PROBABILIDADE

Matemática B

11.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Probabilidade (Matemática B - 11.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática B

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/grupo-de-pessoas-assistindo-no-laptop-1595385/

Data:

Lisboa, abril de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - PROBABILIDADE

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	Tarefa 1 Reavivando a Memória	**Probabilidade** Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	• Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). • Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. • Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S dos resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; • Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos	Trabalho em grande grupo, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A)

5	Tarefa 2 Jogo da Glória	**Probabilidade** Probabilidade frequencista	• Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, P(A) é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. • Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
5	Tarefa 3 O Jogo do Rapa	**Probabilidade** Regra de Laplace Modelo de probabilidade	• Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ possíveis}$ • Compreender que a descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)

4	Tarefa 4 Cães e Gatos	**Probabilidade** Regras da probabilidade Probabilidade da união de acontecimentos	• Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. • Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. • Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)
4	Tarefa 5 Representantes da turma no Parlamento dos Jovens	**Probabilidade condicionada** Definição Regra do produto Árvore de probabilidades Tabelas de contingência	• Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B)>0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B)=P(A \cap B)P(B)$. • Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B\|A)$ ou $P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A\|B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. • Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. • Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)

6	Tarefa 6 Não deixem morrer os corais	**Probabilidade condicionada** Regra do produto. Acontecimentos independentes.	• Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A)>0$ e $P(B)>0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A\|B)=P(A)$ (A independente de B) e $P(B\|A)=P(B)$ (B independente de A). • Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A)>0$ e $P(B)>0$.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)
6	Tarefa 7 Se beber não conduza	**Probabilidade condicionada** Acontecimentos independentes	• Resolver problemas em contexto real	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C) • Trabalhar em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)

Tarefa 1

Reavivando a Memória

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa pretende-se que os alunos recordem conceitos trabalhados ao longo do 3.º ciclo do ensino básico.

Conhecimentos prévios dos alunos: Fenómeno aleatório e não aleatório, experiência aleatória, espaço de resultados ou espaço amostral, acontecimento, união e interseção de acontecimentos e classificação de acontecimentos.

Materiais e recursos: Telemóvel com acesso à Internet.

Notas e sugestões:

Cada docente deve criar o seu próprio *Mentimiter* para que possa analisar os resultados da respetiva turma. Se necessário, pode aceder ao site
https://ciencias.ulisboa.pt/pt/mentimeter
para obter informações sobre a criação/utilização do mesmo.
Os exemplos apresentados no *Mentimiter* devem ser analisados em grande grupo.
É importante que, ao longo ou no final da tarefa seja feita uma sistematização dos conteúdos trabalhados (noção de experiência, experiência aleatória e determinista, acontecimento, espaço amostral, …).

Tarefa 1

Reavivando a Memória

Com esta tarefa pretende-se que recordes alguns conceitos que estudaste no 3.º ciclo.

1.
   1.1. Acede ao link do *Mentimeter* e regista uma experiência aleatória.
   1.2. Discute com os teus colegas as opções apresentadas para experiência aleatória.

2.
   2.1. Acede ao link do *Mentimeter* e regista uma experiência determinística.
   2.2. Discute com os teus colegas as opções apresentadas para experiência determinística.

3. Cinco amigos juntaram-se para assistir a um jogo de futebol: Filipa, António, Maria, Paulo e Rebecca.
Sabe-se que:
- apenas as raparigas são adeptas do Belenenses;
- a Maria e o Paulo são os únicos adeptos do Portimonense;
- o António é o único adepto da Académica.

Considera a experiência aleatória que consiste em escolher um destes amigos, ao acaso, e os seguintes acontecimentos:

A: "é adepto da Académica" ;
B: "é adepto do Belenenses" ;
P: "é adepto do Portimonense" .

3.1. Escreve na forma de conjunto (definir em extensão) os elementos que compõem cada um dos acontecimentos A, B e P.

3.2. Justifica as seguintes afirmações no contexto da situação apresentada:

3.2.1. $A \cap B$ é um acontecimento impossível .
3.2.2. $A \cup B \cup P$ é um acontecimento certo .
3.2.3. $B \cap P$ é um acontecimento elementar .
3.2.4. $A \cup P$ é um acontecimento composto.

Sugestão: Começa por identificar os elementos de cada acontecimento.

4. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico, equilibrado, com as faces com um número de pintas de 1 a 6, e registar o número de pintas da face que fica voltada para cima.

4.1. Escreve o espaço de resultados ou o espaço amostral (conjunto de todos os resultados) e representa-o por uma das letras: E ou S ou Ω.

4.2. Considera os acontecimentos:

A:"O número de pintas da face voltada para cima é um número ímpar" .

B:"O número de pintas da face voltada para cima é um número par".

C:" O número de pintas da face voltada para cima é um número primo".

D:"O número de pintas da face voltada para cima é um número composto" .

Escreve, em extensão, cada um dos acontecimentos A, B, C e D.

4.2.1. Define os acontecimentos seguintes por palavras tuas:

4.2.1.1. $A \cap B$;

4.2.1.2. $A \cup B$;

4.2.1.3. $C \cap D$;

4.2.1.4. $C \cup D$.

4.2.2. Escolhe a opção que define em extensão os acontecimentos:

4.2.2.1. $A \cap B$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(B)** $\{2, 4, 6\}$

(C) $\{1, 3, 5, 6\}$ **(D)** $\emptyset$

4.2.2.2. $A \cup B$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(B)** $\{2, 4, 6\}$

(C) $\{1, 3, 5, 6\}$ **(D)** $\emptyset$

4.2.2.3. $C \cap D$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(B)** $\{2, 3, 5\}$

(C) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ **(D)** $\emptyset$

4.2.2.4. $C \cup D$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(B)** $\{4, 6\}$

(C) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ **(D)** $\emptyset$

4.2.3. Completa as afirmações, selecionando a opção correta que consta na tabela seguinte. A cada espaço em branco corresponde uma opção.

I	II	III
a) disjuntos b) contrários	a) interseção b) reunião	a) acontecimento impossível b) acontecimento certo

Os acontecimentos C e D dizem-se ___**I**___, porque a sua ___**II**___ é um ___**III**___.

