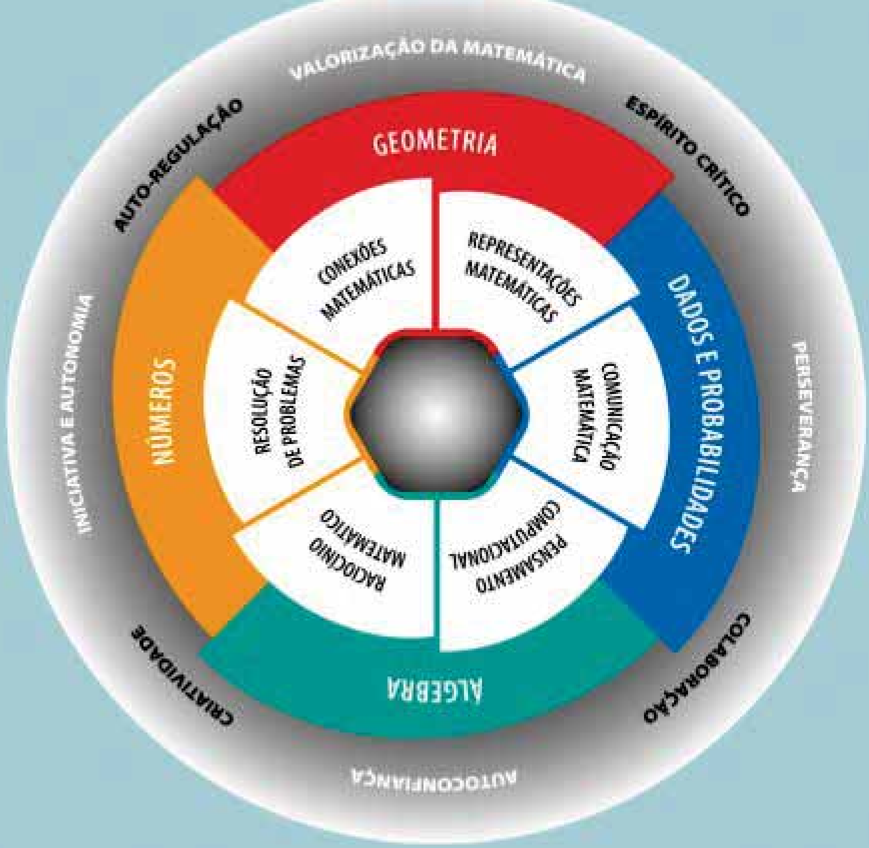
Capacidades matemáticas transversais

no 1.º Ciclo do Ensino Básico – 1.º e 2.º anos



Célia Mestre, Cristina Martins, Cândida Tourais, Isabel Guerra, Ana Paula Canavarro,

Elvira Santos, Hélia Jacinto, João Almiro, Leonor Santos, Lina Brunheira,

Neusa Branco, Rosa Tomás Ferreira, Rui Gonçalo Espadeiro

2025

direção-geral da educação | PESSOAS 2030 | PORTUGAL 2030 | Cofinanciado pela União Europeia

Ficha técnica

Título:
Capacidades matemáticas transversais no 1.º Ciclo do Ensino Básico – 1.º e 2.º anos

Autores: -
Célia Mestre, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Cristina Martins, Escolar Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança, CIEB-IPB
Cândida Tourais, Agrupamento de Escolas de Azeitão
Isabel Guerra, Agrupamento de Escolas Miguel Torga, Bragança
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora
Elvira Santos, Escola Superior de Educação da Lusofonia
Hélia Jacinto, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
João Almiro, Escola Secundária de Tondela
Leonor Santos, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Lina Brunheira, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Rosa Tomás Ferreira, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo

Edição
Direção-Geral da Educação

Diretor-Geral da Direção-Geral da Educação
David Sousa

ISBN
978-972-742-592-1

Data
2025

À *Leonor,*

com quem sempre aprendemos

Índice

Introdução

Apresentação e contextualização

Apresentação

Esta publicação faz parte de um conjunto de brochuras publicadas pela Direção Geral de Educação (DGE), no quadro do desenvolvimento das medidas de apoio à operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Inicialmente concebidas pelo Grupo de Trabalho em Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM)[1], deram origem a cinco publicações distintas que se constituem como recursos vocacionados para apoiar a generalização das novas orientações curriculares de Matemática nos diferentes ciclos do Ensino Básico. Cada brochura foi redigida por uma equipa de autores que inclui elementos do GTDCPM, tendo a sua maioria participado na escrita das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB), e os professores dos diferentes ciclos de escolaridade que, desde 2021/22, anteciparam a generalização das AEMEB em algumas escolas, em colaboração com o GTDCPM.

Importa sublinhar que estas Aprendizagens Essenciais se constituem como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, com diferenças assinaláveis relativamente a anteriores programas de Matemática para os ciclos de escolaridade correspondentes. Assim, destacamos:

1. Assunção de **três princípios essenciais** que moldam as opções curriculares tomadas: o princípio da Matemática para todos, o princípio da Matemática para o século XXI, e o princípio da Matemática é única, mas não é a única.

2. Privilégio do desenvolvimento da **literacia matemática**, entendendo-a como "a capacidade de raciocinar matematicamente e interpretar e usar a Matemática na resolução de problemas de contextos diversos do mundo real" (Canavarro et al., 2021, p. 2), de modo a "que cada pessoa possa viver e atuar socialmente de modo informado, contributivo, autónomo e responsável" (idem, p. 2). A ideia de literacia matemática constitui a finalidade última para a qual as aprendizagens dos diversos conteúdos devem ser orientadas.

3. Consideração de **conteúdos de natureza diversa na aprendizagem em Matemática**: conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Estes conteúdos de aprendizagem são de natureza

[1] O GTDCPM é constituído por Leonor Santos (Coordenadora), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Gonçalo Espadeiro, Helena Gil Guerreiro, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Neusa Branco, Paulo Correia e Rosa Tomás Ferreira.

diversa, e a sua abordagem deve ser feita de forma articulada e continuada, em todos os ciclos de escolaridade;

4. Valorização de uma **abordagem integrada e continuada de conhecimentos matemáticos** respeitantes a quatro temas clássicos — Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, e Geometria e Medida (apenas Geometria no 3.º Ciclo) — prevendo-se que todos os temas sejam abordados ao longo de todos os anos de escolaridade de cada ciclo, através de tarefas que envolvam conceitos associados a quantidade, relações, dados e incerteza, e espaço e forma.
5. Valorização do desenvolvimento de um conjunto alargado de seis **capacidades matemáticas transversais**, incluindo capacidades há muito reconhecidas como centrais — a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática — e ampliando o leque a outras que são agora igualmente contempladas — as representações matemáticas, as conexões matemáticas, e o pensamento computacional.
6. Valorização do desenvolvimento de **capacidades e atitudes gerais transversais** que passam a estar explicitamente previstas, nomeadamente as que decorrem da seleção das capacidades e atitudes das áreas de competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Martins et al., 2017) que mais diretamente se relacionam com o trabalho em Matemática. São elas as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel do conhecimento, neste caso da Matemática. Esta seleção não pressupõe que as outras competências enunciadas no PASEO sejam excluídas da aula de Matemática, devendo ser consideradas sempre que surgirem como relevantes ao longo do trabalho com os alunos.
7. Assunção da importância da adoção de **métodos de ensino de natureza exploratória**, centrados na atividade dos alunos/as, apoiados por recursos poderosos que ampliem e enriqueçam a experiência matemática dos alunos, como é o caso de recursos digitais.

Temos consciência que a operacionalização das novas orientações curriculares poderá colocar desafios e levantar dificuldades aos professores, nomeadamente no que diz respeito à consideração de uma diversidade de conteúdos de aprendizagem a serem abordados de forma integrada na sala de aula, envolvendo conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Assim, neste conjunto de brochuras, optamos por colocar o foco no trabalho a desenvolver em sala de aula para levar a cabo esta orientação fundamental, dando particular relevo ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

Das cinco brochuras, uma é especialmente focada no pensamento computacional, o que se justifica pelo caráter de novidade que esta capacidade representa. As outras quatro brochuras dedicam-se ao conjunto das seis capacidades matemáticas transversais, com explorações nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º Ciclo – 1.º e 2.º anos, 1.º Ciclo – 3.º e 4.º anos, 2.º Ciclo, 3.º Ciclo).

Cada uma destas quatro brochuras segue uma estrutura comum, organizada em três partes. Após esta introdução, que apresenta as brochuras e caracteriza os contextos em que se antecipou a operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais, no ciclo de escolaridade a que a brochura diz respeito, a segunda parte discute, com apontamentos teóricos e exemplos, o significado atribuído a cada uma das capacidades matemáticas transversais, e a terceira parte apresenta exemplos de tarefas que foram efetivamente explorados com as turmas e discute a respetiva exploração. Para cada tarefa, inclui-se 1) o enunciado, 2) uma planificação detalhada da(s) aula(s) visando a exploração da tarefa, onde se inclui elementos diversos como uma antecipação de eventuais resoluções esperadas por parte dos alunos, 3) descrição da concretização da tarefa na prática, com atenção às diferentes fases da aula, episódios da exploração com os alunos, e conclui-se com 4) a análise das aprendizagens evidenciadas pelos alunos.

Esperamos que este documento possa ajudar os professores na operacionalização das novas orientações curriculares de Matemática para o Ensino Básico, constituindo-se como um recurso quer para o trabalho individual de preparação do professor, quer para o trabalho colaborativo que poderá desenvolver com os seus pares na escola e agrupamento. Se é verdade que materiais com a natureza destas brochuras, que proporcionam conhecimento da prática com alunos reais, em contextos reais, podem ser muito inspiradores de cada um dos professores, o seu efeito será muito mais potenciado se forem entendidos como recursos para apoiar o trabalho nas escolas, entre pares, contribuindo para a concretização do desenvolvimento curricular que importa fazer, tendo em vista a qualificação e adequação das práticas de ensino visando a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos em Portugal.

Contextualização

De seguida, apresenta-se uma caracterização das escolas e das turmas do 1.º e 2.º anos do 1.º Ciclo do Ensino Básico que anteciparam a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática, desde 2021/22, e nas quais se desenrolaram as atividades que relatamos nesta brochura.

Importa salientar que as turmas que anteciparam a generalização das AEMEB não se constituíram como turmas com características especiais. A sua seleção seguiu estritamente os critérios habituais de cada Agrupamento de escolas/Escolas não agrupadas para a sua distribuição pelos docentes. Não foram indicados previamente quaisquer critérios de constituição das turmas que de alguma forma trouxessem excecionalidade ao processo habitualmente usado. Assim, as turmas onde se concretizou a antecipação das AEMEB foram as turmas normais atribuídas aos professores que se disponibilizaram para colaborar com o GTDCPM.

Assim, no 1.º Ciclo, 1.º e 2.º anos, as professoras que iniciaram o trabalho com as AEMEB nas respetivas turmas foram Cândida Tourais, professora no Agrupamento de Escolas de Azeitão, e Isabel Guerra, professora no Agrupamento de Escolas Miguel Torga, em Bragança. Ambas as professoras são profissionalizadas no 1.º Ciclo e possuem vasta experiência de ensino.

Passamos a caracterizar as escolas e as turmas envolvidas neste processo.

O Agrupamento de Escolas de Azeitão situa-se na região de Azeitão que ocupa uma área de 69,32 km^2 e tem cerca de 20955 habitantes registados (Fonte: INE, Censos 2021). Fazendo parte do concelho de Setúbal, corresponde à Freguesia de Azeitão, limitada pela Ribeira de Alcube, a leste, pela da Azenha d'Ordem a oeste, pela de Coina a norte e pelo Oceano Atlântico a sul.

O Agrupamento de Escolas de Azeitão, criado em 27 de agosto de 2003, integra sete estabelecimentos de ensino, três Jardins de Infância, cinco escolas de 1.º ciclo e uma escola de 2.º e 3.º ciclos. Esta última oferece, também, uma componente formativa dirigida à população adulta. Oferece, ainda, formação dirigida a falantes de outras línguas (Português Língua de Acolhimento), o que constitui uma oportunidade de convivência multicultural e de integração de imigrantes.

A população escolar do agrupamento em 2022 era de 1797 alunos, de nacionalidades muito diversificadas, abarcando cerca de quarenta países. No 1.º ciclo estavam matriculados cerca de 650 alunos.

As profissões dos pais e encarregados de educação concentram-se no setor terciário. Relativamente às habilitações académicas salienta-se a prevalência do ensino superior em mais de 50% dos pais e encarregados de educação dos discentes do Agrupamento de Escolas de Azeitão, proporcionando contextos familiares potencialmente favoráveis ao acompanhamento dos seus educandos. Regista-se, no entanto, um aumento acentuado do número de crianças e jovens que beneficia de auxílios económicos, Ação Social Escolar (ASE).
No ano letivo 21/22, a turma do 1.º ano de escolaridade, inicialmente, era constituída por 24 alunos, 13 rapazes e 11 raparigas. Em fevereiro de 2022 recebeu dois alunos, um aluno refugiado da Ucrânia e uma aluna transferida por motivo de alteração de residência. A turma passou a ser constituída por 26 alunos, 14 rapazes e 12 raparigas. No ano letivo 22/23, a turma do 2.º ano de escolaridade tinha 25 alunos, por um aluno ter sido transferido para outro agrupamento, devido a alteração de residência, passando a ser constituída por 13 rapazes e 12 raparigas.
No 1.º ano, os alunos sempre se mostraram muito motivados para as aprendizagens, sendo muito curiosos, participativos, argumentativos e empenhados. Ao longo do ano evoluíram ao nível da maturidade, da responsabilidade e da autonomia no seu trabalho individual, no trabalho a pares ou de grupo. Cinco alunos revelaram mais dificuldades relacionadas com alguma imaturidade para adquirirem as aprendizagens formais. Como estratégias de melhoria para promover a evolução dos alunos fez-se o acompanhamento, respeitando os seus ritmos e especificidades de forma diferenciada no trabalho individual diário e no Plano Individual de Trabalho, realizado pela professora titular, professora de coadjuvação e por tutorias dos colegas. Reforçou-se a autoavaliação e o feedback promovendo o diálogo e o questionamento frequente com os alunos, no sentido de os orientar e informar, regularmente, sobre os seus desempenhos.
No 2.º ano, os alunos continuaram a revelar predisposição para aprender e partilhar saberes, curiosidade pelos conhecimentos e envolvimento nas atividades e tarefas. Mostraram-se autónomos e empreendedores nas suas aprendizagens, revelando iniciativa própria, destacando-se a realização e apresentação de trabalhos de projeto. Os alunos com mais fragilidades, referidos anteriormente, evoluíram positivamente, embora necessitando da continuidade das medidas de apoio.
O trabalho realizado nos dois anos letivos permitiu a inclusão dos alunos, visando responder à diversidade das necessidades e potencialidades de todos e de cada um, promovendo a participação nos processos de aprendizagem e na vida da comunidade escolar.

O Agrupamento de Escolas Miguel Torga fica situado na zona histórica de Bragança. A oferta educativa vai da educação pré-escolar até ao ensino secundário, incluindo a oferta do ensino articulado de dança. É reconhecido pelo seu projeto cultural e pelas práticas inclusivas e inovadoras, no contexto local, bem como em projetos nacionais e internacionais. A população escolar é de cerca de 700 alunos, distribuídos por três escolas, uma delas localizada na área rural. O projeto educativo tem como principais eixos de ação garantir o sucesso e o desenvolvimento integral dos alunos através de várias atividades e projetos. Participa em programas internacionais e nacionais, como o Erasmus+, Escolas Bilingues Interculturais de Fronteira e intercâmbios, enriquecendo a experiência educativa dos alunos e professores. O Agrupamento tem 136 alunos de 17 nacionalidades diferentes.

O Centro Escolar de Santa Maria é uma das escolas que compõem o Agrupamento, com cerca de 290 alunos da educação pré-escolar e 1.º ciclo. A maioria dos alunos reside na cidade de Bragança, havendo um número reduzido de alunos vindo do meio rural.

A escola está bem equipada para atender às necessidades educativas e de desenvolvimento dos alunos. As infraestruturas incluem: 12 salas de aula para o 1.º ciclo e 4 salas para a educação pré-escolar, todas equipadas com vídeo projetores e ligação à internet. Possui espaços alocados a atividades específicas que complementam o currículo, uma biblioteca, um espaço multiusos utilizado para diversas atividades extracurriculares e eventos escolares, um refeitório, sala de convívio para docentes e não docentes, gabinetes de coordenação, um ginásio e um espaço exterior com parques infantis.

O envolvimento dos pais na vida escolar dos seus educandos e na colaboração com a escola, foi muito positivo. A escola manteve também colaborações com a comunidade local, incluindo parcerias com a Biblioteca Municipal, Instituto Politécnico de Bragança, Museu Abade Baçal, Câmara Municipal de Bragança e Centro de Ciência Viva, proporcionando aos alunos aprendizagens significativas e diversificadas.

No ano letivo de 2021/2022, a turma foi inicialmente constituída por 21 alunos, 11 rapazes e 10 raparigas. A maioria das famílias possuía uma condição socioeconómica estável, cujos encarregados de educação apresentavam habilitações académicas de nível superior e situações de emprego estável. Dois alunos beneficiaram de apoio social escolar. O diagnóstico inicial revelou que os alunos possuíam as competências necessárias, que lhes permitiriam progredir nas aprendizagens; no entanto, a maioria apresentava algumas dificuldades ao nível da linguagem, com um vocabulário muito limitado, com a consciência fonética e fonológica pouco desenvolvidas, abaixo do esperado para a idade devido às condicionantes provocadas pela COVID-19. Em dezembro, a turma recebeu um aluno vindo do Brasil que se integrou facilmente, embora apresentasse algumas dificuldades.

A turma era diversificada e muito heterogénea, com diferentes ritmos de trabalho, com diferentes necessidades educativas demonstrando também uma considerável falta de autonomia. Apresentava grandes desafios na gestão de comportamentos disruptivos por parte de quatro alunos. Encaminhado para pedopsiquiatria, um destes alunos foi diagnosticado com transtorno desafiador opositivo. Contudo, a maioria destacou-se por ter comportamentos muito ajustados, demonstrando compromisso e interesse pela aprendizagem.

O confinamento devido à Pandemia Covid 19, os isolamentos profiláticos recorrentes, resultaram na necessidade de muitos alunos acompanharem as aulas online. Um dos alunos passou a ser abrangido pelo Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, devido ao diagnóstico de Perturbação do Espectro do Autismo.

No ano letivo de 2022/23, a turma foi reduzida devido à reorganização das turmas resultante da formação de uma nova turma na escola, passando a ser constituída por 17 alunos, 8 rapazes e 9 raparigas. O aluno diagnosticado com Perturbação do Espectro do Autismo continuou na turma devido à excelente integração no grupo.

Os alunos continuaram assíduos, embora um grupo muito restrito apresentasse alguma falta de pontualidade. O comportamento e o aproveitamento geral situaram-se no nível Bom, apesar de alguns desafios individuais que continuaram a necessitar de apoio individualizado. Educação Física e Matemática eram as disciplinas preferidas pela maioria dos alunos.

A relação entre os alunos era boa, com poucas ocorrências de conflitos, e onde demonstravam respeitos pelas ideias uns dos outros. A disciplina foi mantida de forma eficaz, dentro e fora da sala de aula. O envolvimento dos pais na vida escolar dos seus educandos continuou pautada por grande colaboração. A escola manteve colaborações com a comunidade local, incluindo as parcerias previamente estabelecidas com diversas entidades sociais e culturais.

Ao longo do ano, a turma evoluiu favoravelmente, com os alunos a revelarem-se muito curiosos e motivados para a aprendizagem, demonstrando entusiasmo e muito gosto pela escola. Destacam-se as interações positivas criadas pelas dinâmicas de grupo e o espírito de interajuda que os alunos com melhor desempenho prestaram aos colegas com maiores dificuldades, ajudando-os ao nível da realização e conclusão das tarefas propostas, bem como a sentirem-se mais confiantes no seu desempenho.

Capacidades matemáticas transversais

Breve caracterização

Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática. Aprender a resolver problemas capacita os alunos para enfrentar desafios e aplicar conceitos matemáticos em novas situações, pelo que todos os alunos devem ter oportunidade de poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes na resolução de problemas (Canavarro et al., 2021). Esta atividade complexa vai além da mera aplicação de factos e procedimentos matemáticos previamente aprendidos, envolvendo a adaptação ou o desenvolvimento de estratégias adequadas à obtenção de uma solução válida. A resolução de problemas tem o potencial de proporcionar desafios intelectuais aos alunos que, para além de contribuírem para o desenvolvimento de capacidades como a perseverança, a autoconfiança, o pensamento crítico e criativo, reforçam a compreensão de conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Problema como tarefa

Um *problema* é uma situação desafiadora para a qual se pretende obter uma solução sem que, à partida, se saiba como resolvê-la ou se conheça um caminho imediato que garanta a resposta (Abrantes, 1988; Vale et al., 2015). Em particular, o que distingue um problema de um exercício é precisamente o facto de não se conhecer qual o procedimento matemático ou o algoritmo que permita, com algum grau de certeza, alcançar a solução. É importante destacar que um problema pressupõe um nível adequado de desafio e interesse de forma a envolver o aluno na procura da solução, mobilizando conhecimentos matemáticos e adaptando ou desenvolvendo as suas próprias estratégias de resolução. É importante que os alunos contactem com problemas que admitem vários processos de resolução, várias soluções ou até sem solução.

A resolução de problemas é um tipo de tarefa que, por ser desafiante, tem o potencial para envolver os alunos em trabalho exploratório na aula de Matemática. Apesar de a resolução de problemas ter passado a ser cada vez mais associada a tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2007), enquanto as tarefas de exploração podem apresentar informações sobre a estratégia que o aluno deverá seguir, uma tarefa que desencadeie atividade de resolução de problemas deverá permitir o desenvolvimento de estratégias próprias em que o aluno mobiliza os seus conhecimentos matemáticos e, eventualmente, extra-matemáticos. Cabe ao professor acolher a diversidade de estratégias, valorizando a criatividade dos alunos, a autonomia e perseverança, mobilizando-as para orquestrar discussões coletivas que analisem essas estratégias e as representações usadas, e comparem a sua eficácia na obtenção da solução (Canavarro et al., 2021).

Etapas e estratégias de resolução de problemas

Existem vários modelos que visam explicar como se resolve um problema de Matemática. Pólya (1978), destacando a importância de examinar um dado problema de diferentes perspetivas, propôs um modelo que compreende quatro etapas: (i) *compreensão do problema*, na qual é necessário prestar atenção ao enunciado para interpretá-lo e identificar os aspetos relevantes; (ii) *elaboração de um plano*, etapa que envolve planear a estratégia a ser seguida, considerando que o caminho pode ser longo e desafiador; (iii) *implementação do plano*, na qual se segue o roteiro geral delineado na fase anterior, sem perder de vista o problema em si; e (iv) *análise retrospetiva*, na qual o aluno reconsidera e examina novamente o caminho percorrido e verifica a solução obtida.

A cada uma destas etapas, Pólya associou um conjunto de estratégias gerais que pretendem ajudar os alunos a tornarem-se mais eficazes na resolução de problemas, e que são designadas por *heurísticas*. Assim, na primeira etapa o aluno pode procurar identificar: que dados são fornecidos, se são suficientes, se existem condições e quais, ou o que é pedido como resposta ao problema. Na elaboração do plano pode ser útil pensar se se conhece um problema semelhante, mais geral ou até mais acessível e se é possível usar um método de resolução semelhante, ou analisar se todos os dados serão necessários ou se é possível resolver apenas uma parte do problema. Durante a execução do plano, o aluno deve confirmar se realizou corretamente todos os procedimentos e verificar se consegue justificar matematicamente cada passo. Na etapa final, poderá analisar se é possível verificar o resultado, se está de acordo com os dados e as condições dadas e, eventualmente, poderá procurar outra estratégia de resolução.

Ao longo do Ensino Básico, os alunos devem enriquecer progressivamente o seu leque de estratégias de resolução de problemas. Assim, no 1.º Ciclo será adequado desenvolver estratégias baseadas na utilização de esquemas, diagramas, tabelas ou gráficos, ou ainda o desenvolvimento de um modelo que pode compreender uma ou mais operações matemáticas.

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB) (Canavarro et al., 2021) reconhece-se a relevância das ferramentas tecnológicas como recursos incontornáveis e poderosos na aprendizagem da Matemática, possibilitando a ampliação de contextos e perspetivas sobre objetos matemáticos e permitindo análises e explorações que estariam inacessíveis aos alunos sem acesso a estes recursos. É, pois, nesta linha que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas se pode também fazer mediante o uso de tecnologias digitais. Resolver um problema de matemática com recurso à tecnologia envolve ser-se capaz de identificar os recursos tecnológicos adequados e conjugá-los de forma eficiente com conhecimentos e procedimentos matemáticos, tanto para desenvolver uma estratégia como para explicar, justificar e comunicar o pensamento matemático desenvolvido (Jacinto & Carreira, 2017).

Papel da resolução de problemas na aula de Matemática

A resolução de problemas surge nas AEMEB como um dos oito objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática, como uma capacidade matemática transversal e como um tópico de aprendizagem. Mas qual o seu papel na sala de aula?

Várias perspetivas coexistem sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática. Uma dessas visões, mais tradicional, concebe a resolução de problemas como *aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos*, pelo que o foco deste trabalho reside na aquisição de recursos matemáticos e na sua aplicação mediante a resolução de problemas que surgem, tipicamente, no final da lecionação de um tópico (ensino *para* a resolução de problemas). Numa outra linha concebe-se que os alunos devem tornar-se proficientes na resolução de problemas de matemática, ou seja, aprender a resolver problemas é um *objetivo per si.* Assim, a resolução de problemas é encarada como um conteúdo, o que leva a que ocorra o ensino explícito de heurísticas e estratégias (ensino *sobre* resolução de problemas). Uma terceira via entende a resolução de problemas como *oportunidade para construção de novo conhecimento*, pelo que o foco reside na aprendizagem de um conceito ou procedimento e resulta da atividade de resolução de um problema (ensino *através* da resolução de problemas). Todavia, estas perspetivas não devem ser encaradas como alternativas, tal como sugerem Vale et al. (2015) ao propor uma visão que denominaram 'ensino da matemática *com* resolução de problemas', ou seja, a resolução de problemas deve acompanhar o currículo e a prática da sala de aula, deve permitir desenvolver compreensão de conceitos e da estrutura matemática inerente, bem como levar os alunos a adquirir progressivamente um rol de estratégias que sejam produtivas e úteis noutras situações.

Um exemplo em sala de aula

A figura 1 apresenta um exemplo de um problema que pode ser colocado a alunos dos primeiros anos de escolaridade.

Figura 1. Enunciado do problema "A higiene do elefante" (Pinto, 2009)

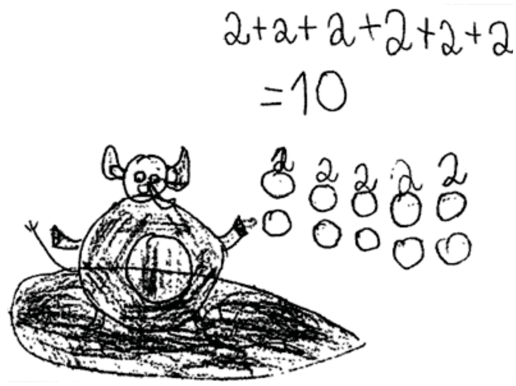
A higiene do elefante
Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias?

