P6 - TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Taxa de Variação e Otimização (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/

Data:

Lisboa, abril de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO P6 - Taxa de Variação e Otimização

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	Tarefa 1 A viagem do João	**Taxa de Variação Média** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação	• Calcular e interpretar a variação entre dois pontos do domínio de uma dada função.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida(B) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)
3	Tarefa 2 Dos radares aos drones	**Taxa de Variação Média** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação	• Calcular a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função e interpretar geometricamente o valor obtido. • Calcular, através da observação da representação gráfica, a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função. • Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

6	Tarefa 3 25 de abril	**Taxa de Variação Instantânea** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação instantânea	• Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função. • Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
4	Tarefa 4 *Haloween*	**Otimização** Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	• Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função e ao gráfico da taxa de variação. • Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função. • Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. • Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

5	Tarefa 5 Clientes Felizes	**Otimização** Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	• Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função. • Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. • Resolver problemas simples de modelação matemática. • Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

Tarefa 1

A viagem do João

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa introduz-se o conceito de taxa média de variação com recurso à velocidade média, generalizando-o, posteriormente, a outras situações.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções polinomiais. Interpretação de gráficos.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica. Equipamento digital com acesso à Internet.

Notas e sugestões:
Sugere-se que a aula comece com a visualização do vídeo Como funcionam os Radares de Velocidade Média (ANSR Radares de Portugal).
Inicialmente explora-se a velocidade média. Propõe-se que o vídeo e o esquema ("Como funciona o radar?") comece por ser analisado e discutido em grande grupo, organizando-se, de seguida, os alunos em pequenos grupos para resolverem os restantes itens da tarefa.
No item 5. a taxa média de variação é associada à variação do peso e recorre-se à expressão de uma função. Poderá ser necessária alguma orientação inicial por parte do professor.
No final da tarefa deverá ser feita a discussão, em grande grupo, das resoluções e conclusões de cada grupo, com o objetivo de clarificar os conceitos em estudo.

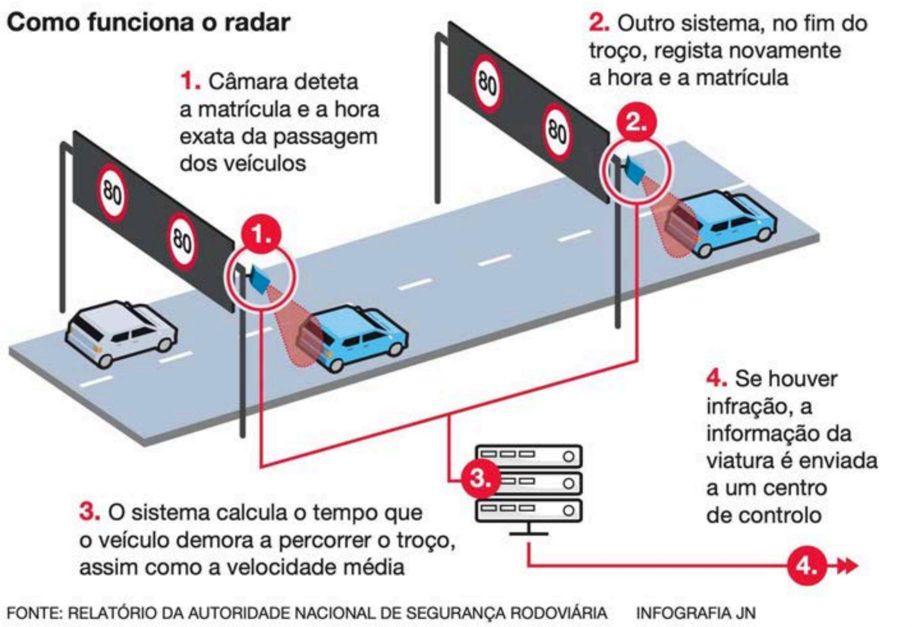
Tarefa 1

A viagem do João

Os radares de velocidade média começaram a funcionar nas estradas portuguesas no final de 2021. Estes radares têm como objetivo calcular se, em média, os veículos circulam com mais velocidade do que o permitido num determinado percurso.

[ANSR Radares de Portugal (radaresavista.pt)]

1. Visualiza o vídeo [Como funcionam os Radares de Velocidade Média] e analisa o esquema apresentado abaixo.



2. Após a visualização do vídeo e análise do esquema, responde às seguintes questões:

   2.1. Para além do tempo que o veículo demora a percorrer o troço, de que outro elemento necessita o radar para calcular a velocidade média?

   2.2. Explica, por palavra tuas, como é que se pode proceder para calcular a velocidade média de um veículo num determinado troço.

3. O João e a sua família realizaram uma viagem de férias. Na viagem passaram por um troço de uma autoestrada com radares de velocidade média.

   3.1. Na viagem, o João foi multado numa autoestrada porque, num determinado troço, a velocidade média calculada foi de 130 km/h. O João alegou que os cálculos podiam estar errados, pois ele, por ter estado indisposto, esteve parado durante 10 minutos.
   Deve o agente da polícia multar o João? Justifica a tua resposta.