Os acontecimentos A e B dizem-se ___**I**___, porque a sua ___**II**___ é um ___**III**___.

Os acontecimentos disjuntos também podem ser designados por acontecimentos incompatíveis ou mutuamente exclusivos. Os acontecimentos contrários também podem ser denominados por acontecimentos complementares. O acontecimento contrário do acontecimento A representa-se por $\overline{A}$.

Tarefa 2

O Jogo da Glória

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é recordar a definição frequencista de probabilidade e aplicá-la a situações diversas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Frequência relativa.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet e calculadora gráfica.

Notas e sugestões:
Propõe-se que se inicie a aula com a visualização do vídeo "Hoje lavas tu a louça - Isto é Matemática" para introduzir o tópico abordado nesta tarefa.
A tarefa proposta, relativa ao Jogo da Glória, foi criada de forma a que os alunos compreendam que uma boa alternativa para o cálculo da probabilidade de alguns acontecimentos é um processo experimental, uma vez que o valor teórico da probabilidade pedida não é fácil de calcular com os conhecimentos que se têm neste nível de ensino. O valor expectável para esta probabilidade aproxima-se de 0,285 (realizando 5000 experiências).
No item 5. da Parte 2, os alunos apresentaram alguma dificuldade, já prevista, tendo em conta o seu cariz exploratório. Alguns alunos conseguiram ter uma ideia intuitiva do resultado, no entanto, precisaram de ajuda para definir e concretizar uma estratégia de resolução válida.
Numa das turmas piloto, o item 4. gerou grande discussão porque os alunos consideraram que com 10000 lançamentos, as frequências relativas de rosa, azul e verde deveriam ser respetivamente, 0,5 , 0,25 e 0,25 para que se pudesse afirmar que as faces azul e verde eram em número igual e o número de faces rosa era o dobro.
Noutra turma, constatou-se que ao ser dada uma tabela com as frequências absolutas, os alunos mostraram dificuldades em considerar o valor da frequência relativa como uma boa aproximação do valor da probabilidade de um acontecimento.

Tarefa 2

O Jogo da Glória

Parte I

1. Visiona o vídeo de "Hoje lavas tu a louça - Isto é Matemática".

   Na experiência aleatória, lançamento de uma moeda equilibrada, considera os seguintes acontecimentos:

   A: " Sair Cara" ;
   B: " Sair Coroa" .

   Sabe-se que:

   Cara: É o lado da moeda que geralmente apresenta uma imagem ou um símbolo, como a efígie de uma personalidade nacional, uma figura histórica ou um símbolo representativo do país.
   Coroa: É o lado oposto da moeda, que muitas vezes apresenta uma imagem diferente, com um valor numérico.

   Comenta as seguintes afirmações, justificando se são verdadeiras ou falsas:

   1.1. "Para o acontecimento A, é certo que a frequência relativa, em 10 lançamentos da moeda, é 50%."

   1.2. "Se em 1000 repetições da experiência obtivermos 900 vezes o acontecimento B, podemos suspeitar (fortemente) que a moeda está viciada."

2. O Jogo da Glória, também conhecido como Jogo Real do Ganso, foi um dos primeiros jogos de tabuleiro a ser fabricado comercialmente. É um jogo que recorre ao lançamento de dados para ditar a progressão dos jogadores. O tabuleiro é frequentemente organizado em forma de espiral, com as peças do jogo começando na casa com o número 1. Todos os espaços no tabuleiro são numerados, tendo alguns uma ilustração indicando uma ação específica (prémio ou castigo). Acredita-se que o jogo tenha sido criado em Itália, durante o século XV.

Ganha o jogador que primeiro chegar ao último espaço (centro do tabuleiro), evitando perigos como o Hotel, a Ponte e a Morte.

Na sua vez de jogar, cada jogador lança um dado cúbico, numerado de 1 a 6, e avança o correspondente número de casas no tabuleiro de acordo com o número da face do dado que saiu. A casa onde vai parar poderá ditar se recebe um prémio ou um castigo.

Numa certa versão do Jogo da Glória, a casa n.º 9 é a “casa da morte” e o jogador que lá parar é eliminado.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**		**10**	**...**

2.1. Discute as questões seguintes, relativamente a este jogo, com os teus colegas:

- Será muito provável um jogador ser eliminado?
- É possível quantificar essa probabilidade? Como?

2.2. Não é fácil obter o valor exato da probabilidade pedida. No entanto, podemos obter uma boa aproximação recorrendo a experiências.

Cada experiência consiste em lançar várias vezes o dado até que a soma dos valores obtidos seja igual a 9 (atinge a casa da morte e o jogador é eliminado), ou a soma seja superior a 9 (ultrapassa a casa da morte e o jogador continua em jogo).

A simulação do lançamento do dado cúbico pode ser realizada, por exemplo, recorrendo à calculadora gráfica, a simuladores na internet ou ao Geogebra.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de simulação do jogo com recurso ao Geogebra:

Experiência 1 (realizados 3 lançamentos)	**Experiência 2** (realizados 3 lançamentos)
Número a = NúmeroAleatório(1, 6) = 1 b = NúmeroAleatório(1, 6) = 6 c = NúmeroAleatório(1, 6) = 3	Número a = NúmeroAleatório(1, 6) = 3 b = NúmeroAleatório(1, 6) = 4 c = NúmeroAleatório(1, 6) = 2
Soma = 10 O jogador não foi eliminado.	Soma = 9 O jogador foi eliminado e perdeu o jogo.

Notas:

- Cada experiência termina quando a soma dos números das faces voltadas para cima for superior ou igual a 9, na totalidade de lançamentos efetuados;
- O número mínimo de lançamentos numa experiência será 2 ;
- O número máximo de lançamentos numa experiência será 9 (se em todos os lançamentos sair sempre face 1).