O problema "A higiene do elefante" convoca conhecimentos do tema Números, nomeadamente sobre adição e subtração, com o objetivo de levar os alunos a interpretar e modelar situações com adição no sentido de acrescentar e resolver problemas associados (Canavarro et al., 2021).

As soluções apresentadas na figura 2 e na figura 3, produzidas por alunos do 1.º ano, evidenciam estratégias assentes na representação do número total de sabonetes gastos pelo elefante nos 5 dias e a correspondente contagem. No caso da resolução B, o aluno aliou a representação dos cinco pares de sabonetes com o desenvolvimento de um modelo assente na adição, com o sentido de acrescentar, ainda que cometa uma imprecisão nessa indicação (figura 3).

Figura 2. Resolução A do problema "A higiene do elefante" (Pinto, 2009)

Figura 3. Resolução B do problema "A higiene do elefante" (Pinto, 2009)



O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, em articulação com outros temas matemáticos, envolve proporcionar oportunidades aos alunos para contactar com uma diversidade de situações problemáticas que possam ser abordadas através de múltiplas estratégias, permitindo-lhes também tirar partido de diversas ferramentas tecnológicas, não só mobilizando conhecimentos prévios como promovendo a compreensão de novos conhecimentos.

Raciocínio matemático

Em linha com as orientações curriculares internacionais em Matemática (OECD, 2018), não é de estranhar que seja dado particular destaque ao raciocínio matemático nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), agora explicitamente considerada como um conteúdo de aprendizagem, à semelhança do que tinha sido expresso no Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007). O raciocínio, desde sempre, esteve relacionado com a Matemática e o seu ensino. Tradicionalmente, era habitual justificar-se a necessidade da Matemática fazer parte do currículo, afirmando-se ser a disciplina que, por excelência, promove o desenvolvimento do raciocínio (muito embora se possa falar de raciocínio em outros domínios). Mas do que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Raciocinar é um termo usado na linguagem corrente, mas isso não indica que o seu significado seja consensual. Neste texto entendemos que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (Ponte et al., 2020, p. 7). Seguir uma forma fundamentada implica que o raciocínio é uma atividade consciente e intencional, diferenciando-se, deste modo, de outras formas de pensar. Assim, raciocinar é pensar, mas nem toda a atividade de pensar é raciocinar.

No passado, o raciocínio matemático esteve muito associado à ideia de demonstração, seguindo uma lógica dedutiva, levando mesmo à convicção de alguns que se não houver este processo matemático, não se está a desenvolver nos alunos o raciocínio matemático (Oliveira & Henriques, 2022). Na verdade, embora esta vertente seja fundamental na matemática, tem vindo a emergir uma outra perspetiva que sublinha igualmente o lugar do raciocínio indutivo e abdutivo (Jeannotte & Kieran, 2017). De facto, podemos falar em três tipos de raciocínio: o *raciocínio indutivo*, o *raciocínio abdutivo*, e o *raciocínio dedutivo* (Quadro 1).

Quadro 1. Tipos de raciocínio

<table>
<tr><td></td><td>Indutivo</td><td>Abdutivo</td><td>Dedutivo</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Características e propósitos</td><td colspan="2">Pensamento divergente</td><td>Pensamento convergente</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lógica de descoberta</td><td>Lógica de prova</td></tr>
<tr><td>Verificar</td><td>Explicar</td><td>Demonstrar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plausibilidade</td><td>Certeza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intuição</td><td>Lógica</td></tr>
</table>

De seguida, apresentamos alguns episódios que pretendem ilustrar o raciocínio de alunos do 1.º ciclo a partir da tarefa *O V mágico* (Delgado et al., 2022), apresentada na figura 4. A tarefa pode ser trabalhada também no 2.º ciclo, com possibilidade de uma exploração mais completa e com extensões mas, neste contexto, teremos em perspetiva a sua utilização com alunos mais novos.

Figura 4. Tarefa *O V mágico* (Delgado et al., 2022, p. 36)

Os dois V seguintes são formados pelos números de 1 a 5.

O segundo V é mágico porque as somas dos dois "braços" do V são iguais, ou seja:

$4 + 2 + 3 = 5 + 1 + 3$

1. Usa os cartões que tens (cartões circulares e numerados de 1 a 5) para formar outros V e registe–os na tua folha de papel.
2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?
3. O André diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar. Concordas com o André? Porquê?

A primeira questão conduz os alunos à identificação de possíveis V mágicos. Nos primeiros anos, não é de esperar, nem sequer estimular, a procura sistemática de todas as possibilidades, mas o professor deve incentivar os alunos a encontrar vários casos. Esta exploração livre, provavelmente por tentativa e erro, pode ser suficientemente rica para que os alunos comecem a reparar, por observação e comparação dos exemplos que geraram, que, por exemplo, o 5 e o 4 têm de ficar em "braços" diferentes, ou que nos vértices ficam apenas números ímpares. A explicitação destas regularidades corresponde ao processo de *conjeturar* que consiste em formular afirmações não arbitrárias "sobre relações matemáticas gerais baseada em evidência incompleta" (Stylianides, 2008, p. 11). Assim, as conjeturas, através da observação, da construção, da transformação de conhecimento prévio ou de combinações entre estes, podem tomar a forma do reconhecimento de padrões ou de propriedades comuns a um conjunto de objetos.

As conjeturas poderão posteriormente revelar-se verdadeiras ou falsas. É natural que os alunos não estejam de acordo e até é possível que o mesmo aluno mude de resposta. Estamos numa fase de descoberta, em que o pensamento pode ser divergente, muitas vezes guiado pela intuição. É então importante, sempre que adequado, validar as conjeturas através da justificação. Esse é o propósito da questão 2 que, focando-se no caso concreto de uma impossibilidade, pede para que os alunos expliquem o porquê de não formarem um V com o 2 no vértice.

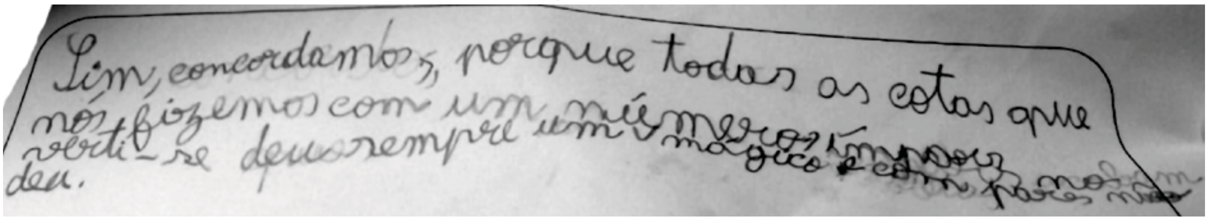
Justificar uma conjetura é, normalmente, um processo mais complexo do que conjeturar. Nem todas as justificações estão ao alcance dos alunos, sobretudo se a conjetura é uma generalização. Neste caso, afirmar que "não há V mágicos com um 2 no vértice" é uma generalização porque diz respeito a um conjunto de objetos matemáticos, ou relações entre objetos desse conjunto, a partir de um dos seus subconjuntos (Jeannotte & Kieran, 2017). Concretamente, a partir da observação de alguns exemplos (os V mágicos formados) estamos a fazer uma afirmação sobre *todos* os possíveis V mágicos. Desta forma, é preciso que o professor estimule os alunos a pensarem nos "porquês" e os apoie na construção da sua argumentação. O seguinte diálogo (Delgado et al., 2022, p. 41) ilustra a interação de um aluno de 2.º ano com a sua professora a este propósito:

O aluno justifica porque não é possível haver um V mágico que tenha o 2 no vértice.	*Professora: Então explica lá tudo direitinho.* *Aluno: Aqui está um par (2). Se juntarmos este (3) com este (4) dá ímpar. E se juntarmos este (1) com este (5) é par. E os resultados destes [aponta para os dois "braços"] têm de ser iguais, para depois se juntar a este [aponta para o 2]. Mas não dá porque aqui [aponta para os "braços"] só há um par. Assim, tinha de estar aqui [aponta para o vértice] um ímpar!*

Curiosamente, o aluno discute a situação com a intenção de justificar que o 2 não pode ser vértice, mas acaba por estender ainda mais a sua conjetura no fim, afirmando que o número no vértice tem de ser um ímpar. Podemos dizer que estamos na presença de uma conjetura que é uma generalização e que surge no decurso de raciocínio abdutivo, um tipo de raciocínio menos conhecido. Ele surge quando somos confrontados com algo que não estávamos à espera e formulamos uma hipótese explicativa para tal ocorrência. Daí a função de explicação que lhe está associada, como referido no Quadro 1.

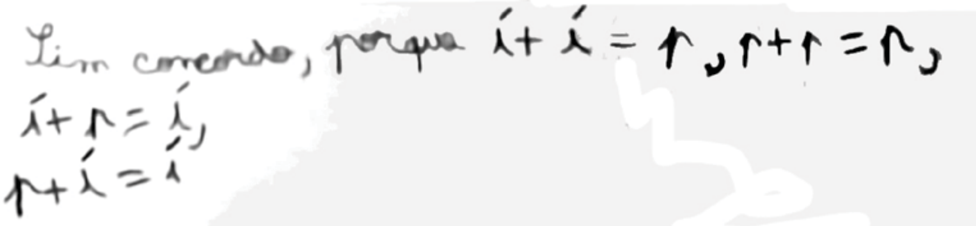
Uma dificuldade recorrente neste processo, na verdade comum a alunos de quaisquer idades, é suportarem o seu argumento na verificação de um número razoável de casos. É o que acontece com o par de alunos de 2.º ano que responde "Sim, concordamos porque todas as co[n]tas que nós fizemos com um número ímpar no vértice deu sempre um V mágico e com pares não" (figura 5).

Figura 5. Justificação de par de alunos sobre a condição de o vértice de um V mágico ter de ser um número ímpar (Delgado et al., 2022, p. 42)



Mais uma vez, é preciso apoiar os alunos na compreensão de que um número grande de exemplos pode dar-nos alguma convicção de que a conjetura seja verdadeira, mas não é o suficiente para a considerarmos válida e, para tal, precisamos analisar mais profundamente a situação. Nesta tarefa, este aspeto é fundamental, pois ela constitui uma ótima oportunidade para os alunos mobilizarem (ou descobrirem, se não o fizeram até então) as propriedades relativas à adição de números pares e ímpares. Foi seguindo essa estratégia que um par de alunos justificou a sua concordância com a afirmação do André na questão 3 (figura 6):

Figura 6. Justificação de par de alunos sobre a condição de o vértice de um V mágico ter de ser um número ímpar (Delgado et al., 2022, p. 43)



Alertamos para que existe uma tendência bastante comum de pedir aos alunos para explicarem quando o que se pretende é que justifiquem. Explicar é descrever como se pensou, logo apela para a comunicação matemática; já o ato de justificar solicita a apresentação de um argumento que permita aferir da verdade ou falsidade de uma afirmação.

Para além dos processos de conjeturar, generalizar e justificar, outros são ainda possíveis de ser indicados, sendo vistos sobretudo como processos auxiliares de raciocínio. São eles: *comparar* e *classificar* que, através da identificação de semelhanças e de diferenças entre objetos, procuram, respetivamente, fazer inferências e agrupar em classes, e ainda o de *exemplificar*, "que analisa exemplos que podem apoiar a procura de semelhanças e diferenças e a procura de uma validação" (Ponte, 2022, p. 8).

Para que o professor possa criar contextos favoráveis à promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio nos seus alunos é necessário não só ter um entendimento aprofundado sobre os tipos de raciocínio e seus processos e formas de os concretizar, como propor tarefas adequadas e explorá-las na sala de aula de forma a tirar partido das suas potencialidades.

Nota: Como fontes possíveis que poderão ajudar os professores a selecionar/adequar/criar tarefas promotoras do raciocínio matemático sugerimos o texto *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos* (Coordenação do Projeto REASON, 2022). Pistas para a exploração de tarefas na sala de aula de Matemática para promover o raciocínio matemático dos alunos poderão ser consultadas em Mendes e colegas (2022) e Delgado e colegas (2022).

Pensamento Computacional

O pensamento computacional é uma das capacidades matemáticas expressa nas Aprendizagens essenciais de Matemática, a ser desenvolvida e mobilizada em articulação com os diversos temas matemáticos e a par de outras capacidades matemáticas. Wing (2006, 2008) fez emergir o pensamento computacional como uma abordagem que nos permite fazer uso de computadores para resolver problemas. Contudo, seja num contexto digital ou não, o pensamento computacional visa capacitar os alunos para selecionarem e aplicarem estratégias e ferramentas adequadas para resolverem problemas. Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional visa contribuir para que todos os alunos sejam capazes de "melhor conceptualizar, analisar e resolver problemas complexos" (Seehorn et al., 2011, p. 9). Hoyles e Noss (2015) apresentam diversas práticas que são implicadas no pensamento computacional: abstração (ver um problema em diferentes níveis de detalhe), pensamento algorítmico (predisposição para ver tarefas como passos mais pequenos interligados), decomposição (resolver um problema envolve resolver um conjunto de problemas mais pequenos) e reconhecimento de padrões (ver um problema como estando relacionado com problemas anteriormente encontrados). O teste e a depuração são também aspetos essenciais. Essas práticas visam garantir que a solução encontrada responde com sucesso à tarefa dada. Começa-se pela testagem para verificar o funcionamento. Caso a solução não funcione, o processo de depuração tem início (Ng & Cui, 2021) para localizar erros ou enganos e os corrigir. Nesse sentido, nas Aprendizagens Essenciais a capacidade matemática transversal pensamento computacional "pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos" (Canavarro el al., 2021, p. 3).

Vários estudos têm evidenciado a articulação entre a Matemática e o pensamento computacional, reconhecendo o seu potencial contributo para alcançar a aprendizagem matemática pretendida (Ye et al., 2023). O contexto matemático pode ser usado para valorizar o pensamento computacional, bem como situações relativas ao pensamento computacional podem valorizar a matemática, melhorando a compreensão de conceitos, desenvolvendo de modo integrado capacidades matemáticas diversas (Hardin & Horton, 2017; Ng & Cui, 2021), dando sentido e colocando em prática ideias matemáticas (Sáez-López et al., 2019). A valorização do pensamento computacional oferece aos alunos "oportunidades para explorar uma variedade de conteúdos matemáticos através da reflexão sobre os processos e produtos de construção do pensamento computacional" (Ye et al., 2023, p. 22).

O desenvolvimento desta capacidade é essencial desde os primeiros anos de escolaridade e ao longo de todo o ensino básico, dando um contributo relevante para a Matemática para o séc. XXI. Contudo, o pensamento computacional não vai emergir de modo espontâneo, pelo que o desenvolvimento de conceitos relativos a essa capacidade requer um ensino explícito e específico (Rodríguez-Martínez et al., 2020).

Tal como expressam as Aprendizagens Essenciais, o pensamento computacional deve também surgir em articulação com o uso da tecnologia, nomeadamente para a resolução de problemas, em especial os relacionados com a programação. Nos últimos anos têm surgido diversas ferramentas digitais adequadas ao trabalho com os alunos desde os primeiros anos de escolaridade, tais como ambientes de programação visual. Por exemplo, os alunos podem, numa primeira fase de iniciação, reutilizar e remisturar projetos, construir e ampliar alguns códigos e estruturas existentes para criar novos projetos ou projetos mais complexos (Ng & Cui, 2021). Também os contextos de robótica e programação, em que os alunos estão ativamente envolvidos, podem contribuir para os objetivos do pensamento computacional e trabalho em torno de ideias matemáticas específicas (Sáez-López et al., 2019). Ng e Cui (2021) envolveram os alunos na utilização de objetos tangíveis e na sua programação por meio de um ambiente de programação por blocos para executarem ações físicas, promovendo a modelação e o pensamento algorítmico dos alunos, a prática de depuração e a abstração, com utilização de variáveis.

A utilização da tecnologia e a articulação entre ideias matemáticas e práticas do pensamento computacional podem também potenciar conexões internas e externas, a articulação com outras capacidades matemáticas transversais e o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais.

Um exemplo

Apresentamos em seguida um exemplo expresso nas Aprendizagens Essenciais do 1.º ciclo do ensino básico, envolvendo o pensamento computacional e o tema Álgebra, no que respeita a Expressões e relações, Relações numéricas e algébricas.

A figura 7 apresenta uma tarefa que pode ser proposta aos alunos do 2.º ano:

Figura 7. Enunciado da tarefa Adivinha o número

Adivinha o número

A pares, joguem ao jogo seguinte:

- Um elemento do par pensa num número.
- O outro elemento do par dá instruções ao colega para ele fazer com o número em que pensou e que depois disso, diga o resultado. No final tem de adivinhar o número em que o colega pensou no início.
- Registem na tabela todas as instruções dadas e o resultado obtido.

Instruções	
- Pensa num número.	
- Diz o resultado que obtiveste.	Número obtido: _____
- Já sei o número em que pensaste. Fiz:	Número que acha que foi pensado: ________
- Acertei no número em que pensaste?	Número que foi pensado: _____

Troquem de papéis e joguem com novas instruções. Façam os registos numa nova tabela.

Após o jogo, discutam as vossas estratégias de adivinhar os números:

1. Que instruções permitiram descobrir o número mais rapidamente?
2. Como podem melhorar essas instruções?

Voltem a jogar o jogo, testando as novas estratégias.

A tarefa consiste na construção de um jogo numérico que poderá ser realizado pelos alunos em pares. Um dos elementos do par (Jogador A) solicita ao colega (Jogador B) que pense num número. Em seguida, o jogador A deverá dar instruções ao jogador B de operações que ele deve realizar a partir do número em que pensou. O jogador B executa essas instruções e quando termina diz ao jogador A o resultado que obteve. Por sua vez, o jogador A, a partir desse resultado, deve descobrir o número em que o jogador B pensou inicialmente. Em seguida, devem trocar de papéis e jogar novamente, agora com instruções que o jogador B cria. Nesta primeira fase, os alunos poderão jogar o jogo sem se focar numa estratégia particular que possa ser mais eficaz para a descoberta do número. Quando é solicitado que discutam as estratégias usadas, os alunos poderão ser mais criteriosos na escolha das instruções que dão ao colega, estabelecendo relações entre os números e entre as operações, de modo a saberem à partida a relação que existe entre o resultado que foi obtido e o número que foi pensado. Os alunos devem centrar-se na informação mais importante e estabelecer relações, mobilizando a prática da abstração. O registo das instruções e dos resultados obtidos permite analisar as instruções dadas reconhecendo as mais eficientes para adivinhar o número. Essa verificação e a melhoria das instruções no sentido de as tornar mais eficazes, permite desenvolver a prática da depuração. Esta prática é ainda usada quando corrigem eventuais erros na aplicação das instruções, pelo que o registo escrito das instruções e respetivos resultados é essencial. O registo escrito é ainda importante para o reconhecimento de padrões, reconhecendo os resultados obtidos instrução a instrução e percebendo, no final, o efeito da sequência das instruções dadas e a relação entre essas instruções.

Exemplos de instruções eficientes e forma como podem adivinhar o número:

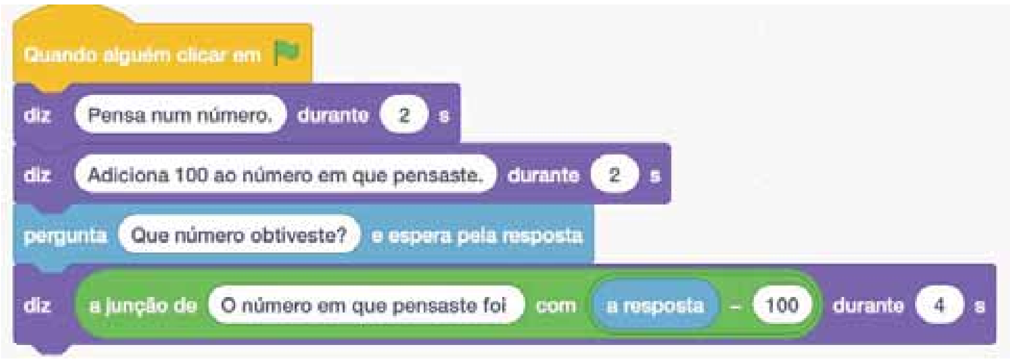
Possíveis instruções:	Formas de *adivinhar* o número:
Adicionar um número particular	Subtraindo o número que adicionaram
Subtrair um número particular	Adicionando o número que subtraíram
Trocar a ordem dos algarismos no número	Trocar a ordem dos algarismos no número
Adicionar um número e subtrair um outro número menor	Subtrair a diferença entre os números

Ao formularem as instruções, os alunos estão a desenvolver a prática da algoritmia, usando a linguagem natural que pode ser complementada com a introdução dos símbolos matemáticos relativos às operações. As instruções que se focam na utilização das operações inversas e nas regularidades numéricas mobilizam a formulação e teste de conjeturas, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A decisão de quais as instruções a dar para descobrir o número mobiliza a capacidade de abstração ao levar os alunos a focarem-se em aspetos essenciais que se relacionam com o reconhecimento dos padrões relativos às operações inversas e às regularidades numéricas. Seguem-se dois exemplos de jogo e respetiva estratégia:

Jogo A	Jogo B
Pensa num número. Adiciona 70. Subtrai 20.	Pensa num número. Adiciona 11. Subtrai 5. Agora subtrai de novo 5.
Que resultado obtiveste?	Que resultado obtiveste?
Estratégias para descobrir o número inicial a partir do resultado: Subtrair 50 ao resultado	Estratégia para descobrir o número inicial a partir do resultado: Subtrair 1 ao resultado.

Esta tarefa pode ainda ser implementada recorrendo a um ambiente de programação visual como o Scratch, levando os alunos a criarem jogos numéricos e a mobilizarem a relação entre as operações e as regularidades numéricas na programação desses jogos. A figura 8 mostra um exemplo de um jogo no Scratch:

Figura 8. Exemplo de um jogo "Adivinha o número" usando o Scratch



Neste exemplo, a instrução dada foi "Adiciona 100 ao número em que pensaste". Para adivinhar o número, a programação em Scratch faz recurso à operação inversa, subtraindo 100 ao número dado e obtendo o número inicial. Os alunos podem começar por usar o Scratch com programações já feitas, procurando identificar a instrução que permitiu a descoberta do número e, progressivamente, construírem os seus projetos usando as suas próprias instruções. O facto de usarem relações nas instruções e estratégias mais eficazes para descobrir o valor inicial, quando há várias instruções envolvidas, vai permitir simplificar o código no Scratch. A utilização da linguagem de programação visual Scratch permite trabalhar a prática da algoritmia com recurso à tecnologia.

A concluir

A integração do pensamento computacional nas Aprendizagens Essenciais de Matemática visa promover uma abordagem à resolução de problemas numa perspetiva diferente e, tanto quanto possível, numa lógica de recorrer a ambientes computacionais no processo de resolução. Com esta abordagem não se pretende restringir as estratégias de resolução à programação. Consoante as propostas apresentadas, as práticas do pensamento computacional poderão ser desenvolvidas sem o recurso ao computador. Por outro lado, não basta acrescentar ferramentas digitais ao processo de resolução para se garantir que se está a desenvolver o pensamento computacional.

A plena integração do pensamento computacional passa por criar (ou adaptar) tarefas exploratórias e desafiantes que permitam trabalhar um conteúdo matemático e, simultaneamente, possam desenvolver as suas práticas (Espadeiro, 2021).

O papel do professor, na organização e condução dos momentos de aplicação das tarefas, reside na intencionalidade com que promove o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos. Esta intencionalidade, no acompanhamento que faz durante o processo de resolução, poderá passar por questionar os alunos, não com o intuito dar uma resposta mas, para permitir que estes ultrapassem um qualquer bloqueio no seu trabalho e possam, deste modo, desenvolver as práticas de pensamento computacional pretendidas.

Comunicação matemática

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática é um objetivo de aprendizagem transversal a todos os tópicos matemáticos curriculares, em estreita ligação com outras capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Ser capaz de comunicar matematicamente significa conseguir "partilhar e discutir ideias matemáticas, formulando e respondendo a questões diferenciadas, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, negociando a construção de ideias coletivas em colaboração" (p. 3). Ecoando a perspetiva do NCTM (2007), Santos (2018) esclarece que a capacidade de comunicação matemática "inclui ser capaz de, por um lado, transmitir ideias de forma clara e coerente aos outros, usando uma linguagem matemática correta e precisa, e, por outro lado, de analisar e avaliar ideias e estratégias matemáticas de outros" (p. 1).

A comunicação matemática é indissociável do próprio processo de ensino-aprendizagem (Menezes et al., 2014). À semelhança de outros documentos curriculares (e.g., NCTM, 2007, 2014; Ponte et al., 2007), as atuais recomendações para o ensino da Matemática em Portugal perspetivam a comunicação matemática como uma orientação metodológica, além de um objetivo de aprendizagem (Canavarro et al., 2021). Em particular, "a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório" (Serrazina, 2018, p. 13), uma abordagem fortemente enfatizada nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. De facto, olhando a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem, ela "potencia e é potenciada pelos momentos típicos de (…) trabalho autónomo dos alunos sobre tarefas desafiantes, usualmente em pequenos grupos" (Tomás Ferreira, 2018, p. 1) e de discussão coletiva, tanto na vertente oral, como na vertente escrita. E estas duas fases – trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva – são aspetos distintivos e determinantes nas aulas pautadas por uma abordagem exploratória.

Os alunos têm diferentes estilos de aprendizagem, assim como diversas formas de comunicação preferenciais. Por isso, a comunicação nas aulas de Matemática deve "ser veiculada de diferentes formas, entre elas verbal, visual, gestual, icónica, com objetos ou escrita" (Vale & Barbosa, 2018, p. 2). O recurso a estas formas diferentes de comunicar deve ser ponderado em função do nível de escolaridade dos alunos e, sobretudo, dos objetivos de aprendizagem visados, tendo sempre em vista aquilo que facilita e promove "a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos" (Canavarro et al., 2021, p. 3) para que a comunicação dessas ideias e processos aos outros possa ser clara e, progressivamente, “a linguagem matemática [seja usada] como estratégia de comunicar com maior precisão” (p. 3).

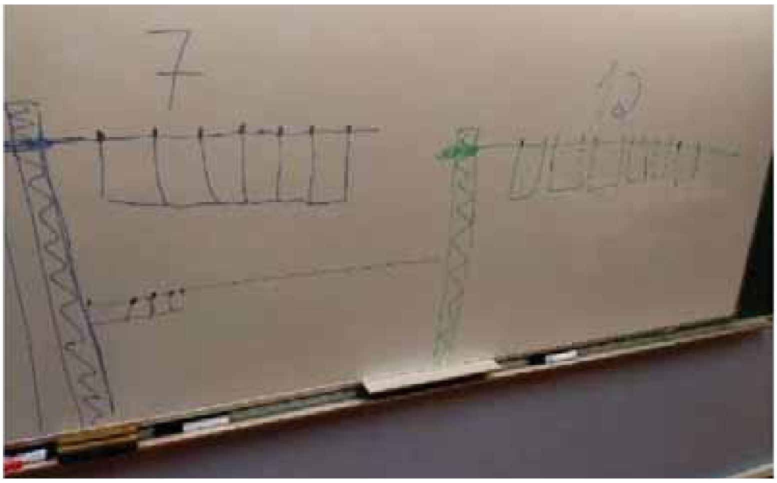
Segundo o NCTM (2007), “os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática [com compreensão] e aprendem a comunicar matematicamente” (p. 66). As experiências de aprendizagem que são proporcionadas aos alunos determinam a qualidade das suas aprendizagens, em particular as tarefas e a sua exploração em aula (e.g., Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009). As tarefas que se focam na prática de procedimentos mais ou menos rotineiros (como o cálculo ou a manipulação algébrica) não se prestam a fomentar a capacidade de comunicação matemática dos alunos. Pelo contrário, as tarefas de natureza mais desafiante, como os problemas, as investigações e as explorações, já podem constituir bom solo para o desenvolvimento da comunicação matemática (NCTM, 2007).

