# PRODUTO ESCALAR

## Matemática A
## 11.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

# Ficha técnica

## Título:
**Coletânea de tarefas das turmas piloto - Trigonometria (Matemática A 11.º ano)**

## Autoria e adaptação:
Professores das turmas piloto de Matemática A

## Revisão:
Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

## Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

## Data:
**Lisboa, abril de 2025**

# Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
*Coordenador*

# TEMA - PRODUTO ESCALAR

| Aulas (50 min) | Nome da Tarefa | Tópicos/ Subtópicos | Objetivos de Aprendizagem | Tipo de trabalho | Ideias chave das AE | Áreas de Competência do PASEO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Tarefa 1<br>Declive e inclinação de uma reta no plano | **Produto escalar**<br><br>Declive e inclinação de uma reta | • Reconhecer e aplicar na resolução de problemas a relação entre a inclinação e o declive de uma reta no plano. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Resolução de Problemas, modelação e conexões<br>• Comunicação Matemática<br>• Práticas enriquecedoras e criatividade | • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) |
| 1 | Tarefa 2<br>Produto escalar de dois vetores a partir das suas coordenadas | **Produto escalar**<br><br>Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:<br><br>- definição e propriedades<br><br>- expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado | • Conhecer o conceito de produto escalar de dois vetores, no plano e no espaço, definido com base nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Tarefas e recursos educativos<br>• Organização do trabalho dos alunos<br>• História da matemática | • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) |
| 1 | Tarefa 3<br>Produto escalar e o cosseno | **Produto escalar**<br><br>Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:<br><br>- definição e propriedades | • Conhecer que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles (sem demonstração). | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Resolução de Problemas, modelação e conexões<br>• Comunicação Matemática | • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Tarefa 4<br>Produto escalar e ângulo | **Produto escalar**<br><br>Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:<br><br>- definição e propriedades | • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente: relacionando o ângulo de dois vetores não nulos com o sinal do respetivo produto escalar. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Recurso sistemático à tecnologia<br>• Tarefas e recursos educativos | • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)<br>• Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I) |
| 2 | Coleção de problemas I<br>Produto escalar | **Produto escalar**<br><br>Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:<br><br>- definição e propriedades | • Resolver problemas variados que envolvem noção de produto escalar e propriedades (plano e espaço), ângulo entre vetores (plano e espaço), inclinação da reta (plano). | Trabalho em grupo | • Resolução de Problemas, modelação e conexões<br>• Comunicação Matemática<br>• Raciocínio e lógica Matemático | • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) |
| 2 | Tarefa 5<br>Ângulo de duas retas | **Produto escalar**<br><br>Ângulo de duas retas | • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente:determinando o ângulo formado por duas retas. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Tarefas e recursos educativos<br>• Raciocínio e lógica Matemático | • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Tarefa 6<br>Declive de retas perpendiculares | **Produto escalar**<br><br>Perpendicularidade de vetores e de retas | • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente: estabelecendo uma relação entre os declives de duas retas perpendiculares no plano. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Recurso sistemático à tecnologia<br>• Tarefas e recursos educativos<br>• Raciocínio e lógica matemática | • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) |
| 2 | Tarefa 7<br>Equações cartesianas de planos no espaço | **Produto escalar**<br><br>Equações cartesianas de planos no espaço | • Determinar a equação cartesiana de um plano dados um ponto e um vetor normal. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Recurso sistemático à tecnologia<br>• Tarefas e recursos educativos<br>• Práticas enriquecedoras e criatividade | • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) |
| 2 | Tarefa 8<br>Distância de um ponto a um plano | **Produto escalar**<br><br>Equações cartesianas de planos no espaço | • Resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; distância de um ponto a um plano; e posição relativa de retas e planos. | Trabalho a pares, com discussão final em turma | • Recurso sistemático à tecnologia<br>• Tarefas e recursos educativos<br>• Raciocínio e lógica Matemático | • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Coleção de problemas II<br>Retas e planos no espaço | **Produto escalar**<br><br>Equações cartesianas de planos no espaço | • Resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; e posição relativa de retas e planos. | Trabalho em grupo | • Resolução de Problemas, modelação e conexões<br>• Comunicação Matemática<br>• Raciocínio e lógica Matemático | • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)<br>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)<br>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) |

# Tarefa 1

## Declive e inclinação de uma reta no plano

1. Abre a apliqueta do Geogebra https://www.geogebra.org/calculator/tj5ykq6b .

Nesta apliqueta está representada, em referencial $xOy$, a reta $OA$, em que o ponto $O$ é a origem do referencial e o ponto $A$ tem ordenada positiva.

1.1. Representa sobre o eixo $Ox$ um ponto, $B$, de abcissa positiva e obtém a amplitude do ângulo orientado $BOA$.

| A amplitude do ângulo $BOA$ assim obtido chama-se **inclinação da reta** $OA$. |
|---|
| A **inclinação de uma reta** que contém a origem é a amplitude do ângulo convexo formado pelo semieixo positivo das abcissas e a semirreta $\dot{O}P$, onde $P$ é um qualquer ponto dessa reta de ordenada positiva. |

1.2. Preenche a seguinte tabela, alterando na apliqueta as coordenadas do ponto $A$. Para cada posição de $A$, regista na tabela a inclinação da reta $OA$, $\alpha$, em graus; a sua tangente; e o declive da reta $OA$.

| $A$ | $\alpha$ | $tg\ \alpha$ | declive de $OA$ (m) |
|---|---|---|---|
| $(1, 2)$ | | | |
| $(1, 1)$ | | | |
| $(-\ 2, 1)$ | | | |
| $(2, 6)$ | | | |
| $(1, 3)$ | | | |

1.3. Observando os valores da tabela, estabelece uma conjetura que relacione o declive da reta $OA$ com a tangente da respetiva inclinação e escreve-a em linguagem matemática.

Testa a tua conjetura arrastando o ponto $A$ para diferentes posições.

1.4. Prova que a tua conjetura é verdadeira.

Sugestão: Considera um ponto $A\left(x_A, y_A\right)$ e um ponto $B$ do eixo $Ox$ com a mesma abcissa do ponto $A$.

- Calcula o declive da reta $OA$ usando as coordenadas dos pontos $O$ e $A$.
- Considera o triângulo $[OAB]$ e determina a tangente do ângulo $BOA$.

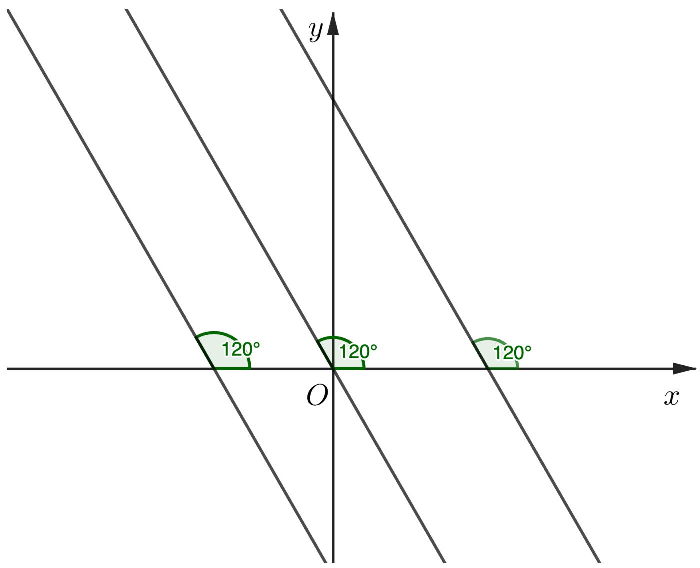
1.5. Calcula a inclinação das retas definidas pelas equações seguintes:

1.5.1. $y = x$

1.5.2 . $y = \sqrt{3}x$

1.5.3. $y =- x$

A inclinação de uma reta, $r$, paralela à reta $OA$ tem a mesma inclinação que $OA$. Qualquer reta paralela ao eixo $Ox$ tem inclinação nula.