2.2.1. Realiza 20 experiências e completa a seguinte tabela (sim/não e a contagem na última linha):

Experiência	Soma igual a 9?	Experiência	Soma igual a 9?
1.ª		11.ª	
2.ª		12.ª	
3.ª		13.ª	
4.ª		14.ª	
5.ª		15.ª	
6.ª		16.ª	
7.ª		17.ª	
8.ª		18.ª	
9.ª		19.ª	
10.ª		20.ª	
Total de somas iguais a 9:			

2.2.2. Com os valores da tabela anterior, determina a frequência relativa do acontecimento "o jogador é eliminado".

2.2.3. Compara o resultado anterior com os resultados obtidos pelos teus colegas. O que podes concluir?

2.2.4. Realiza mais 20 experiências e calcula a frequência relativa do acontecimento "o jogador é eliminado". Compara, novamente, o teu resultado com os resultados obtidos pelos teus colegas e identifica se as diferenças aumentaram ou diminuiram.

2.2.5. O que se espera que aconteça à frequência relativa do acontecimento "o jogador é eliminado" se aumentares o número de experiências?

2.2.6. Para verificares a tua conjetura, reúne na tabela seguinte, os resultados obtidos pelos teus colegas em todas as experiências realizadas e calcula, novamente, a frequência relativa do acontecimento.

N.º de experiências	N.º de eliminações

Como pudeste verificar, a frequência relativa do acontecimento "o jogador foi eliminado" tende a estabilizar num determinado valor, à medida que o número de repetições da experiência aumenta. Esse valor é uma boa aproximação da probabilidade desse acontecimento.

Adaptado da Brochura "Probabilidades e Combinatória - 12.º ano", 1999

Define-se probabilidade (definição frequencista) de um acontecimento A e representa-se por P(A) como sendo o valor obtido para a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória.

Parte II

1. Um saco contém várias bolas numeradas com o número 1, com o número 2 e com o número 3. As bolas são indistinguíveis ao tato. A Maria realizou dez vezes o seguinte procedimento: retirou, ao acaso, uma bola do saco, registou o número inscrito na bola e colocou novamente a bola no saco.

   A tabela seguinte apresenta os valores da frequência relativa, calculados pela Maria, do número de vezes em que foi retirado cada um dos números 1, 2 e 3 e onde o valor da frequência relativa do número 2 está representado pela letra a:

Número inscrito na bola	Frequência relativa
1	0,3
2	a
3	0,4

1.1. Determina o valor de a.

1.2. Admite agora que, no saco, metade das bolas têm o número 1. Admite ainda que se vai retirar uma bola do saco um milhão de vezes, seguindo o procedimento da Maria. Será de esperar que a frequência relativa de ser retirado o número 1 se mantenha igual a 0,3? Justifica a tua resposta.

Adaptado da Prova Final 3.º Ciclo - 2012, 2.ª chamada

2. A Matilde construiu um tetraedro em cartão. Decidiu pintar cada uma das faces do tetraedro. Apenas tinha três cores disponíveis: rosa, azul e verde.

   Depois de pintar o sólido, a Matilde efetuou 10 000 lançamentos e registou a cor da face que fica voltada para baixo obtendo os resultados registados na tabela seguinte:

Cor da face (voltada para baixo)	Frequência absoluta
Rosa	4908
Azul	2457
Verde	2635

   Tendo em conta os dados da tabela, explica como é que a Matilde pintou as faces do tetraedro.

3. A Joana tem dois dados cúbicos diferentes, ambos equilibrados. Um deles tem **três das suas faces numeradas com o número 5** e as outras **três numeradas com o número 6**; o outro dado tem a**lgumas das suas faces numeradas com o número 8** e as **restantes com o número 9**.

   Os dados foram lançados 120 vezes, em simultâneo, e, em cada lançamento, **foi registada a soma dos números das faces que ficaram voltadas para cima**.

   Os resultados obtidos apresentam-se na tabela seguinte:

Somas dos números obtidos no lançamento dos dois dados	13	14	15
Frequência absoluta	20	66	34

   Determina o número mais provável de faces do segundo dado numerados com o número 9.

   Usa os esquemas que te parecerem mais adequados para justificar a tua resposta.

Tarefa 3

O Jogo do Rapa

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos recordem a Regra de Laplace e a saibam aplicar em diversas situações. É pedido ainda que construam o modelo de probabilidade associado a uma experiência aleatória.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regra de Laplace, modelo de probabilidade e soma das probabilidades de acontecimentos elementares de uma experiência aleatória. Cálculo de áreas de figuras.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

A parte I da tarefa poderá ser resolvida em grupo turma, promovendo-se uma discussão sobre os conceitos envolvidos, incentivando e aproveitando os contributos individuais dos alunos.

Na parte II, os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos e, no final, discutir as resoluções e as conclusões, em grande grupo.

Tarefa 3

O Jogo do Rapa

Parte I

O Filipe e o Pedro resolveram jogar o jogo do RAPA. O pião utilizado tem inscrito, nas suas quatro faces laterais, quatro letras diferentes, R-Rapa, T-Tira, D-Deixa e P-Põe.

1. Qual é o conjunto de resultados possíveis, associados à experiência de lançar o rapa e visualizar a letra que fica na face que está voltada para cima?

2. O Pedro referiu que a probabilidade de a face com a letra D ficar voltada para cima, no lançamento do pião, é $\frac{1}{4}$. Concordas com o Pedro? Justifica a tua resposta.

Regra de Laplace: Numa experiência aleatória, em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, define-se Probabilidade de um acontecimento A e representa-se por $P(A)$, como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis a A e o número de resultados possíveis, na realização da experiência.

$$P(A) = \frac{n.^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis\ à\ realização\ de\ A}{n.^{\underline{o}}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{\#CF}{\#CP}$$

#CF é o cardinal do conjunto de resultados favoráveis à realização do acontecimento A

#CP é o cardinal do conjunto de resultados possíveis

3.

3.1. Completa a seguinte tabela de probabilidades:

Faces	R	T	D	P
Probabilidades	$\frac{1}{4}$			

Modelo de probabilidade para um fenómeno aleatório (com espaço de resultados finito) é um modelo matemático em que se consideram todos os resultados do espaço de resultados e as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares.