   3.2. O João percorreu um troço de 200 quilómetros da autoestrada em duas horas, no qual está localizado um radar de velocidade média. Esteve parado nesse troço da autoestrada durante meia hora, devido a uma avaria do seu automóvel.

      3.2.1. Qual foi a velocidade média (em km/h) feita pelo automóvel, no troço de 200 quilómetros que foi registada pelo radar de velocidade média?

      3.2.2. Qual foi a velocidade média feita pelo automóvel, no mesmo troço da autoestrada, não contabilizando o tempo em que o condutor esteve parado?

   3.3. De acordo com os valores dos itens 3.2.1 e 3.2.2, comenta a seguinte afirmação:

   “*O público em geral compreende o que está na base dos novos radares de velocidade média.*”

4. O João, atendendo à avaria que o seu automóvel teve na sua viagem de férias e do carro estar já a perfazer 5 anos, pensou em vender o automóvel que comprou por 23500 euros. No entanto, ficou surpreso quando analisou a desvalorização do valor do seu automóvel na seguinte aplicação. Responde às questões seguintes, recorrendo sempre à aplicação.

4.1. Qual foi a variação do valor do automóvel do João desde a sua compra até ao 5.º ano?

4.2. Qual foi a variação média do valor do automóvel nesse intervalo de tempo? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

4.3. Qual foi a variação média do valor do automóvel do João desde o 2.º ano ao 4.º ano após a compra? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

4.4. Completa a tabela seguinte, em que V corresponde ao valor, em euros, do automóvel do João:

Intervalo de tempo $[a,\ b]$	$V(a)$	$V(b)$	$V(b)\ -\ V(a)$	$\frac{V(b)-V(a)}{b-a}$
$[0,\ 5]$				
$[2,\ 4]$				

Nas situações descritas anteriormente, existe um conceito comum que se denomina taxa média de variação.

A taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a,\ b]$ é dada por:

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

5. A família do João decidiu adotar um cão recém-nascido. Este foi pesado durante os 10 primeiros dias de vida sempre à mesma hora (do nascimento). O seu peso evoluiu de acordo com a seguinte função:

$$P(t) =- 0,004t^3 + 0,1t^2 - 0,4t + 1,5$$

em que P representa o peso do cachorro, em quilogramas, e t o tempo decorrido, em dias, após o nascimento.

Nota: O "peso" refere-se à massa corporal.

5.1. Qual foi a variação do peso desde o nascimento até ao 4.º dia?

5.2. Qual foi a variação média do peso nesse intervalo de tempo? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

5.3. Qual foi a variação média do peso do cachorro entre o 6.º e 10.º dias? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

Tarefa 2

Dos radares aos drones

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa é introduzida a taxa de variação instantânea com recurso à velocidade instantânea e aos radares que a controlam. Sem nunca referir limites ou derivadas, a velocidade é calculada com base na velocidade média, mas para uma amplitude de intervalo de tempo muito próxima de zero.
Também é feito o cálculo da taxa de variação (taxa de variação instantânea) com recurso à calculadora gráfica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Taxa média de variação. Funções polinomiais. Interpretação de gráficos. Equação reduzida de uma reta.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica. Equipamento digital com acesso à internet. Recurso tecnológico com Python.

Notas e sugestões:

Sugere-se que os itens 1. e 2. sejam analisados e discutidos em grande grupo. Para o item 2. propõe-se que comecem com a visualização do vídeo Como funcionam os Radares de Velocidade Instantânea.
De seguida sugere-se que os alunos sejam organizados em pequenos grupos e as suas resoluções e conclusões analisadas em grande grupo, no fim do trabalho autónomo.
No item 3. recorre-se à representação gráfica de uma função para determinar a taxa média de variação.
Neste item, há a oportunidade para explorar o facto da taxa média de variação depender apenas dos valores da função nos extremos do intervalo e não transmitir qualquer informação sobre o comportamento da função no interior do intervalo.
Ainda, neste item, o professor deve informar os alunos de que quando a distância percorrida é dada em função do tempo, a taxa de variação é a velocidade (velocidade instantânea). A última alínea deverá ser resolvida em grande grupo para o professor ter oportunidade de explicar como se determina a taxa de variação recorrendo a uma calculadora gráfica.

Nos itens seguintes sugere-se que os alunos continuem a trabalhar em pequenos grupos.
Relativamente ao item 5. aborda-se o custo marginal enquanto taxa de variação da função custo.
Por fim, no item 6., alerta-se que há um limite de casas decimais na linguagem Python. Os alunos poderão utilizar um valor muito próximo de zero.

Tarefa 2

Dos radares aos drones

1. A Ana e o José Diogo deslocaram-se de Torres Novas à Guarda percorrendo a A23 - Autoestrada da Beira Interior, para se encontrarem com o seu grupo de trabalho do Instituto Politécnico da Guarda. Cada um foi no seu automóvel e demoraram 2 h 15 min para percorrerem os 217 km. Ambos fizeram uma paragem em estações de serviço. No final, a Ana foi multada por excesso de velocidade, mas o José Diogo não.