Comunicação oral

As oportunidades para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos, na sua vertente oral, dependem, de uma forma bastante significativa, da condução do discurso da aula feita pelo professor (Menezes et al., 2014). Por exemplo, quando o professor solicita aos alunos que expliquem como resolveram uma dada tarefa, ou os questiona sobre uma decisão tomada no percurso realizado com vista à resolução de um problema, ou lhes pede que comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros, a comunicação matemática está a ser fortemente estimulada.

A figura 9 apresenta duas resoluções que surgiram numa turma do 1.º ano a propósito de um problema sobre como colocar guardanapos a secar, usando o menor número possível de molas (Miranda, 2019). Estas duas resoluções foram abordadas na discussão coletiva e o diálogo apresentado permite perceber a importância das perguntas do professor para estimular a comunicação oral dos alunos na expressão do seu pensamento.

Figura 9. Exemplo de diálogo em grupo turma em que a comunicação oral é estimulada através das perguntas do professor (adaptado de Miranda, 2019, pp. 53-54)



Prof. - Quantas molas vou pôr? [para acrescentar mais um guardanapo]?
Grupo - Uma!
Prof. - Mas um guardanapo não precisa de duas molas?
Vítor - Mas a [mola] do primeiro também segura a do segundo, por isso é que tem duas, mas só pomos uma.
(...)
Prof. - E agora se fossem trinta guardanapos, quantas molas seriam precisas?
Grupo - [silêncio]
Bruno - Vinte e nove!
Prof. - Vinte e nove Bruno? Alguém concorda com o Bruno?
Bruno - Não, não, trinta e um!
Prof. - Porquê trinta e um, Bruno?
Bruno - Porque leva duas [molas] no primeiro, e depois uma em cada um [aponta para outros guardanapos].

Segundo o NCTM, "para apoiar eficazmente o discurso da aula, os professores deverão criar uma comunidade na qual os alunos se sintam livres de expressar as suas ideias" (2007, p. 67). Ora, uma outra forma de estimular o desenvolvimento da comunicação matemática consiste em solicitar aos alunos que emitam uma opinião, comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros. Mas, enquanto os alunos dos primeiros anos têm dificuldades em se colocar no lugar dos outros e em ver as coisas segundo uma perspetiva que não é a sua, os seus colegas dos 2.º e 3.º ciclos são, muito frequentemente, relutantes em se expor perante os seus pares. Isto coloca desafios ao professor, que deve ter em conta que "questões bem planeadas e cuidadosamente colocadas poderão ajudar a esclarecer as expectativas para o trabalho dos alunos, relativamente a cada faixa etária" (p. 68).

Comunicação escrita

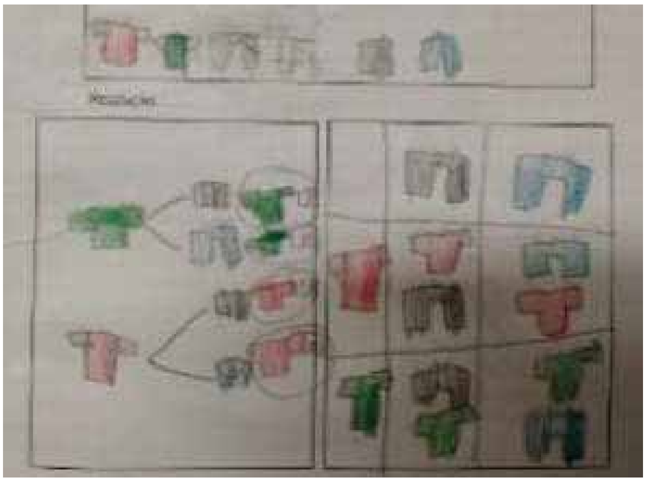
"A comunicação escrita é trabalhada quando se promove a realização de registos escritos relativos à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos” (Serrazina, 2018, p. 13). Estes são, de facto, os contextos mais frequentes em que a vertente escrita da capacidade de comunicação matemática pode ser promovida (Casa et al., 2016). Mas este estímulo pode trabalhar outros propósitos. Por exemplo, a escrita matemática pode ser usada com o propósito de fazer sentido de um problema, de uma situação ou das próprias ideias; deste modo, o destinatário da produção escrita é o próprio aluno.

Na figura 10 (parte de cima), encontramos um exemplo de escrita com este propósito exploratório, feita por um aluno do 1.º ano de escolaridade, ao resolver um problema de contagem (Miranda, 2019). O enunciado da tarefa continha três espaços destinados aos registos dos alunos: um espaço para o registo dos dados do problema e dois espaços para o registo de duas resoluções recorrendo a estratégias distintas. As anotações do aluno para fazer sentido do problema são os desenhos das quatro peças de roupa envolvidas. Assim, as anotações são guiadas, o que faz sentido para os alunos do 1.º ano de escolaridade.

Figura 10. Exemplo de escrita matemática com propósito de fazer sentido de um problema (parte de cima) e com propósito explicativo (parte de baixo) (adaptado de Miranda, 2019, p. 46)

A Daniela gosta de se vestir sempre de formas diferentes. Ela tem duas camisolas, uma vermelha e outra verde. Também tem duas calças, umas azuis e outras pretas.

De quantas formas diferentes poderá vestir-se a Daniela?



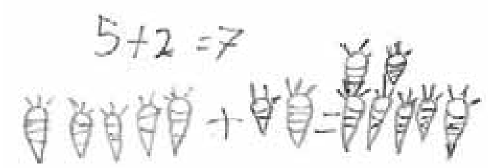
Outro propósito da escrita matemática, talvez aquele a que mais frequentemente se associa a comunicação matemática escrita, é descritivo ou explicativo. Os alunos podem ser chamados a descrever, por escrito, um conceito matemático ou a explicar a estratégia que usaram para resolver um problema, por exemplo (Casa et al., 2016). Uma escrita com este propósito apoia a necessidade de exprimir ideias com clareza e de usar palavras ou outras formas de representação (símbolos, desenhos, etc.) com precisão, para que os destinatários – usualmente o professor e os pares – possam compreender bem o que se pretende comunicar. A parte de baixo da figura 10 mostra um exemplo de escrita matemática com o propósito de explicar como resolveu um problema de contagem. O enunciado da tarefa contemplava já espaço para o registo de duas resoluções diferentes. Neste caso, encontramos uma resolução baseada num esquema em árvore e outra numa tabela de dupla entrada.

Um outro propósito da escrita matemática é de natureza criativa, com vista a registar ideias originais, a evidenciar fluência e flexibilidade de pensamento (isto é, a gerar múltiplas soluções a um problema ou a olhá-lo sob diferentes perspetivas, por exemplo), ou a desenvolver ideias (Casa et al., 2016). Naturalmente que não se espera que os alunos escrevam sobre ideias matemáticas inovadoras – as descobertas que sejam novas para os alunos ou para a turma podem ser consideradas originais: "escrever matematicamente sobre ideias originais poderá englobar alunos a formular problemas ou a questionar [outros], a gerar resoluções originais [considerando o universo em causa] de situações problemáticas, e a escrever sobre estruturas matemáticas ou padrões que tenham descoberto" (p. 17). O destinatário deste tipo de escrita matemática é, muitas vezes, um público autêntico e alargado, além das paredes da sala de aula, o que leva a que os alunos possam recorrer a modos formais ou informais para se exprimirem melhor.

A figura 11 apresenta uma imagem que foi fornecida a uma turma do 1.º ano para que, a partir dela, os alunos formulassem um problema (Miranda, 2019). Sendo alunos do 1.º ano, não eram ainda capazes de escrever a maior parte das palavras ou frases que desejavam. Por esse motivo, a formulação de problemas ficava completa com as interações verbais que os alunos tinham com o professor. A figura 12 ilustra a proposta de um problema feita por um aluno desta turma.

Figura 11. Imagem fornecida como ponto de partida para a formulação de problemas (Miranda, 2019, p. 55)

Figura 12. Exemplo de escrita matemática com propósito criativo (adaptado de Miranda, 2019, p. 56)



Ricardo - O Ricardo tinha cinco cenouras. E plantei mais duas cenouras. Com quantas cenouras fiquei?
Prof. - Muito bem, Ricardo. E com quantas ficaste?
Ricardo - Fiquei com sete!

Quando os alunos iniciam o seu percurso escolar, as suas capacidades de escrita são reduzidas, mas o recurso a desenhos ou outras representações visuais permite-lhes comunicar matematicamente, na forma escrita. As palavras ou os símbolos matemáticos não são, obviamente, os únicos recursos para apoiar a comunicação matemática escrita dos alunos. No entanto, em função dos destinatários e dos propósitos da escrita matemática, esta deve tornar-se progressivamente mais elaborada, como refere o NCTM (2007, p. 68):

> Em alguns casos, os alunos poderão considerar mais apropriado descrever as suas ideias informalmente através da linguagem comum e de esboços, mas, apesar disso, no final do ensino básico (…), deverão, também, aprender a comunicar matematicamente de forma mais formal, usando terminologia matemática convencional.

São várias as formas a que o professor pode recorrer para promover o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita com os diferentes propósitos que foram mencionados anteriormente: elaboração de mapas de conceitos ou posters, escrita de jornais diários ou de textos informativos, *posts* nas redes sociais, criação de vídeos ou outras produções multimédia, formulação de problemas, etc. As audiências podem também ser diversas, desde o próprio aluno, a turma ou um grupo de pares, o próprio professor ou outros professores (da turma ou não), colegas de outras turmas (incluindo de outros anos de escolaridade), e pais ou a comunidade mais alargada (Casa et al., 2016). Os materiais manipuláveis, assim como as ferramentas tecnológicas, constituem-se em apoios essenciais ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto na vertente escrita, como na vertente oral (NCTM, 2007, 2017).

Por último, é importante notar que a ideia de *resolver-e-exprimir problemas* matemáticos (Jacinto et al., 2018) resume a ligação estreita que existe entre a comunicação matemática e a resolução de problemas: um problema está bem resolvido quando o processo de resolução está comunicado de forma clara e completa, ou seja, não basta obter uma resposta matematicamente correta ao problema, é preciso também explicar de modo claro e completo como foi essa resposta obtida, tornar visível como se pensou para se chegar à resposta. A possibilidade de recorrer a diversas representações, com ou sem o apoio da tecnologia, facilita a comunicação de ideias e, ao mesmo tempo, potencia também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Representações matemáticas

No novo programa de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) são definidos oito objetivos para a aprendizagem desta disciplina que todos os alunos devem atingir. Num destes objetivos é explicitada a necessidade de os alunos desenvolverem a capacidade de usar representações matemáticas como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática. Salienta-se, ainda, que as ideias matemáticas são clarificadas quando se conjugam diferentes tipos de representação, sendo a familiaridade e a fluência que os alunos possuem com as várias formas de representação essenciais para a compreensão dessas ideias.

É realçado também neste documento que as capacidades matemáticas transversais são entendidas enquanto conteúdos de aprendizagem na área curricular de Matemática com a mesma importância que os conhecimentos matemáticos. Entre as seis capacidades matemáticas, aprofundadas nos quadros de operacionalização das Aprendizagens Essenciais, surgem as Representações Matemáticas.

Significados e tipos de representações

São vários os significados e interpretações que são atribuídos à ideia de representações matemáticas. Para o NCTM (2007), o termo "representação" refere-se "tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Já para Tripathi (2008), uma representação matemática é "uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre esse conceito e outras ideias" (p. 348). O autor explica, ainda, que uma representação pode ser entendida como "a forma de uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outras pessoas" (p.348). Goldin (2018) afirma que as representações matemáticas são produções visíveis ou tangíveis, tais como diagramas, retas numéricas, gráficos, composições com objetos ou materiais manipuláveis, modelos físicos, textos escritos, expressões matemáticas, fórmulas e equações, ou mesmo imagens exibidas em ecrãs de um computador ou calculadora, que codificam, apoiam ou incorporam ideias matemáticas ou relações entre elas.

Para além dos significados e interpretações que lhes são atribuídas, as representações matemáticas têm sido caraterizadas e classificadas de várias maneiras, de acordo com a sua natureza e conforme os autores. Por exemplo, o NCTM (2017) defende um modelo em que as representações, associadas à aprendizagem matemática e à resolução de problemas, poderão ser de cinco tipos: física (materiais manipuláveis, objetos), contextual (situações da vida real), visual (pictórica, diagramas, tabelas, gráficos), verbal (linguagem escrita ou oral) ou simbólica (notação simbólica, uso de variáveis, de parâmetros, numerais,…), ilustrando, nesse modelo, as conexões importantes que se verificam entre as várias formas. Também as Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) adotam esta classificação, salientando a necessidade de promover a análise de diferentes representações sobre a mesma situação, evidenciando o papel das conexões entre representações para fortalecer a compreensão matemática.

Funções das representações

A Matemática é constituída por conceitos que estão interligados através de variadíssimas relações. Aprender um conceito usualmente implica não só conhecer o seu significado, mas também compreender as múltiplas relações entre esse conceito e outras ideias ou conceitos. Por isso, ao utilizar múltiplas representações de um conceito realçam-se vários aspetos da sua estrutura. Tripathi (2008) salienta esta ideia, afirmando que usar diferentes representações é como examinar um conceito através de uma variedade de lentes, em que cada uma delas proporciona uma perspetiva diferente, possibilitando um conhecimento mais rico e aprofundado desse conceito.

Entre os vários tipos de representação, as representações visuais têm atualmente um papel muito relevante, por estarem muito mais acessíveis aos alunos, em especial devido à evolução tecnológica, com as calculadoras gráficas, as folhas de cálculo, os programas de geometria dinâmica e outros, permitindo estabelecer facilmente conexões entre as várias representações. A tecnologia possibilita a obtenção de representações visuais variadas, nomeadamente tabelas, gráficos, construções geométricas estáticas e dinâmicas. Permite ainda que os alunos rodem, invertam, estiquem e ampliem figuras geométricas ou gráficos, bem como manipulem expressões, variando parâmetros, investiguem conjuntos complexos de dados ou façam simulações que podem ser usadas na investigação de fenómenos, facilitando a formulação de conjeturas.

São vários os investigadores que realçam a importância das representações, especialmente as visuais, para a resolução de problemas. Por exemplo, Barbosa e Vale (2022) apresentam no seu artigo vários exemplos que ilustram e evidenciam o potencial das representações visuais como veículos para chegar à solução de um problema. Estas investigadoras argumentam que, apesar das representações visuais não serem novas na literatura, usualmente são preteridas pelos professores que preferem utilizar as representações analíticas e simbólicas. As abordagens visuais podem ser um excelente complemento às resoluções analíticas, podendo fazer emergir resoluções muito mais simples e com mais significado para os alunos.

Estas investigadoras afirmam, ainda, que a abordagem visual de um problema complementada com múltiplas representações e resoluções contribui para uma melhor compreensão da matemática e para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, alterando a sua visão de uma matemática composta por um conjunto de fórmulas e de procedimentos que devem memorizar e dominar.

O uso de diversos tipos de representações pelos alunos contribui para que os mesmos possam resolver problemas, nomeadamente quando recorrem a diagramas visuais que lhes permitem, desde cedo, exprimir e organizar o raciocínio sobre uma dada situação. Ilustramos esta possibilidade com o problema dos periquitos (Canavarro e Pinto, 2012), e as resoluções que três crianças de seis anos realizaram. O problema é o seguinte: O Pedro tem dez periquitos. Todos os dias o Pedro dá, a cada dois periquitos, três folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus dez periquitos?

Figura 13: resolução do problema dos periquitos realizada por Ema

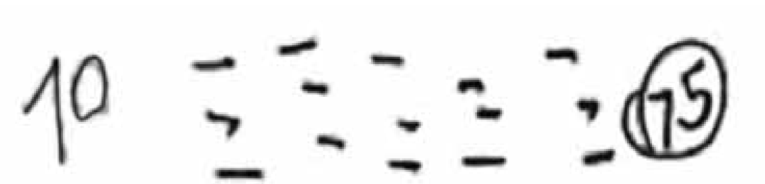


Figura 14: Resolução do problema dos periquitos realizada por André

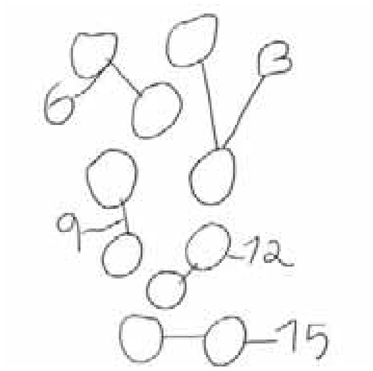


Figura 15: Resolução do problema dos periquitos realizada por José

A análise das diferentes resoluções permite observar como todas as crianças se socorreram de diagramas para representar estruturalmente o problema. Ema representou (figura 13), usando os símbolos idiossincráticos que adotou (tracinho), apenas as folhas de alface que cada dois periquitos comia por dia, e totalizou 15, a solução do problema que rodeou com um círculo. André (figura 14) representou cada par de periquitos por círculos e foi adicionando, com saltos de 3 em 3, tendo construído sucessivamente o total 15. José (figura 15) optou também por uma representação visual, desenhando os pássaros aos pares, e associando também em desenho as folhas de alface correspondentes. Trata-se da mesma estratégia de André mas representada com recurso a desenhos e não a diagramas simplificados. De qualquer modo, importa também sublinhar nestes exemplos como o recurso aos numerais foi importante para explicitar o resultado do problema e, no caso do José, inclusive relacionar a solução com somas sucessivas do número 3.

A resolução de tarefas em que são exploradas múltiplas representações contribui para que os alunos melhorem a sua proficiência na resolução de problemas. As representações visuais, mais utilizadas nas primeiras etapas da compreensão de um conceito, estabelecem pontes para as representações simbólicas que virão a ser utilizadas mais tarde, quando se referirem ao mesmo conceito.

É importante a introdução da linguagem simbólica matemática, bem como levar os alunos a apreciar e a valorizar a simplicidade e eficiência desse tipo de representação para comunicar ideias sinteticamente e com precisão. E mesmo as representações estritamente simbólicas podem ser usadas de modo a evidenciar diversas ideias, como se exemplifica com um excerto das *Aprendizagens Essenciais de Matemática* para o 1.º ano de escolaridade (figura 16).

Figura 16: excerto de Canavarro et al, 2021 p.24

Explorar a composição e decomposição de números usando partes iguais [Exemplo: 16=8+8]; partes diferentes [Exemplo: 15= 9+6, 15=7+7+1 (*quase dobro*)] e a decomposição decimal [Exemplo: 15=10+5, 10=15—5].

Os significados que vão sendo atribuídos às representações simbólicas desenvolvem-se gradualmente nos estudantes ao estabelecer relações com outras representações, especialmente as visuais. Compete aos professores sugerir aos alunos a utilização da diversidade de representações possíveis, apresentando-lhes as que eles não dominem, questionando-os sobre as relações e conversões entre as diferentes representações e discutindo as escolhas mais adequadas. Através do questionamento e da interpretação das representações utilizadas pelos seus alunos, os professores poderão compreender melhor os seus raciocínios e perceber se aprenderam os conceitos matemáticos em estudo. Assim, cabe aos professores propor aos alunos tarefas em que seja possível o recurso a diferentes representações, onde a tecnologia poderá ter um papel decisivo como suporte visual e como facilitador do reconhecimento de conexões entre as várias representações.

As representações matemáticas têm um papel fundamental no modo como os alunos desenvolvem e aprofundam os seus conhecimentos. Quando criam, utilizam e comparam representações diversas os alunos organizam, registam e comunicam ideias matemáticas. As representações devem ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação das abordagens e dos argumentos, na identificação de conexões entre conceitos, na resolução de problemas e na modelação e interpretação de fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007).

Conexões matemáticas

A ideia de "conexões", no contexto da educação matemática, ganhou visibilidade quando o NCTM, em 2000, elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2007). A assunção de um termo específico e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de Matemática.

O NCTM refere quatro diferentes tipos de conexões (NCTM, 2007): entre conceitos matemáticos, entre diferentes temas matemáticos, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e a vida quotidiana. Os dois primeiros situam-se dentro da Matemática, enquanto que os dois últimos a relacionam com o que lhe é externo, favorecendo a perceção da utilidade dos conhecimentos matemáticos e a apreciação do seu valor (Pierce & Stacey, 2006). Desta forma, em geral, distinguem-se as conexões internas da Matemática e as conexões externas, que a colocam em diálogo com os outros domínios, sendo a modelação matemática uma forma por excelência de concretizar conexões com o mundo em redor. É esta a opção das Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) na abordagem curricular às conexões como uma capacidade matemática transversal.

De qualquer modo, sejam internas ou externas, as conexões têm um potencial imenso para as aprendizagens dos alunos, como tem vindo a ser revelado pela investigação em educação matemática. "O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa" (Canavarro, 2017, p. 38).

Conexões internas

A exploração das conexões internas da Matemática permite evidenciar as relações que existem entre os diversos temas da Matemática, tão frequentemente tratados de forma isolada, correspondendo, nos manuais escolares, a diferentes capítulos que nunca se intersetam. Embora existam claramente conceitos e procedimentos específicos de cada tema da Matemática, existem também múltiplas associações que podem ser feitas, contribuindo para ampliar a compreensão dos conceitos e procedimentos e dar a conhecer a Matemática como uma ciência coerente.

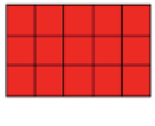
Uma estratégia poderosa para o estabelecimento de conexões internas é o uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2017).

A exploração de conexões matemáticas para potenciar a aprendizagem dos alunos requer uma ação estratégica por parte do professor, da qual faz parte o uso, em sala de aula, de tarefas que recorram a conhecimentos matemáticos de diferentes temas, quer surjam de forma explícita nas questões colocadas aos alunos, quer surjam no desenvolvimento da resolução e discussão das tarefas com a turma, na qual deve intencionalmente ser feita a explicitação das conexões em causa de modo a que os alunos as reconheçam.

Um exemplo de conexões internas que pode ser explorado no contexto dos primeiros anos relaciona um conceito dos Números, o conceito de multiplicação, com outro da Geometria, em particular através da representação visual do retângulo subdividido em retângulos iguais. O conceito de multiplicação é normalmente apresentado às crianças como uma adição sucessiva e toma-se como assumido que a multiplicação é comutativa, apesar desse resultado não ser nada trivial, tal como o é na adição: ninguém tem dúvidas de que 4 + 6 = 6 + 4, isso faz parte da experiência do dia a dia, nomeadamente quando nos reportamos a objetos com que lidamos (em ambas as situações representadas, teremos sempre 10 objetos). Mas porque obtemos o mesmo resultado quando fazemos 3x5 e 5x3? O recurso ao retângulo, como o representado na figura 17, e a contagem dos retângulos que o compõem, permite compreender que 3 colunas com 5 retângulos resulta exatamente no mesmo que 5 linhas com 3 retângulos.

Figura 17. Excerto das Aprendizagens Essenciais de 2.º ano (Canavarro et al, 2021)

Explorar a comutatividade da multiplicação, em casos particulares, através da representação retangular e da leitura por linhas e colunas [Exemplo: O número total de quadrículas pode obter-se fazendo 3x5 (3 linhas com 5 quadrículas cada) ou 5x3 (5 colunas com 3 quadrículas cada), conduzindo à conclusão que 3x5=5x3].



Conexões externas

As conexões externas podem estar associadas a situações muito diversas, pois associam a Matemática a outras disciplinas ou domínios científicos, profissionais, culturais ou da vida do dia-a-dia, na multitude de atividades e de práticas concretas, incluindo lavar os dentes, fazer desporto ou ir ao supermercado.

Uma vantagem inequívoca da exploração de conexões externas é contribuir para eliminar as barreiras entre a Matemática e outros domínios, permitindo aos alunos conhecer e apreciar a aplicabilidade da Matemática, "enquanto forma de observação, representação e interpretação mais clara do mundo que os rodeia" (NCTM, 2007, p. 154). Naturalmente que as conexões matemáticas permitem aprender sobre o assunto com que a Matemática se conecta, constituindo-se como um enriquecimento curricular e uma forma de dar lugar ao desenvolvimento de uma visão mais integrada sobre os saberes.

Existem formas diversas de estabelecer conexões externas e explorá-las de forma relevante com os alunos. Uma possibilidade é a exploração de situações nas quais se possam aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões). Importa que as situações sejam de facto reais, de modo que os alunos possam reconhecer a Matemática como uma ferramenta efetivamente útil, que contribui para dar respostas verdadeiras, e com isso conhecer melhor o que é objeto de estudo. As situações escolares fabricadas para aplicação da Matemática pelos alunos não têm, a nível do reconhecimento do valor da Matemática, o mesmo potencial que as situações autênticas, nomeadamente das que podem ser vividas pelos alunos. A investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). E o mundo em nosso redor está repleto de situações que permitem desocultar a presença da Matemática — não se diz que ela está em todo o lado?

Um exemplo de uma situação real bastante interessante que conecta a matemática com a vida do dia-a-dia, e a relaciona com áreas das Ciências Sociais e do Ambiente, incluindo a sustentabilidade, tem a ver com as máquinas para a recolha de vasilhame de plástico que se podem encontrar instaladas em locais públicos de grande acesso, como são os supermercados. Estas máquinas recebem os diferentes vasilhames que lhes são introduzidos e trituram-nos, com o objetivo de os reduzir e reciclar. As máquinas atribuem diferentes valores a cada tipologia de vasilhame que é feito (garrafas e garrafões com diversas capacidades), sendo possível que uma família de três pessoas consiga perfazer o valor de 5 euros com o depósito semanal do vasilhame usado para água. O valor obtido não reverte a favor da família — é doado a instituições de solidariedade social ou sem fins lucrativos, ficando assim a família envolvida em causas sociais.

Esta situação oferece múltiplas oportunidades de trabalho com alunos de diferentes ciclos. Importa começar por colocar questões adequadas com vista a obter respostas relevantes neste contexto. Um exemplo poderá ser calcular o montante que cada família da turma consegue totalizar em uma semana com o vasilhame respetivo, tendo em conta os valores reais que a máquina atribui a garrafas e garrafões com diferentes capacidades. Outra será calcular a quantidade de garrafas e garrafões necessários para perfazer um dado montante que se deseja doar. Outra ainda será conceber estratégias para sensibilizar a escola e a comunidade a aderir a esta forma de reciclagem e de solidariedade social. Qualquer um destes exemplos de trabalho envolve diversos conceitos (organização de dados, cálculos diversos, que podem ir da produção de estimativas à obtenção de valores exatos) e diversas capacidades matemáticas (formulação e resolução de problemas, comunicação de resultados, representação de resultados...). Seja qual for a questão (e muitas outras se podem colocar), no final do estudo realizado importa destacar como a Matemática contribuiu para conhecer e compreender melhor a situação.