3.2. Qual é o valor da soma das probabilidades de todos os acontecimentos elementares apresentados na tabela?

4. Supõe que o Filipe e o Pedro resolvem ir jogar um outro jogo, utilizando agora um pião com 5 faces, numeradas de 1 a 5. O jogo desenvolve-se com o lançamento do pião, por cada um dos jogadores, que anotam a face que fica virada para baixo.
O Filipe referiu que a soma das probabilidades de todos os acontecimentos elementares seria diferente da que se obtém com o pião anterior.
Será que o Filipe tem razão? Explica porquê.

(Adaptado de "Coletânea de tarefas para o 8.º ano - Dados e Probabilidades")

Parte II

1. Um saco contém 12 bolas, indistinguíveis ao tato, sendo 3 verdes, 4 amarelas e 5 pretas.
Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e regista-se a cor.
   1.1. Constrói o modelo de probabilidade associado a esta experiência aleatória.
   1.2. Determina a probabilidade de a bola que saiu ser verde ou amarela.
   1.3. Determina a probabilidade de a bola que saiu ser verde e amarela.

2. A Rita numerou as faces de um dado octaédrico equilibrado apenas com os números ímpares menores do que oito.
Sabe-se que:
   - a probabilidade de sair a face com o número 3 é $\frac{1}{8}$;
   - a probabilidade de sair a face com o número 7 é $\frac{1}{8}$;
   - a probabilidade de sair a face com o número 1 é o dobro da probabilidade de sair a face com o número 5.

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar o dado e anotar o número da face que fica voltada para baixo.
A tabela associada a esta experiência aleatória é:

Faces	1	3	5	7
Probabilidades		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$

2.1. Completa a tabela. Apresenta todos os cálculos efetuados.

2.2. A partir de todos os valores da tabela anterior, descreve como está numerado o dado octaédrico.

Tarefa 4

Cães e gatos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos utilizem o diagrama de Venn, a tabela de dupla entrada e o diagrama em árvore para calcular a probabilidade de um acontecimento, de um acontecimento contrário, da reunião e da interseção de acontecimentos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regra de Laplace, modelo de probabilidade, reunião e interseção de acontecimentos, construção de diagramas de Venn e em árvore e de uma tabela de dupla entrada.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

Sugere-se que o item 1. seja resolvido em grupo turma recordando como se constrói um diagrama de Venn bem como a reunião e interseção de conjuntos.

Os restantes itens podem ser resolvidos em pequenos grupos, devendo as conclusões ser apresentadas e discutidas em grande grupo no final da tarefa ou, se se verificarem muitas dificuldades, no final de cada item.

Poderá haver a necessidade de o professor apoiar os alunos na compreensão/interpretação dos enunciados.

Nas turmas piloto, as professoras constataram que os alunos não recorreram à fórmula da probabilidade da reunião de acontecimentos sempre que se basearam na análise/leitura de um diagrama de Venn.

Tarefa 4

Cães e gatos

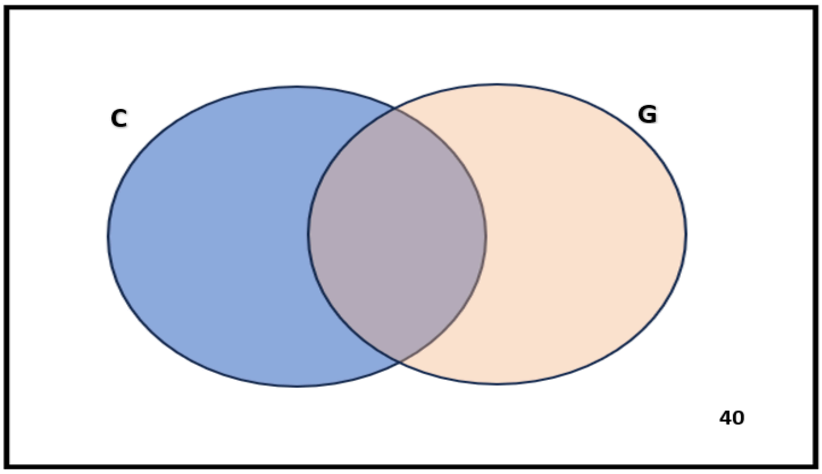
No cálculo de probabilidades, às vezes torna-se mais difícil fazer a contagem do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis para utilizar a Regra de Laplace, admitindo que todos os casos são igualmente prováveis. Para ultrapassar essa dificuldade, podem ser utilizados métodos que facilitem a contagem como por exemplo: diagramas de Venn, tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore.

Parte I

1. Realizou-se um inquérito a 200 pessoas sobre os seus animais de estimação. Os resultados foram os seguintes:
   - 130 pessoas responderam que têm cão;
   - 60 pessoas responderam que têm gato;
   - 40 pessoas não têm cão nem gato.

   1.1. Determina o número de pessoas que têm cão e gato.

   1.2. **Completa** o diagrama de Venn para representar a situação descrita no enunciado.



C: "tem cão" **G**: "tem gato"

   1.3. **Determina** a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso:

      1.3.1. ter cão e não ter gato ;

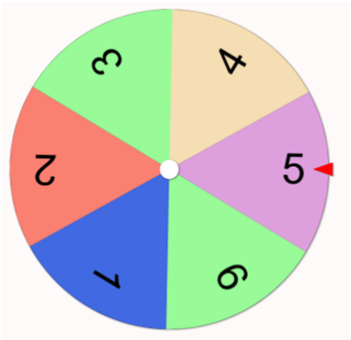
      1.3.2. ter gato ou cão;

      1.3.3. não ter cão.

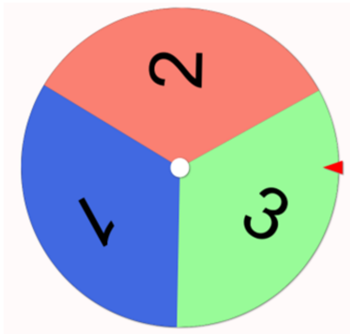
Dados dois acontecimentos A e B quaisquer, tem-se que:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2. Na figura, apresentam-se duas roletas: A roleta A que tem seis setores geometricamente iguais, numerados de 1 a 6, e a roleta B, que tem três setores numerados de 1 a 3, também geometricamente iguais.