   Sabendo que a velocidade máxima nas autoestradas portuguesas é de 120Km/h, apresenta uma razão para esta discrepância.

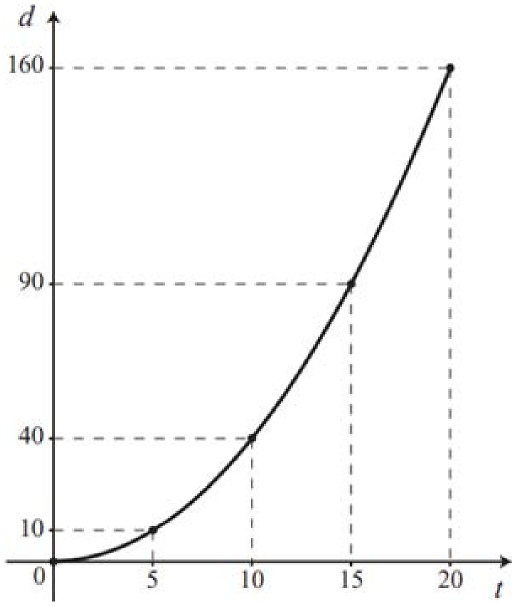
2. Visualiza o vídeo "[Como funcionam os Radares de Velocidade Instantânea]".

   Considera as imagens, ao lado, de radares de velocidade instantânea. Na imagem da esquerda tens o que é visualizado pelo operacional e na da direita a parte do radar que capta a informação. O radar para além da mira, dispõe de duas lentes sobrepostas. A mira fixa o veículo e cada uma das lentes captura imagens, quase simultâneas. Estes dados permitem fazer um cálculo aproximado da velocidade no momento das capturas.

A velocidade instantânea é aproximadamente igual à velocidade média quando o intervalo de tempo é extremamente pequeno, quase nulo.

3. O grupo de trabalho da Ana e do José Diogo utilizou um drone para vigiar um troço da autoestrada A23, nomeadamente, a nível do excesso de velocidade, utilizando-o como radar. O drone usado levantou voo verticalmente a partir de uma plataforma.

Na figura ao lado está, em referencial cartesiano, uma representação gráfica que traduz a correspondência entre o tempo, t, em segundos, e a distância, d, em metros, do drone à plataforma nos primeiros 20 segundos de voo.



3.1. Determina a velocidade média (taxa média de variação) do drone nos seguintes intervalos de tempo:

3.1.1. $[5, 10]$;

3.1.2. $[10, 20]$.

3.2. Através da observação do gráfico e recorrendo à apliqueta, completa a tabela seguinte, movimentando o seletor na apliqueta, atribui valores ao parâmetro a, **cada vez mais próximos de zero**:

Valor de a	Intervalo de tempo $[10\,,\ 10\ +\ a]$	Velocidade média (Taxa média de variação) $\frac{d(10+a)-d(10)}{a}$
5	$[10, 15]$	

3.3. De acordo com os valores que preencheste na tabela anterior, escreve um valor aproximado para a velocidade instantânea registada aos 10 segundos.

3.4. Qual é o nome dado à reta que interseta a representação gráfica da função nos pontos de abcissas 10 e 15?

3.5. Como se denomina a reta cuja interseção com a representação gráfica da função seja apenas o ponto de abcissa 10?

3.6. Nem sempre é prático fazer o cálculo da velocidade instantânea com aproximações sucessivas como fizeste na tabela. A tecnologia, por exemplo uma calculadora gráfica, permite determinar de forma mais expedita a velocidade instantânea (taxa de variação).

3.6.1. Considera que a distância d, em metros, em função do tempo t, em segundos, é dada por uma expressão do tipo $d(t) = at^2$, em que $a \neq 0$ e $0 \leq t \leq 20$.
Qual é o valor de a, sabendo que $d(10) = 40$?

(A) $-\frac{4}{25}$ (B) $-\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{25}$

3.6.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determina a velocidade instantânea registada aos 10 segundos. Compara o valor que obtiveste com o registado no item **2.2.**

(Adaptado da Prova Final 3.º Ciclo - 2019, 2.ª fase)

A **taxa de variação (instantânea)** é aproximadamente igual à taxa média de variação quando a amplitude do intervalo é extremamente pequena, quase nula.
Graficamente, a taxa de variação (instantânea) é igual ao valor do declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de tangência.

4. Um drone, durante um primeiro ensaio, deslocou-se em linha reta. A distância percorrida pelo drone, em metros, é dada por $d(t) = 3t^2 - t$, em que t representa o tempo decorrido em segundos.

4.1. Determina a velocidade média do drone no intervalo de tempo:

4.1.1. $[1, 5]$;

4.1.2. $[2, 6]$.

4.2. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, a velocidade instantânea do drone:

4.2.1. $t = 5$;

4.2.2. $t = 8$.

