)$, assim sendo, c poderá tomar dois valores, ele e o seu simétrico. Caso se pretenda determinar o valor de c , com $c \neq 0$, de uma representação gráfica de uma função do tipo $\text{sen}(cx)$ termos apenas uma solução uma vez que $\text{sen}(cx) \neq \text{sen}(-cx)$, com $c \neq 0$.



Tarefa 8

Às voltas no London Eye

Parte I

A London Eye é uma das atrações turísticas mais icônicas de Londres, inaugurada a 31 de dezembro de 1999 para celebrar a chegada do novo milênio.



Apresentam-se a seguir algumas especificações técnicas da London Eye:

- número de cabines: 32, representando os distritos de Londres;
- capacidade de cada cabine: até 25 pessoas;
- capacidade total: aproximadamente 1.600 pessoas por hora;
- peso total: 2.100 toneladas.

De seguida apresenta-se um modelo aproximado da altura h , em metros, da cabine 1 que no instante inicial se encontra mais próxima do solo, em função do tempo t , em minutos.

$$h(t) = -66,5 \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right) + 68,5$$

1. Escreve o período e a amplitude da função h . Explica o significado físico desses valores no contexto da roda gigante.

Nota: A amplitude de uma função, no contexto de modelos periódicos, é metade da diferença entre o máximo e o mínimo.



2. Utiliza uma calculadora gráfica ou o GeoGebra e representa a função no intervalo $[0, 60]$.
 - 2.1. Escreve os instantes em que a cabine 1 atinge a altura mínima e os instantes em que atinge a altura máxima (minimizantes e maximizantes), no intervalo $[0, 60]$.
 - 2.2. Determina o instante em que a cabine 1 atinge a altura de 100 metros pela primeira vez.
Apresenta o resultado em minutos e segundos, segundos arredondados às unidades.
 - 2.3. Determina, nas primeira duas voltas, durante quanto tempo a cabine 1 esteve a uma altura superior a 50 metros. Apresenta o resultado em minutos arredondado às unidades.
 - 2.4. Qual seria o modelo que representa a altura h , em metros, da cabine 1 ao solo, se a velocidade de rotação da roda passasse para o dobro? E se fosse metade da velocidade estabelecida atualmente?

Parte II

A Ain Dubai é, atualmente, a maior roda gigante do mundo.

Pesquisa os dados relevantes desta estrutura que te permitam construir um modelo semelhante ao anterior para esta roda gigante.

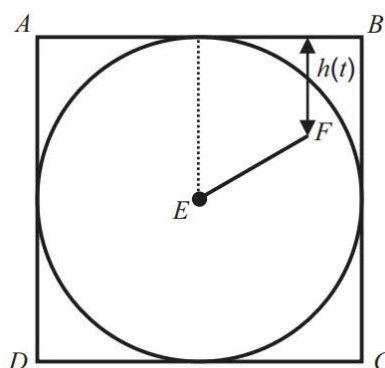


Parte III

A figura ao lado é uma fotografia da torre da Igreja de São Pedro, situada em Zurique, na Suíça. Nessa torre, encontra-se um dos maiores relógios da Europa.



Na figura seguinte, está representado um esquema desse relógio. No esquema, o segmento de reta $[EF]$ representa o ponteiro das horas.



Relativamente à figura anterior, sabe-se ainda que:

- o círculo de centro E está inscrito no quadrado $[ABCD]$;
- $\overline{EF} = 3,5 \text{ m}$ e $\overline{AB} = 9 \text{ m}$;

Seja h a função que dá a distância, em metros, da extremidade do ponteiro das horas à reta AB , t horas após as zero horas.

Determine, em função de t , uma expressão analítica da função h .

Fonte: Exame Matemática A, Época Especial 2019



Tarefa 8

Às voltas no London Eye

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo identificar e compreender fenômenos periódicos, modelados por funções do tipo: $f(x) = a + b \operatorname{sen}(c(x - d))$ e $f(x) = a + b \operatorname{cos}(c(x - d))$; e em particular, abordar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência.

Nas partes II e III pretende-se que os alunos sejam levados a construir um modelo que permita descrever um fenômeno periódico com recurso a uma função trigonométrica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções trigonométricas. Conceitos associados aos fenômenos periódicos: máximo, mínimo, período e frequência.

Materiais e recursos: Computador, tablet, telemóvel ou calculadora gráfica. Software de geometria dinâmica (por exemplo, Geogebra).

Notas para o professor:

Sugere-se que os alunos sejam organizados em pequenos grupos para desenvolverem a tarefa. No desenvolvimento da tarefa os alunos terão de interpretar a função e a sua representação gráfica. Finalmente, irão identificar alguns pontos notáveis da função, no contexto da situação real apresentada. Na parte II da tarefa, o professor deve acompanhar os alunos na pesquisa dos dados relevantes e alertar para a necessidade de fazer estimativas e assumir decisões no processo de modelação, tais como considerar ou não a altura das cabines, ou o ponto da cabine que é usado para medir a distância ao solo.