Outra possibilidade bastante acessível de trabalho com os alunos no âmbito das conexões externas é a identificação da presença da Matemática em contextos diversos reais e a procura de compreensão do seu papel na criação e construção da realidade observada. Esta modalidade pode acontecer no âmbito de visitas de estudo, in loco ou virtuais, que possibilitam o contacto com o mundo fora da escola, mas também pode acontecer por observação das práticas e artefactos da escola, a começar pelo próprio edifício da escola, sendo a Arquitetura uma enorme fonte de conexões externas com a Matemática. Convidar os alunos a observar fachadas de edifícios comuns e a identificar como a Matemática foi usada nessa construção, questionando como terão pensado os seus autores para produzir a obra, constitui uma excelente estratégia para os alunos convocarem ideias matemáticas já aprendidas e lhes darem utilidade e sentido em contexto real. Mas o convite pode ser estendido, com o desafio para que proponham novas fachadas renovadas, apelando à sua criatividade e espírito crítico, tendo em conta os requisitos identificados anteriormente, que certamente envolvem múltiplos conceitos da Geometria e da Medida. Este trabalho constitui um exemplo de conexão externa com enorme potencial para as aprendizagens, que pode ser usado no 1.º ciclo. Enquanto que os alunos mais novos poderão fazer propostas com recurso a desenho com lápis em papel, os mais velhos poderão usar *software* de geometria dinâmica para replicar as fachadas e fazer novas propostas de sua autoria. Da mesma forma se pode trabalhar na observação de monumentos diversos como, por exemplo, o Cromeleque dos Almendres, de equipamentos modernos para uso comum como, por exemplo, os estádios de futebol, ou ainda de estruturas artísticas, como os painéis de azulejos das estações de comboios espalhadas por todo o país.

Modelação matemática

A modelação matemática consiste essencialmente em matematizar, através de objeto(s) matemático(s) que compõem o chamado "modelo matemático", uma dada situação de um contexto extra-matemático, constituindo o trabalho matemático realizado uma fonte de conhecimento, de capacidade de controlo e de tomada de decisões sobre essa situação matematizada. É isto que distingue a modelação matemática do estabelecimento de conexões externas que referimos na secção anterior: as conexões externas não implicam a existência de um modelo matemático que represente uma situação sobre a qual se fica apto a intervir, sendo este aspeto fulcral na modelação matemática.

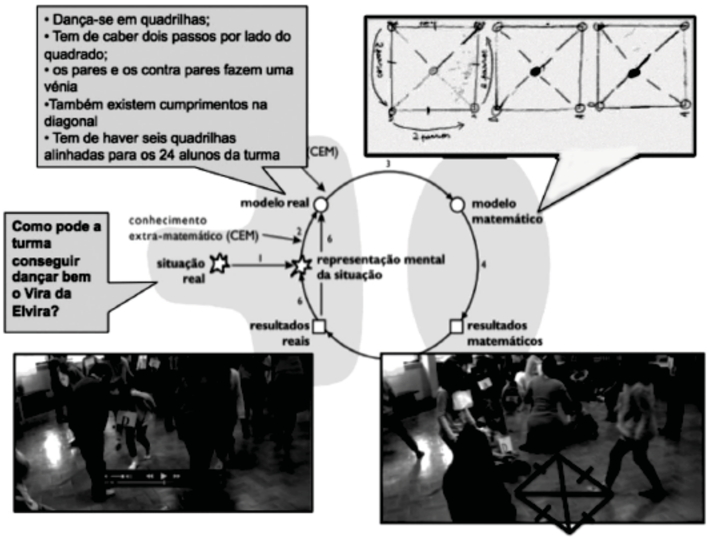
A modelação matemática concretiza-se através de um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático, muitas vezes representado por um ciclo (Ferri, 2010). A primeira fase do ciclo de modelação consiste na apreensão da situação real a modelar, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar acessível e matematicamente tratável. De seguida, através da aplicação de ideias matemáticas, constrói-se o modelo matemático que vai permitir produzir resultados, que nos permitem agir sobre a situação real.

Assim, a modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

Os modelos matemáticos encontram frequentemente expressão em fórmulas ou funções matemáticas, mas também existem modelos matemáticos representados por outros objetos matemáticos, como, por exemplo, tabelas ou esquemas que traduzem a situação. Estes últimos podem ser mais adequados ao trabalho com crianças.

Um exemplo de uma abordagem à modelação com crianças de 1.º ciclo pode encontrar-se no contexto do projeto MatDance (Canavarro, 2017). Com o objetivo de melhorar a execução da coreografia de uma nova dança em quadrilhas (grupos de 4 dançarinos) que estavam a aprender, surgiu a ideia de se marcar o chão com pontos chave que permitissem a cada dançarino posicionar-se no(s) sítio(s) certo(s). Revistos em conjunto os conhecimentos extra-matemáticos relativos às condicionantes da dança, cada grupo de crianças apresentou uma proposta e foi eleito pela turma o esquema que se observa na figura 18, correspondendo o modelo matemático aos quadrados sucessivos que representam as posições de cada quadrilha. Cada quadrado é simultaneamente estático (refere-se a posições de dançarinos), mas também dinâmico (incorpora o percurso realizado pelos dançarinos quando "percorrem" o quadrado). Com esta experiência, os alunos têm a oportunidade de estabelecer diversas conexões, aprofundando a compreensão sobre o que é um quadrado, os elementos que o compõem, as relações entre eles e até as funções que podem ter, como representar a realidade da dança e permitir intervir sobre ela, dando oportunidade de dançar melhor.

Figura 18. Modelo da dança em quadrilhas, em forma de diagrama (Canavarro, 2017)



A concluir, sistematizamos três ideias que importa reter sobre a importância da exploração curricular das conexões matemáticas com os alunos de todos os níveis: 1. Constituem-se como oportunidade de trabalhar de forma interrelacionada, e com ênfase na compreensão, conceitos e procedimentos matemáticos de diversos temas; 2. Proporcionam contextos onde o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais surge com naturalidade; 3. Oferecem a possibilidade de reconhecimento da relevância da matemática. Insistimos na ideia de que não é suficiente que o professor apresente nas aulas exemplos curiosos de conexões matemáticas aos alunos. É necessário que os alunos tenham oportunidade de eles próprios terem experiências que lhes permitam efetivamente conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula (Canavarro, 2017).

Tarefas em sala de aula

Apresentação e discussão

Tarefa — Encher sacos

Enunciado da tarefa

Encher sacos

Se eu tiver 528 berlindes, consigo fazer 58 sacos com 10 berlindes? Explica como pensaste.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 2.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Multiplicação/ divisão	Significado e usos da multiplicação e divisão
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégias
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas Conexões entre representações Linguagem simbólica matemática
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Interpretar e modelar situações com a divisão nos sentidos de partilha equitativa e medida, e resolver problemas associados.
- Relacionar a multiplicação e a divisão, em situações de cálculo e na interpretação e resolução de problemas, comparando diferentes estratégias da resolução.
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia.
- Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Trabalhar com os outros.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.

Recursos

Um enunciado escrito da tarefa para distribuir a cada um dos alunos, Material multibásico (MAB), telemóvel com câmara fotográfica, computador, projetor.

Resoluções esperadas dos alunos

Os alunos podem optar por uma das seguintes opções:

a) Adição de parcelas iguais: organizam os berlindes em grupos de 10 e adicionam esses grupos até chegar ou ultrapassar 528: 10 + 10 + 10 + ... Em seguida, contam o número total de parcelas de 10 (que correspondem ao número de sacos) e concluem que só conseguiram encher 52 sacos e sobraram 8 berlindes.

b) Usar a multiplicação: fazem 58 grupos de 10 berlindes e calculam o produto 58x10=580. Comparam com o número total de berlindes que têm e como 528 é menor que 580, concluem que não conseguem fazer 58 sacos com 10 berlindes cada.

c) Utilizar a decomposição do 528 em 500+20+8 e os produtos parciais:

   Para 500 berlindes = $50 \times 10 = 500$ — 50 sacos.

   Para 20 berlindes = $2 \times 10 = 20$ — 2 sacos.

   São 52 sacos e 520 berlindes, sobram 8 berlindes. Concluem que só conseguem fazer 52 sacos e sobram 8 berlindes

d) Usar tabelas: constroem uma tabela com uma coluna com o número de sacos e outra coluna com o número total de berlindes, sabendo que cada saco tem 10 berlindes. Podem usar as regularidades para "fazer saltos" maiores na tabela. Devem concluir que precisarão de 52 sacos e que sobrarão 8 berlindes.

N.º de sacos	Total de berlindes
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
10	100
50	500
52	520

Exploração da tarefa

O problema apresentado pretende mobilizar diferentes estratégias de resolução e proporcionar a sua exploração e comparação na discussão coletiva. Por outro lado, os alunos deverão trabalhar, de forma intencional, as diferentes fases da resolução de problemas, identificando-as e discutindo-as no coletivo da turma.

Prevê-se que a exploração da tarefa decorra em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. O enunciado do problema pode ser projetado ou escrito no quadro e pode ser distribuído aos alunos ou escrito por eles no caderno. Será necessário ajudar os alunos que manifestem dificuldades de escrita e de leitura, estabelecendo trabalho de tutoria entre colegas mais autónomos nestas competências e alunos com maiores dificuldades. Após a leitura do enunciado, o professor deve solicitar aos alunos que explicitem o que se pretende com o problema, descrevendo "a história do problema" por palavras suas. É importante que todos os alunos percebam o contexto do problema e qual é a questão que é colocada. O professor informa os alunos que vão trabalhar em pequenos grupos e que podem resolver o problema com a estratégia que considerarem mais adequada. Deve optar por formar grupos heterogéneos, garantindo que cada grupo tenha uma diversidade de capacidades e níveis de compreensão e execução. O professor informa os alunos do tempo que terão para desenvolver esse trabalho. Tempo previsto: 10 minutos.

Trabalho autónomo. O professor deverá acompanhar de perto o trabalho dos grupos, especialmente aqueles que integram alunos com maior dificuldade. Circula pela sala, observando o progresso dos grupos e oferecendo apoio quando necessário. Deve fazer perguntas orientadoras que ajudem os alunos a refletir sobre as suas estratégias e processos, sem fornecer diretamente a solução e ajudar aqueles alunos que demonstrem dificuldades. Este acompanhamento também informa o professor do trabalho dos alunos na turma, fornecendo-lhe informação para que possa selecionar as diferentes resoluções dos grupos que importa discutir, seja pela originalidade ou pela eficácia das representações usadas. As resoluções selecionadas podem ser fotografadas para projetar, possibilitando que todos tenham acesso ao trabalho que os colegas realizaram e que possam participar na discussão. Tempo previsto: 30 minutos.

Discussão com toda a turma. No início desta fase, o professor reúne toda a turma e projeta as fotografias das estratégias selecionadas dos diferentes grupos. Em cada resolução, conforme a ordem que o professor estabelece, cada grupo ou porta-voz deverá explicar à turma como o grupo pensou, apoiando o seu discurso na resolução projetada e respondendo a questões colocadas pelos colegas ou pelo professor para clarificar as resoluções apresentadas. Após a apresentação e discussão das diferentes resoluções, estas podem ser comparadas de modo a conduzir os alunos a definirem qual(ais) a(s) mais eficazes e a justificarem as suas escolhas. O professor deverá sistematizar as ideias dos alunos, realçando a eficácia e correção das "melhores" estratégias de resolução. Tempo previsto: 50 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As possíveis dificuldades desta tarefa poderão estar relacionadas, nesta fase, com a necessidade de tornar mais concreto o problema, quer devido aos números que estão envolvidos quer às operações. Para superar esta dificuldade, os alunos podem ser incentivados a usar material manipulativo, como o MAB, representando as quantidades e modelando as operações necessárias para resolver o problema.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A professora começou por escrever o problema no quadro e pedir aos alunos para o registarem no caderno. Depois deu tempo para lerem o enunciado em voz baixa. De seguida, pediu a alguns alunos para recontarem a história do problema e formulou questões de modo a garantir que todos compreenderam o contexto do problema:

Prof. – Quantos berlindes temos no total?

A1 – Temos 528 berlindes.

Prof. – E o que sabemos mais?

A2 – Que temos de fazer sacos de 10 berlindes.

Prof. – O que queremos saber?

A3 – Se 528 berlindes dão para encher 58 sacos com 10 berlindes cada.

A professora informou que tinham 30 minutos para resolver o problema e que, passado esse tempo, passariam à apresentação e discussão do trabalho realizado pelos grupos.

Trabalho autónomo dos alunos

Os alunos trabalharam em pequenos grupos, de forma colaborativa e autónoma, escolhendo as estratégias que consideraram mais adequadas. Durante a realização da tarefa, a professora circulou pelos grupos, oferecendo apoio e garantindo que todos compreenderam o problema e avançaram nas suas resoluções dentro do tempo estipulado. Após a conclusão da tarefa, as diferentes resoluções foram fotografadas para serem projetadas e iniciou-se a discussão coletiva com toda a turma.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

A apresentação das resoluções foi feita pelos grupos de alunos a virem à frente da sala e explicarem a sua estratégia a partir da sua projeção no quadro. A discussão começou pela estratégia de um grupo que utilizou a multiplicação para resolver o problema. Calcularam o produto de 58 por 10 e compararam esse número com o total de berlindes disponíveis (528), concluindo que não seria possível fazer 58 sacos.

Figura 1. Resolução de um grupo de alunos: cálculo do produto.

Prof. – Contem-nos como pensaram para resolver o problema.

A1 – Multiplicámos 58 por 10 e deu 580.

Prof. – Como pensaram?

A1 – Multiplicámos o número de sacos pelo número de berlindes.

Prof. – E o que concluíram?

A1 – Que 528 berlindes são menos do que 580, então não dá para encher 58 sacos.

Prof. – Podem explicar o que significa essa seta que desenharam?

A2 – Ah! Mas eu já sei isso. Essa setinha foi só para mostrar que fizemos a multiplicação e o resultado deu 580.

Prof. – Mas continuo sem perceber por que colocaram aquela seta… Podem explicar melhor?

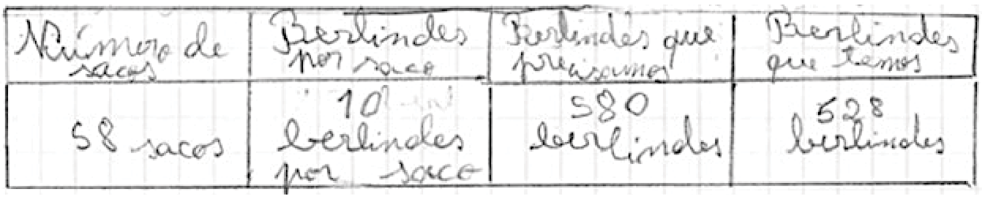
A1 – Ah! Sim! É que 58 dezenas são 580 unidades. Já sabíamos isso.

Prof. – Como assim?

A2 – Porque se 1 dezena são 10 unidades, então 58 sacos com dezenas são 58 x 10.

A professora convidou outro grupo para apresentar a sua resolução. O grupo utilizou um quadro para registar o número de sacos, o número de berlindes por saco, o número de berlindes que precisavam e o número de berlindes que tinham, organizando assim os dados do problema. Explicaram como organizaram os dados e referiram que perceberam que não era possível fazer 58 sacos com 528 berlindes, pois precisariam de 580. Concluíram que só conseguiriam fazer 52 sacos, sobrando 8 berlindes.

Figura 2. Resolução de um grupo de alunos: representação dos dados num quadro.



Número de sacos	Berlindes por saco	Berlindes que precisamos	Berlindes que temos
58 sacos	10 berlindes por saco	580 berlindes	528 berlindes

O excerto seguinte mostra como estes alunos explicaram a forma como tinham resolvido o problema:

Prof. – Contem-nos lá como resolveram vocês o problema.

A – Nós usamos uma tabela

Prof. – E como organizaram os dados na tabela?

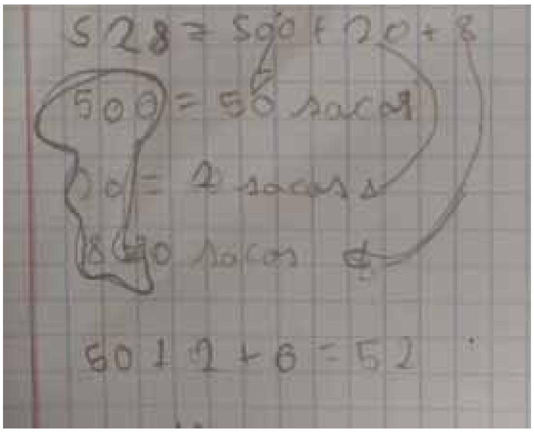
A – Sabíamos que precisávamos encher 58 sacos, então na primeira coluna pusemos os sacos que precisávamos encher, e sabíamos que cada saco tinha de ter 10 berlindes, então precisávamos de 580 berlindes, mas nós só tínhamos 528. Então não dá. Só dá para 52 sacos e sobram 8

Prof. – E se eu tivesse mais 2 berlindes?

A – Aí eu já conseguia fazer 53 sacos.

Um terceiro grupo utilizou a decomposição decimal do número 528 para distribuir os berlindes. Decompuseram os 528 berlindes em 500+ 20 + 8. Indicaram que com 500 berlindes fariam 50 sacos, com 20 berlindes fariam 2 sacos e que sobrariam 8 berlindes que não era possível colocar num saco com 10. Concluíram, assim, que conseguiam encher 52 sacos de 10 berlindes cada e sobravam 8 berlindes. Ainda referiram que precisariam de mais 6 sacos para não sobrar nenhum berlinde.

Figura 3. Resolução de um grupo de alunos: usando a decomposição decimal



Prof. – Expliquem-nos a estratégia usada pelo vosso grupo.

A1 – Então, primeiro nós fizemos 500 + 20 + 8.

Prof. – E por que fizeram assim?

A1 – Porque nós sabemos que 500 unidades são 5 dezenas… não 50 dezenas… e os sacos levam uma dezena, então 500 berlindes dão para encher 50 sacos. Depois 20 berlindes dão para 2 sacos. Sobram 8 berlindes que já não chegam para outro saco.

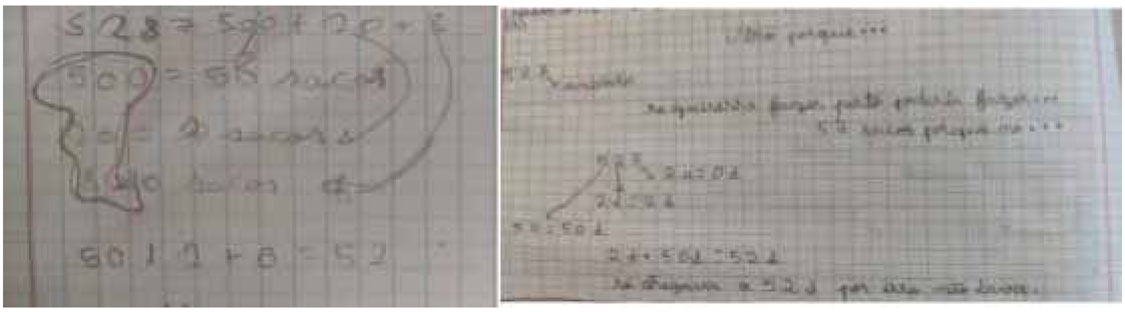
A2 – A nossa é parecida com essa (interpelou um aluno de outro grupo).

Prof. – Então que resposta tem o grupo para o problema?

A1 – Que não conseguimos os 58 sacos. Só dá para 52 sacos e sobram 8.

A professora projetou também a resolução do outro grupo, cujo aluno referiu ter a mesma estratégia, e convidou-os a explicar por que motivo a sua resolução era parecida com a dos colegas.

Figura 4. Comparação das resoluções de dois grupos de alunos



Prof. – Vamos observar e analisar as resoluções usadas para resolver o problema destes dois grupos. Que diferenças e semelhanças encontram entre estas duas resoluções?

A3 – Os dois são parecidos, mas fizeram de maneiras diferentes.

Prof. – Podem explicar melhor?

A – Sim, os dois grupos separaram as centenas, as dezenas e as unidades. Um grupo escreveu 500 + 20 + 8 e usou setas para mostrar a divisão em sacos, enquanto o grupo do Miguel fez um esquema para mostrar a divisão.

Prof. – Então, são diferentes ou iguais?

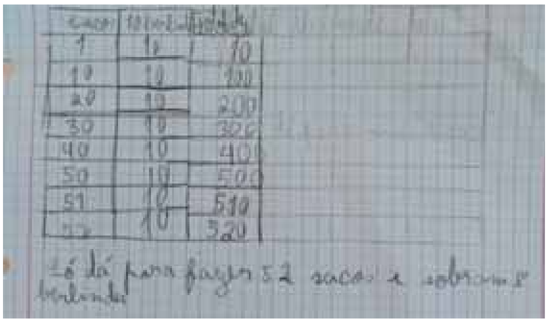
A – Iguais (turma em coro).

Prof. – E qual a importância de usar a decomposição decimal?

A – É melhor trabalhar com números terminados em zeros e ajuda a ver melhor quantos sacos conseguimos encher.

A professora convidou um quarto grupo para apresentar a sua solução. Este grupo construiu uma tabela com três colunas: "sacos", "10 berlindes por saco", e "total de berlindes". Preencheram a tabela até 52 sacos, mostrando que 52 sacos correspondem a 520 berlindes e registaram que só dá para fazer 52 sacos e sobram 8 berlindes.

Figura 5. Resolução de um grupo de alunos: a partir da construção de uma tabela.



Prof. – Podem explicar como vocês resolveram o problema?

A1 – Colocámos o número de sacos na primeira coluna, os berlindes por saco na segunda e o total na terceira. Fomos adicionando até chegar a 520 berlindes, o que dá para 52 sacos. Sobraram 8 berlindes.

Prof. – Observo que na coluna dos sacos vocês foram adicionando de 10 em 10 sacos. Porquê?

A1 – Porque se 1 saco tem 10 berlindes, 10 sacos têm 100 e contamos assim porque era mais fácil.

Prof. – Mas ao chegar a 50 sacos, vocês contaram de 1 em 1 até 52. Podem explicar porquê?

A1 – Porque 60 sacos já eram 600 berlindes e nós só tínhamos 528. Então contamos assim.

Prof. – Assim, como?

A1 – Fomos adicionando até ver se conseguíamos chegar a 528, mas só conseguimos chegar a 520.

Prof. – E o que concluíram?

A1 – Que só dá para fazer 52 sacos e sobram 8 berlindes.

Prof. – E a turma compreendeu o pensamento dos colegas?

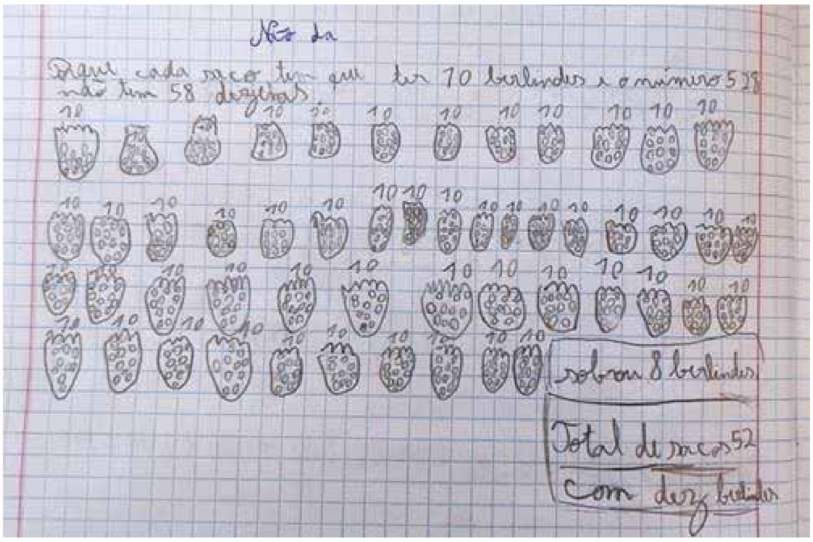
A2 – Sim. Eles pensaram que se 1 saco tem 10, 2 têm 20, mas eles saltaram logo para 10 para ser mais rápido.

Prof. – Notaram alguma regularidade na tabela?

A1 – Sim, vimos que se 1 saco tem 10 berlindes, 10 sacos têm 100, 30 sacos têm 300…

O grupo seguinte começou por registar que o número 528 só tinha 52 dezenas, por isso não dava para fazer 58 sacos. Contudo, sentiram a necessidade de recorrer ao desenho dos berlindes em grupos de 10 até obter os 52 sacos, provavelmente para tornar mais claro e explícito a forma como pensaram para resolver o problema.

Figura 6. Resolução de um grupo de alunos: desenho dos sacos dos berlindes



Prof. – Podem explicar-nos a vossa estratégia?

A – Nós vimos logo que não dava porque o número 528 só tem 52 dezenas.

Prof. – Podem explicar melhor?

A – Sim. 5 centenas são 50 dezenas mais 2 dezenas são 52.

Prof. – Então e os desenhos?

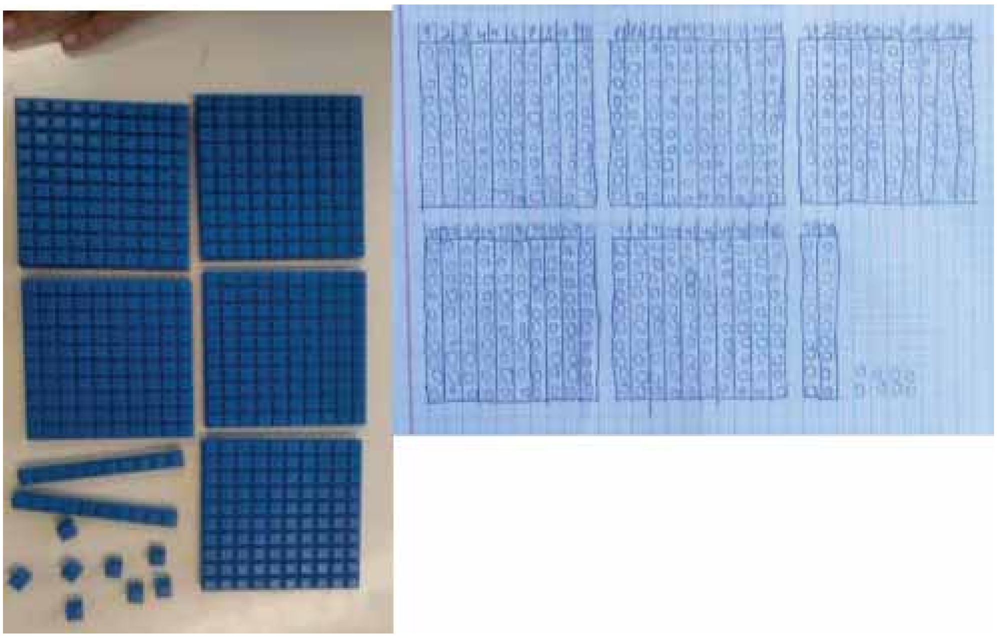
A – Contámos 10+10+10+10… e fomos contando até chegar aos 528 berlindes.

Prof. – E o que concluíram?

A – Que só conseguimos fazer 52 sacos e sobram 8 berlindes.

A professora convidou o último grupo para apresentar a sua solução. Estes alunos utilizaram o material multibásico físico (MAB), representando ainda o desenho do que fizeram com o material. Representaram a quantidade dos 528 berlindes usando as placas, as barras e os cubinhos do MAB e no desenho registaram o número de sacos por cada coluna de 10 unidades. Representaram ainda, fora da coluna, os 8 berlindes que não conseguiam colocar num saco de 10.