5. A Ana e o José Diogo ficaram curiosos sobre o custo associado à produção de drones, após a realização de um estudo feito com auxílio de um drone. Após contacto com a empresa de produção do drone utilizado, foi-lhes dada a informação que o custo associado à produção é traduzido pela expressão $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 9x + 150$, em que x representa o número de unidades de drones produzidas e C é o custo total de produção, em dezenas de euros.

5.1. Determina $C(0)$ e interpreta o resultado obtido no contexto da situação.

5.2. Determina o custo para produzir 16 drones. Calcula o custo para produzir cada drone.

Em Economia, o **custo marginal** é a taxa de variação (instantânea) da função custo.

5.3. Recorrendo à calculadora gráfica, determina o custo marginal da produção de 16 drones.

6. A Ana decidiu usar o programa em *Python*, apresentado a seguir, para determinar uma aproximação da taxa de variação (instantânea) de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto.

```
a=-2
b=3.5
c=1
d=4
x=2.5
fx=a*x**3+b*x**2+c*x+d
h=0.1
fxh=a*(x+h)**3+b*(x+h)**2+c*(x+h)+d
t=(fxh-fx)/h
print(t)
```

6.1. Completa a frase seguinte, de forma a obter uma afirmação verdadeira:

"*O programa apresentado determina uma aproximação da taxa de variação da função* ________________ *no ponto de abcissa* __________".

6.2. A Ana apresentou o programa à turma. Depois de analisar o programa, o José Diogo disse-lhe o seguinte:

«O valor determinado pelo programa não é uma boa aproximação da taxa de variação da função no ponto escolhido».

6.2.1. Comenta a afirmação do José Diogo.

6.2.2. O que será necessário modificar no programa para melhorar a aproximação da taxa de variação?

6.2.3. Altera o programa de modo a obter uma melhor aproximação da taxa de variação.

Tarefa 3

25 de Abril

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Sinal e monotonia de uma função. Construção de tabelas de variação de sinal e de monotonia.

Conhecimentos prévios dos alunos: Sinal e monotonia de uma função. Construção de tabelas de variação de sinal e de monotonia.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica. Equipamento digital com acesso à internet.

Notas e sugestões:
Sugere-se que, antes da realização da tarefa se recorde, a partir de um exemplo de uma representação gráfica de uma função, os conceitos de sinal e monotonia de uma função e a construção de tabelas de sinal e de monotonia.
Os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos e, no final, em grande grupo, discutir as resoluções e as conclusões de cada grupo. O professor deverá alertar para o facto de nem sempre existir um extremo quando a taxa de variação é nula.
No item 1.4., se os alunos apresentarem dificuldades no preenchimento da tabela, linha "sinal da taxa de variação de h", pode-lhes ser sugerido que preencham em primeiro lugar a linha respeitante à monotonia de h (por observação direta do gráfico).
No item 3. é referida pela primeira vez a função taxa de variação. Se os alunos revelarem dificuldades em compreender esta "nova" função, sugere-se que o professor proponha aos alunos, recorrendo a uma calculadora gráfica, que representem graficamente uma função polinomial e a respetiva função taxa de variação no mesmo referencial, com o objetivo de visualizarem a relação entre o sinal da função taxa de variação e a monotonia da função original.

Tarefa 3

25 de Abril

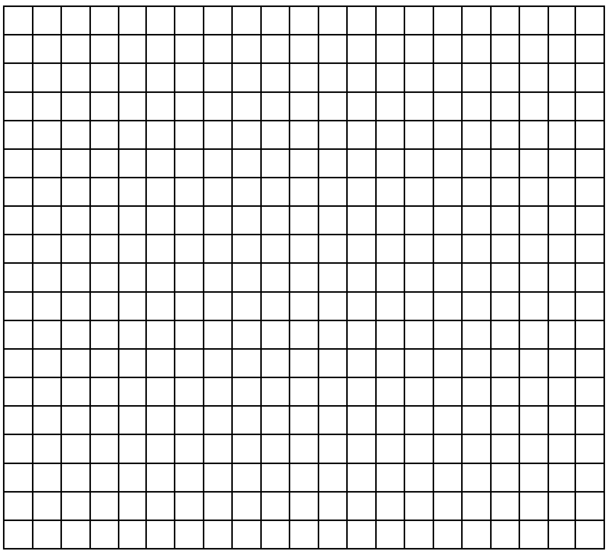
Para comemorar os 50 anos do dia 25 de abril de 1974 um grupo de amigos passou o dia na mata Nacional do Bussaco.