2. Determina, em graus, o valor, arredondado às décimas, da inclinação da reta definida pelas equações seguintes:

2.1. $y = 2x + 3$

2.2. $y =- \frac{3}{2}x + 2$

2.3. $y =- 2$

2.4. $(x, y) = (1, 0) + k(3, \sqrt{3}),\ k \in \mathbb{R}$

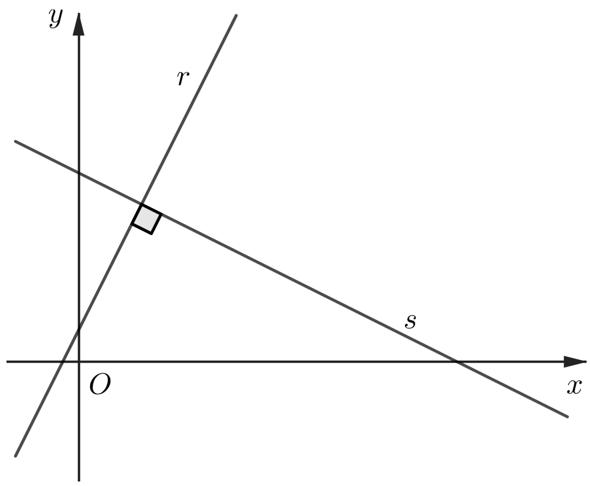
3. Seja $\alpha$ a inclinação da reta $r$ e $P$ um ponto que pertence a $r$.
Determina a equação reduzida da reta $r$, sabendo que:

3.1. $\alpha = 30^o$ e $P$ tem coordenadas $(0, 2)$ ;

3.2. $\alpha = 0^o$ e $P$ tem coordenadas $(2, -3)$ ;

3.3. $\alpha = 135^o$ e $P$ tem coordenadas $(1, 0)$.

4. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. $xOy$, duas retas perpendiculares, $r$ e $s$, que se intersetam no ponto de coordenadas $(2, 5)$.
Sabe-se que a reta $r$ é definida pela equação $y = 2x + 1$.




4.1. Determina, em graus, a inclinação da reta $s$. Apresenta esse valor arredondado às décimas.

4.2. Determina a equação reduzida da reta $s$.

# Tarefa 1

### Declive e a inclinação de uma reta no plano

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**
Esta tarefa tem como objetivo introduzir a definição de inclinação de uma reta no plano e dar a conhecer a relação entre o declive de uma reta no plano, estudado em anos anteriores, com a tangente trigonométrica da inclinação dessa mesma reta.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Coordenadas de pontos no plano, equações de retas não verticais, em particular o declive, e tangente de um ângulo generalizado.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à internet e ao Geogebra.

**Notas para o professor:**
Os alunos têm à disposição uma apliqueta do Geogebra onde começam por obter a inclinação da reta desenhada. Alterando as coordenadas de um ponto A, vão obtendo diferentes retas, tendo que, para cada uma delas, registar a sua inclinação, a tangente trigonométrica dessa inclinação e o declive da respetiva reta. Ao fim de alguns registos pretende-se que consigam conjeturar a igualdade entre a tangente trigonométrica da inclinação de uma reta e o seu declive. De seguida são conduzidos à prova dessa conjetura.

# Tarefa 2

**Produto escalar de dois vetores a partir das suas coordenadas**

1. Abre a apliqueta do Geogebra em https://www.geogebra.org/m/pzzrfnre e calcula na janela de Álgebra o "produto" dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (u*v), representados no referencial $xOy$.

2. Preenche a seguinte tabela, alterando na apliqueta as coordenadas dos vetores ($\vec{u}$ e $\vec{v}$) e observando os valores de u*v na janela de Álgebra.

| $\vec{u}$ | $\vec{v}$ | u*v $\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$ |
|---|---|---|
| $(2,\ 2)$ | $(3,\ 1)$ | |
| $(1,\ 2)$ | $(3,\ 1)$ | |
| $(2,\ 2)$ | $(1,\ 1)$ | |
| $(3,\ 2)$ | $(1,\ 1)$ | |
| $(3,\ 2)$ | $(2,\ 2)$ | |
| $(3,\ 2)$ | $(4,\ 0)$ | |

3. Conjetura uma relação que permita calcular $\vec{u} \bullet \vec{v}$, sabendo que $\vec{u}\left(u_1,\ u_2\right)$ e $\vec{v}\left(v_1,\ v_2\right)$, e usa essa relação para preencher a tabela. De seguida verifica se obténs os mesmos valores recorrendo ao Geogebra.

| $\vec{u}$ | $\vec{v}$ | u*v $\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$ |
|---|---|---|
| $\left(u_1,\ u_2\right)$ | $\left(v_1,\ v_2\right)$ | |
| $(-\ 1, 2)$ | $(5, 1)$ | |
| $(4, 2)$ | $(-\ 2, 4)$ | |
| $(3, 4)$ | $(3, 4)$ | |
| $(-\ 1, 0)$ | $(0, 9)$ | |

| |
|---|
| $\vec{u} \bullet \vec{v}$ chama-se **produto escalar** dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ . |
| No plano, sendo $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$,<br>$\vec{u} \bullet \vec{v}$ =_____________ |

4. Considera agora um referencial no espaço $Oxyz$.

   Formula uma conjetura acerca do cálculo do produto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ com vetores do espaço e usa-a para calcular o $\vec{u} \bullet \vec{v}$ , sendo $\vec{u}(1, 2, 3)$ e $\vec{v}(2, 2, 2)$.

5. Recorre ao GeoGebra 3D para testar a tua conjetura, usando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ , e também outros vetores com coordenadas diferentes.

| |
|---|
| No espaço, sendo $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$,<br>$\vec{u} \bullet \vec{v}$ =_____________ |

6. Considerando o vetor $\vec{v}(3, 4)$, dá exemplos de coordenadas do vetor $\vec{u}$ , não nulo, de modo que:

   6.1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = 10$ ;

   6.2. $\vec{u} \bullet \vec{v} = -1$ ;

   6.3. $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ .

7. Considerando o vetor $\vec{v}(1, 2, 3)$, escreve as coordenadas de um vetor $\vec{u}$, não nulo, de modo que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

# Tarefa 2

## Produto escalar de dois vetores a partir das suas coordenadas

### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**
O objetivo desta tarefa é dar a conhecer o conceito de produto escalar de dois vetores,  representados pelas suas coordenadas num referencial ortonormado, tanto no plano como no espaço.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Coordenadas de vetores no plano e no espaço

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com ligação à internet e ao GeoGebra.

**Notas para o professor:**
Os alunos vão recorrer ao Geogebra para obterem o resultado do produto escalar de vetores, para vários casos, e formular uma conjetura sobre a forma de o calcular. Em seguida, devem usar o próprio software para validar a sua conjetura.

# Tarefa 3

## Produto escalar e o cosseno

1. Abre a apliqueta do Geogebra em https://www.geogebra.org/m/ubskra3j .

   1.1. Determina a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados no referencial $xOy$.

   Nota: Para determinar o ângulo, seleciona a ferramenta ângulo ( ) e, de seguida, clica sobre cada um dos vetores.

   1.2. Arrasta um dos vetores (sem clicar nos seus extremos) e observa a amplitude do ângulo marcado. O que podes concluir?

   1.3. Descreve a relação entre os vetores para que o ângulo seja:
   - nulo;
   - reto;
   - raso.

2. Calcula, na janela de Álgebra, o cosseno do ângulo formado pelos dois vetores e relaciona o sinal do cosseno com o ângulo formado pelos vetores.

3. Determina, na janela de Álgebra, as normas de cada um dos vetores (podes usar a ferramenta “Distância ou comprimento”).

4. Calcula na janela de Álgebra o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

5. Alterando na apliqueta as coordenadas dos vetores ($\vec{u}$ e $\vec{v}$) e observando os valores de cada coluna na janela de Álgebra, preenche a seguinte tabela:

| $\vec{u}$ | $\vec{v}$ | $\vec{u} \bullet \vec{v}$ | $\left\|\vec{u}\right\|$ | $\left\|\vec{v}\right\|$ | $\cos\left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-4,\ 0)$ | $(5,\ 0)$ | | | | |
| $(3,\ 2)$ | $(-4,\ 6)$ | | | | |
| $(3,\ 4)$ | $(6,\ 8)$ | | | | |
| $(1,\ 0)$ | $(3,\ 4)$ | | | | |
| $(2,\ 0)$ | $(3,\ 4)$ | | | | |
| $(-2,\ 0)$ | $(3,\ 4)$ | | | | |

6. De acordo com os valores da tabela do item 5., estabelece uma relação algébrica entre $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e os valores de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\cos(\vec{u}\hat{\ }\vec{v})$.

| |
|---|
| A relação anterior também é válida para vetores do espaço. |

7. Considera um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado 2. Calcula o valor de $\vec{AB} \bullet \vec{AC}$.