Figura 7. Resolução de um grupo de alunos: utilização do MAB e desenho



Prof. – Podem explicar-nos a vossa estratégia?

A – Usámos o MAB para formar grupos de 100, 10 e unidades. Cada barra de 10 representa um saco. Depois, desenhámos o MAB e em cada coluna escrevemos o número de sacos até chegarmos a 528 berlindes.

Prof. – E o que concluíram?

A – Conseguimos encher 52 sacos de 10 berlindes e sobraram 8 berlindes.

Em seguida, a professora conduziu a discussão solicitando que os alunos comparassem as diferentes estratégias de resolução apresentadas.

Prof. – Vamos observar novamente todas as estratégias usadas para resolver este problema. Que diferenças e semelhanças encontram entre elas?

A – Alguns grupos usaram o MAB e fizeram grupos de 10.

Prof. – E que estratégias usaram mais?

A – Tabelas e decomposição.

A – O grupo do Manuel fez de vezes.

Prof. – E qual a importância de usar diferentes representações para resolver o mesmo problema?

A – Ajuda-nos a ver que podemos resolver o problema de diferentes maneiras.

Prof. – Qual vos pareceu a estratégia mais eficaz?

A – Eu gostei mais da do grupo do Manuel – referindo-se ao grupo que fez o cálculo do produto de 58 por 10.

A – Eu achei mais fácil a que usaram a decomposição do número.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Encher sacos* poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Nesta tarefa os alunos puderam mobilizar estratégias que já conheciam recorrendo à adição de parcelas iguais e puderam compreender a multiplicação no sentido aditivo, a partir da resolução de um problema com um contexto facilitador e desafiante.

Capacidades matemáticas transversais

A tarefa proporcionou uma oportunidade para os alunos usarem diferentes estratégias de resolução de um problema, recorrendo também a diferentes representações matemáticas. Possibilitou ainda a comparação entre diferentes estratégias e representações. A apresentação e comparação das diferentes estratégias usadas pelos alunos fomentou um ambiente de comunicação e discussão matemática. Os alunos tiveram a oportunidade de expressar as suas ideias, discutir estratégias e justificar as suas respostas, promovendo igualmente o desenvolvimento do raciocínio matemático e a capacidade de comunicação matemática.

Capacidade e atitudes gerais transversais

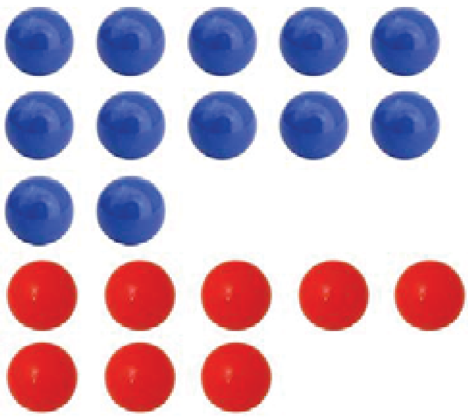
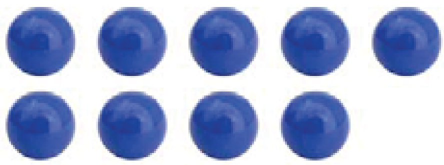
A comparação de estratégias e a identificação de processos mais eficazes reforçaram a matemática como uma ferramenta essencial para a resolução de problemas quotidianos. A tarefa permitiu aos alunos perceberem a utilidade prática da matemática, ampliando a sua motivação e interesse pela disciplina. A persistência necessária para a resolução do problema foi uma competência importante desenvolvida durante a tarefa. Os alunos enfrentaram desafios e dificuldades, mas com a orientação adequada, foram capazes de superar esses obstáculos e encontrar soluções válidas.

Tarefa — Quantos são os berlindes?

Enunciado da tarefa

Quantos são os berlindes?

O João e o Pedro têm berlindes vermelhos e azuis. Os dois amigos **têm o mesmo número de berlindes.** O João mostrou todos os seus berlindes ao Pedro, mas o Pedro só mostrou os berlindes azuis e escondeu os vermelhos. Quantos berlindes vermelhos terá o Pedro? Mostra como pensaste.

Berlindes do João	Berlindes do Pedro
	

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 1.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Expressões e relações	Igualdades aritméticas
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar Justificar
	Resolução de problemas	Estratégias
	Representações	Representações múltiplas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Perseverança Autorregulação

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Reconhecer igualdades aritméticas envolvendo a adição.
- Completar igualdades aritméticas envolvendo a adição, explicando os seus raciocínios.
- Descrever situações que atribuam significado a igualdades aritméticas dadas, explicando as suas ideias e ouvindo as dos outros.
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Trabalhar com os outros.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.

Recursos

Um enunciado escrito da tarefa para distribuir a cada um dos alunos. Podem ser disponibilizados outros materiais de contagem, como colares de contas.

Resoluções esperadas dos alunos

Inicialmente, os alunos podem abordar o problema usando diferentes estratégias:

a) Contar os berlindes um a um para determinar a quantidade de berlindes de cada cor que tem cada amigo.

b) Comparar, visualmente, as linhas dos berlindes e identificar os grupos de 5 e desta forma contar os berlindes de cada cor, de cada amigo.

c) Não fazer a contagem do número total de berlindes de cada cor e comparar apenas os grupos de 5. Desta forma, podem comparar os grupos de 5 por linhas. Por exemplo, na primeira linha dos berlindes azuis, tanto o João como o Pedro têm 5 berlindes. Na segunda linha, o Pedro tem menos 1 berlinde do que o João. Para descobrir quantos berlindes vermelhos tem o Pedro poderão contar a partir daí o número de berlindes que o João tem a mais.

d) Outra estratégia consiste em adicionar o número de berlindes do João para saber quantos são no total: $5 + 5 + 2 + 5 + 3 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$. E, desta forma, perceber quantos faltam ao Pedro para ter a mesma quantidade: $5 + 4 + \_\_\_ = 20$.

e) A estratégia que mobiliza o pensamento relacional é aquela que relaciona diretamente os berlindes com as suas cores: $12 + 8 = 9 + \_\_\_\_$. Na resolução desta expressão numérica os alunos não precisarão saber o total, mas apenas relacionar as parcelas e usar a compensação aritmética:

$$12 + 8 = 9 + \_\_\_\_$$

- 3 + 3

$$12 + 8 = 9 + 11$$

Exploração da tarefa

Espera-se que os alunos reconheçam a disposição dos berlindes em grupos de 5 e que a usem para fazer a contagem dos berlindes, mobilizando os múltiplos de 5 como números de referência e indo além da contagem um a um. Os alunos deverão ainda perceber que a quantidade total de berlindes dos dois amigos é igual. Assim, devem ter presente esse dado para que possam expressar a situação usando uma igualdade.

Os alunos poderão resolver o problema a pares e no momento de discussão coletiva deverão mostrar como pensaram e representaram os seus raciocínios.

Prevê-se que a exploração da tarefa decorra em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. Inicialmente, o professor poderá projetar e ler o enunciado do problema. Após este momento, deverá assegurar-se que todos os alunos compreendem o contexto da tarefa. Poderá pedir para um dos alunos "contar a história" do problema. Na apresentação da tarefa é extremamente importante que o professor realce a informação de que a quantidade total de berlindes dos dois amigos é a mesma. Tempo previsto: 5 minutos.

Trabalho autónomo. O professor deverá certificar-se que todos os pares de alunos estão a realizar a tarefa e que perceberam o seu contexto e desafio inerente. Durante esta fase do trabalho autónomo, o professor poderá questionar os alunos sobre o que estão a fazer, como e porquê, garantindo que compreende os processos de raciocínio que os alunos mobilizam e que identifica eventuais dificuldades, podendo prestar um apoio mais direcionado a esses alunos. Para além disso, é extremamente importante que nessa fase identifique quais as resoluções que considera pertinentes para a discussão coletiva. Tempo previsto: 20 minutos.

Discussão com toda a turma. Na discussão coletiva deverão ser colocadas em comum diferentes resoluções, podendo optar-se por uma sequenciação que privilegie um crescendo de complexidade ou formalismo nos processos de raciocínio e nas representações usadas pelos pares de alunos. Tempo previsto: 35 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As possíveis dificuldades desta tarefa poderão estar relacionadas com o facto dos alunos não compreenderem que o total de berlindes dos dois amigos pode ser o mesmo, independentemente do número de berlindes de cada cor de cada um dos amigos ser diferente.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A professora começou por projetar a imagem com os berlindes dos dois amigos e leu o enunciado para a turma. Em seguida, questionou os alunos sobre o contexto apresentado, certificando-se de que compreendiam a situação e o que lhes era pedido. Desta forma, perguntou se algum aluno queria contar "a história" do problema.

> *Prof. – Então, o que nos conta a história do problema?*
>
> *A1 – É uma história sobre berlindes.*
>
> *Prof. – E o que conta essa história sobre berlindes?*
>
> *A1 – Eram dois amigos.*

A2 – E tinham berlindes.

A3 – Azuis e vermelhos.

Prof. – Certo! E o que sabemos mais sobre os berlindes?

A1 – O Pedro escondeu os berlindes vermelhos.

Prof. – Boa! E que o sabemos mais?

A1 – O João mostrou todos os berlindes.

A2 – Mas o Pedro não.

Inicialmente, os alunos não retiveram a informação de que o número total de berlindes dos dois amigos era o mesmo. Considerando a importância desse dado no problema, a professora orientou o questionamento para que os alunos se apercebessem desse dado.

Prof. – E quais berlindes é que o Pedro escondeu?

A1 – Os vermelhos.

Prof. – E o que nos pergunta este problema?

A1 – Quantos berlindes vermelhos tem o Pedro.

Prof – E o que sabemos mais sobre os berlindes dos dois amigos? Será que o Pedro pode ter o mesmo número de berlindes vermelhos que o João?

[Os alunos não respondem.]

Prof. – O que é que o problema nos diz sobre o número de berlindes?

A2 – Diz que os dois amigos têm o mesmo número de berlindes.

Prof. – Os dois amigos têm o mesmo número de berlindes, no total. Isso mesmo! E isso é muito importante! Quando juntamos os berlindes azuis e vermelhos, para os dois amigos, são exatamente no mesmo número. Se contarmos os berlindes azuis e os vermelhos do Pedro, ao todo, no total, vai dar o mesmo número dos berlindes azuis e vermelhos do João, ao todo, no total. Perceberam?

Certificando-se que este dado tinha ficado bem explicito, a professora anunciou que, em seguida, iriam trabalhar na tarefa a pares e que teriam cerca de 20 minutos para resolver o problema.

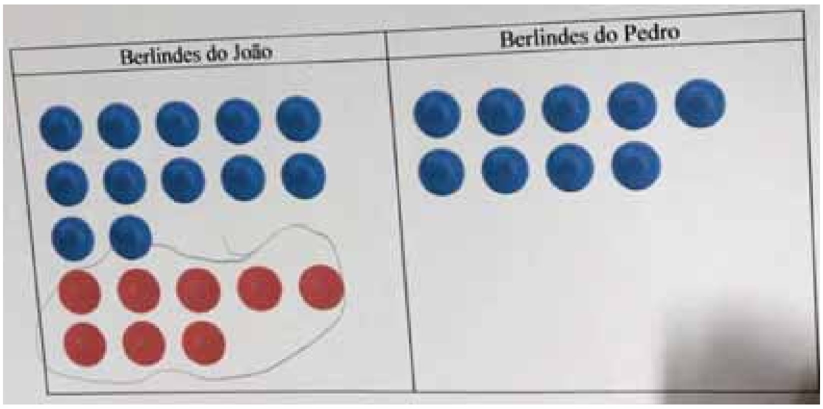
Trabalho autónomo dos alunos

Durante o momento de trabalho autónomo, a professora circulou pelos pares de alunos, questionando-os sobre a forma como estavam a resolver o problema. Nos episódios seguintes apresentam-se vários excertos ilustrativos desse momento. Embora a maior parte dos alunos não tenha tido muitas dificuldades, a tarefa era desafiante e os primeiros excertos revelam como alguns pares de alunos experimentaram dificuldades na resolução do problema. Os excertos seguintes mostram também diferentes estratégias usadas pelos pares de alunos na turma.

Neste episódio, este par de alunos começou por contar o número de berlindes vermelhos do João e formulou a conjetura de que os berlindes vermelhos do Pedro deviam ser no mesmo número, não sendo capaz de perceber que o facto de o número total de berlindes ser o mesmo, não implicaria que o número de berlindes vermelhos (ou azuis) fosse o mesmo para os dois amigos.

> *A – contando os berlindes vermelhos do João – um, dois, quatro, cinco, seis, sete, oito. Então, o Pedro se tem o mesmo número tem de ter oito.*
>
> *Prof. – Mas tem o mesmo número no total. Repara, os berlindes azuis do Pedro são o mesmo número dos berlindes azuis do João?*
>
> *A – Não. O Pedro escondeu estes três – comparando o número de berlindes azuis e identificando que faltam 3 berlindes azuis ao Pedro para ter o mesmo número de berlindes azuis do que o João. – E escondeu isto tudo – contornando os berlindes vermelhos do João.*
>
> *Prof. – E consegues já descobrir?*
>
> *A – Uhmmm…. Não.*

Figura 1. Um aluno contorna os berlindes vermelhos para explicar o seu raciocínio

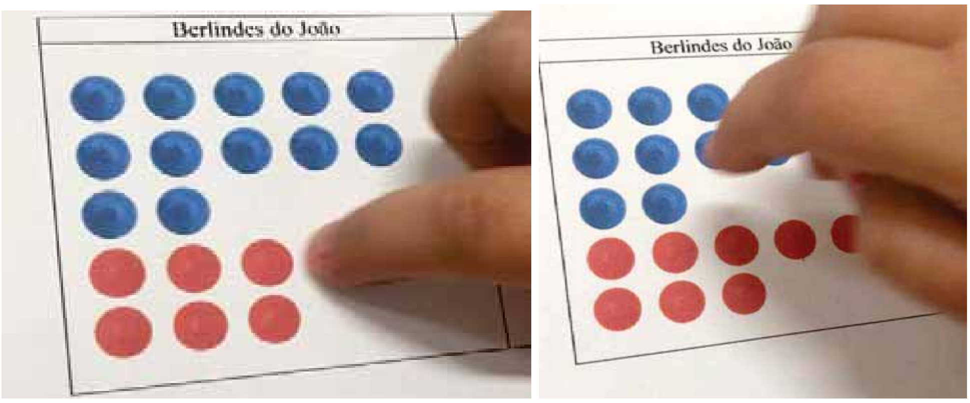


Outro par de alunos começou por contar o total de berlindes do João e, em seguida, fez a comparação com os berlindes do Pedro, referindo que lhe falta o número de berlindes vermelhos do João "mais 2" berlindes azuis do João, comparando a 3.ª linha dos berlindes, mas não considerou que na 2.ª linha faltava mais um berlinde ao Pedro.

> *A – Faltam mais 10.*
>
> *Prof. – Explica lá como pensaste.*
>
> *A – Ao todo são 20 aqui – referindo-se ao total dos berlindes do João.*
>
> *Prof. –Como é que tu sabes que aqui são 20?*
>
> *A – Porque eu já contei.*
>
> *Prof. – Contaste como?*
>
> *A – De um em um e deu-me 20. E aqui o Pedro precisava de mais estas – apontando para os berlindes vermelhos do João. – E precisava para dar 20 como estas – apontando para*

a totalidade de berlindes do João. – E precisava de mais duas destas – apontando para os 2 berlindes azuis do João que estão na 3.ª linha. – E mais o resto das vermelhas.

Figura 2. Um aluno aponta para os berlindes à medida que explica o seu raciocínio



No episódio seguinte, este par de alunos também recorreu à comparação entre os berlindes do João e do Pedro, mas fê-lo de forma correta.

A – São 11 vermelhas.

Prof. – Como é que fizeste?

A – Eu tirei as que estava a imaginar que são vermelhas e contei e ficou 11.

Prof. – Tiraste as que estavas a imaginar que são vermelhas?

A – Sim.

Prof. – Explica-me melhor que eu não estou a perceber.

A – Então, se aqui estavam tantas – apontando para os berlindes azuis do João. – Então, eu tirei uma para ficarem igual – apontando para o espaço em falta dos berlindes azuis do Pedro da segunda linha.

Prof. – Para ficarem aqui as azuis iguais, foi? Tiraste 1?

A – Sim.

Prof. – E assim ficavam quantos azuis?

O aluno conta um a um os berlindes azuis do João.

A – 10.

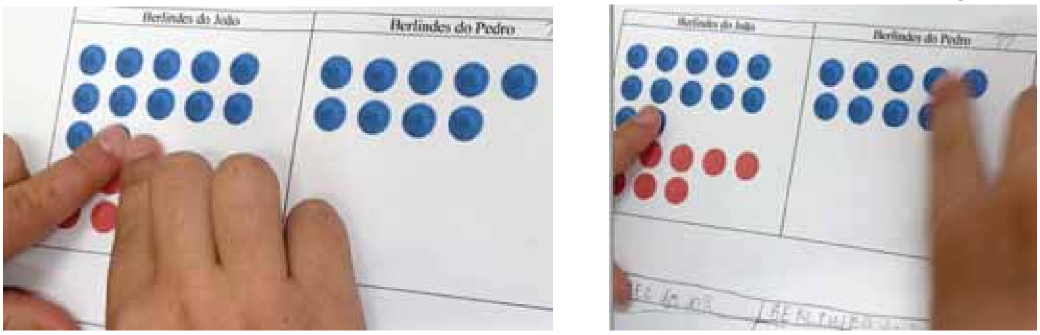
Prof. – E depois fizeste o quê?

A – Contei o resto que faltavam.

Prof. – E descobriram que faltavam quantos berlindes vermelhos ao Pedro?

A – 11.

Figura 3. Enquanto explica como pensou, o aluno vai apontando para os berlindes da imagem



Vários pares de alunos recorreram ao desenho para dar a sua resposta, desenhando os berlindes vermelhos do Pedro, tal como se apresenta no episódio seguinte. Para além disso, estes alunos recorreram à estrutura do 5 para contar os berlindes.

Prof. – Como é que contaram os berlindes?

A – Como 10 mais 10 é 20, então 9 mais 11 é 20.

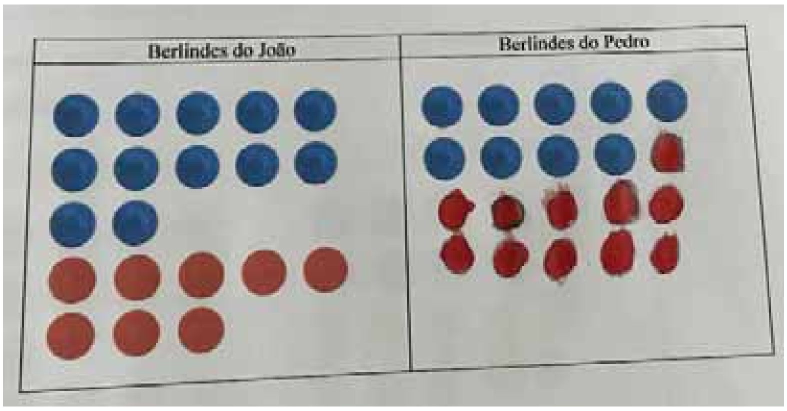
Prof. – E porque é que isso te ajudou a pensar aqui? Onde é que tu foste buscar o 10 mais 10?

A – Ao cinco.

Prof. – Onde é que está o cinco aqui?

A – Aqui – apontando para a primeira e para a segunda linhas dos berlindes azuis do João – Aqui cinco mais cinco são 10.

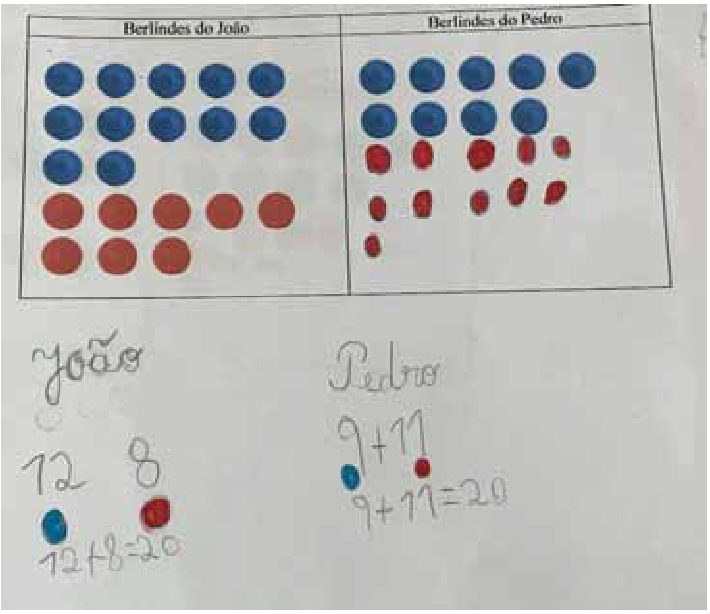
Figura 4. Desenho dos berlindes vermelhos que faltam e contagem de 5 em 5



Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

No momento de discussão coletiva, alguns pares de alunos foram apresentar os seus trabalhos. Um dos pares explicou como pensou para descobrir o número de berlindes vermelhos que tinha o Pedro e apresentou a resolução abaixo.

Figura 5. Resolução apresentada por um par de alunos no momento de discussão coletiva



Ao apresentar a sua resolução, um dos alunos escreveu no quadro a expressão 9+11=20, tal como tinha na sua ficha de trabalho. A professora questionou-o, conduzindo-o a explicar com maior clareza os seus processos de raciocínio e no sentido de levar a turma a perceber a forma como o colega pensou. Para tal, centrou-se no contexto do problema, permitindo que os alunos atribuíssem sentido às expressões numéricas e conduzindo-os a estabelecer a igualdade 12+8=9+11.

Prof. – Quando escreveste 9+11 igual a 20 estavas a pensar nos berlindes do João ou do Pedro?

A – Do Pedro.

Prof. – E o que é este 9? São os berlindes vermelhos ou os berlindes azuis?

A – Azuis.

Prof. – E o que é este 11?

Vários alunos: São os vermelhos.

Prof. – E quando eu penso nos berlindes do João, eu vou escrever a mesma coisa?

Vários alunos – Não.

A – Escrevo 12 mais 8 igual a 20.

Após esse momento, a professora escreveu no quadro o esquema de setas que ilustra o que disse o aluno. Para tal, vai questionando os alunos sobre as relações entre as parcelas envolvidas na igualdade. Ilustrou ainda esse procedimento usando o contexto dos berlindes: "O João tinha 12 berlindes azuis, menos três do que o Pedro e, como tinham no total o mesmo número de berlindes, 20, o Pedro tinha mais três berlindes vermelhos do que João" e escrevendo o esquema seguinte no quadro.

Figura 6. Esquema escrito pela professora no quadro, para ilustrar a igualdade

$$12 + 8 = 9 + \_\_\_\_$$

-3 +3

$$12 + 8 = 9 + 11$$

Em seguida, a professora propôs a resolução da igualdade seguinte: 13+___=12+8. Um dos alunos da turma respondeu imediatamente que devia colocar-se 7 no espaço a completar e explicou como pensou, mostrando que não recorreu ao cálculo, mas à relação entre as parcelas para completar a igualdade.

A – É 7. Porque o 13 junta-se ao 7.

Prof. – E porquê? Como pensaste?

A – Porque tira-se 1 do 8, o 8 que está a juntar-se ao 12.

Figura 7. Resolução da igualdade proposta pela professora

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Quantos são os berlindes?*, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos.

A tarefa constituiu uma nova oportunidade para os alunos trabalharem as igualdades aritméticas, de uma forma relacional, permitindo-lhe desenvolver o seu pensamento relacional. Os alunos puderam formular conjeturas, testá-las e justificar a sua veracidade, de forma natural e apropriada ao 1.º ano de escolaridade, a partir de um contexto familiar e que permitia mobilizar a estrutura do 5 e dos seus múltiplos, já antes trabalhada de forma intencional no âmbito dos números. Considera-se que esta tarefa é desafiante, não sendo imediata a sua resolução e com potencialidades para promover não só a mobilização de aprendizagens já adquiridas como promover o desenvolvimento de novas aprendizagens. Como se mostrou nos diferentes excertos, alguns alunos revelaram dificuldades que se consideram naturais nesta fase da sua aprendizagem, devendo o trabalho em torno do desenvolvimento do pensamento relacional, numa perspetiva da álgebra como aritmética generalizada, ser um trabalho intencional e de continuidade, desde o 1.º ano de escolaridade.

Capacidades matemáticas transversais

Esta tarefa permitiu trabalhar de forma intencional diferentes processos do raciocínio matemático, tais como o conjeturar e o justificar. Para além disso, a tarefa apresenta características que permitem considerá-la um problema desafiante para os alunos do 1.º ano de escolaridade, explorando também diferentes estratégias de resolução de problemas.

Capacidades e atitudes gerais transversais

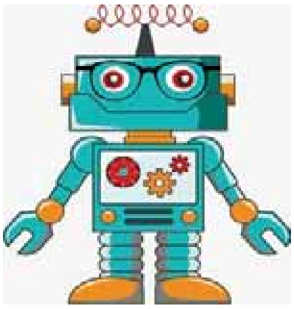
A dinâmica implementada na sala de aula e a atividade realizada pelos alunos, enquadradas num modelo de ensino exploratório, permite o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais diversas onde se destaca a colaboração em contextos de trabalho coletivo e a pares, permitindo o desenvolvimento interpessoal, mas também o desenvolvimento pessoal com capacidades e atitudes tais como a persistência, o sentido crítico e a autonomia.

Tarefa — Quantos números consegue escrever o robô Numi?

Enunciado da tarefa

Esta tarefa está inserida numa sequência constituída por três subtarefas, aqui designadas por 1, 2 e 3.

Tarefa 1 - Quantos números consegue escrever o robô Numi?



O Numi é um robô que só escreve números.

- Vais ajudar o Numi a escrever números: utilizando os algarismos **1 – 2 – 5**

1. Quantos números, **com dois algarismos**, consegue escrever o Numi? *Experimenta com os cartões e* regista as tuas descobertas.
2. Como deve pensar o Numi para não se esquecer de nenhum número?

Tarefa 2 – Dar instruções ao robô Numi

Lê as instruções que podes usar para ajudar o Numi a escrever números. Repara que as instruções estão todas desordenadas. Completa-as e ordena-as.

Coloca o cartão com o número _____ no lado __________ do cartão com o número ______

Pega agora no cartão com o número _____

Primeiro pega no cartão com o número _____

A seguir, pega no cartão com o número _____

Escreveste o número _____

Tarefa 3 – Entrar na cabeça do robô Numi

Acede ao link do Scratch e joga com o teu colega.

https://scratch.mit.edu/projects/707761215/fullscreen/

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 1.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta sequência de tarefas pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Sistema de numeração decimal	Valor posicional
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar
	Representações	Representações múltiplas Conexões entre representações
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Sentido crítico Criatividade

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta sequência de tarefas procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Reconhecer e usar o valor posicional de um algarismo no sistema de numeração decimal para descrever e representar números, nomeadamente com recurso a materiais manipuláveis de base 10.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Estabelecer conexões e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Trabalhar com os outros.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.