1. O grupo de amigos iniciou o seu dia observando uma águia-calçada, a efetuar um voo planado à procura de alimento, pois avistou uma lebre no fundo do vale da mata que é uma área plana. A águia-calçada iniciou um voo picado, a grande velocidade, em direção à presa, capturando-a em poucos segundos. Após a captura, transportou a lebre para o cimo de um penhasco, terminando aí o seu voo. O momento da captura corresponde ao instante em que a águia atingiu, no seu voo, a distância mínima ao fundo do vale. Admita que a distância, h , em metros, a que a águia se encontra do fundo do vale, t segundos após o início do voo picado, é dada, aproximadamente, por:

$$h(t) =- 0,125t^4 + 2,5t^3 - 12,9t^2 - 1,1t + 94,8 \text{ , com } t \in [0;\ 9,6]$$

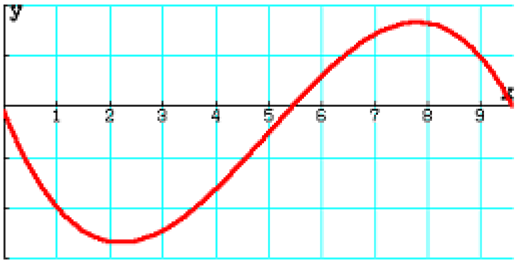
1.1. Determina a taxa de variação média de h no intervalo $[0;\ 3]$. Interpreta o resultado no contexto do problema. Apresenta o resultado com aproximação às décimas. Em cálculos intermédios não procedas a arredondamentos.

1.2. Recorrendo a uma calculadora gráfica, representa num referencial cartesiano, o gráfico da função dada e faz o seu esboço no quadriculado seguinte.



1.3. Na figura abaixo, apresenta-se um esboço do gráfico de g, função que dá, em metros por segundo, a taxa de variação de h no instante t . A taxa de variação é nula nos instantes $t = 0$; $t = 5,4$ e $t = 9,6$.

1.3.1. Completa as afirmações seguintes selecionando a opção correta



de cada coluna para cada espaço.

I	II
a) negativa **b)** positiva **c)** zero	**a)** é crescente **b)** é decrescente **c)** atinge um máximo **d)** atinge um mínimo

1.3.1.1. Quando $t \in]0\,;\,5,4[$, a taxa de variação é __I__ e a função h __II__.

1.3.1.2. Quando $t \in]5,4\,;\,9,6[$, a taxa de variação é __I__ e a função h __II__.

1.3.1.3. Quando $t = 5,4$, a taxa de variação é __I__ e a função h __II__.

1.4. Completa o quadro seguinte, com base nas representações gráficas das funções h e g:

x	0		$5,4$		$9,6$
Sinal de g					
Monotonia de h					

1.5. Descreve o que aconteceu no instante $t = 5,4$, no contexto da situação referida, justificando a ocorrência através da relação existente entre a monotonia de h e o sinal da respetiva taxa de variação instantânea.

2. No dia do passeio à mata Nacional do Bussaco, a temperatura T, em graus Celsius, variou de acordo com a seguinte função:

$$T(t) = -\ 0,08t^2 + 2t + 6$$

sendo t o número de horas decorridas após as zero horas desse dia, $t \in [0,\ 24]$. Utiliza a calculadora gráfica para responderes aos seguintes itens.

2.1. Representa na calculadora gráfica o gráfico da função dada e faz o seu esboço no quadriculado seguinte.

2.2. Qual é o valor da taxa de variação quando $t = 16$? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

2.3. Determina a taxa de variação no instante a em que a temperatura é máxima.

2.4. Completa a seguinte tabela:

x	0		a		24
Sinal da taxa de variação de T					
Monotonia de T					

2.5. Com base na tabela anterior, escreve os intervalos de monotonia da função T.

3. Durante o passeio pela mata Nacional do Bussaco, a Francisca observou, novamente, uma águia-calçada que estava num pinheiro.

Quando se aproximou, a águia levantou voo. A altura h, em metros, da águia em relação ao solo, em função do tempo t, em segundos, desde que levantou voo, é dada por:

$$h(t) = t^3 - 10t^2 + 28t + 4$$

A Francisca conseguiu observar o voo da águia durante 7 segundos.

Utiliza a calculadora gráfica para responderes aos seguintes itens.

3.1. Determina a taxa média de variação da função h no intervalo $[0, 2]$. Interpreta o valor obtido no contexto apresentado.

3.2. Determina a taxa de variação da função h no instante inicial. Interpreta o valor obtido no contexto apresentado.

3.3. Durante o voo da águia verificou-se que existe um intervalo de tempo em que a taxa de variação da função é negativa. Identifica os extremos desse intervalo, justificando a tua resposta.

(Sugestão: Começa por representar graficamente a função h, com o auxílio da calculadora gráfica)

3.4. A Francisca chegou a casa e relatou o voo da águia à sua mãe. Elabora uma pequena descrição do voo da águia onde refiras os elementos recolhidos nos itens anteriores.

4. Num determinado dia, uma rádio local fez uma emissão especial comemorativa do 25 de Abril de 1974, durante o dia 25 de abril de 2024. A emissão começou às 0 horas desse dia e durou 24 horas.
Durante a emissão, a temperatura ambiente no estúdio de rádio foi variando, por influência da climatização, do número de pessoas presentes e dos aparelhos eletrónicos em funcionamento, entre outros fatores.
Admite que, no estúdio:
   - entre as 0 horas e as 10 horas, a temperatura ambiente esteve sempre a aumentar;
   - durante toda a emissão, o valor máximo da temperatura ambiente ocorreu às 20 horas.