Roleta A



Roleta B

2.1. Considera a experiência aleatória que consiste em rodar as duas roletas da figura e registar os números obtidos.

2.1.1. Completa a tabela, denominada tabela de dupla entrada, referente à experiência aleatória de rodar as duas roletas da figura e registar os números obtidos.

		Roleta A					
		1	2	3	4	5	6
Roleta B	1	(1,1)					
	2						
	3						(3,6)

2.1.2. A partir dos dados da tabela anterior, determina a probabilidade de:

2.1.2.1. sair um número ímpar na roleta A e um número par na roleta B;

2.1.2.2. saírem números iguais em ambas as roletas.

2.1.2.3. o produto dos números saídos ser igual a 10.

2.2. Considera, agora, a experiência aleatória que consiste em rodar uma vez ambas as roletas e somar os pontos obtidos.

2.2.1. Constrói o modelo de probabilidade referente à experiência descrita, completando a tabela:

Somas de pontos	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidades								

Sugestão: Para resolveres este item deverás primeiro completar o preenchimento da tabela seguinte, em que em cada quadrícula será colocado o valor da soma dos pontos obtidos em cada lançamento:

		Roleta A					
		1	2	3	4	5	6
Roleta B	1						
	2						
	3						

2.2.2. A partir dos dados do modelo construído no item anterior., determina a probabilidade de:

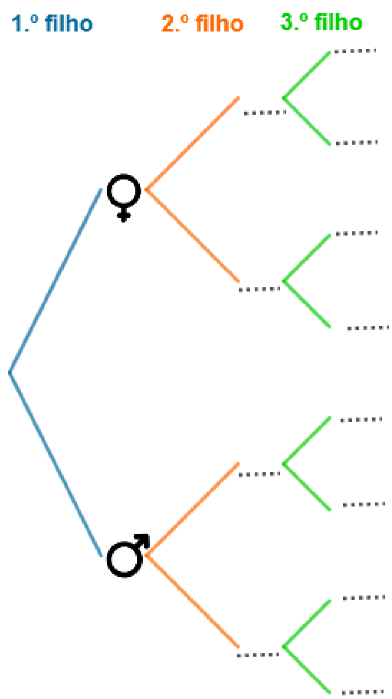
2.2.2.1. a soma dos dois números ser par.

2.2.2.2. a soma dos dois números ser superior a 5 e inferior a 9.

3. A Inês e o Bernardo pretendem ter três filhos.

3.1. Completa o diagrama ao lado, denominado diagrama em árvore, onde se podem identificar todas as possibilidades relativas ao sexo de cada filho.

3.2. Identifica todos os resultados possíveis.



3.3. Considerando que é igualmente provável nascer um rapaz ou nascer uma rapariga, calcula a probabilidade de:

3.3.1. nascerem três raparigas;

3.3.2. não nascerem todos do mesmo sexo;

3.3.3. nascer pelo menos uma rapariga;

3.3.4. nascerem mais rapazes do que raparigas.

Parte II

1. Num festival de cinema ao ar livre que se realizou durante um fim de semana, inscreveram-se 465 pessoas.

   Sabe-se que:

   - 289 pessoas foram à sessão de sábado;
   - 219 pessoas foram à sessão de domingo;
   - 52 pessoas foram às duas sessões.

1.1. Quantas pessoas inscritas não compareceram a nenhuma das sessões?

1.2. Escolhido ao acaso um dos inscritos, determina a probabilidade de:

1.2.1. ter participado em ambas as sessões;

1.2.2. ter participado em apenas uma das sessões;

1.2.3. ter participado em pelo menos uma das sessões;

1.2.4. não ter participado na sessão de domingo.

2. Uma caixa contém três bolas numeradas de 1 a 3.

2.1. A Francisca retira uma bola da caixa, anota o seu número e, sem repôr a primeira bola, retira outra e anota o seu número.

Considera o acontecimento A: “O número da primeira bola retirada é superior ao da segunda”.

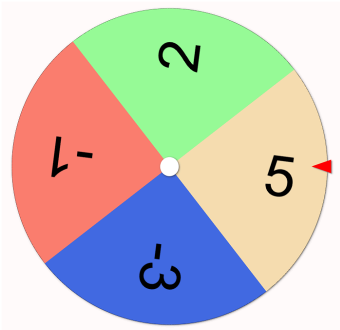
Determina $P(A)$.

2.2. O irmão da Francisca retira uma bola da caixa, anota o seu número e repõe a bola na caixa. Retira outra e anota o seu número.

Considera o acontecimento B: “O número da primeira bola retirada é superior ao da segunda”.

Determina $P(B)$.

3. Considera a roleta da figura ao lado, dividida em quatro setores geometricamente iguais, e a experiência aleatória que consiste em rodar, duas vezes, a roleta e multiplicar os números obtidos.
Num concurso, o concorrente ganha esse valor, em euros, se o produto for positivo. Caso o produto seja negativo, o concorrente perde o valor, em euros.



3.1. Determina a probabilidade de o concorrente:

3.1.1. ganhar 25 euros.

3.1.2. ganhar uma quantia superior a 8 euros.

3.1.3. perder 15 euros.

3.2. Determina a probabilidade de o concorrente ser premiado neste concurso.

TAREFA 5

Representantes da turma no Parlamento dos Jovens

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos terão contacto com o conceito de probabilidade condicionada que será trabalhado a partir de várias situações em contexto real, organizando a informação disponível através de árvores de probabilidade, tabelas de contingência ou diagramas de Venn.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regra de Laplace, diagrama em árvore, tabelas de dupla entrada e diagrama de Venn.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

O professor pode começar por explorar as questões iniciais da tarefa com os alunos e aproveitar para referir algumas propriedades das probabilidades a partir da observação da árvore de probabilidades e da tabela de contingência.
Seguidamente pode ser solicitado aos alunos que continuem a resolução da tarefa, em pequenos grupos.
Alguns alunos manifestaram dificuldade na interpretação das questões colocadas em linguagem matemática, confundindo muitas vezes a probabilidade da interseção de dois acontecimentos com a probabilidade condicionada. Nestas situações, o professor poderá começar por exemplificar com situações mais simples de forma a permitir compreender a diferença entre os dois conceitos. A representação das probabilidades pedidas em linguagem matemática poderá facilitar a resolução dos problemas apresentados.