Recursos

Tarefa 1: Enunciado projetado no quadro, folhas de resposta e cartões com os 3 algarismos.

Tarefa 2: Envelope com as instruções recortadas, folha branca para colagem das instruções e cola.

Tarefa 3: Computador da sala e projetor, 1 computador (portátil) por cada par de alunos.

Resoluções esperadas

Tarefa 1.

Usando os cartões com os algarismos, na questão 1, os alunos podem começar por descobrir números usando os três algarismos. Progressivamente, podem descobrir uma estratégia mais estruturada para responder à questão 2, tal como começar por determinado algarismo e esgotar todas as hipóteses ou ir trocando a posição dos cartões com os algarismos para descobrir novos números, certificando-se que estão a indicar todos os números possíveis.

Tarefa 2.

Os alunos podem começar por ordenar as instruções, de modo que faça sentido. Podem testar com vários dos números já descobertos e perceber a validade das instruções.

Tarefa 3.

Através do jogo construído no Scratch, os alunos seguem as instruções em que têm de indicar números e descobrir as regras que foram aplicadas para gerar novos números. As regras consistem em operações simples (adicionar 1, 10 ou subtrair 1,10). Depois de jogarem o jogo, os alunos acedem à programação do Scratch e constroem outras regras. É expetável que os alunos continuem a usar operações simples, recorrendo a diferentes valores que adicionam ou subtraem.

Exploração da tarefa

A resolução desta sequência de tarefas pressupõe que os alunos desenvolvam capacidades inerentes ao pensamento computacional, a partir de um contexto dos números através do reconhecimento das regularidades do sistema de numeração decimal.

Prevê-se que a exploração de cada uma das tarefas da sequência decorra em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. A primeira tarefa da sequência pode ser apresentada introduzindo a personagem Numi como um robô que apenas obedece às instruções que lhe são dadas. Nessa tarefa, os alunos terão ainda disponíveis cartões com os algarismos, que podem manipular e mover para a descoberta dos novos números. Tempo previsto: 10 minutos.

As restantes tarefas da sequência decorrem da primeira e deve ser feita a relação com o trabalho efetuado anteriormente de modo a fazer esse seguimento.

Na apresentação da segunda tarefa deve ficar claro para os alunos que podem usar aquelas instruções, completá-las e ordená-las, mas que podem igualmente criar outras instruções que lhe pareçam mais adequadas. Tempo previsto: 5 minutos.

A terceira tarefa começa com um momento coletivo, onde diferentes alunos jogam o jogo e, no coletivo da turma descobrem e discutem as regras de formação dos números. Após esse momento, o professor deverá apresentar a programação simplificada do jogo, esclarecendo os alunos sobre os diferentes passos e, dependendo da experiência dos alunos com o Scratch, apresentando os principais blocos de comando do ambiente de programação visual. Tempo previsto: 20 minutos.

Trabalho autónomo. Na primeira tarefa é importante que professor perceba como os alunos estão a resolver a questão 1 e se, quando confrontados com a questão 2, tentam definir alguma estratégia para perceber se têm todos os números possíveis. O professor pode colocar questões de modo a perceber como os alunos estão a pensar e também para conduzi-los a reconhecerem as estratégias válidas que usaram para descoberta de novos números ou se estão a usar números repetidos. É importante que o professor coloque os alunos a testarem a validade das suas respostas e das suas estratégias. Tempo previsto: 30 minutos.

Na segunda tarefa da sequência são entregues aos pares de alunos as instruções recortadas e os alunos devem completá-las e colá-las por ordem as instruções, devendo o professor promover a análise do trabalho que estão a efetuar, através do questionamento. O professor pode ainda incentivar os alunos a criarem as suas próprias instruções e a registá-las, auxiliando nesse processo de escrita e conduzindo à clareza e correção do discurso. Tempo previsto: 20 minutos.

Na última tarefa os pares de alunos devem recorrer à programação do jogo, apresentada anteriormente na aula, e introduzir pequenas modificações que consistem essencialmente nos comandos das operações, conduzindo a novas regras. Tempo previsto: 30 minutos.

Discussão com toda a turma. Na primeira tarefa, no momento de discussão coletiva, diferentes pares de alunos vão apresentar a resolução da questão 2, considerando que esta resolução já mobiliza o realizado na questão 1. O professor deverá escolher os pares de alunos que apresentam diferentes estratégias de descoberta dos números e deverá sequenciar essas apresentações com um critério que poderá ser o de crescente de eficácia da estratégia usada. Assim, a discussão coletiva pode começar pela apresentação de um par que não tenha encontrado nenhuma estratégia para determinar todos os números possíveis, seguido de pares que apresentem estratégias definidas. Na discussão coletiva devem ser confrontadas essas diferentes resoluções, conduzindo os alunos a reconhecerem a validade das estratégias apresentadas, analisando-as criticamente. Tempo previsto: 30 minutos.

Na discussão coletiva da segunda tarefa deve ser salientada a correção da ordem e completude das instruções, para além de deverem ser apresentadas e discutidas novas instruções que os alunos possam ter construído. Na discussão das instruções deve ser evidenciado a necessidade da clareza das instruções e a importância da ordem correta das mesmas, conduzindo os alunos a reconhecerem que instruções menos claras ou colocadas por ordem incorreta vão, certamente, produzir resultados que não são os pretendidos. Tempo previsto: 30 minutos.

Na discussão coletiva da terceira tarefa deve ser privilegiado a apresentação dos trabalhos dos pares que apresentem alguma criatividade e que consigam mobilizar de forma correta as regularidades do sistema de numeração decimal. Tempo previsto: 30 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As possíveis dificuldades dos alunos na primeira tarefa prendem-se com a questão 2 e a necessidade dos alunos confirmarem que têm todos os números possíveis. Só o conseguirão fazer se encontrarem uma estratégia que tenha em consideração uma regularidade válida, como por exemplo, esgotar todos os algarismos possíveis na posição das dezenas.

Na segunda tarefa os alunos podem ter alguma dificuldade em interpretar as instruções já dadas e, por isso, não lhes ser fácil completá-las. Caso isso aconteça, poderão testar as instruções com alguns números e verificar como ordená-las. Alguns alunos poderão ainda sentir necessidade de construir as suas próprias instruções, as quais podem ser tão adequadas como as da proposta e isso pode ser até incentivado pelo professor. As novas instruções criadas pelos alunos podem ser validadas na discussão coletiva da tarefa.

Na terceira tarefa, caso seja a primeira experiência dos alunos com o ambiente de programação visual do Scratch, pode ser necessário fazer uma pequena apresentação dos principais blocos, nomeadamente daqueles que têm os operadores matemáticos.

Concretização da tarefa 1 na prática

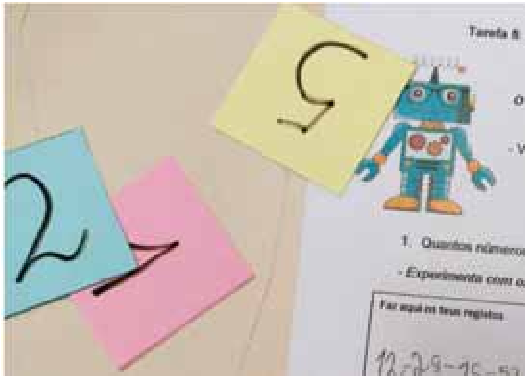
Apresentação da tarefa

A professora apresentou a personagem do Numi como um robô que apenas fazia aquilo que lhe mandavam fazer, ou seja, só obedecia às ordens que lhe eram dadas, as quais tinham de ser muito precisas. A determinada altura, um dos alunos sintetizou a ideia como "O Numi tem cérebro de galinha, temos de lhe ensinar tudo!". Apesar de ser apenas uma imagem na folha do enunciado, a importância da personagem do Numi, considerando a faixa etária dos alunos, contribuiu para uma apropriação e crescente interesse pela tarefa.

Trabalho autónomo dos alunos

Depois da apresentação da tarefa, seguiu-se o momento de trabalho autónomo, com os alunos organizados a pares. A cada par foi entregue um conjunto de cartões com os algarismos 1, 2 e 5 (figura 1). Estes cartões foram importantes para os alunos os poderem manipular e descobrir os seis números possíveis, embora alguns pares tenham prescindido da sua utilização aquando da descoberta dos primeiros números. Com ou sem cartões, todos os pares de alunos conseguiram, de forma muito fácil, descobrir os seis números possíveis.

Figura 1. Cartões de apoio à realização da tarefa



A segunda questão da tarefa trouxe um desafio maior, pois quando se pedia aos alunos que ensinassem o Numi a escrever os seis números que eles já tinham descoberto, houve respostas imediatas e variadas, tais como "Numi, deves estudar para memorizar" ou que se devia instalar uma "aplicação na cabeça do Numi", mas que revelavam que a questão não conduzia naturalmente à necessidade de dar instruções precisas que permitissem a escrita dos seis números. Nessa altura, foi necessário que a professora focasse a atenção dos alunos no que significava dar instruções e na importância da sua precisão. De forma muito intuitiva, a professora sentiu necessidade de incorporar o Numi, fazendo de robô e seguindo restritivamente as ordens que os alunos davam. Esse facto permitiu aos alunos identificarem os seus erros ou a falta de informação nas instruções, conduzindo-os a depurarem essas mesmas instruções. A manipulação dos cartões foi também essencial porque tornou tangível a reprodução fiel por parte das professoras das instruções que os alunos davam, conduzindo-os a identificarem as falhas e os erros. No excerto seguinte exemplifica-se um momento desses:

> *P – Vocês têm de dar ordens ao Numi. Numi primeiro faz assim… com estes algarismos, primeiro o Numi pode fazer o quê?*
>
> *A – Tem de pegar nos números.*
>
> *P – Mas pega em todos?*
>
> *A – Não.*
>
> *P – Então pega em quê? Diz ao Numi… Numi primeiro pega no cartão que tem o número…*
>
> *A – Um. E depois pegas no cartão que tem o número 2.*
>
> *P – E ele faz o quê?*
>
> *A – E faz o número 12.*

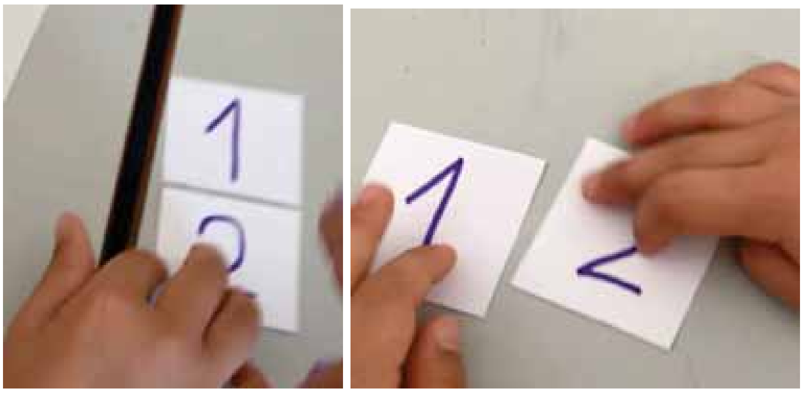
P – Mas ele pode pegar como ela fez [referindo-se à forma como a aluna colocou o cartão do 2 por baixo do cartão do 1]. Então o que é que ele tem de fazer a esse cartão do 2?

A – Por ao lado do 1.

P – De que lado?

A – Do lado direito.

Figura 2. Manipulação dos cartões à medida que o par de alunos ia dando as instruções



Neste excerto percebe-se que, inicialmente, a professora sentiu necessidade de conduzir mais diretamente os alunos para o que seria dar as instruções ao Numi. A resposta inicial do aluno "Tem de pegar nos números.", revela que essa ação de dar instruções precisas ao Numi não foi, de facto, imediata e as intervenções seguintes revelam ainda essa dificuldade e conduziram à necessidade de indicar exatamente as posições em que teria de ser colocado cada cartão.

No entanto, facilmente os alunos perceberam que depois de dar uma instrução de colocar um cartão à direita do outro, apenas precisariam mudar esse cartão e colocá-lo agora à esquerda para que obtivessem um número diferente, como mostra o excerto seguinte:

A – Está aqui o 12, agora trocamos os números, o 2 vem para aqui e o 1 vem para aqui e fazemos o 21.

P – E quantos números consegues construir com essa estratégia?

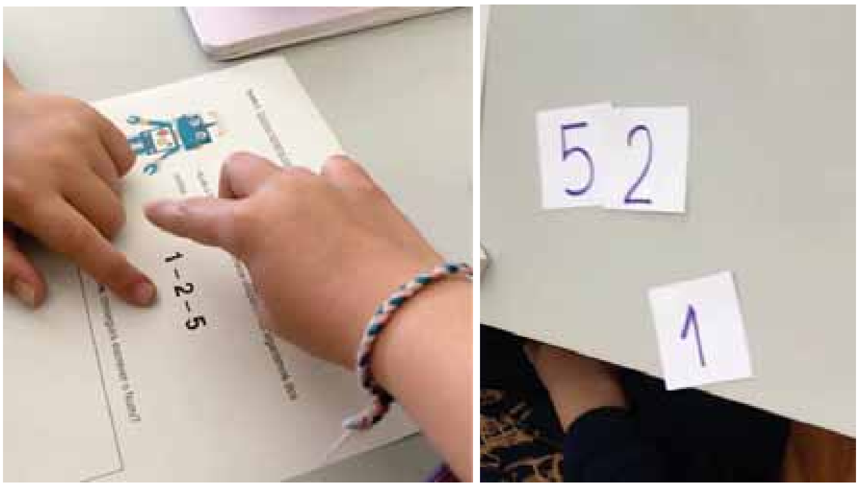
A – Dois.

P – E depois consegues construir outros ou não?

A – Sim, depois o 25, o 52.

Esse aspeto foi particularmente importante, pois permitiu discutir o valor posicional dos algarismos nos números. Para mostrarem os seus processos de raciocínio, os alunos recorreram a movimentos que faziam com os dedos, manipularam diretamente os cartões ou usaram esquemas de setas na escrita dos números, usando diferentes representações, desde as ativas às icónicas (figura 3).

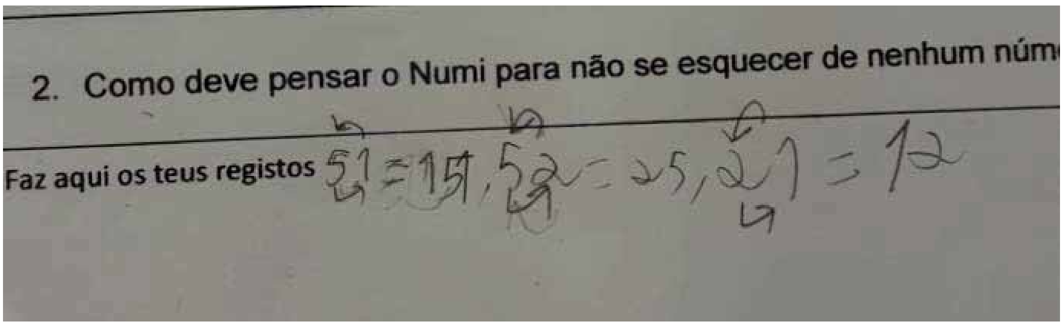
Figura 3. Os alunos movimentam os dedos ou os cartões para mostrarem como pensaram



Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

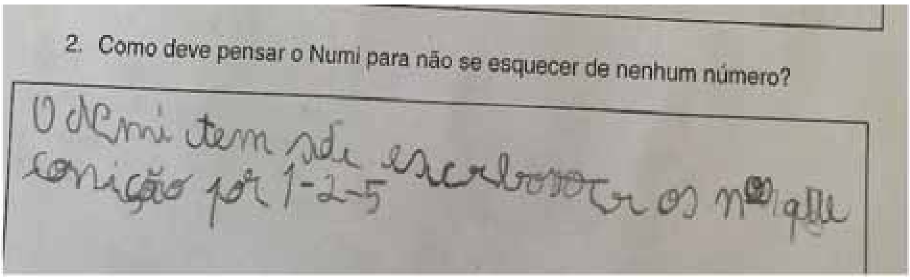
Na discussão coletiva foram apresentadas diferentes estratégias usadas pelos pares. A resolução apresentada na imagem seguinte, os alunos recorreram à troca de posições dos algarismos no número para criarem outros números.

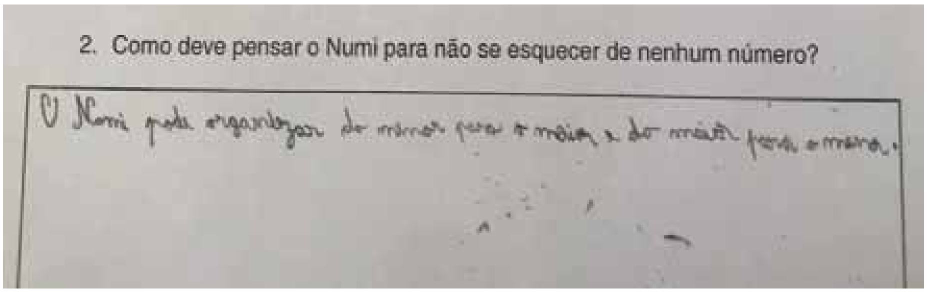
Figura 4. Diferentes representações usadas pelos alunos para indicarem a mudança de posição dos algarismos nos números.

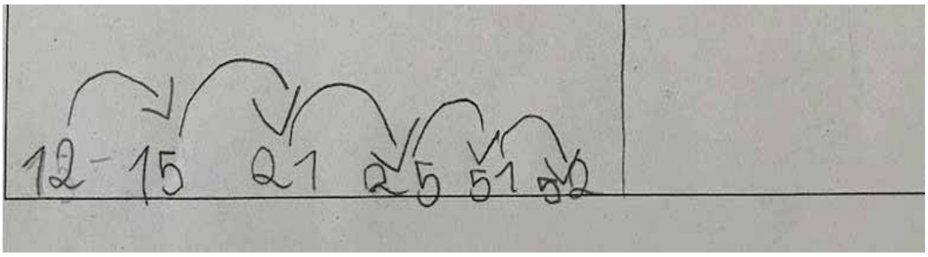


Para além deste processo de troca da posição dos algarismos para obter diferentes números, foram apresentadas outras resoluções como a escrita por ordem crescente ou decrescente dos números possíveis ou ainda a escrita de todos os números que "começavam" com o mesmo algarismo (figura 5).

Figura 5. Outras representações usadas pelos alunos para a descoberta dos seis números possíveis







Concretização da tarefa 2 na prática

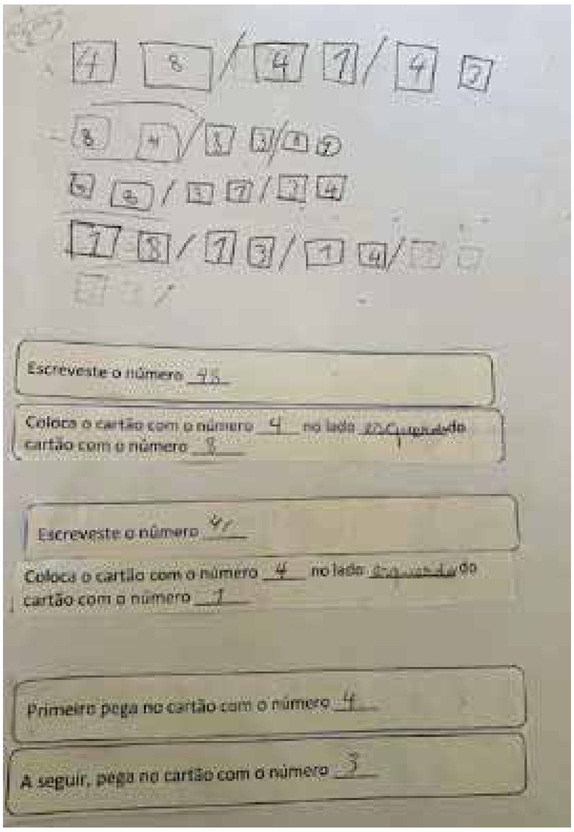
Apresentação da tarefa

A professora apresentou a tarefa, relacionando-a com a tarefa anterior e referindo que iam continuar a trabalhar nas instruções que tinham de dar ao Numi para que ele percebesse como escrever todos os números possíveis, não podendo esquecer-se de nenhum. Chamou a atenção para a necessidade das instruções serem claras e completas. Referiu, em seguida, que, a pares, iam trabalhar com instruções que estavam incompletas e desordenadas e que teriam de completar e ordenar essas instruções. Esclarecidas as dúvidas, seguiu-se o momento de trabalho autónomo.

Trabalho autónomo dos alunos

Os alunos começaram por ler as instruções e ordená-las. Depois completaram as instruções com casos particulares de números usando os algarismos dados (figura 6).

Figura 6. Exemplo de resoluções dos alunos na tarefa



Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

Na discussão coletiva foram apresentadas diferentes estratégias usadas pelos pares, conduzindo os alunos a reconhecerem a necessidade da clareza e completude das instruções.

Concretização da tarefa 3 na prática

Apresentação da tarefa

A aula começou com o anúncio da professora de como iam, finalmente, conhecer o Numi. Perante o entusiasmo dos alunos, projetou o jogo construído em Scratch que tinha a figura do Numi e também voz associada:https://scratch.mit.edu/projects/707761215/fullscreen/.

Neste momento da aula, os alunos jogaram o jogo, seguindo as instruções do Numi e descobrindo as regras que eram apresentadas. Após esse momento, a professora anunciou que iam "entrar dentro da cabeça do Numi" e mostrou a programação em Scratch, esclarecendo os alunos sobre os diferentes comandos e a forma como o ambiente de programação visual funcionava. Foi tornado relevante a parte do programa que continha "a regra" e os resultados que a mesma produzia, salientando o recurso aos operadores matemáticos e ao seu efeito sobre os números.

Figura 7. Os alunos jogam ao jogo no Scratch

Trabalho autónomo dos alunos

A pares, os alunos acederam, nos seus computadores portáteis, a uma programação mais simples do jogo que tinham jogado (https://scratch.mit.edu/projects/707989112/editor/). A partir desta programação, alteraram os comandos de forma a criar outras regras.

Figura 8. Programação do jogo para os alunos.

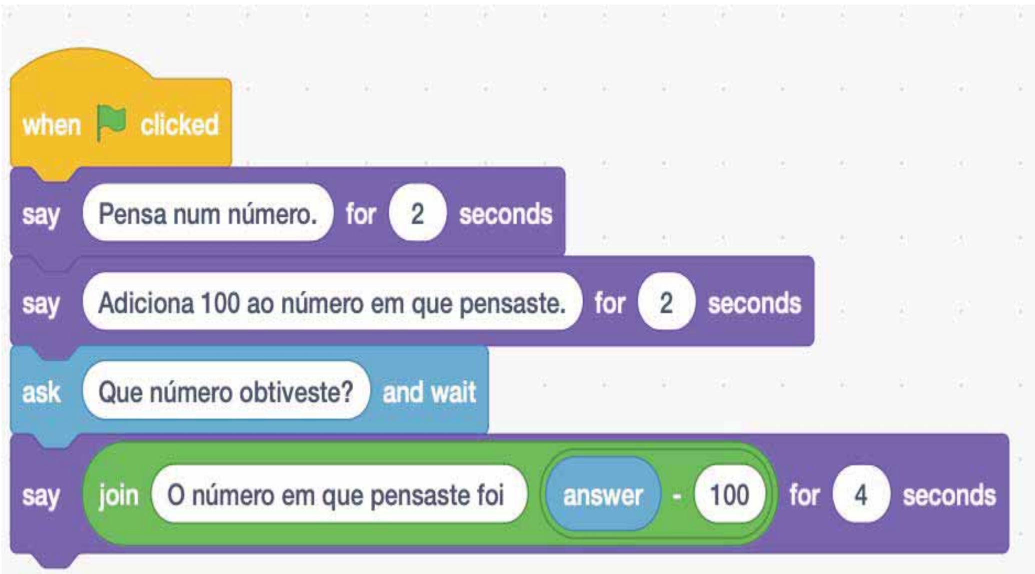


Figura 9. Par de alunos a modificarem a programação.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

Na discussão coletiva foram apresentados alguns dos trabalhos de modificação da programação feita pelos pares. Os alunos testaram a eficácia das programações feitas pelos colegas, jogando o jogo construído a partir das novas regras e reconhecendo quando estavam corretas ou incorretas, corrigindo-as neste último caso.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da sequência de tarefas *Quantos números consegue escrever o robô Numi?*, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos.

A tarefa constituiu uma oportunidade para os alunos trabalharem as regularidades do sistema de numeração decimal e desenvolverem o sentido de número. Mesmo que os alunos tenham já trabalhado, ainda que informalmente, essas regularidades; o facto de serem pedidas as instruções que permitem formar todos os números possíveis com dois algarismos usando os três algarismos dados, ajuda a tornar essas regularidades mais explícitas de modo a construir uma estratégia organizada e sistemática que permita identificar que não falta nenhum dos números possíveis. Desta forma, esta sequência de tarefas permite aprofundar os conhecimentos numéricos dos alunos e, em simultâneo trabalhar intencionalmente capacidades matemáticas transversais, com maior enfoque no pensamento computacional.

Capacidades matemáticas transversais.

Do exposto anteriormente sobressaem as potencialidades da sequência de tarefas para promover o desenvolvimento do pensamento computacional. Podemos identificar aspetos das tarefas que permitem trabalhar as cinco práticas inerentes a esta capacidade. Por exemplo, ao reconhecerem as regularidades do sistema de numeração decimal, os alunos mobilizaram o reconhecimento de padrões na resolução da tarefa. A prática da abstração foi mobilizada quando os alunos centraram a atenção naqueles algarismos e números em específico ou nas instruções a completar ou ainda nos números pedidos e obtidos a partir da programação em Scratch. A mobilização da decomposição permitiu diferentes abordagens ao mesmo problema, enriquecendo também outros aspetos relativos ao conteúdo matemático como a ordenação dos números, por exemplo. A prática da depuração, extremamente importante na atividade matemática, foi possível evidenciar-se nas três tarefas descritas, quando os alunos corrigiam ou melhoravam as instruções. Relativamente à utilização do ambiente de programação visual Scratch, saliente-se que, para além dos fatores relativos à motivação e interesse dos alunos, foi possível trabalhar com os operadores matemáticos do próprio ambiente para descoberta ou alteração das regras dadas, as quais exploravam regularidades aritméticas. No entanto, importa referir igualmente que a prática de algoritmia não foi evidente apenas na tarefa onde se usou o Scratch, pois esta foi sendo trabalhada nas tarefas anteriores que não utilizavam qualquer ferramenta tecnológica.

Outra capacidade matemática em desenvolvimento nesta sequência de tarefas é a capacidade do raciocínio matemático. Nestas tarefas os alunos puderam formular, testar e justificar conjeturas, formulando algumas generalizações relativas às regularidades do sistema de numeração decimal. Também a capacidade das representações matemáticas foi trabalhada nestas tarefas, permitindo aos alunos usar representações múltiplas, incluindo o recurso à tecnologia.

Capacidade e atitudes gerais transversais.