   Seja f a função que faz corresponder o tempo, t, em horas, decorrido desde o início da emissão, ao valor da temperatura ambiente, em graus Celsius, no estúdio, no dia 25 de abril de 2024.
   Seja V a função que dá a taxa de variação da função f para cada valor de t. Na figura seguinte, estão representados dois gráficos, A e B e assinalados os respetivos zeros, 10 e 20.

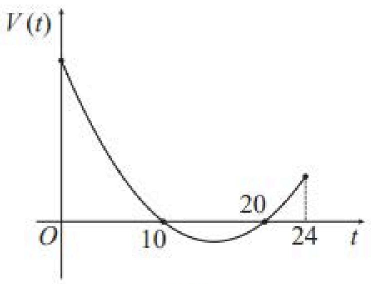


Gráfico A

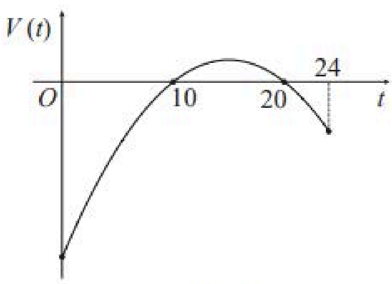


Gráfico B

   Justifica que nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função V. Apresenta uma razão para rejeitar cada um dos gráficos.

Adaptado de exame nacional de Matemática B, 2024 – 2.ª fase

Tarefa 4

Halloween

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos utilizem os conhecimentos adquiridos sobre taxa de variação na resolução de problemas de otimização.

Conhecimentos prévios dos alunos: Taxa média de variação. Taxa de variação. Relação entre a taxa de variação e a monotonia de uma função.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a tarefa seja resolvida em pequenos grupos.

As conclusões deverão ser apresentadas e discutidas em grande grupo no final da tarefa ou, se se verificarem muitas dificuldades, no final de cada item.

Pode verificar-se alguma dificuldade dos alunos a distinguir as funções originais e a função taxa de variação, dificuldade que se poderá sentir na interpretação de dados.

Poderá haver a necessidade de o professor apoiar os alunos na interpretação dos enunciados. Os alunos também poderão revelar dificuldades no domínio da linguagem específica e nas justificações.

É importante o uso correto das unidades de medida , chamando a atenção dos alunos de que a unidade de medida da taxa de variação resulta das unidades de medida das variáveis independente e dependente da função original.

Tarefa 4

Halloween

Um grupo de amigos decidiu passar o dia de Halloween em Beja, em casa do tio do Joaquim Aventureiro.

1. O grupo de amigos adora aviões e descobriram que a Força Aérea Portuguesa está a testar um novo avião na sua base, em Beja. Os amigos decidiram ir visitar a base de Beja para assistir ao teste realizado. O teste durou exatamente 5 minutos.
   Seja A a função que dá a altitude do avião, em quilómetros, t minutos após o início do teste.
   Seja V a função que dá a taxa de variação da função A em cada instante t, definida por:

$$V(t) = 3t^2 - 14t + 10$$

1.1. Durante o teste, o avião atingiu uma **altitude máxima** e uma **altitude mínima**.

1.1.1. Em que instantes ocorreram? Apresenta o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades.
Para responderes ao item, percorre as seguintes etapas:

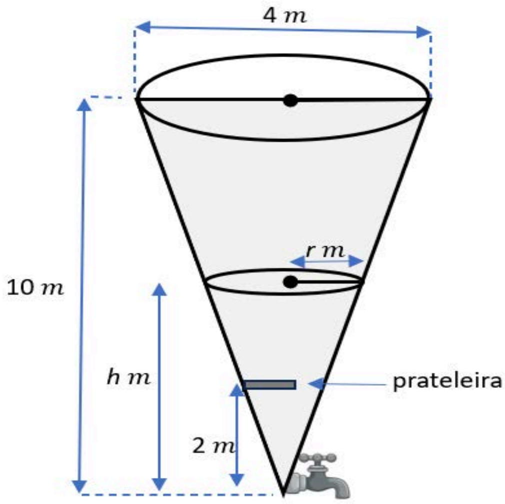
- Recorrendo à calculadora, obtém a representação gráfica de V, no contexto apresentado;
- Constrói um quadro que relaciona o sinal da função V com a monotonia da função A;
- Apresenta os valores pedidos.

1.1.2. Consegues determinar essas altitudes? Justifica a tua resposta.

1.2. Interpreta, no contexto descrito, o significado de

$V(2) = -6$ e de $V(4,5) = 7,75$

2. O tio do Joaquim Aventureiro foi passar uma semana à selva à procura de uma esmeralda que pertence à tribo Quetzalcoatl e que foi roubada por uma outra tribo. A tribo que roubou a esmeralda escondeu-a num tanque com a forma de um cone invertido, como mostra o esquema ao lado. O cone tem 10 metros de altura e o diâmetro da base mede 4 metros. A esmeralda encontra-se numa prateleira. A tribo encheu, até ao cimo, o tanque com um líquido venenoso.



O Joaquim Aventureiro propôs uma atividade para a noite de Halloween baseada numa aventura do seu tio, construindo mesmo um tanque em tamanho real.