TAREFA 5

Representantes da turma no Parlamento dos Jovens

1. A turma do 11.º ano de Artes Visuais da Escola Secundária D.ª Maria I é constituída por 18 alunos.

   A direção pediu que dois alunos de cada turma da escola participassem no Parlamento dos Jovens. Oito alunos da turma do 11.º ano de Artes Visuais (cinco raparigas e três rapazes) mostraram interesse em representar a turma, pelo que foi decidido sortear os dois representantes entre os que se voluntariaram.

   1.1. Utiliza uma árvore de probabilidades para representar os casos possíveis e respetivas probabilidades (sob a forma de fração irredutível), da experiência aleatória que consiste em selecionar aleatoriamente um aluno de entre os voluntários, seguida de uma nova seleção de um outro aluno de entre os restantes.

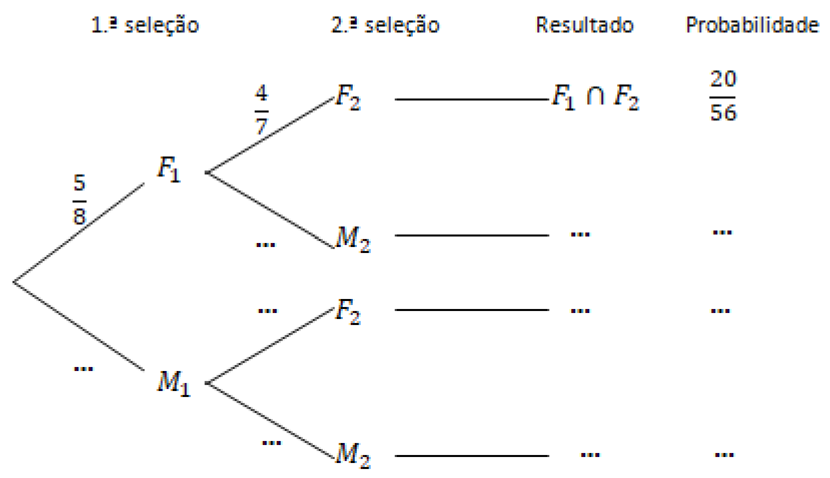
   Sugere-se uma árvore (conforme o esquema seguinte) em que se preencham os "ramos da árvore" com os valores das respetivas probabilidades, como a que se apresenta, considerando os acontecimentos:

   F_1: " o 1.º aluno selecionado é uma rapariga";

   M_1: " o 1.º aluno selecionado é um rapaz";

   F_2: " o 2.º aluno selecionado é uma rapariga";

   M_2: " o 2.º aluno selecionado é um rapaz".



1.2. Explica porque é que o valor da probabilidade do 1.º aluno selecionado ser uma rapariga, $P\left(F_1\right)$, é igual a $\frac{5}{8}$.

1.3. Na árvore está assinalada a probabilidade de na segunda seleção sair uma rapariga **sabendo que** na primeira seleção também saiu uma rapariga. Qual é o valor dessa probabilidade?

Nota: a probabilidade de na segunda seleção sair uma rapariga sabendo que na primeira seleção também saiu uma rapariga:

- designa-se por **probabilidade condicionada**;
- representa-se por $P\left(F_2|F_1\right)$.

1.4. Qual é o valor de $P\left(F_2|M_1\right)$?

Compara a probabilidade obtida com a considerada no item anterior e tira conclusões.

De um modo geral:

Seja S um espaço de resultados e P uma probabilidade nesse espaço. Dados dois acontecimentos A e B, com $P(B) > 0$, define-se probabilidade condicionada de A se B (ou probabilidade de A condicional à ocorrência de B) como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.5. Completa a tabela de contingência com os valores das probabilidades conjuntas dos acontecimentos assinalados.

		2.º Sorteado		
		Rapariga	Rapaz	Total
1.º Sorteado	Rapariga			
	Rapaz			
	Total			

2. Da turma de Artes da Escola Secundária Jerónimo Emiliano de Andrade, na Ilha Terceira, sabe-se que:
   - 40% dos alunos gostam de Matemática B;
   - 25% gostam de Educação Física;
   - 15% gostam de ambas as disciplinas.

   Selecionando aleatoriamente um aluno dessa turma, qual é a probabilidade de ele gostar de Educação Física sabendo que gosta de Matemática B?

3. Numa determinada cidade, sabe-se que:
   - 36% das famílias têm um cão;
   - 30% das famílias têm um gato;
   - 22% das famílias que têm um cão também têm um gato.

   É escolhida ao acaso uma família, dessa cidade, que tem um gato, qual é a probabilidade de ter também um cão?

4. Numa caixa com lápis, todos com cores diferentes, a saber: vermelho, amarelo, verde, rosa, azul, roxo, castanho, preto, laranja, branco, dourado e prateado. Considera a experiência aleatória "Sem olhar para dentro da caixa, retirar um lápis e ver a sua cor".

   4.1. Quantos casos possíveis existem?

   4.2. Qual é a probabilidade do lápis retirado ser verde?

   4.3. Calcula a probabilidade de retirar um lápis verde dado que a cor possui pelo menos cinco letras.

   4.4. Foi retirado um lápis cuja cor tem oito letras. Qual é a probabilidade de esse lápis ser amarelo.

(Adaptado de Conditional Probability & Independence)

TAREFA 6

Não deixem morrer os corais

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos continuam a trabalhar o conceito de probabilidade condicionada e têm o primeiro contacto com o conceito de acontecimentos independentes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Lei de Laplace, probabilidade condicionada, diagrama em árvore e tabela de contingência.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

Sugere-se que esta tarefa seja resolvida em pequenos grupos, podendo o professor acompanhar a resolução com momentos de sistematização dos conceitos abordados.