8. Considera o quadrado $[ABCD]$, em que $[AB]$ e $[AD]$ são dois lados do quadrado. Calcula o valor de $\vec{AB} \bullet \vec{AD}$.

9. Sendo $[PQ]$ um diâmetro de uma circunferência de raio $r$ e centro em $O$, exprime o valor de $\vec{OP} \bullet \vec{OQ}$, em função de $r$.

# Tarefa 3

### Produto escalar e o cosseno

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos, por um lado, relembrem e visualizem o ângulo entre dois vetores e, por outro lado, relacionem o resultado do produto escalar de vetores com o produto das suas normas pelo cosseno do ângulo por eles formado.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Coordenadas de vetores no plano, ângulo de dois vetores no plano, norma de um vetor e cosseno de um ângulo generalizado.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com ligação à internet e ao GeoGebra.

**Notas para o professor:**
Recorrendo à aplicação GeoGebra, os alunos calculam o produto escalar, as normas e o cosseno do ângulo formado por vários pares de vetores.
Pretende-se que os alunos, a partir dos cálculos registados numa tabela, estabeleçam uma conjetura acerca da relação entre os valores obtidos e concluam que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo entre eles formado.

# Tarefa 4

## Produto escalar e ângulo

1. Abre a apliqueta do Geogebra em https://www.geogebra.org/m/htvpwatg, onde estão representados, num referencial $xOy$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   1.1. Calcula, na janela de Álgebra, o produto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

   1.2. Marca o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   1.3. Calcula o cosseno do ângulo formado pelos dois vetores.

   1.4. Arrasta o ponto $B$ de modo que o ângulo entre os dois vetores obtidos esteja compreendido entre $0$ e $180$ graus. Observa o sinal de $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e do $\cos\left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}\right)$ e preenche a tabela seguinte.

| $\alpha \quad \left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}\right)$ | 0 | | 90 | | 180 |
|---|---|---|---|---|---|
| sinal de $\vec{u} \bullet \vec{v}$ | | | | | |
| sinal de $\cos(\alpha)$ | | | | | |

   1.5. Qual é relação que encontras entre o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os sinais de $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e de $\cos\left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}\right)$? Faz uma conjetura.

   1.6. Encontra uma justificação para a relação que identificaste no item anterior.

   1.7. Altera a posição dos pontos $A$ e $B$ de forma a variar o ângulo formado pelos vetores. A tua conjetura continua a verificar-se? Escreve-a em linguagem matemática.

2. Considera os vetores $\vec{a}(3, 5)$ e $\vec{b}(-\ 2, 1)$. São perpendiculares? Como podes verificar se os vetores são perpendiculares sem os representar geometricamente? Explica a tua resposta.

3. Averigua se os pares de vetores seguintes são perpendiculares. Para os pares de vetores não perpendiculares, diz se o ângulo por eles formado é agudo ou obtuso.

3.1. $\vec{a}(2, 3)$ e $\vec{b}(4, -1)$

3.2. $\vec{c}(5, 0)$ e $\vec{d}(0, -2)$

3.3. $\vec{e}(-3, 8)$ e $\vec{f}(8, 3)$

3.4. $\vec{g}(-1, -2)$ e $\vec{h}(4, 2)$

3.5. $\vec{i}(1, 2, 3)$ e $\vec{j}(3, 2, -1)$

3.6. $\vec{k}(3, 2, 4)$ e $\vec{l}(0, 4, -2)$

3.7. $\vec{m}(4, 5, 0)$ e $\vec{n}(2, -2, 7)$

4. Considera os vetores $\vec{u}(3, 4)$ e $\vec{v}(-6, 8)$.

4.1. Determina as normas dos dois vetores.

4.2. Determina $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

4.3. Determina o $\cos\left(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}\right)$.

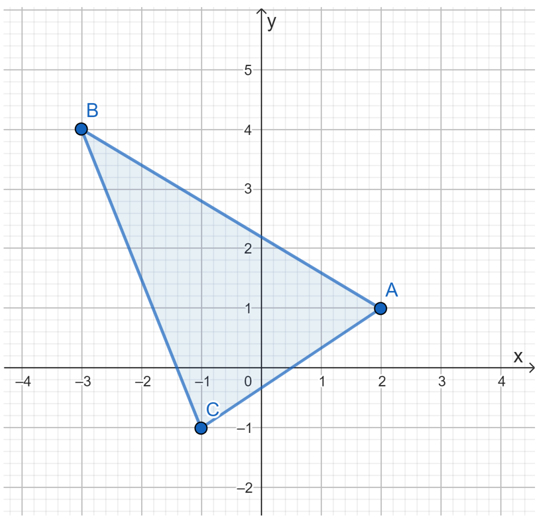
4.4. Determina o ângulo formado por eles.

Como $\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}\right)$, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então

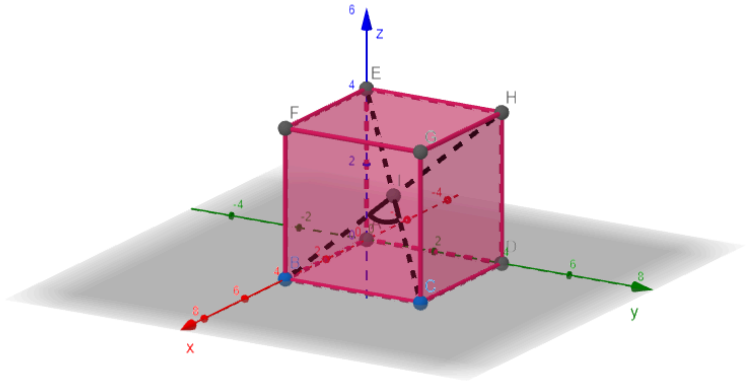
$\cos\left(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}\right)$ = -----------

5. Na figura ao lado está representado, em referencial $xOy$, o triângulo $[ABC]$ em que $A(2, 1)$, $B(-3, 4)$ e $C(-1, -1)$.

Determina as amplitudes dos ângulos internos desse triângulo e verifica que a sua soma é $180$ graus.



6. No referencial $Oxyz$, considera o cubo de aresta 4 representado na figura seguinte.




Determina a amplitude do ângulo formado por duas diagonais espaciais do cubo.

# Tarefa 4

### Produto escalar e ângulo

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa tem como objetivo levar os alunos a relacionar o valor do produto escalar entre dois vetores com o ângulo por eles formado, e deduzir a forma de determinar o ângulo formado por dois vetores, partindo das definições de produto escalar, estudadas nas aulas anteriores.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Classificação de ângulos. Definição de produto escalar (com e sem coordenadas).

**Materiais e recursos:** Computador/tablet/telemóvel ou calculadora gráfica. Software de geometria dinâmica (Geogebra)

**Notas para o professor:**

No item 1., o completamento da tabela deverá ser feito recorrendo ao manuseamento dos vetores criados na apliqueta do Geogebra e usando, também, a janela de Álgebra.

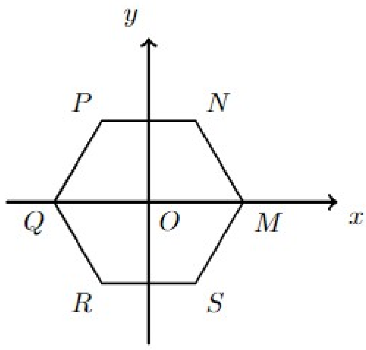
Com o item 4., pretende-se que os alunos registem a fórmula que permite determinar o ângulo entre dois vetores.

Sugere-se que o tópico Produto Escalar seja trabalhado em paralelo no plano e no espaço. Assim, esta tarefa inclui itens com referenciais Oxy e Oxyz  (plano e espaço).

# Coleção de problemas I

## Produto escalar

1. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $xOy$, um hexágono regular $[MNPQRS]$ centrado na origem.
Sabe-se que o vértice $M$ tem coordenadas $(1, 0)$, e que o vértice $N$ pertence ao primeiro quadrante.
Qual é a equação reduzida da reta $MN$ ?




(A) $y =- \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$ (B) $y =- \sqrt{3}\,x + \sqrt{6}$

(C) $y =- x + 2$ (D) $y =- x + 1$

Exame - 2020, Ép. especial

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto $P$ que tem ordenada igual a $-4$ e cota igual a $1$ .
Considere também o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(2, 3, 6)$ .
Sabe-se que os vetores $\vec{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares.
Qual é a abcissa do ponto $P$ ?

(A) $1$ (B) $2$ (C) $3$ (D) $4$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

3. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12.
Qual é o valor do produto escalar $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ?