No fundo do tanque existe uma torneira que o permite esvaziar. Quando se abre a torneira, o líquido começa a sair de modo que a altura, h, em metros, do líquido no tanque é dada por:

$$h(t) = 10 + \frac{1}{1600}\left(t^3 - 1200t\right)$$

onde t (em minutos) é o tempo decorrido após a abertura da torneira até o tanque ficar vazio.

2.1. Determina o tempo que leva a esvaziar o tanque.

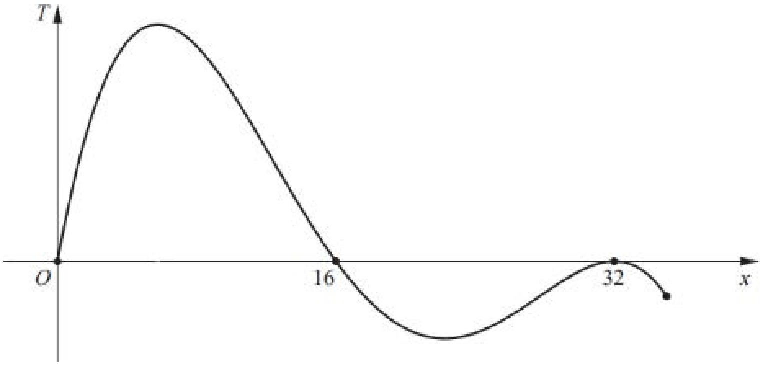
2.2. A prateleira onde se encontra a esmeralda está a 2 metros do vértice do cone. Só podem entrar no tanque quando o líquido atingir a prateleira. Quanto tempo têm que esperar até conseguirem entrar no tanque? Apresenta o resultado em minutos e segundos com os segundos arredondados às unidades. Nos cálculos intermédios utiliza 3 casas decimais.

2.3. Calcula a taxa média de variação no intervalo $[2\,,\,10]$ indicando a sua unidade de medida.

2.4. Seja F a função que dá a taxa de variação da função h, para cada valor de t.
Interpreta no contexto do problema, o facto de $F(t) < 0$ para qualquer valor de $t \in [0\,,\,20]$.

3. O Joaquim Aventureiro propôs uma outra atividade. Fazer uma prova de BTT noturna com algumas surpresas doces e travessuras. O Tomé fez treinos de bicicleta, no ginásio, para se preparar para essa prova. Seja T a função que dá a taxa de variação da velocidade registada na bicicleta do Tomé durante um desses treinos, x minutos após o seu início.

Na figura seguinte, apresenta-se a representação gráfica da função T, com $0 \leq x \leq 35$.



Tal como a figura ilustra, os zeros da função T são: 0, 16 e 32.

Em que instante é que a velocidade foi máxima durante esse treino? Justifica a tua resposta.

Sugestão: Para resolveres este item deverás percorrer as seguintes etapas:

- Construir a tabela que relaciona o sinal da função T com a monotonia da função V, velocidade registada na bicicleta do Tomé durante o treino, x minutos após o seu início;
- Determinar o instante, x, em que a velocidade, V, foi máxima.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2022, 2.ª fase

Tarefa 5

Clientes Felizes

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Regressão associada a funções polinomiais. Taxa média de variação e taxa de variação. Utilização da calculadora gráfica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regressão associada a funções polinomiais. Taxa média de variação e taxa de variação. Utilização da calculadora gráfica.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica. Equipamento digital com acesso à internet.

Notas e sugestões:
Esta tarefa deverá ser resolvida em pequenos grupos.
As conclusões dos itens 1. e 2. deverão ser apresentadas e discutidas em grande grupo antes dos alunos resolverem o item 3. No final deste último, as conclusões também deverão ser apresentadas e discutidas por todos os alunos da turma.
Nos itens 1. e 2. pretende-se que os alunos recorram à regressão para encontrarem os modelos que melhor se ajustam às situações apresentadas. Nesta fase, os alunos poderão ter a tendência de só utilizarem a regressão linear, pelo que o professor poderá sugerir-lhes outro tipo de regressões.
Relativamente ao item 3., poderá ser mais complicado para os alunos uma vez que terão de modelar as situações analiticamente.
Neste item existe o recurso a uma apliqueta para ajudar a visualização e a compreensão da situação apresentada. Apesar de a resolução estar orientada, é provável que surjam algumas dificuldades.
Poderá haver a necessidade, em algumas turmas, de o professor apoiar a interpretação dos enunciados e na orientação e desenvolvimento da tarefa, especialmente na obtenção das regressões na calculadora gráfica, e também no trabalho analítico que permite a modelação das várias situações propostas.
A ajuda do professor poderá igualmente ser importante na elaboração das justificações, na medida em que se pretende a utilização de linguagem específica e a redação de pequenos textos envolvendo a comunicação matemática.

Tarefa 5

Clientes Felizes

Nos problemas de otimização, nem sempre tens a expressão que te permite determinar a taxa de variação. Nesta tarefa, deverás modelar as situações apresentadas de modo a obteres respostas aos problemas que te são colocados.