As principais dificuldades manifestados por alguns alunos, verificaram-se em termos da:

- interpretação dos enunciados;
- distinção entre a probabilidade da interseção de dois acontecimentos e a probabilidade condicionada;
- utilização correta da simbologia matemática;
- aplicação do conceito de acontecimentos independentes.

Sugere-se que o professor discuta/analise, com os alunos, as situações apresentadas de modo a ajudá-los a superar as dificuldades.

TAREFA 6

Não deixem morrer os corais

1. O Oceanário tem patente uma exposição dedicada à grande barreira coralina que corre risco de extinção devido à poluição marítima e ao aquecimento anormal das águas. Duas das principais causas de morte dos corais são o branqueamento (provocado pelo aquecimento das águas) e a hipoxia (provocada por níveis de oxigénio muito baixos).
Existem dois tipos de corais continentais: os de franja e os de barreira.
Numa determinada zona morta da Grande Barreira de Coral, sabe-se que:
   - 10% dos corais morreram por hipoxia;
   - dos corais que morreram por hipoxia, 45% eram do tipo franja;
   - dos corais que morreram por branqueamento, 85% eram do tipo barreira.

   Considera os seguintes acontecimentos:

   F: O coral morto é do tipo Franja.

   B: O coral morreu por branqueamento.

   1.1. Sabendo que o coral era do tipo barreira, qual é a probabilidade de ter morrido por branqueamento? Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

   1.2. Dois acontecimentos dizem-se independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro.

   > Os **acontecimentos** A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são **independentes** se:
   > - $P(A|B) = P(A)$ ou $P(B|A) = P(B)$
   >
   >   **ou**
   > - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

   Um cientista considera que a causa da morte dos corais é independente do tipo de coral.
   Verifica se o cientista tem razão.
   Na tua resolução:
   - calcula $P(B)$;
   - calcula $P(B|F)$;
   - compara os valores e indica, justificando, se o cientista tem razão.

2. Na Escola Secundária de Monção existem os clubes de Fotografia, Olaria, Robótica e Debate. No início do ano letivo, 30 alunos estavam inscritos nesses clubes (nenhum pertencia a mais do que um clube).
A tabela seguinte mostra a distribuição dos 30 alunos pelos quatro clubes da escola:

	Clubes				
	Fotografia	Olaria	Robótica	Debate	Total
Rapaz	2	0	9	1	12
Rapariga	4	6	5	3	18
Total	6	6	14	4	30

Foi selecionado aleatoriamente um aluno, dos que pertencem a um dos clubes, para falar na sessão de boas-vindas no início do ano.

Considera os acontecimentos:

A: "o aluno selecionado é uma rapariga";

B: "o aluno selecionado é um rapaz";

C: "o aluno selecionado pertence ao clube de Fotografia";

D: "o aluno selecionado pertence ao clube de Olaria";

E: "o aluno selecionado pertence ao clube de Robótica";

F: "o aluno selecionado pertence ao clube de Debate".

2.1. Traduz em linguagem corrente o significado de $P(A|E)$ e determina o seu valor.

2.2. Traduz em linguagem corrente o significado de $P(E|A)$ e determina o seu valor.

2.3. Verifica se os acontecimentos E e A são independentes. Justifica a tua resposta.
Sugestão: começa por determinar $P(E)$.

2.4. Traduz em linguagem corrente o significado de $P(B|D)$ e determina o seu valor.

2.5. Verifica se os acontecimentos B e D são independentes. Justifica a tua resposta.
Sugestão: começa por determinar P(B).

(Adaptado de [Conditional Probabilities and Independent Events])

3. Na tabela seguinte, estão apresentados os resultados, em percentagem, de um estudo que pretende avaliar a relação de determinados fatores de risco com o desenvolvimento de cancro do pulmão, num conjunto de pessoas residentes na mesma cidade.

	Tem cancro do pulmão	Não tem cancro do pulmão	Total
Possui fatores de risco	$27,1\ \%$	$11,1\ \%$	
Não possui fatores de risco	$4,45\ \%$	$57,35\ \%$	
Total			$100\ \%$

Nota: Considera-se que um residente possui fatores de risco se for fumador ou se tiver histórico familiar com cancro.

Foi selecionado, aleatoriamente, um dos residentes que participaram no estudo.

3.1. Completa a tabela.

3.2. Qual é a probabilidade de o residente escolhido:

3.2.1. Ter cancro?

3.2.2. Possuir fatores de risco e não ter cancro?

3.2.3. Possuir fatores de risco ou ter cancro?

3.2.4. Ter cancro dado que possui fatores de risco?

3.3. Os acontecimentos "Tem Cancro" e "Não possui fatores de risco" são independentes? Justifica a tua resposta.

(Adaptado de [Conditional Probability & Independence])

TAREFA 7

Se beber não conduza

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos são desafiados a resolver várias situações da vida real onde deverão aplicar os conceitos adquiridos no âmbito da probabilidade condicionada e dos acontecimentos independentes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regra de Laplace, probabilidade condicionada, acontecimentos independentes, diagrama em árvore, diagrama de Venn e tabela de contingência.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

Sendo esta a última tarefa do tema, pretende-se que os alunos sejam capazes de desenvolver um trabalho mais autónomo comparativamente com as tarefas anteriores, pelo que deverá ser resolvida, sempre que possível, em pequenos grupos. Se o professor achar mais conveniente, poderá analisar os resultados obtidos pelos diversos grupos no final do item 1. e depois solicitar que continuem a resolução da tarefa.

No final da tarefa, deverá ser realizada uma discussão sobre as resoluções dos alunos dos vários itens..

É provável que alguns alunos continuem a demonstrar dificuldades na interpretação dos enunciados em linguagem matemática, sobretudo relativamente à probabilidade condicionada e à probabilidade da interseção de dois acontecimentos.

O professor pode chamar a atenção para a importância de representar as probabilidades pedidas em linguagem matemática, pois por vezes ajuda na resolução dos problemas apresentados.

O item 6. é de aprofundamento, pois é uma questão que implica um maior formalismo matemático.