Esta sequência de tarefas tem inerente um fator de motivação associado à figura do robô Numi. De facto, com alunos do 1.º ano de escolaridade, esse tipo de personagem permite criar um ambiente propício à atividade em sala de aula, desafiando os alunos para interagirem com a personagem. Mesmo sem terem acesso a um robô verdadeiro, a simples imagem no enunciado da tarefa e posterior imagem e voz no jogo do Scratch desencadeou nos alunos uma predisposição muito positiva para a tarefa. Embora os alunos tenham manifestado essa predisposição, as tarefas da sequência não eram propriamente de resolução fácil ou imediata, revelando um grau de desafio interessante para este ano de escolaridade e promovendo a persistência dos alunos perante as dificuldades, desenvolvendo a sua perseverança. Por outro lado, a organização dos alunos em pares e pequenos grupos propicia o desenvolvimento de competências sociais, tais como a colaboração, e de competências pessoais como a autonomia e o sentido crítico.

Tarefa — Pinturas no recreio

Enunciado da tarefa

Pinturas no recreio

1. Observa o canteiro à volta da árvore, com as pedras pintadas de cor-de-rosa e verde.

Fonte da imagem: Fotografia dos autores

1.1. Recria a sequência de cores usada nas pedras do recreio.
1.2. Se continuares a sequência das cores, qual será o grupo de repetição?
1.3. Imagina que continuavas a sequência de cores e completa a tabela.

Nº de grupos de repetição	Nº de pedras verdes	Nº de pedras cor-de-rosa
1	1	2
2	2	4
3		
4		
5		
10		

1.4. Observa a tabela e regista as tuas descobertas.
1.5. Nesta sequência, se considerarmos 26 pedras cor-de-rosa, quantas serão verdes? Explica como pensaste.
1.6. Quantas pedras cor-de-rosa e quantas pedras verdes existem numa sequência de 39 pedras? Explica como pensaste.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 2.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Regularidades em sequências	Sequências de repetição
Capacidades matemáticas transversais	Representações	Representações múltiplas
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Raciocínio Matemático	Conjeturar e generalizar
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Persistência

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Reconhecer e justificar se uma sequência pictórica tem ou não regularidade.
- Identificar e descrever regularidades em sequências variadas em contextos diversos, estabelecendo conexões matemáticas com a realidade próxima.
- Identificar e descrever regularidades em sequências de repetição.
- Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência.
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões).
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade.
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.

- Trabalhar com os outros.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.

Recursos

Um enunciado escrito da tarefa para distribuir a cada um dos alunos.

Resoluções esperadas

Questão 1.1.

Os alunos optam por uma das seguintes opções:

a) Descrição do que observam por desenhos:

b) Descrição do que observam por palavras: observo uma sequência de pedras rosa, rosa, verde, rosa, rosa, verde … e assim sucessivamente.

c) Descrição do que observam por palavras e desenhos: observo uma sequência de pedras rosa, rosa, verde, rosa, rosa, verde … e assim sucessivamente.

d) Descrição do que observam usando símbolos:

R	R	V	R	R	V	R	R	V

Ou 1-1-2-1-1-2

e) Descrição do que observam por palavras e símbolos: observo uma sequência de pedras rosa, rosa, verde, rosa, rosa, verde … e assim sucessivamente.

R-R-V-R-R-V ou 1-1-2-1-2-2

Questão 1.2.

Os alunos optam por uma das seguintes opções:

a) Indicação por desenhos:

b) Indicação por palavras: rosa, rosa, verde

c) Indicação por palavras e desenhos:

rosa, rosa, verde

d) Identificação do que observam por símbolos

R-R-V ou 1-1-2

e) Identificação por palavras e símbolos: rosa, rosa, verde

R-R-V ou 1-1-2

Questão 1.3.

Podem completar a tabela recorrendo:

a) Utilização do raciocínio recursivo: os alunos reconhecem que por cada grupo de repetição que se acrescenta, aumenta uma pedra verde e que aumentam duas pedras cor-de-rosa. Para saberem o número de pedras verdes e cor-de-rosa de uma sequência com 3 grupos de repetição, precisam saber o número de pedras da sequência dos 2 grupos de repetição anteriores.

Nº de grupos de repetição	N.º de pedras verdes	N.º de pedras cor-de-rosa
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10
10	10	20
20	20	40

b) Utilizando a relação direta/funcional: a partir das duas primeiras linhas da tabela, os alunos reconhecem que há tantas pedras verdes quanto grupos de repetição e que o número de pedras cor-de-rosa é o dobro do número de pedras verdes. Reconhecem, assim, a relação direta entre o número de pedras verdes e o número de pedras cor-de-rosa, sem usar o raciocínio recursivo.

c) Recorrendo à utilização de materiais ou desenhos.

No momento da discussão, todos os alunos devem ter oportunidade de perceber que não seria necessário recorrer à contagem, pois podem relacionar diretamente o número de pedras verdes com o número de pedras cor-de-rosa.

Questão 1.4.

Os alunos podem chegar a respostas como:

a) O número de pedras cor-de-rosa é o dobro do número de pedras verdes e o número de pedras verdes é metade do número de pedras cor-de-rosa.

b) O número de pedras verdes é igual ao número de grupos de repetição e o número de pedras cor-de-rosa é o dobro do número de grupos de repetição.
c) O número de grupos de repetição é igual ao número de grupos de pedras verdes e é metade do número de pedras rosa.

Questão 1.5.

Os alunos deverão chegar todos à mesma resposta: se considerarmos 26 pedras cor-de-rosa, 13 serão pedras verdes, porque o número de pedras verdes é a metade do número de pedras rosa.

Questão 1.6.

Os alunos deverão chegar todos à mesma resposta: numa sequência de 39 pedras, 26 serão pedras cor-de-rosa e 13 pedras verdes. A justificação pode ser apresentada de várias formas distintas:

a) Fazendo uma tabela a partir da anterior, incluindo uma coluna com o número total de pedras e:

Nº de grupos de repetição	Nº de pedras verdes	Nº de pedras cor-de-rosa	N.º total de pedras
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9
4	4	8	12
5	5	10	15
10	10	20	30
11	11	22	33
12	12	24	36
13	13	26	39

b) Pensando no grupo de repetição e trabalhando com um número mais cómodo:

– se fossem três pedras, duas seriam cor-de-rosa e uma verde;

– se fossem 30 pedras, 20 seriam cor-de-rosa e 10 seriam verdes;

– …

– se fossem 39 pedras, 26 seriam cor-de-rosa e 13 seriam verdes.

c) Desenhando e pintando uma sequência de 39 pedras;

No momento da discussão, todos os alunos devem ter oportunidade de perceber que não seria necessário recorrer ao desenho: sabendo que o número de pedras verdes é metade do número de pedras rosa teriam de encontrar dois números que satisfizessem essa condição. A razoabilidade na escolha dos números deveria ser também discutida, a partir das respostas dos alunos.

Exploração da tarefa

Prevê-se que a exploração da tarefa decorra em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. A professora distribui o enunciado da tarefa e informa os alunos que vão trabalhar em pequenos grupos e o tempo que terão para desenvolver esse trabalho. A tarefa envolve questões de diferente natureza, a 1.1. e a 1.2. relacionadas com sequências de repetição, englobando o seu registo e a identificação do grupo de repetição e as restantes: 1.3, 1.4, 1.5. e 1.6 relacionadas com investigar, relacionar e generalizar. Assim, o professor informa os alunos que numa primeira fase deverão trabalhar as questões 1.1. e 1.2. e no final haverá um momento de discussão e, de seguida, deverão dedicar-se às restantes questões e no final existirá um novo momento de discussão. A leitura e a interpretação das questões devem ser realizadas em cada grupo, abrindo assim a possibilidade de surgimento de mais do que uma resposta. Será necessário ajudar os alunos que manifestem dificuldades de leitura, nomeadamente propondo que um colega mais autónomo nesta competência o faça. Tempo previsto: 25 minutos (10+15).

Trabalho autónomo. Tendo em conta que esta tarefa envolve dois momentos, o professor deverá acautelar o cumprimento do tempo previsto e deverá acompanhar de perto o trabalho dos grupos, nomeadamente os que integram alunos com maior dificuldade. Antes de terminar o tempo previsto para conclusão da tarefa, deverá circular por todos os grupos para se inteirar do decorrer dos trabalhos e ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades que possam surgir. Este acompanhamento informa também o professor para que selecione as diferentes resoluções dos grupos que importa discutir, seja pela originalidade ou pela eficácia das representações usadas. As resoluções selecionadas são fotografadas e projetadas no quadro, possibilitando que todos tenham acesso ao trabalho que os colegas realizaram e possam participar na discussão. Tempo previsto: 60 minutos (20+40).

Discussão com toda a turma. Em cada questão, de acordo com a ordem que o professor estabelece, tendo em conta o nível de estruturação crescente das representações usadas, cada grupo ou porta-voz deverá explicar à turma a forma como o grupo pensou, apoiando o seu discurso na resolução que será projetada ou apresentada oralmente pelos alunos e responder a questões colocadas pelos colegas ou pelo professor de forma a clarificar as resoluções apresentadas. Após a apresentação e discussão das diferentes resoluções para cada questão, deve ser reconhecida a representação mais eficaz, que pode ser registada, pelos alunos, no seu caderno diário. Em cada um dos dois momentos previstos, deverá existir um momento final para sistematização das aprendizagens realizadas. Tempo previsto: 60 minutos (20+40).

Dificuldades previstas e ações do professor

As possíveis dificuldades desta tarefa poderão estar relacionadas com o registo da sequência tendo em consideração que a figura do canteiro é finita e circular. O professor poderá incentivar os alunos a recordar o significado de sequência de repetição como um conjunto de elementos que estão colocados por uma determinada ordem. Poderão também surgir dificuldades na formulação e testagem de conjeturas/generalizações, a partir da identificação das regularidades na tabela, sobretudo se existirem dificuldades na relação entre o dobro e a metade. Para tal, o professor deverá explorar outros exemplos que permitam verificar essa relação e recorrer à tabuada do 2, percebendo a relação com a divisão: por exemplo, se $2 \times 4 = 8$ então $8 : 2 = 4$.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A professora informou os alunos que iriam realizar a tarefa, composta por seis questões. Foi pedido aos alunos que, em grupo, resolvessem as questões 1.1. e 1.2. e depois haveria um momento de discussão e que só depois deveriam dedicar-se às restantes questões e que no final existiria um novo momento de discussão. O desenvolvimento de cada uma das questões passou pelas várias fases de um ensino do tipo exploratório: introdução da tarefa; trabalho autónomo dos alunos em grupo; apresentação e discussão dos resultados e sistematização e institucionalização das aprendizagens realizadas. A tarefa foi contextualizada no âmbito do trabalho realizado pelas duas turmas que participaram na experimentação das novas *Aprendizagens Essenciais em Matemática*, nomeadamente nas pinturas realizadas no recreio de uma das escolas. Os alunos tiveram oportunidade de recordar o trabalho que tinham realizado e transmitir essa informação aos colegas da outra turma, numa sessão via zoom, desafiando-os a descobrirem como tinham pensado a pintura do seu recreio.

Trabalho autónomo dos alunos

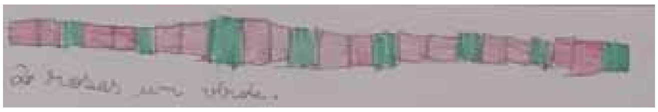
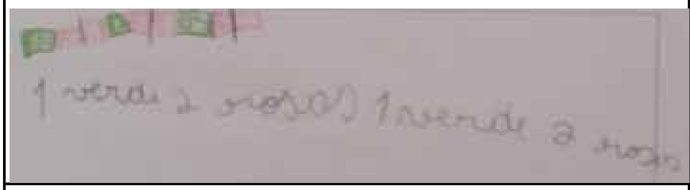
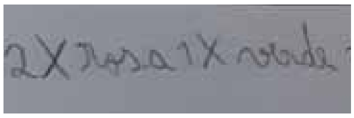
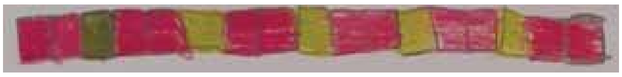
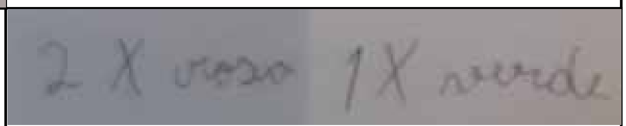
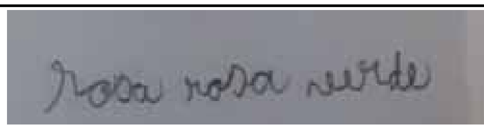
Todos os grupos resolveram as questões de forma colaborativa e autónoma, contando quando necessário com apoio da professora. Durante o tempo de realização da tarefa, a professora apoiou os grupos, procurando assegurar que cumpriam o trabalho no tempo estabelecido. Conforme previsto, no final do primeiro momento fotografou as diferentes resoluções e fez o mesmo no final do segundo.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

Tendo em consideração que a tarefa contemplava dois momentos de trabalho de natureza diferente, efetuou-se um primeiro momento de discussão acerca das resoluções 1.1. e a 1.2. relacionadas com sequências de repetição, englobando o seu registo e a identificação do grupo de repetição. Posteriormente, passou-se à discussão das restantes, 1.3, 1.4, 1.5. e 1.6, centradas em investigar, relacionar e generalizar.

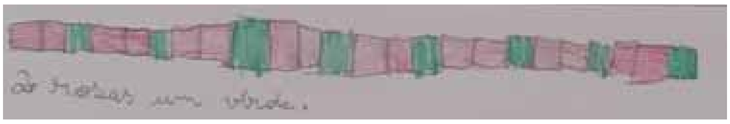
Para uma melhor compreensão das resoluções dos alunos, na figura 1 apresentam-se quer as sequências de repetição produzidas pelos grupos de trabalho quer a identificação do grupo de repetição, respetivamente as respostas às questões 1.1. e 1.2.

Figura 1. Resolução da questão 1.1. pelos grupos de trabalho

<table>
<tr><td>1.
</td><td></td></tr>
<tr><td>2.
</td><td></td></tr>
<tr><td>3.
</td><td></td></tr>
<tr><td>4.
</td><td></td></tr>
<tr><td>5.
</td><td></td></tr>
</table>

A respeito da questão *1.1. – Recria a sequência de cores usada nas pedras do recreio* –, na figura 2 apresenta-se a resolução do grupo que apresentou em primeiro lugar.

Figura 2. Resolução de um grupo, à questão 1.1



A professora convidou as duas alunas a irem para junto do quadro e explicarem a resolução efetuada pelo seu grupo:

Prof. – Como explicam à turma a sequência de cores?

Uma das alunas referiu:

A – Nós até fomos ao canteiro confirmar qual era a sequência e vimos que era rosa-rosa-verde.

Prof. – Querem representar aí no quadro?

As alunas desenharam uma sequência com dois quadrados cor-de-rosa, um verde e um rosa e oralmente referiram:

A – E depois escrevemos: dois rosa e um verde.

Prof. – Mas vocês têm outro quadradinho aí desenhado?!

A – É que nós [no papel] desenhámos mais quadradinhos.

Prof. – Porque desenharam mais?

A – Porque o canteiro tem mais.

As mesmas alunas foram convidadas a responderem à questão *1.2. - Se continuares a sequência das cores, qual será o grupo de repetição?*. Gerou-se o seguinte diálogo:

Prof. – Qual é o grupo que se repete?

A – O grupo que se repete é o grupo cor-de-rosa.

Prof. – Só cor-de-rosa?

A – E verde.

Prof. – Digam lá isso de outra forma.

A – Cor-de-rosa e verde.

Prof. – E quantas pedras cor-de-rosa e quantas verdes?

A – Duas cor-de-rosa e uma verde.

Prof. – Exemplifiquem aí [no quadro] como fizeram.

As alunas desenharam e coloriram em conjunto, uma dedicou-se às pedras cor-de-rosa e a outra à verde.

Prof. – Este é o grupo que se repete?

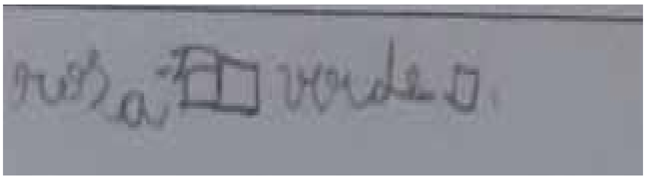
A – Sim.

Prof. – E fizeram assim no papel?

A – Não, mas assim também dá.

Este grupo, no papel, tinha efetuado a representação do grupo de repetição conforme a figura 3.

Figura 3. Grupo de repetição



Na apresentação de outro grupo de trabalho, a professora perguntou: O que vais fazer? Gerou-se o seguinte diálogo:

A1 – Vou fazer duas vezes o rosa e uma vez o verde [o aluno desenha no quadro].

A2 – Este era o grupo de repetição.

Prof. – Então é o grupo de repetição ou a sequência?

A1 – É o grupo de repetição, a sequência tem mais quadradinhos.

Prof. – Está bem, mas como são esses quadradinhos?

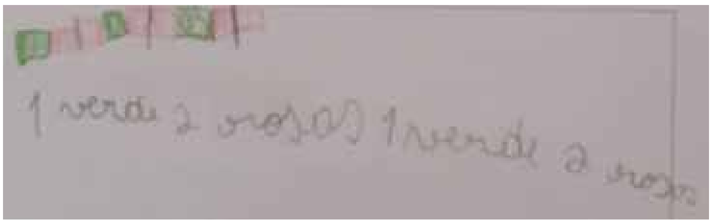
A2 – São sempre rosa-rosa-verde.

Prof. – Então vamos lá descrever a sequência primeiro?

A1 – É rosa-rosa-verde e outra vez rosa-rosa-verde e outra vez … e outra vez.

No lugar, os alunos tinham desenhado a sequência conforme apresentada na figura 4.

Figura 4. Resolução do grupo no papel



Prof. – Então no papel também fizeram assim?

A1 – Sim.

A2 – Mas ao contrário.

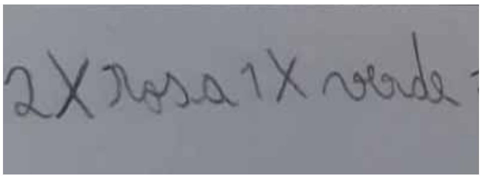
Prof. – Ao contrário como?

A2 – Começamos com a pedra verde, mas também temos 2 pedras rosa.

A professora aproveitou para esclarecer que embora o número de pedras seja o mesmo, a ordem pela qual se encontram não é, o que no estudo das sequências é um aspeto importante, uma vez que a ordem de cada elemento que a constitui é considerada.

No quadro os alunos mantiveram a sequência rosa-rosa-verde-rosa-rosa-verde. Este grupo, no papel, tinha feito a representação do grupo de repetição conforme apresentado na figura 5.

Figura 5. Identificação do grupo de repetição



Na continuidade do diálogo, a professora questionou:

Prof. – E agora quem identifica o grupo de repetição?

A2 – Eu.

O aluno desenhou no quadro.

Prof. – Podes dizer o que fizeste?

A2 – Desenhei três pedras, duas cor-de-rosa e uma verde.

Portanto, no registo apresentado, o grupo optou pela representação pictórica.

Nas restantes apresentações os diálogos foram semelhantes, tendo a professora questionado o motivo de terem utilizado desenhos e palavras, símbolos numéricos ou apenas desenhos. No caso da associação às palavras, o motivo adiantado centrou-se em "era para explicarmos melhor". Nesta altura, a professora e os alunos reconheceram que todas as representações eram adequadas, porém a última apresentação (figura 6) traduzia de forma clara, consistente e eficaz, a regularidade encontrada e o grupo de repetição.

Figura 6. Sequência e grupo de repetição

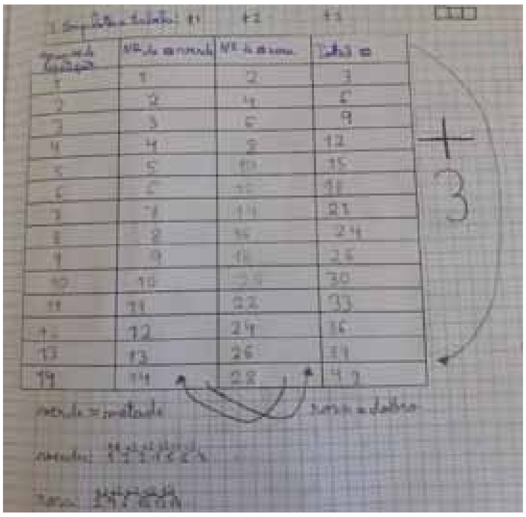
O segundo momento de discussão centrou-se nas questões relacionadas com o raciocínio matemático. Começou pela projeção no quadro do enunciado da ficha e completamento da tabela com a colaboração de todos os grupos e sendo sempre solicitada a justificação. Nas suas justificações foi possível perceber diferentes estratégias: (a) utilização do raciocínio recursivo, pois reconheceram que por cada grupo de repetição que se acrescenta, aumenta uma pedra verde e que aumentam duas pedras cor-de-rosa, (b) utilização da relação direta/funcional: a partir das duas primeiras linhas da tabela, os alunos reconhecem que há tantas pedras verdes quanto grupos de repetição e que o número de pedras cor-de-rosa é o dobro do número de pedras verdes; (c) recurso a materiais ou desenhos e efetuar a contagem das pedras. No momento da discussão, todos os alunos devem ter oportunidade de perceber que não seria necessário recorrer à contagem, pois podem relacionar diretamente o número de pedras verdes com o número de pedras cor-de-rosa.

Decorrente da discussão da questão 1.3., a questão *1.4. - Observa a tabela e regista as tuas descobertas* –, focou-se em refinar a forma como os alunos comunicam as suas descobertas, enfatizando-se os conceitos de dobro, metade e igual, conforme se antecipou nas resoluções previstas.

Na questão *1.5 – Nesta sequência, se considerarmos 26 pedras cor-de-rosa, quantas serão verdes? Explica como pensaste* –, a resposta foi uniforme e correta em todos os grupos e a justificação centrou-se na relação encontrada (o número de pedras verdes é metade do número de pedras cor-de-rosa. As estratégias utilizadas centraram-se na utilização do cálculo mental e na realização do cálculo no papel (por exemplo, 26:2=20:2+6:2).

Para a discussão sobre a questão 1.6. - *Quantas pedras cor-de-rosa e quantas pedras verdes existem numa sequência de 39 pedras? Explica como pensaste* –, a professora optou por projetar a tabela abaixo referente à apresentação de um dos grupos (figura 7).

Figura 7. Tabela projetada pela professora



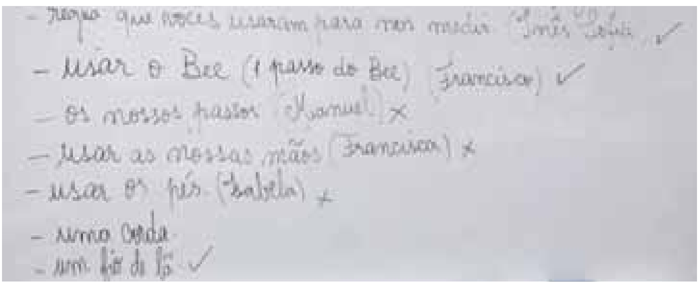
Esta questão envolveu saber o total de cada um dos dois tipos de pedras numa sequência composta por 39 pedras. Além de se falar novamente sobre a relação de dobro e metade, os alunos acrescentaram mais algumas descobertas: nas primeira e segunda colunas, a ordem natural dos números até 10; na terceira coluna, a contagem de 2 e 2; e na quarta coluna, os múltiplos de 3. Foi ainda possível identificar os números pares e ímpares.

A partir desta tarefa, os alunos foram desafiados a darem continuidade à pintura do recreio numa das turmas e a iniciarem a pintura do recreio na outra, através da realização de um projeto. Aceite o desafio, debateu-se:

> *Prof.* – Temos de saber a parte do recreio que poderemos pintar: qual a vossa opinião, onde vamos desenhar/pintar?
>
> *A – Podemos pintar o espaço do recreio todo.*
>
> Prof. – Vamos lá focar-nos. Poderemos pintar o espaço todo do recreio? *Como estás a pensar fazer?*
>
> *A – Medir o espaço todo.*
>
> *Prof. – Bem, então a turma concorda?*
>
> *Alunos – Sim.*
>
> *Prof. – Como vamos fazer? Sugestões?*
>
> *A – Medir.*
>
> *Prof. – Concordo, mas vamos medir o quê?*
>
> *A – O espaço.*
>
> *Prof. – O espaço?! Como?*
>
> *A – As paredes?*
>
> *Prof. – Como vamos medir as paredes?*
>
> *A – Com uma régua.*
>
> *Prof. – Bem… Vamos pensar aqui todos. Como medir o recreio todo? Conhecemos os cantinhos todos do recreio?*
>
> *A – Precisamos de um mapa.*
>
> *Prof. – É uma ideia. Qual será a melhor forma de arranjarmos um mapa?*
>
> *A – Na internet. No Google Earth.*

Os alunos tiveram oportunidade de pesquisar no Google Earth e verificar que havia muito para pintar. A decisão de como medir veio à discussão. Os alunos e a professora registaram no quadro as ideias que surgiram, referindo-se aos instrumentos de medida de comprimento (figura 8).

Figura 8. Registos no quadro



Estes alunos enumeraram alguns instrumentos de medição que tinham sido trabalhados no ano letivo anterior. A referência da aluna à "régua que vocês usaram" diz respeito ao metro articulado que se tinha usado para medir as alturas dos alunos. A corda e a lã surgiram a partir da insistência da professora para os alunos pensarem na adequação de instrumentos para medir o comprimento de superfícies grandes. Neste momento, o foco era saber qual dos instrumentos referidos seria mais adequado para a situação. Referiram que, para ser tudo igual, os passos, os pés e as mãos eram os menos adequados a não ser que fosse o mesmo colega a fazer a medição de tudo porque os "tamanhos" dos pés das mãos e dos passos eram diferentes entre eles. Este tema tinha sido trabalhado no ano letivo anterior e recordaram a tarefa com o robô Bee em que tinham medido o comprimento de circuitos. O passo do Bee foi o instrumento mais requisitado, porém poderia ficar danificado na medição de paredes e asfalto e não parecia ser adequado para a medição do comprimento de grandes superfícies. Optou-se pelo fio de lã. Já no recreio, começaram as medições. A respeito de uma superfície retangular, a professora questionou?

Prof. – Como vamos fazer para medir?

A – Medimos de um lado e depois do outro.

Prof. – Então quantos lados medimos?

A – Medimos 2.

Prof. – E chega?

A – Sim, porque vai ser igual.

Prof. – Porquê, João?

A – Porque o retângulo tem dois lados que são iguais.

Pegaram no novelo de lã e começaram a puxar o fio. Mediram um dos lados e a professora perguntou:

Prof. – Como fazem agora para registar esse comprimento?

A – Esticamos o fio e pomos uma pedrinha onde acaba.

Colocaram a pedra, mas quando puxaram o fio para medir o outro lado, a pedra saltou e o fio saiu do lugar.

Prof. – Temos de arranjar outra solução. Como podemos fazer?

A – Cortamos aí o fio.