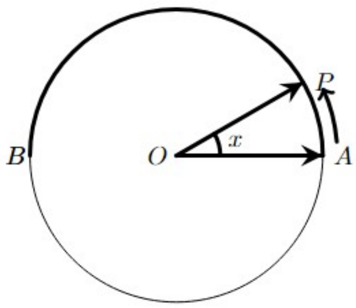
(A) $-3$ (B) $-2$ (C) $2$ (D) $3$

Exame - 2015, Ép. especial

4. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro $O$ e raio $1$.

Os pontos $A$ e $B$ são extremos de um diâmetro da circunferência.

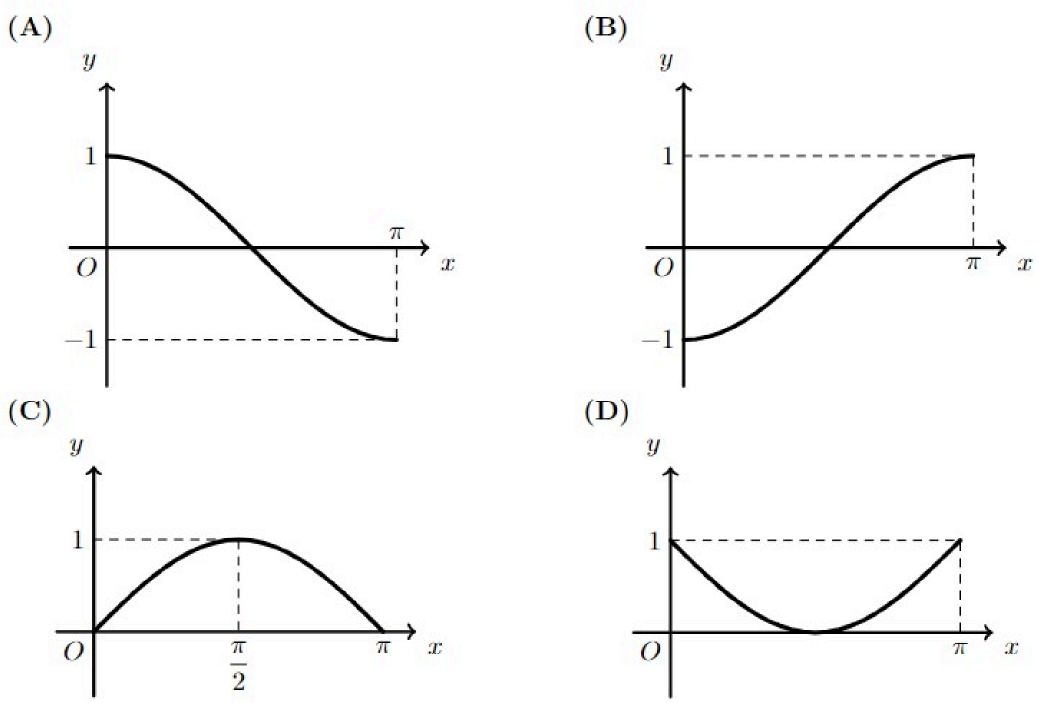
Considere que um ponto $P$, partindo de $A$, se desloca sobre o arco $AB$, terminando o seu percurso em $B$.




Para cada posição do ponto $P$, seja $x$ a amplitude, em radianos, do ângulo $AOP$.

Seja $f$ a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\vec{OA} \bullet \vec{OP}$ .

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $f$ ?




Exame – 2001, Prova para militares

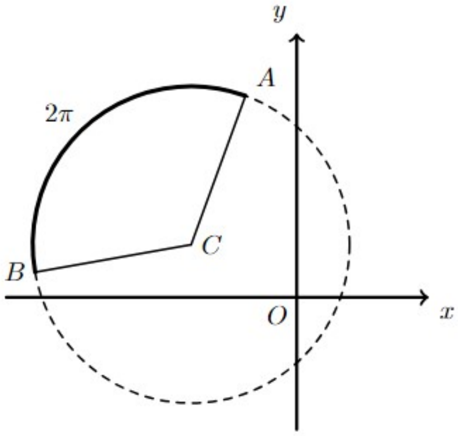
5. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. $Oxy$, a circunferência de equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ .

O ponto $C$ é o centro da circunferência.

$A$ e $B$ são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência $AB$ tem comprimento $2\pi$ .

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .




Exame - 2022, 1.ª fase

6. No referencial o.n. $xOy$ da figura ao lado, estão representados o quadrado $[OABC]$ e o retângulo $[OPQR]$ .

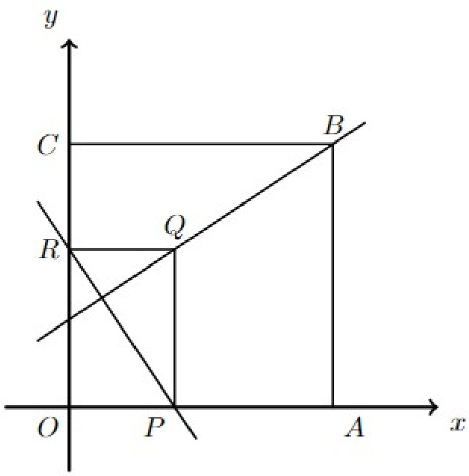
Os pontos $A$ e $P$ pertencem ao semieixo positivo $Ox$ e os pontos $C$ e $R$ pertencem ao semieixo positivo $Oy$ .

O ponto $Q$ pertence ao interior do quadrado $[OABC]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{OA} = a$
- $\overline{OP} = b$
- $\overline{RC} = b$

Prove que as retas $QB$ e $RP$ são perpendiculares.



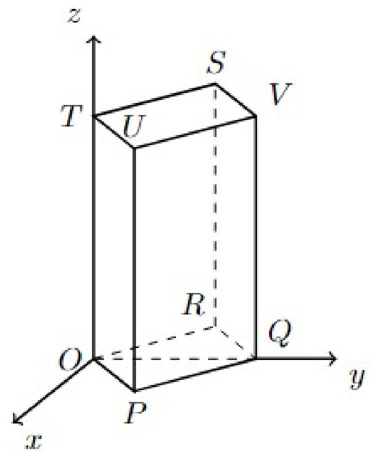

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

7. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$ .

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano $xOy$ ;
- o vértice $Q$ pertence ao eixo $Oy$ e o vértice $T$ pertence ao eixo $Oz$ ;
- o plano $STU$ tem equação $z = 3$ .

Determine o valor do produto escalar $\vec{UP} \cdot \vec{RS}$ .




Exame - 2017, 1.ª fase

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto $P$ de coordenadas $(1, 1, 1)$, pertencente a essa superfície esférica.

Seja $R$ o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo $ROP$ .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame - 2018, Ép. especial

9. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQURST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

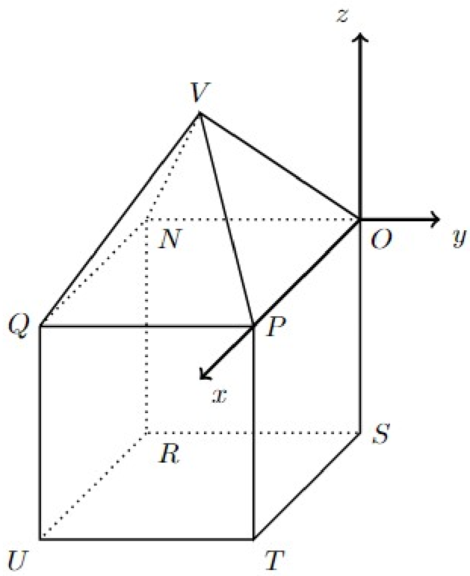
Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano $xOy$ ;
- o ponto $P$ pertence ao eixo $Ox$ ;
- o ponto $U$ tem coordenadas $(4, \ -4, \ -4)$ .

Considere um ponto $A$, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto $U$ .

Sabe-se que $\vec{OT} \cdot \vec{OA} = 8$ .

Determine a cota do ponto $A$ .