TAREFA 7

Se beber não conduza

Portugal é um dos países da União Europeia com maiores taxas de mortalidade rodoviária . O excesso de Álcool no sangue é uma das principais causas.

A Taxa de Alcoolemia no Sangue (TAS) é determinada pelo número de gramas de álcool presentes em cada litro de sangue (g/l). O cálculo da TAS depende de vários fatores, como o tipo de bebida ingerida, a quantidade e a qualidade da mesma, as características individuais de quem ingere (sexo, idade, peso, altura, saúde, cansaço) e o momento em que a bebida foi ingerida.

Nas Operações Stop, a Brigada de Trânsito utiliza medidores de alcoolemia para testar se os condutores estão em condições para conduzir. Em Portugal, para os condutores de automóveis classe 1, com carta há mais de 3 anos, a TAS máxima permitida por lei é 0,5 g/l. O teste do balão nem sempre dá resultados precisos, pelo que pode-se pedir uma contra análise para validar o resultado.

1. Para verificar a fiabilidade de um alcoolímetro fez-se o teste do balão, durante uma Operação Stop, a uma amostra aleatória de condutores. Seguidamente realizou-se uma contra análise dos mesmos.
   A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos, no teste e na contra análise da amostra aleatória de condutores .

	Resultado do Teste	
Resultado da contra análise	$TAS \geq 0,5\ g/l$	$TAS < 0,5\ g/l$
$TAS \geq 0,5\ g/l$	19	1
$TAS < 0,5\ g/l$	9	171

1.1. Quantos condutores foram testados?

1.2. Escolhido um dos condutores, ao acaso, qual é a probabilidade do resultado do teste estar de acordo com a contra análise?
Apresenta o resultado na forma de dízima.

1.3. Uma pessoa foi selecionada, ao acaso, do grupo cujo teste indicou que tinha $TAS \geq 0,5\ g/l$. Qual é a probabilidade de essa pessoa ter $TAS \geq 0,5\ g/l$ na contra análise? Apresenta o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.
O que podes concluir sobre a fiabilidade do teste?

1.4. Uma pessoa foi selecionada, ao acaso, do grupo que na contra análise teve $TAS < 0,5\ g/l$.
Qual é a probabilidade de essa pessoa ter $TAS \geq 0,5\ g/l$ no teste? Apresenta o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

Nota:

- Se a contra análise contrariar um resultado positivo obtido no teste do balão, dizemos que o teste é **falso positivo**.
  P(falso positivo) = P(teste com $TAS \geq 0,5\ g/l$ | contra análise com $TAS < 0,5\ g/l$).
- Se a contra análise contrariar um resultado negativo obtido no teste do balão, dizemos que o teste é **falso negativo**.
  P(falso negativo) = P(teste com $TAS < 0,5\ g/l$ | contra análise com $TAS \geq 0,5\ g/l$).

2. De um baralho de cartas, retiraram-se as cartas "números 2" e "número 3" do naipe de copas (cartas vermelhas), e as cartas "número 2", "número 3" e "número 4" do naipe de espadas (cartas pretas). Colocaram-se estas cartas num saco. As cartas são indistinguíveis ao tato.

Considera a experiência aleatória: "Retirar uma carta do saco e registar a sua cor e o seu número. Voltar a colocar no saco a carta retirada e retirar uma segunda carta, registando-se também a sua cor e o seu número. Os algarismos obtidos formam, respeitando a ordem de saída, o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades de um determinado número."

Por exemplo, se o algarismo registado na primeira carta saída for um 3 e o da segunda carta um 2, o número formado será o 32.

Determina:

2.1. o número de elementos do espaço de resultados associado a esta experiência aleatória;

2.2. a probabilidade de retirar duas cartas vermelhas;

2.3. a probabilidade de obter um número divisível por 3.

3. No 12.º ano os alunos têm de escolher duas disciplinas de opção entre as várias disponibilizadas pela escola. Três das disciplinas de oferta de uma escola são: Oficina de Artes, Física e Psicologia.
Considera a experiência aleatória de selecionar, ao acaso, um aluno desta escola, e os acontecimentos:
A: "O aluno ter escolhido a disciplina de Oficina de Artes" ;
B: "O aluno ter escolhido a disciplina de Física" ;
C: "O aluno ter escolhido a disciplina de Psicologia" .
Sabe-se que:
- $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$;
- $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$;
- $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$.

Calcula a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter escolhido pelo menos uma destas disciplinas.

Sugestão: Começa por construir um diagrama de Venn que traduza a situação descrita.

4. Um teste para a deteção do vírus da SIDA foi aplicado a 5100 portadores e a 9900 não portadores deste vírus, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Resultado do teste	Portador	Não portador
Positivo	4950	750
Negativo	150	9150

4.1. Calcula a probabilidade de um indivíduo escolhido ao acaso, de entre os submetidos ao teste:

4.1.1. ter um resultado positivo no teste;

4.1.2. ter um resultado positivo no teste e ser portador do vírus;

4.1.3. não ser portador do vírus e ter um resultado negativo;

4.1.4. obter um falso positivo;

4.1.5. obter um falso negativo;

4.1.6. ser portador do vírus sabendo que o teste é positivo;

4.1.7. não ser portador da doença sabendo que o teste deu negativo.

4.2. Justifica se o resultado do teste é independente do facto do indivíduo ser portador do vírus.

(Adaptado de: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/Probabilidade)sEstatistica2019.pdf)

5. Na viagem de finalistas da Escola Secundária Manuel de Arriaga participaram 120 alunos. Destes, 48 são fluentes em inglês, 36 são fluentes em francês e 12 são fluentes em ambas as línguas.

Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de este ser fluente:

5.1. em pelo menos um dos idiomas?

5.2. a francês dado que o é a inglês?

5.3. apenas a francês?

6. (Aprofundamento) Sejam A e B acontecimentos tais que:

$$P(A) = 0{,}2,\ P(B) = p \text{ e } P(A \cup B) = 0{,}6$$

Calcula p, considerando A e B:

6.1. mutuamente exclusivos (disjuntos);

6.2. independentes.