1. O supermercado “Clientes Felizes” pretende construir uma caixa de areia de formato retangular para as crianças brincarem no seu espaço exterior. Um dos funcionários considerou que seriam necessários 20 metros de madeira para construir a caixa. Pretende construí-la num canto formado por dois edifícios pertencentes ao supermercado como ilustra a figura seguinte.

Considera l, em metros, a largura da caixa de areia.

1.1. Justifica que $l \in \,]0, \, 20[$.

1.2. Recorre à [apliqueta]() e completa a tabela seguinte, com os valores indicados para l (movimenta o seletor na apliqueta).

l (largura)	1	5	8	12	18
$A(l)$ (área)					

1.3. Qual é o tipo de função que modela a área da caixa de areia, A, em função da sua largura, l ?

1.4. Recorre à calculadora gráfica e, usando o modelo de regressão adequado, encontra uma expressão analítica que possa definir a função A.

1.5. Utiliza o modelo encontrado no item anterior para determinar o valor de l, com $l \in]0, \, 20[$, para o qual a área é máxima. Indica as dimensões da caixa de área máxima.

2. O supermercado "Clientes Felizes" está aberto entre as 10h e as 18h30min. Num certo dia, selecionaram-se cinco momentos para fazer o levantamento do número de clientes no supermercado . Os resultados encontram-se registados na tabela seguinte:

Hora (x)	10	12	14	16	18
N.º de clientes (N)	72	25	56	117	169

2.1. Determina a variação do número de clientes entre as 12 e as 16 horas.

2.2. Calcula $\frac{N(18)-N(12)}{18-12}$. No contexto apresentado, qual é o significado desta expressão?

2.3. Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número N de clientes presentes no supermercado, em função de x (hora do dia), é da forma $N(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Recorrendo a uma calculadora gráfica:

2.3.1. Representa a nuvem de pontos que relaciona as variáveis Hora (x) e N.º de clientes (N).

2.3.2. Determina as constantes a, b, c e d arredondadas às centésimas e escreve a expressão de $N(x)$ obtida.

Utiliza o modelo encontrado e responde aos itens seguintes.

2.4. Estima o número de clientes existentes no interior do supermercado uma hora após a abertura.

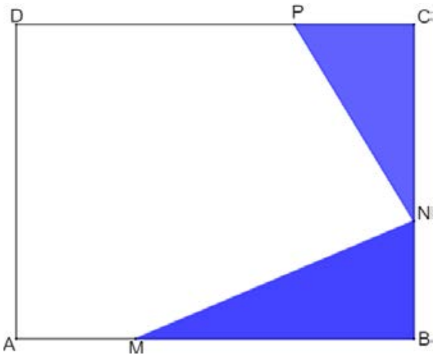
2.5. Existem dois momentos, durante o tempo em que o supermercado está aberto nesse dia, em que o número de clientes é igual a 60.
Com a ajuda da calculadora, determina-os e apresenta os resultados pedidos em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

2.6. Recorrendo à calculadora gráfica, determina:

2.6.1. a taxa de variação da função às 16 horas.

2.6.2. o momento do dia em que o número de clientes foi mínimo.
Apresenta esse momento em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

3. A Luísa pretende pintar um quadro para a zona dos frescos do supermercado "Clientes Felizes" sobre uma tela de formato retangular, com 40 centímetros de comprimento ($\overline{AB}$) e 32 centímetros de largura ($\overline{BC}$), como mostra a figura abaixo. A Luísa imaginou, no seu quadro, dois triângulos coloridos.



Seja $[ABCD]$ o retângulo que representa essa tela. A construção dos triângulos deve ser feita da seguinte forma:

- Sobre o lado $[AB]$, marca-se um ponto M;
- Sobre o lado $[BC]$, marca-se um ponto N;
- Sobre o lado $[CD]$, marca-se um ponto P;
- Os pontos M, N e P não coincidem com os vértices do retângulo;
- $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} \ = x$.

O objetivo da Luísa é encontrar a posição do ponto N no segmento de reta $[BC]$ (ou, de forma equivalente, o valor de x) de modo que a área da região azul seja máxima.
Acede à seguinte apliqueta e altera a posição do ponto N para visualizares diferentes configurações do quadro da Luísa.
Segue os seguintes passos e determina o valor de x que maximiza a área azul:

3.1. Justifica que $x \in]0, 32[$;

3.2. Justifica que $\overline{BM} = 40 - x$;

3.3. Exprime $\overline{CN}$ em função de x ;

3.4. Mostra que a área do triângulo $[BMN]$ é igual a $\frac{40x-x^2}{2}$;

3.5. Mostra que a área do triângulo $[PCN]$ é igual a $\frac{32x-x^2}{2}$;

3.6. Mostra que a função f que dá a área da região colorida em função de x, pode ser definida por $f(x) = 36x - x^2$;

3.7. Recorre à calculadora gráfica e determina a solução do problema, ou seja, para que valor de x é que a área da região azul é máxima.