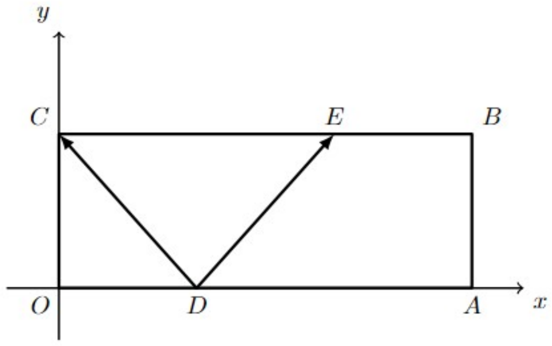



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

10. Na figura seguinte, está representado, em referencial o.n. $Oxy$, o retângulo $[OABC]$ .

Sabe-se que:

- o ponto $A$ pertence ao semieixo positivo $Ox$ ;
- o ponto $C$ pertence ao semieixo positivo $Oy$ ;
- o ponto $D$ pertence ao segmento de reta $[OA]$ ;
- o ponto $E$ pertence ao segmento de reta $[CB]$ ;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$ ;
- $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$ ;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$ .




Determine $\overline{OA}$ .

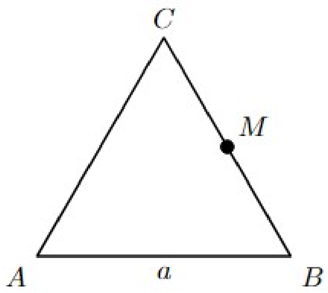
Exame - 2023, 2.ª fase

11. Na figura ao lado, está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ .

Seja $a$ o comprimento de cada um dos lados do triângulo.

Seja $M$ o ponto médio do lado $[BC]$.

Mostre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$ .




Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

# Coleção de problemas I

**Produto escalar**

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**
Com este conjunto de questões pretende-se proporcionar um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores, no contexto de resolução de problemas.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Relação entre declive e inclinação de uma reta e noção de produto escalar de vetores.

**Materiais e recursos:** Calculadora e Geogebra.

**Notas para o professor:**
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. Eventualmente o professor poderá sugerir outras questões para que os alunos possam continuar o desenvolvimento deste trabalho fora da sala de aula. Se alguns alunos não conseguirem resolver todas as propostas durante o tempo disponibilizado pelo professor, essa diferença não impede o objetivo essencial da tarefa.

# Tarefa 5

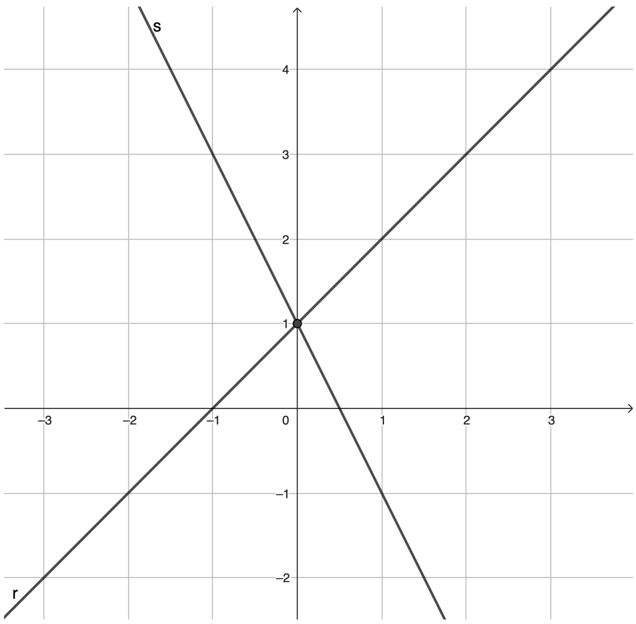
## Ângulo de duas retas

1. Considera as retas , $r$ e $s$, definidas em referencial ortonormado de um plano, por $y = x + 1$ e $y =- 2x + 1$, respetivamente.

   1.1. Escolhe um vetor diretor $\vec{u}$ da reta $r$ e um vetor diretor $\vec{v}$ da reta $s$. Determina a amplitude do ângulo por eles formado, em graus, com aproximação às décimas.

   1.2. Justifica que o vetor $-\vec{v}$ , simétrico de $\vec{v}$, é, também, um vetor diretor da reta $s$ e determina a amplitude, em graus, do ângulo que este forma com o vetor $\vec{u}$ .

   1.3. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial ortonormado $xOy$, as duas retas, $r$ e $s$.




   1.3.1. Desenha, na figura, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$.

   Qual é a relação que existe entre eles?

   1.3.2. Como podes observar na figura, as duas retas determinam quatro ângulos.

   Justifica que estes ângulos têm amplitudes iguais dois a dois.

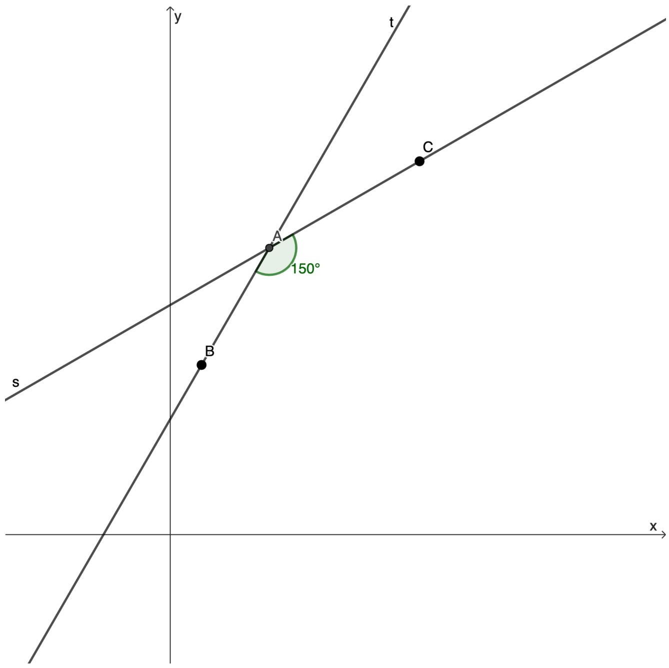
| |
|---|
| **O ângulo de duas retas paralelas** é nulo.<br>**O ângulo de duas retas concorrentes** é o menor ângulo por elas formado. |
| **No espaço, o ângulo de duas retas** é o ângulo formado por duas retas concorrentes, paralelas às retas dadas. |

1.4. Usando a definição, qual é a amplitude do ângulo formado pelas retas $r$ e $s$?

2. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial ortonormado $xOy$, as retas $s$ e $t$, o ponto de interseção das duas retas, $A$, o ponto $B$ da reta $t$ e o ponto $C$ da reta $s$ .

   Sabe-se que $B\widehat{A}C = 150^o$.

   Determina o ângulo das duas retas.




3. Considera o programa em Python disponível na ligação seguinte, que permite determinar o ângulo de dois vetores, definidos pelas suas coordenadas. Copia o programa e altera-o de modo a obteres o ângulo formado por duas retas no espaço, a partir dos seus vetores diretores.

Ângulo de dois vetores.ipynb

4. Determina a medida da amplitude do ângulo, em graus, formado pelas retas seguintes.

   4.1. $y = \frac{1}{2}x + 3$ e $(x, y) = (0, 1) + k\,(1, 2),\ k \in \mathbb{R}$, apresenta o resultado arredondado às décimas.

   4.2. $y =- 2x$ e $y = 3x + 2$

   4.3. $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k\,(1, -2, 1)\ k \in \mathbb{R}$ e
   $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k\,(1, 1, 1)\ k \in \mathbb{R}$

5. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(10, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(0, 5, 0)$. Determina a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas $AB$ e $BC$. Apresenta o valor pedido com aproximação às unidades.

# Tarefa 5

## Ângulo de duas retas

### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa tem como objetivo , a partir da equação reduzida da reta, relacionar o seu declive com o seu vetor diretor e, consequentemente, determinar o ângulo formado por duas retas (ângulo agudo ou reto), sem a obrigatoriedade de utilizar a fórmula que contém o valor absoluto do produto escalar.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Declive e vetor diretor de uma reta. Definição de produto escalar e ângulo entre vetores. Noções elementares de programação Python.

**Materiais e recursos:** Computador/tablet/telemóvel ou calculadora gráfica.

**Notas para o professor:**

Nesta tarefa é feita uma abordagem ao pensamento computacional com recurso à linguagem de programação Python, nomeadamente no cálculo do ângulo entre vetores e entre retas.

Assim, no item 3. o professor deverá ter o cuidado de esclarecer os comandos usados no programa em Python, caso os alunos sintam essa necessidade.

Pode também ser importante ajudar os alunos a incluir a condição "*if… else*" ou usar o valor absoluto do produto escalar. É importante que os alunos mobilizem experiências anteriores para ultrapassar esta dificuldade com autonomia, contudo, o professor deve intervir no sentido de impedir que as dificuldades sentidas pelos alunos sejam impeditivas de continuar o trabalho a desenvolver.

# Tarefa 6

## Declive de retas perpendiculares

**Parte I**

1. Abre a [apliqueta do Geogebra](#).

2. Marca o declive da reta, usando a ferramenta declive ( ).

3. Traça uma reta perpendicular à anterior e obtém o seu declive, usando a mesma ferramenta.

4. Arrasta um ponto da reta inicial, alterando o seu declive, regista, para cada par de retas os respectivos declives e conjetura uma relação entre os dois.
   Sugestão: Pode ser útil recorrer a uma tabela para registar os valores observados e ajustar o declive da reta inicial para valores inteiros.

Escreve a tua conjetura:

| |
|---|
| Se $r$ e $s$ são retas perpendiculares, e $m$ e $m'$ são os respectivos declives, então ______________________ |

Para provar a tua conjetura, considera uma reta definida por y=mx+b e percorre as seguintes etapas:

- Escreve as coordenadas dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, vetores diretores das retas $r$ e $s$, respetivamente;
- Calcula o valor de $\vec{r} \cdot \vec{s}$, sabendo que as retas $r$ e $s$ são perpendiculares;
- Obtém uma relação entre os declives das duas retas.

**Parte II**

1. Considera a reta $s$ definida por $y =- 3x + 2$.
   Determina uma equação vetorial da reta perpendicular a $s$ que contém a origem.

2. Sejam $[AB]$ e $[AD]$ lados do quadrado $[ABCD]$.
   Determina a equação reduzida da reta $AD$, sabendo que a ponto $A$ tem coordenadas $(1, 2)$ e que a equação reduzida da reta $AB$ é $y = 6x - 4,$ .

3. Considera, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2,1)$ .

   Seja $r$ a reta tangente à circunferência no ponto $A$ .

   Qual é a ordenada na origem da reta $r$ ?

   (A) $4$ (B) $5$ (C) $6$ (D) $7$

Exame - 2018, 2.ª fase

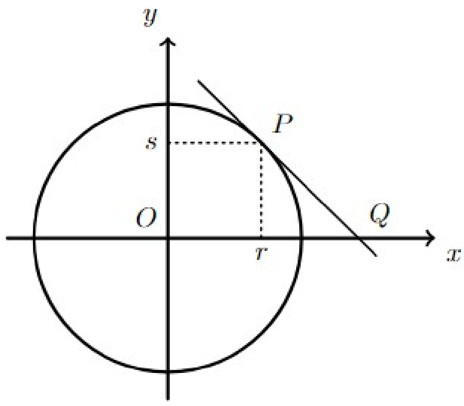
4. Considera um ponto $P$, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio $1$ .

   Sejam $(r,s)$ as coordenadas do ponto $P$ .

   Seja $t$ a reta tangente à circunferência no ponto $P$ .

   Seja $Q$ o ponto de intersecção da reta $t$ com o eixo $Ox$ .

   Prove que a abcissa do ponto $Q$ é $\frac{1}{r}$ .




Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

# Tarefa 6

### Declive de retas perpendiculares

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Na Parte I da tarefa pretende-se estudar a relação entre declives de retas perpendiculares no plano, através do manuseamento da apliqueta do Geogebra.
A Parte II da tarefa tem como objetivo a aplicação/consolidação das aprendizagens.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Noções de Geometria analítica trabalhadas no 10.º ano.

**Materiais e recursos:** Computador/tablet/telemóvel ou calculadora gráfica. Software de geometria dinâmica (Geogebra).

**Notas para o professor:**

Na parte I, através do manuseamento da apliqueta do Geogebra, os alunos deverão conjeturar a relação entre declives de retas perpendiculares e posteriormente fazer a respetiva demonstração, sem recurso à tecnologia.
No item 4. da parte II poderá ser adequado adicionar a seguinte etapa adicional: "Justifica que $r^2 + s^2 = 1$". Esta informação complementar poderá também ser transmitida pelo professor aos alunos, caso estes na resolução do item revelem muitas dificuldades.

# Tarefa 7

## Equações cartesianas de planos no espaço

1. Num referencial $Oxyz$, considera os pontos $A(1,\ 2,\ 2)$, $B(2, -\ 1,\ 1)$ e $C(3,\ 2,\ 1)$, que definem o plano $ABC$, e o vetor $\vec{u}(-\ 3,\ 1,\ \ -\ 6)$.

   1.1. Determina as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ e $\vec{AC}$.

   1.2. Calcula o produto escalar de cada um desses vetores com o vetor $\vec{u}$. O que observas?

   1.3. Na apliqueta https://www.geogebra.org/3d/fujxpxzz estão representados os pontos $A$, $B$ e $C$ e o vetor $\vec{u}$.

      1.3.1. Representa o plano $ABC$.

      1.3.2. Representa um ponto $D$ sobre o plano $ABC$.

      1.3.3. Traça o vetor $\vec{AD}$.

      1.3.4. Determina no Geogebra o produto escalar $\vec{AD} \bullet \vec{u}$.

      1.3.5. Arrasta o ponto $D$ e observa o valor desse produto escalar.

   1.4. Qual é a posição relativa do vetor $\vec{u}$ em relação ao plano $ABC$ ?

   1.5. Representa as três retas perpendiculares ao plano $ABC$ que passam por $A$, por $B$ e por $C$.

   1.6. Observa as equações vetoriais dessas retas na janela de Álgebra do Geogebra, relacionando os seus vetores diretores com a equação do plano $ABC$, $ax\ +\ by\ +\ cz\ +\ d\ =\ 0$. Qual é a relação que observas?

   1.7. Considera um ponto qualquer $P(x,\ y,\ z)$ que pertença ao plano $ABC$ . Qual é o valor do produto escalar $\vec{AP} \bullet \vec{u}$? Justifica a tua resposta.

   1.8. Obtém as coordenadas do vetor $\vec{AP}$, em função de $x$, $y$ e $z$, e escreve a equação $\vec{AP} \bullet \vec{u} = 0$, na forma $ax\ +\ by\ +\ cz\ +\ d\ =\ 0$.

2. 

   2.1. Representa no Geogebra o plano $\alpha$ que contém o ponto $A(1,\ 2,\ 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v}(2, -\ 3,\ 3)$ e observa na janela de Álgebra a equação do plano $\alpha$ .

   2.2. Mostra algebricamente que a equação do plano $\alpha$ é a que observaste no item anterior.

3. Num referencial $Oxyz$, determina uma equação do plano que seja perpendicular à reta $(x,\ y,\ z) = (3,\ 2,\ 4) + k(3,\ -1,\ -2),\ k \in \mathbb{R}$ e contém o ponto $Q(2,\ 1,\ 4)$.

4. Considera, num referencial $Oxyz$, o plano de equação $3x - y + 2z - 12 = 0$.
   4.1. Determina as coordenadas dos pontos de interseção deste plano com os eixos coordenados.
   4.2. Escreve as coordenadas de um vetor normal ao plano dado.
   4.3. Determina uma equação de um plano paralelo a este que passa pelo ponto $(1,\ 3, -2)$.
   4.4. Escreve uma equação da reta perpendicular a este plano e que contém o ponto $(2, -1,\ 5)$.

5. Num referencial $Oxyz$, determina uma equação do plano tangente à superfície esférica de equação $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$, na origem do referencial.

6. Num referencial $Oxyz$,considera o segmento de reta $[OA]$ em que $O$ é a origem do referencial e $A$ é o ponto de coordenadas $(6, -2, 4)$.
   6.1. Determina a equação do plano mediador do segmento de reta $[OA]$ . Apresenta a equação do plano na forma $ax + by + cz + d = 0$ . (Relembra que o plano mediador é o conjunto dos pontos equidistantes dos extremos do segmento de reta).
   6.2. Determina as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[OA]$, e a equação do plano que contém o ponto médio e é perpendicular ao vetor $\vec{OA}$.

# Tarefa 7

### Equações cartesianas de planos no espaço

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos explorem equações cartesianas de planos no espaço, aplicando conceitos de vetores, produto escalar e perpendicularidade.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Operações com vetores; produto escalar e suas propriedades; interpretação geométrica da perpendicularidade de vetores  e planos; conhecimentos elementares do GeoGebra 3D para representação de pontos, vetores, planos e retas.

**Materiais e recursos:** Computador ou dispositivo móvel com acesso à internet para utilização do Geogebra 3D.

**Notas para o professor:**

A tarefa envolve cálculos algébricos, interpretação geométrica e o uso do Geogebra 3D para visualização e experimentação interativa. Por isso, pode ser vantajoso, antes da realização dos cálculos necessários, incentivar os alunos a visualizar os pontos, vetores e planos no Geogebra 3D para reforçar a intuição espacial.
Sugere-se que a resolução da tarefa seja feita a pares ou em pequenos grupos, e que os alunos comparem as suas equações do plano obtidas analiticamente e no Geogebra, discutindo possíveis diferenças e/ou erros.

# Tarefa 8

## Distância de um ponto a um plano

1. No Geogebra, num referencial $Oxyz$, representa o plano $\alpha$ de equação $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ e o ponto $A(2, -7, 6)$ que dista $7$ unidades do plano $\alpha$ .

   1.1. Marca um ponto $B$ que pertença ao plano $\alpha$ .

   1.2. Há um ponto do plano alfa que dista $7$ unidades do ponto $A$. Onde estará esse ponto? Para responderes a esta pergunta segue as seguintes etapas:

      1.2.1. Determina a distância entre os pontos $A$ e $B$.

      1.2.2. Arrasta o ponto $B$ sobre o plano $\alpha$ de modo que esta distância seja igual a $7$ unidades.

      1.2.3. Considerando o ponto $B$ obtido na pergunta anterior. Marca o vetor $\overrightarrow{BA}$.

      1.2.4. Considera as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$ e a equação do plano $\alpha$. O que observas?

      1.2.5. Qual é a posição relativa da reta $BA$ em relação ao plano $\alpha$?

   1.3. Apaga o ponto $B$.

   1.4. Tendo somente o ponto $A$ e o plano $\alpha$, que construção terás que fazer no Geogebra para determinar as coordenadas de um ponto que pertence ao plano $\alpha$ e dista $7$ unidades de $A$.

   1.5. Faz essa construção no Geogebra, determina as coordenadas desse ponto e a distância deste ao ponto $A$.

   1.6. Usando a mesma construção, determina no Geogebra, a distância do ponto $C(1, 3, 7)$ ao plano $\alpha$ , arredondada às centésimas.

2. Num referencial $Oxyz$, considera o plano $\beta$ de equação $x + 2y + z - 1 = 0$ e o ponto $P(3, 3, 4)$.

   2.1. Justifica que $(x, y, z) = (3, 3, 4) + k(1, 2, 1), k \in \mathbb{R}$, é uma equação vetorial da reta $r$, perpendicular ao plano $\beta$ e que passa por $P$.

   2.2. A partir da equação da reta r, item 2.1., determina um ponto $Q$ da reta $r$, diferente de $P$, por exemplo, considerando $k =- 1$.

   2.3. Representa no Geogebra 3D o plano $\beta$ , os pontos $P$ e $Q$ e a reta $r$ .

2.4. Escreve na janela algébrica $A = (3 + k,\ 3 + 2k,\ 4 + k)$, movimenta o seletor relativo ao valor de $k$ e justifica que o ponto $A$ pertence à reta, qualquer que seja o valor de $k$. Ao ponto $A$ é usual chamar-se ponto genérico da reta.

2.5. Altera o seletor associado ao valor de $k$, de modo a identificares as coordenadas do ponto da reta que pertence ao plano $\beta$ .

2.6. Mostra que o ponto encontrado pertence ao plano $\beta$ .

2.7. Substitui as coordenadas do ponto $A$ no equação do plano $\beta$ e resolve a equação obtida para determinar o valor de $k$.

2.8. Com esse valor de $k$, determina o ponto que pertence simultaneamente à reta $r$ e ao plano $\beta$ .

3. Num referencial $Oxyz$, considera o plano $\gamma$ de equação $2x - y - 3z + 11 = 0$ e o ponto $A(1, 2, -1)$.

3.1. Descreve um processo analítico (passos a percorrer) para determinares a distância do ponto $A$ ao plano $\gamma$ .

3.2. Determina essa distância.

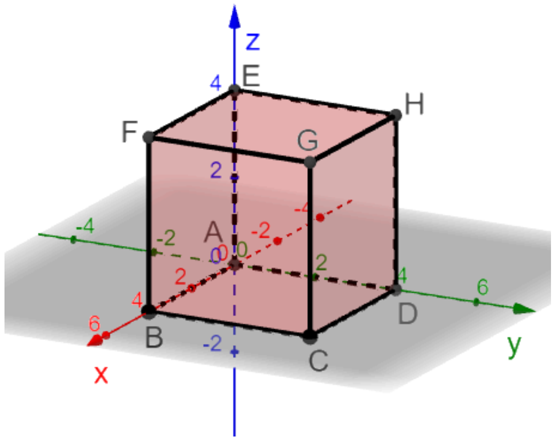
4. Num referencial $Oxyz$, considera uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida num plano $\alpha$ .

Sabe-se que:

- $\alpha$ é definido pela equação $x - 2y - z + 3 = 0$;
- a base $[ABCD]$ tem de perímetro $12$ unidades;
- o vértice $V$ da pirâmide tem coordenadas $(2,\ -3,\ 5)$.

Determina o volume da pirâmide.

5. Considera, num referencial $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$, como na figura ao lado, em que $A$ coincide com a origem do referencial.




5.1. Recorrendo ao Geogebra 3D:

- constrói um cubo pertencente ao primeiro octante, com um vértice na origem e aresta $4$;
- traça um plano $\alpha$ pelos três vértices do cubo que têm somente uma das coordenadas igual a zero;
- determina as distâncias dos vértices do cubo, $A$ e $G$ ao plano $\alpha$ .

5.1.1. Qual é a relação entre essas distâncias?

5.1.2. Faz variar o comprimento da aresta do cubo e verifica se a relação se mantém.

5.2. Usando métodos exclusivamente algébricos:

5.2.1. Mostra que o plano $\alpha$ é definido pela equação $x + y + z - 8 = 0$ .

5.2.2. Calcula as distâncias dos pontos $A$ e $G$ ao plano $\alpha$ .

5.2.3. Mostre que a relação identificada na pergunta 5.1.1. se mantém válida.

5.3. Mostra que a relação entre estas duas distâncias se mantém para um cubo de aresta $a$, começando por justificar que a equação do plano $\alpha$ é $x + y + z - 2a = 0$.

# Tarefa 8

**Distância de um ponto a um plano**

## Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos compreendam e apliquem o procedimento para calcularem a  distância de um ponto a um plano.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Equação de um plano; vetores normais a um plano; produto escalar e perpendicularidade entre vetores;
equação de uma reta perpendicular a um plano.

**Materiais e recursos:** Computador ou dispositivo móvel com acesso à internet para utilização do GeoGebra 3D.

**Notas para o professor:**

Sugere-se uma  abordagem exploratória, permitindo que os alunos construam gradualmente o seu conhecimento através da manipulação de objetos no Geogebra 3D. A tarefa envolve cálculos algébricos, interpretação geométrica e exploração interativa, facilitando a visualização. Além disso, nos itens 4. e 5. aplicam estes conceitos à resolução de  problemas, com o cálculo do volume de uma pirâmide e a relação entre distâncias num cubo.
Nos itens 2.3. e 2.4. não é necessário usar a equação vetorial da reta.
Poderão surgir algumas dificuldades na justificação algébrica, no item 5.3.. Como envolve uma generalização, sugere-se que os alunos comecem por verificar o resultado para valores concretos antes de demonstrarem a relação geral.

# Coleção de problemas II

### Retas e planos no espaço

1. Considere, num referencial o. n. $xOy$, a reta $r$ de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$ .

   Seja $s$ a reta perpendicular a $r$ e que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$ .

   Qual é a equação reduzida da reta $s$ ?

   (A) $y = 2x + 2$ (B) $y = -2x + 6$

   (C) $y = -2x + \frac{5}{3}$ (D) $y = 2x + \frac{5}{3}$

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

2. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência de equação

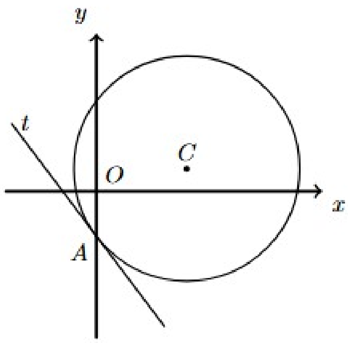
$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

   O ponto $C$ é o centro da circunferência.

   O ponto $A$, de coordenadas $(0, -2)$ pertence à circunferência.

   A reta $t$ é tangente à circunferência no ponto $A$ .

   Determine a equação reduzida da reta $t$ .




Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

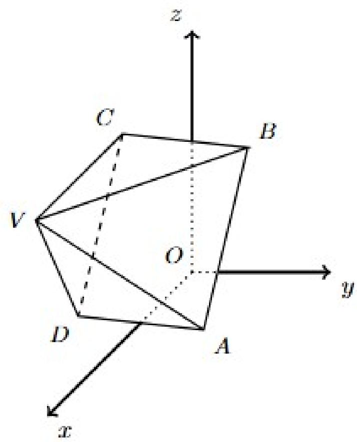
3. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ .

   Os vértices $A$ e $C$ têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$, respetivamente.

   O vértice $V$ tem coordenadas $(3, -1, 2)$ .

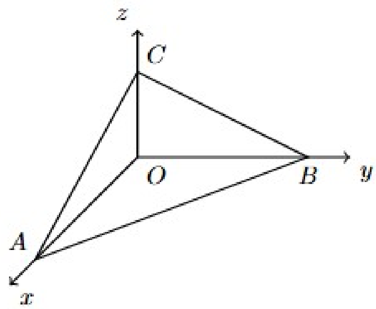
   Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

   Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$ .



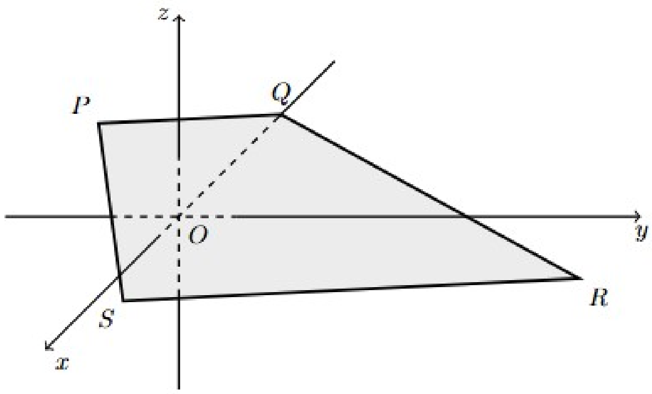

Exame – 2019, 1.ª Fase

4. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, parte do plano $ABC$ de equação $x + y + 2z - 12 = 0$ .
Tal como a figura sugere, $A$, $B$ e $C$ são os pontos de interseção deste plano com os eixos coordenados.
Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $D(1, 2, 3)$ e é paralelo ao plano $ABC$ .




Adaptado do Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

5. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.
Tem-se $P(1, -1, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e $R(-5, 5, -3)$ .




Determine uma equação do plano perpendicular à reta $RS$ e que passa no ponto $P$ .
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$ .

Exame – 2021, 2.ª Fase

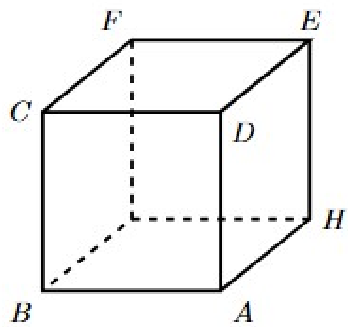
6. Na figura ao lado, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ .
Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$A(-2, 5, 0)$ e $B(1, -1, 2)$.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Sabe-se que o vértice $E$ do cubo pertence à reta definida pela equação

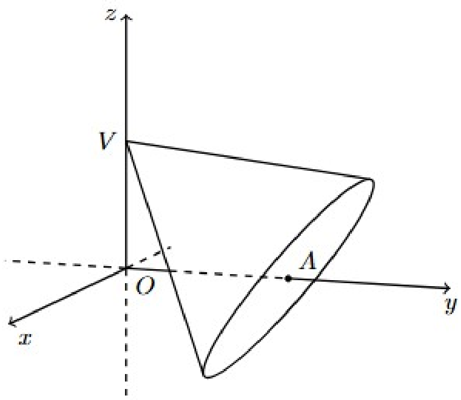
$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1),\ k \in \mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice $E$ .




Adaptado do Exame – 2022, 2.ª Fase

7. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice $V$ e base de centro no ponto $A$ .




Sabe-se que:

- o ponto $V$ pertence ao eixo $Oz$, e o ponto $A$ pertence ao eixo $Oy$ ;
- a base do cone tem raio $3$ e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$ .

7.1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ ?

(A) $4y - 3z = 11$ (B) $3x + 4y + z = 10$

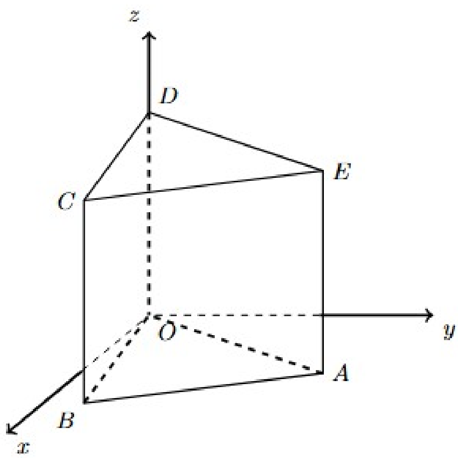
(C) $3y + 4z = 8$ (D) $x + 3y + 4z = 3$

7.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

Exame – 2022, 1.ª Fase

8. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$ .




Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto $A$ são $\left(2\sqrt{3}, 6, 0\right)$;
- o ponto $B$ pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$ ;
- a reta $AB$ é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k\left(\sqrt{3}, -5, 0\right),\ k \in \mathbb{R}$;
- o ponto $D$ pertence ao eixo $Oz$ e tem cota $5$.

8.1. Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto $A$ e é perpendicular ao eixo $Ox$ ?

(A) $z = 0$ (B) $y = 6$ (C) $x = 2\sqrt{3}$ (D) $x + y + z = 0$

8.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

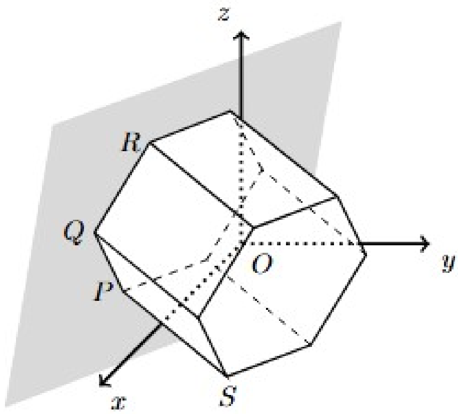
Determine o volume do prisma $[OABCDE]$ .

Exame – 2023, Ép. Especial

9. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$ ;
- o plano $PQR$ tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$ ;
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que $S$ é o ponto de coordenadas $(14, 5, 0)$ .




Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

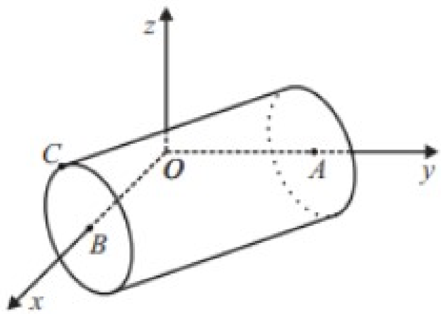
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2018, 1.ª Fase

10. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$ , um cilindro reto.

Sabe-se que:

- o ponto $A$ pertence ao eixo $Oy$ e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto $B$ pertence ao eixo $Ox$ e é o centro da outra base;
- o ponto $C$ pertence à circunferência de centro $B$ que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano $ABC$ é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$ .




Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

10.1. Determine $\overline{BC}$ , sabendo que o volume do cilindro é igual a $10\pi$ .

10.2. Seja $P$ o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$ .

Determine as coordenadas do ponto do plano $ABC$ que se encontra mais próximo do ponto $P$ .

Exame – 2020, 1.ª Fase

# Coleção de problemas II

## Retas e planos no espaço

### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Com este conjunto de exercícios pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores, no contexto de resolução de problemas.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Relação entre declive e inclinação e noção de produto escalar.

**Materiais e recursos:** Calculadora e GeoGebra.

**Notas para o professor:** O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. Eventualmente o professor poderá sugerir outros itens para que os alunos possam continuar o desenvolvimento deste trabalho fora da sala de aula. Se alguns alunos não conseguirem resolver todas as propostas durante o tempo disponibilizado pelo professor, essa diferença não impede o objetivo essencial da tarefa.