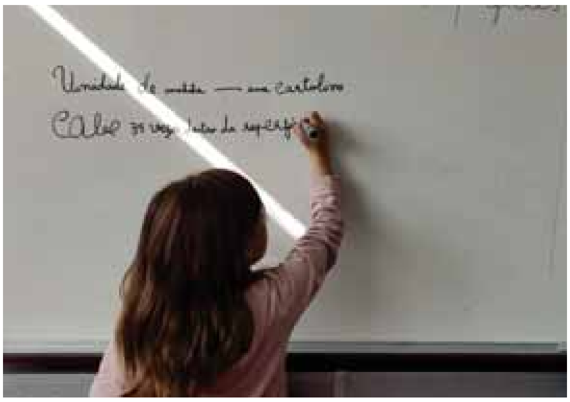
E assim fizeram. Depois mediram o outro lado. Cada grupo registou as medidas. Retornando à sala de aula continuou-se a discussão, tendo-se chegado à conclusão de que não deveriam ser tão ambiciosos e pintar o recreio todo, mas sim realistas e que com tantos projetos que a turma tinha, seria melhor centrarem-se apenas numa parte do recreio e a escolhida foi a superfície retangular acima falada. Na sequência desta decisão, discutiu-se sobre as etapas a seguir para saber se poderiam utilizar essa superfície. Surgiu aqui a necessidade de elaboração de um pedido de autorização à diretora da escola.

Em articulação com a área de Português, redigiu-se um pedido de autorização para efetuar a pintura do recreio. Os alunos, dispostos em grupos de trabalho, foram descobrir a área da zona a pintar e, para isso, dispunham de vários materiais para selecionar como unidade de medida de área. A cartolina foi a unidade de medida mais consensual (figura 9). Em grupos foram para o recreio efetuar a medição da área.

Figura 9. Medição da área

Chegados à sala, uma aluna registou no quadro o resultado da medição realizada (figura 10), indicando a unidade de medida e a medida da área considerada.

Figura 10. Registo de uma aluna no quadro



Colocou-se a questão de como deveria ser dividida a área do recreio selecionada para efetuar as pinturas. Um aluno referiu: "dividimos em 5 partes e cada grupo fica com uma dessas partes". Outro aluno acrescentou: "É uma parte em cinco para cada grupo". Este foi um contexto rico para a abordagem ao conceito de fração, fazendo conexões internas entre a medição da área e a iniciação ao conceito de fração. Assim, a professora considerou importante adiantar que cada grupo ficaria com a responsabilidade de embelezar a quinta parte da área encontrada ou um quinto da área.

Cada grupo foi desafiado a criar uma sequência de repetição para embelezar a parte do recreio que lhe coube. Foi fornecida uma folha A4 a cada grupo. Os alunos discutiram em grupo como elaborar as sequências, idealizaram-nas em rascunhos e chegaram a consensos. Cada grupo, livremente, projetou numa folha A4 como idealizou a sequência a ser reproduzida na parte do recreio de que era responsável. A realização de uma Gallery Walk (figura 11) deu sequência ao projeto. Assim, após o trabalho em grupo, foram expostos os projetos na parede da sala e cada um dos outros grupos teve oportunidade de dar a sua opinião e fazer questões aos colegas, colocando *Post-it* nas apresentações realizadas por cada grupo. Cada grupo teve oportunidade de ler as questões e as opiniões dos colegas e, depois, foram discutidas em grande grupo, com a moderação da professora. Surgiram apreciações/questões como: Quantos grupos de repetição tem a tua sequência? Qual é o número total de flores? A sequência está muito bonita; O que é este desenho?

Figura 11. Gallery Walk

O projeto culminou com a concretização da pintura do recreio da escola, feita pelos alunos, que munidos de tintas de diferentes cores recriaram as sequências criadas (figura 12).

Figura 12. Pintura de recreio com sequências criadas pelos alunos

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Pinturas no recreio*, poder-se-á tecer alguns comentários centrados nas aprendizagens dos alunos.

Conteúdos matemáticos

Da reflexão efetuada sobressaem os seguintes aspetos: (i) a importância do trabalho em Álgebra desde os níveis elementares da Educação Básica, neste caso dando ênfase ao identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência e à descrição, em linguagem natural, da regra de formação de uma sequência de repetição, explicando as suas ideias (Canavarro, et al., 2021); (ii) a partir desta tarefa foi possível desenvolver uma atividade de investigação que permitiu que os alunos formulassem conjeturas e as justificassem; (iii) a importância da abordagem em espiral que permitiu aos alunos, ao longo das tarefas da sequência, experienciarem múltiplas oportunidades para retomar as suas aprendizagens.

Capacidades matemáticas transversais

Destaca-se a importância das representações matemáticas, da comunicação matemática e das conexões matemáticas. A diversidade dos tipos de representações evidencia a importância das representações múltiplas que permitiram aos alunos, não só estruturar a sua aprendizagem e demonstrar os seus processos de raciocínio como mostrar aos outros a forma como pensaram, exprimindo as suas ideias, desenvolvendo também aspetos relacionados com a capacidade de comunicação matemática. Esta é valorizada quer através dos registos escritos, quer através da oralidade que é especialmente favorecida no seio do grupo de trabalho e nos momentos de discussão coletiva, tal como ilustrámos através de alguns diálogos. As conexões matemáticas realizadas ligam a Álgebra à Geometria e Medida através de uma primeira abordagem ao subtópico vistas e plantas aquando da visualização do espaço do recreio no Google Earth, bem como ao conceito de comprimento, medição e unidades de medida não convencionais; e ao conceito de área, medição e unidades de medida não convencionais.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Esta tarefa contribuiu para o desenvolvimento de relações entre os alunos e destes com a professora. A organização em grupos permitiu partilhar ideias, trabalhar para o mesmo objetivo, chegar a consensos. Propiciou igualmente o desenvolvimento pessoal e autonomia, pois os alunos foram estimulados a tomar decisões e perceber as implicações que traziam. Perceberam ainda que há momentos em que é necessário ser persistente para conseguir realizar as etapas de um projeto como o que foi desenvolvido, pois por vezes a concretização de uma tarefa dá azo a um novo desafio.

Tarefa — Itinerários

Enunciado da tarefa

Esta tarefa está inserida numa sequência constituída por duas subtarefas, aqui designadas por Itinerários 1 e Itinerários 2.

Itinerários 1

Com o pretexto de realizar uma visita de estudo nas proximidades da escola, foi proposto aos alunos descobrirem o itinerário mais curto para ir da escola ao local a visitar.

Foram colocadas as questões seguintes:

1. Descobre qual o itinerário mais curto para ir da escola ao local da visita.
2. Descreve o itinerário que escolheste, usando os termos corretos.

Itinerários 2

Foi proposto um jogo, com dois momentos específicos:

Momento 1: cada par desenha e descreve um itinerário onde constem as seguintes indicações:

- virar um quarto de volta à direita/à esquerda
- dar meia-volta à direita/à esquerda
- dar uma volta completa à direita/à esquerda

Momento 2: cada par dita o seu itinerário a outro par. O outro par programa o robô Bee para executar esse itinerário. Depois, os pares trocam de papéis.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 2.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Orientação espacial	Itinerários
Capacidades matemáticas transversais	Representações matemáticas	Representações múltiplas Conexões entre representações Linguagem simbólica matemática
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Pensamento computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico Criatividade
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Criar, representar e comparar itinerários, usando os termos "quarto de volta", "meia-volta", "três quartos de volta" e "volta completa" para explicar as suas ideias.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.

- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Trabalhar com os outros.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Computador com ligação à internet, Projetor, Aplicação *Google Earth Pro*, Robô simples (por exemplo, Bee).

Resoluções esperadas dos alunos

Itinerários 1

Questão 1.

Os alunos podem recorrer a um aplicativo de mapas online, como o *Google Earth Pro* com a ferramenta da navegação com vista de ruas (*street view*) e interpretar o itinerário sugerido.

Questão 2.

Os alunos interpretam o itinerário e começam por descrevê-lo oralmente usando e testando os termos relativos à orientação espacial ("quarto de volta", "meia-volta", "três quartos de volta" e "volta completa").

Itinerários 2

Inicialmente, os alunos podem registar a programação do itinerário usando:

a) linguagem natural.
b) pseudocódigo com setas de direção ou outros símbolos à escolha.

Quando programarem o robô Bee podem verificar se a programação inicial está correta, depurar erros ou otimizar o algoritmo que criaram.

Exploração da tarefa

A tarefa Itinerários 1 consiste na exploração de um itinerário de uma visita de estudo a um local na proximidade da escola, para a exploração dos itinerários e utilização dos termos "quarto de volta", "meia-volta", "três quartos de volta" e "volta completa" para descrever esses itinerários. A tarefa foi desenvolvida nas duas turmas em simultâneo, uma em Azeitão e outra em Bragança.

A pares, os alunos constroem o itinerário recorrendo a um aplicativo de mapas online, o *Google Earth Pro*, com a ferramenta da navegação com vista de ruas (*street view*). Em seguida, verificam o itinerário usando o *street view* e partilham os itinerários criados com a turma, descrevendo-os recorrendo aos termos "quarto de volta", "meia-volta", "três quartos de volta" e "volta completa". No coletivo da turma decidem qual o itinerário mais eficaz para a visita de estudo, justificando as suas ideias e contrapondo argumentos. Prevê-se que a exploração desta tarefa decorra durante uma aula, em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. Na apresentação da tarefa, o professor pode lançar o desafio à turma de escolher um local na proximidade da zona da escola onde pretendam ir em visita de estudo, ou usar um pretexto de uma visita já agendada (por exemplo, à biblioteca municipal), importando que a mesma seja significativa por decorrer de uma necessidade/interesse da turma. Em seguida, pode ser projetada a planta da localidade e os alunos identificam o ponto de partida (escola) e o ponto de chegada. Tempo previsto: 10 minutos.

Trabalho autónomo. Em pares, os alunos deverão explorar a ferramenta de navegação e introduzir os pontos de partida e de chegada, de modo que sejam apresentados itinerários possíveis. Em seguida, deverão analisar os itinerários e decidir qual é o mais curto, apresentando argumentos válidos. Após essa escolha deverão descrever oralmente o itinerário usando vocabulário específico da orientação espacial. O professor deverá acompanhar o trabalho dos pares, encorajando com questões, sem fazer sugestões que poderão conduzir às respostas. Neste acompanhamento deve identificar e selecionar itinerários diferentes para a discussão coletiva. Tempo previsto: 20 minutos.

Discussão com toda a turma. Cada par deverá explicar a forma como pensou e responder às questões dos colegas e professor, justificando as suas estratégias. Os trabalhos serão projetados para que todos possam observar e verificar os itinerários apresentados. No final da discussão coletiva devem ser identificados qual/quais o/os itinerários mais eficazes para a visita de estudo a realizar. Tempo previsto: 60 minutos.

Para a exploração da tarefa **Itinerários 2** será necessária outra aula de 60 minutos. Essa aula será, igualmente desenvolvida em três momentos diferentes:

Apresentação da tarefa. O professor poderá apresentar a tarefa como continuidade das questões anteriores, desafiando os alunos a construírem um itinerário, a pares, que tenha as instruções indicadas: virar um quarto de volta à direita/à esquerda; dar meia-volta à direita/à esquerda e dar uma volta completa à direita/à esquerda. Deverá ainda indicar que, após esse momento, vão trabalhar com outro par de alunos a quem vão ditar a sua programação para que esses colegas programem o robô Bee. Tempo previsto: 10 minutos.

Trabalho autónomo. Num primeiro momento, cada par constrói o itinerário. Num segundo momento, juntam-se dois pares e um par dita a programação ao outro par para que este programe o robô Bee. Depois, os pares trocam de papéis. Tempo previsto: 30 minutos.

Discussão coletiva. No coletivo da turma, os alunos apresentam os itinerários criados e as dificuldades que sentiram na tarefa. Tempo previsto: 20 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

Embora a ferramenta *Google Earth Pro* seja muito intuitiva, poderá ser necessário algum cuidado anterior à realização da tarefa para instalar nos computadores dos alunos e alguma explicação inicial de como funciona a ferramenta. Para além disso, as possíveis dificuldades desta tarefa poderão estar relacionadas com a identificação e uso correto dos termos relativos à orientação espacial, nomeadamente questões de lateralidade (virar à direita ou à esquerda) e de reconhecer como posicionar-se para se orientar no espaço. Na tarefa Itinerários 2 são expetáveis algumas dificuldades no ditado de percursos para programar com o Robô Bee. O professor deverá apoiar e incentivar os alunos a serem persistentes e ajudar a clarificar situações relativas à orientação espacial, sugerindo, por exemplo, que tomem fisicamente as diferentes posições.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa Itinerários 1

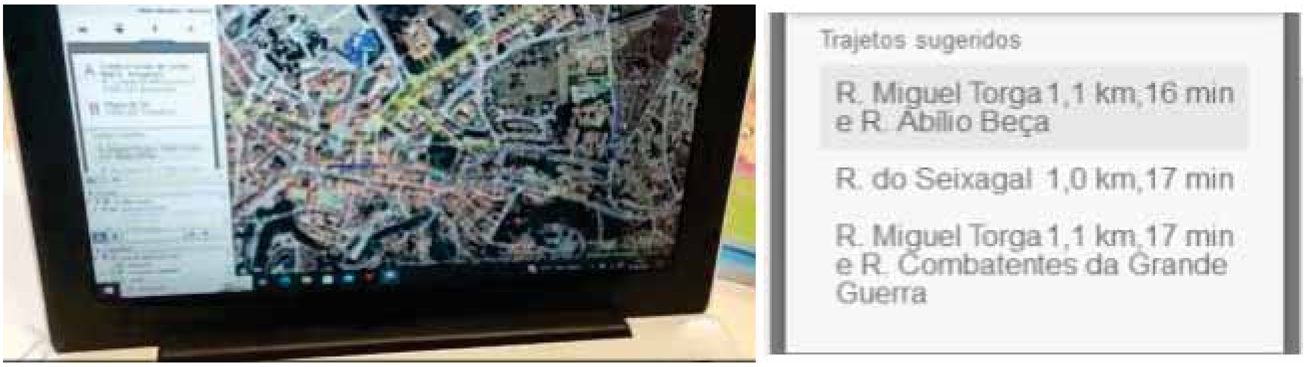
A professora iniciou a primeira aula desafiando os alunos para a realização de uma visita de estudo na proximidade da escola. Depois de acordarem o local a visitar, projetou o *Google Earth Pro* no quadro interativo e os alunos iniciaram o aplicativo nos seus computadores e começaram a explorá-lo.

> *Prof. – Primeiro, vamos inserir o nosso ponto de partida, a escola, na barra de pesquisa. Alguém se lembra como se faz?*
>
> *Prof. – Qual é o ponto de chegada da nossa visita? Onde queremos ir?*
>
> *A – Praça da Sé.*
>
> *Prof. – E agora, como fazemos para ver o trajeto?*
>
> *A – Clicar em "Obter direções".*
>
> *Prof. – Muito bem, vamos lá?*
>
> *Prof. – O que vos aparece do vosso lado esquerdo, por baixo do ponto de partida e do ponto de chegada?*
>
> *A – "Trajetos sugeridos".*
>
> *Prof. – Quantos trajetos aparecem?*
>
> *A1 – 3 trajetos.*

A2 – Não, professora, se puxares a seta mais para baixo aparecem mais.

A3 – Não, não. Isso são as direções que deves "tomar".

Figura 1. Exploração dos percursos usando o Google Earth



Trabalho autónomo dos alunos

A pares, os alunos exploraram os percursos sugeridos no *Google Earth Pro* e procuraram identificar qual o itinerário mais curto e porquê.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

No momento de discussão coletiva, a professora conduziu a discussão incentivando os alunos a apresentarem as suas ideias relativamente aos itinerários explorados. Assim, os alunos identificaram as diferenças nos itinerários, as distâncias e tempos indicados e procuraram perceber qual seria o itinerário mais curto.

Prof. – Isso mesmo, Manuel. Vamos agora analisar esses trajetos. Olhem para os detalhes de cada um. O que observam sobre as distâncias e os tempos estimados?

A1 – O primeiro trajeto tem 1,1 km e demora 16 minutos.

A2 – O segundo é um pouco mais curto, 1,0 km, mas demora 17 minutos.

A3 – E o terceiro trajeto é igual ao primeiro em distância, 1,1 km, mas demora 17 minutos.

Prof. – Então, qual é o percurso mais curto?

A1 – O da rua do Seixagal.

Prof. – E qual demora menos tempo?

A4 – Pela Rua Abílio Beça.

Prof. – Interessante, não é? Então o que concluem?

A5 – Temos trajetos com distâncias diferentes e temos tempos diferentes,

Prof. – Porque será que percursos mais curtos podem demorar mais tempo?

A3 – Talvez porque têm mais curvas ou subidas.

A1 – Ou talvez porque tem mais passadeiras.

A4 – Mas nas passadeiras tu não precisas parar.

Prof. – Então, antes de atravessar a passadeira devemos atravessar logo, ou devemos parar e ver se vem algum carro?

A2 – Claro! E quando paramos é tempo que se demora.

Prof. – Dos três percursos, qual é o mais eficaz?

A2 – Pela Rua Abílio Beça.

A1 – Eu acho que é por onde nós costumamos ir.

Prof. – Porquê?

A1 – Porque é por onde vamos sempre.

Prof. – Então que conclusão pode tirar?

Os alunos não respondem e ficam a pensar.

Prof. – Vocês perceberam que a escolha do caminho mais eficaz depende das nossas necessidades: chegar mais rápido ou andar menos?

A3 – Se não quisermos andar muito, pela rua do Seixagal é melhor, mas demoramos mais.

Prof. – Exatamente! A escolha do caminho mais eficaz depende das necessidades de cada um de nós.

Figura 2. Exploração dos itinerários sugeridos no Google Earth Pro

Em seguida, nas duas turmas, as professoras sugeriram que os alunos desenhassem o itinerário que consideravam mais curto, do ponto de partida ao ponto de chegada, iniciando-se um novo momento de trabalho autónomo.

Figura 3. Exemplo do desenho de um dos pares

Terminada a tarefa dos desenhos dos itinerários, em discussão coletiva, os pares apresentaram os seus itinerários e descreveram-nos.

Prof. – Vamos analisar o percurso que vocês desenharam. Começaram por onde?

A1 – Começámos na escola.

Prof. – E a seguir?

A1 – Nós vamos em frente e fazemos um quarto de volta à esquerda.

Prof. – E onde se pode ver isso no vosso itinerário? Vão apontando com o dedo para que os vossos colegas consigam acompanhar.

A2 – Depois seguimos em frente e damos um quarto de volta à direita – apontam com o dedo, no desenho, à medida que descrevem o itinerário.

Prof. – Ok. Então, e depois?

A2 – Depois nós seguimos em frente e damos um quarto de volta à esquerda e seguimos um bocadinho em frente e damos outro quarto de volta à direita

Prof. – Certo. O que fizeram em seguida?

A1 – Depois andamos em frente, demos outro quarto de volta à direita e andámos para a frente .

Prof. – Perfeito. E depois?

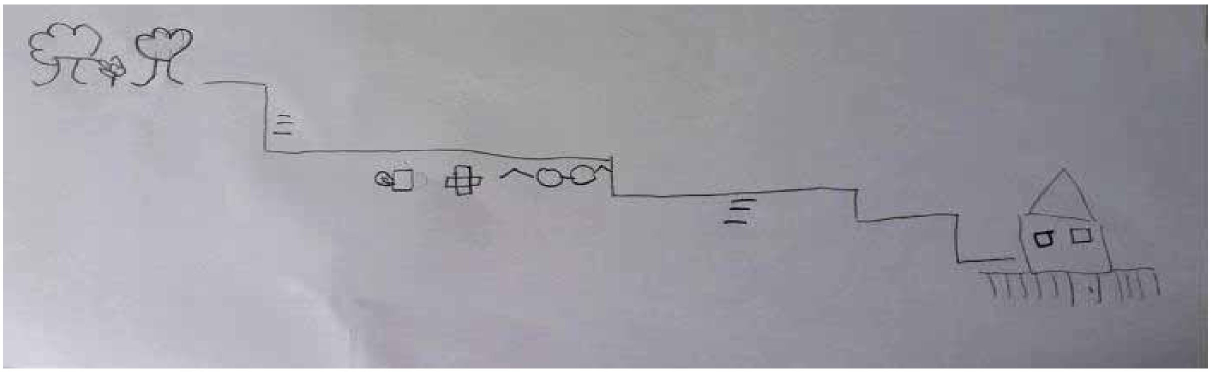
A2 – Continuamos em frente e fizemos um quarto de volta à direita. Fomos em frente e chegámos ao parque.

Prof. – Agora, gostaria que cada um de vocês explorasse o street view para confirmar se os vossos percursos estão bem desenhados.

Figura 4. Verificação dos itinerários usando o street view

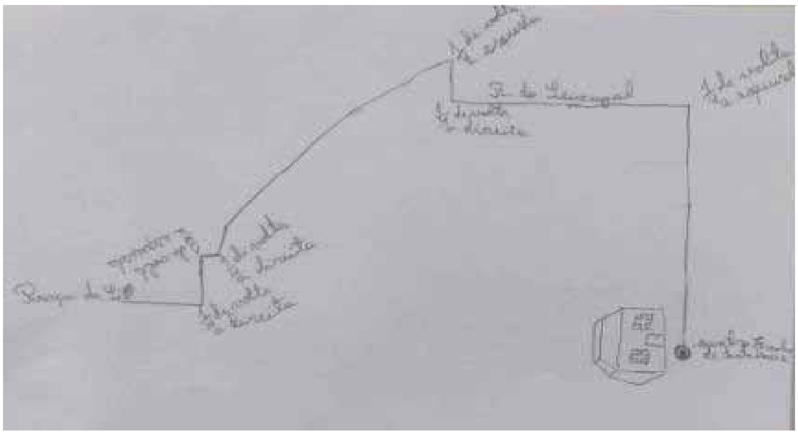
Após a apresentação pelos pares dos seus desenhos dos itinerários, as professoras questionaram os alunos sobre qual seria o itinerário mais curto. Na turma de Azeitão concluíram que o percurso mais curto foi o do par que desenhou o percurso pela rua Dr. Francisco Gonçalves de Oliveira, porque tinha menos curvas.

Figura 5. Registo de um dos grupos de Azeitão



Na escola de Bragança, os alunos desenharam logo o caminho mais curto, pela rua do Seixagal.

Figura 6. Registo de um dos grupos de Bragança



Estas decisões prenderam-se com o facto de considerarem que o itinerário mais curto seria aquele que tem menor comprimento, como mostra o excerto seguinte:

Prof. – Como podemos verificar qual dos percursos desenhados é o mais curto?

A – Porque é o percurso com menor comprimento.

No dia em que realizaram a visita de estudo, por sugestão de um dos alunos, os pares levaram o desenho dos itinerários para testarem se estavam corretos:

A – Professora, também podemos confirmar o nosso itinerário no nosso caminho para o parque?

Prof. – Claro! Excelente ideia. Quando formos fazer a visita levam os vossos itinerários que desenharam para verificarem.

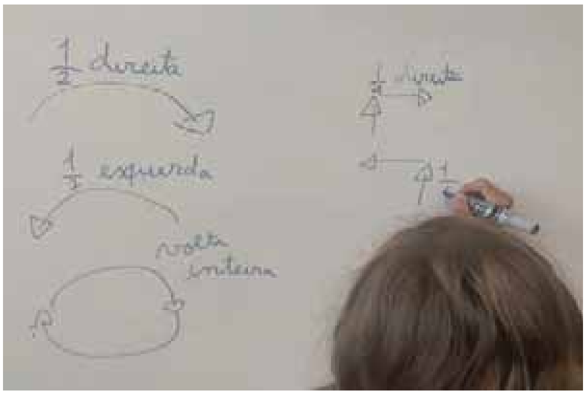
Figura 7. Teste do itinerário ao realizarem o caminho para o parque

Apresentação da tarefa Itinerários 2

Na aula seguinte, a professora propôs aos alunos a realização de um jogo a pares: cada par tinha de desenhar e descrever um itinerário onde constassem as seguintes indicações: virar um quarto de volta à direita/à esquerda; dar meia-volta à direita/ à esquerda; e, dar uma volta completa à direita/à esquerda.

No coletivo da turma, as representações para a codificação dos percursos foram discutidas e registadas no quadro branco da sala de aula, sugerindo-se o uso de pseudocódigos com setas indicativas de direções.

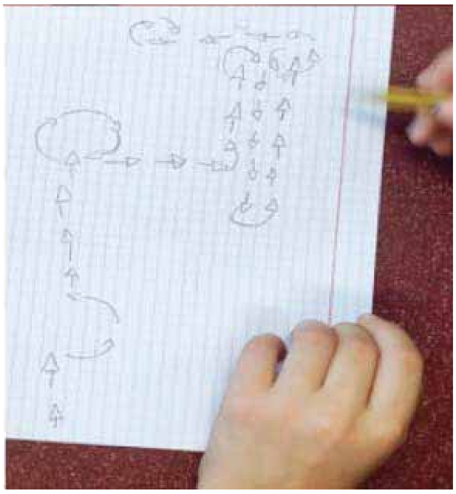
Figura 8. Registo das representações no quadro



Trabalho autónomo dos alunos

Usando esse pseudocódigo, cada par desenhou o seu itinerário, como se mostra no exemplo a seguir.

Figura 9. Programação do itinerário usando pseudocódigo



Seguidamente, os pares juntaram-se dois a dois e um dos pares ditou o seu itinerário ao outro par e este programou o robô Bee. A professora acompanhou o ditado da programação para apoiar, se necessário, como se pode observar no exemplo seguinte:

Prof. – Podem começar a ditar!

A1 – Dois passos para a frente e meia-volta à esquerda.

Prof. – Ditem uma instrução de cada vez!

A2 – Quatro passos para a frente.

A1 – Uma volta completa à direita.

Prof. – Devagar, têm de dar tempo para os colegas programarem.

A2 – Três passos para a frente.

A1 – Meia-volta à esquerda.

A2 – Dois passos para a frente.

A1 – Um quarto de volta à direita.

A2 – Cinco passos para a frente.

A1 – Um quarto de volta à esquerda.

A2 – Quatro passos para a frente.

A1 – Uma volta completa à esquerda.

A2 – Quatro passos para a frente.

Prof. – Onde é que vocês vão?

A2 – Aqui – apontando com o dedo.

A1 – Meia-volta à direita. Já está, chegámos ao final.

Durante a execução do par que recebe as ordens da programação, a professora foi questionando sobre o local do percurso onde se encontrava o Robô Bee.

Figura 10. Programação do itinerário no robô Bee

A – Dois passos em frente.

Prof. – E agora?

A – Mais quatro passos para a frente.

Prof. – Onde é que está o Bee?

A – Aqui! – aponta para a seta que representa a localização do Bee.

Prof. – E agora? Por onde segue o Bee?

A – Dá uma volta completa.

Prof. – À direita ou à esquerda?

A – À direita.

A – Já sei onde ele está! – diz o seu colega – É na volta completa e acaba.

A – Conseguimos! – referem os dois alunos.

Figura 11. Execução da programação

Após o término do jogo, ainda houve tempo para um desafio final coletivo proposto pelos alunos. Um dos pares criou um percurso para ditar a todos os colegas que o executaram em simultâneo. Ao sinal da professora, todos os "robôs", devidamente programados, iniciaram o percurso. Nesta situação foi possível verificar quais os robôs que não estavam a cumprir o itinerário, depurando essas programações e discutindo-as coletivamente.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração das tarefas *Itinerários 1 e Itinerários 2*, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Nestas tarefas os alunos trabalharam conceitos relativos à orientação espacial, lendo, interpretando, descrevendo e construindo itinerários e analisando itinerários construídos por si ou por outros para avaliar a sua eficácia e definir o "itinerário mais curto". A tarefa Itinerários 1 tem como contexto uma situação real de construção de um itinerário para uma visita de estudo nas proximidades da escola, respondendo a uma necessidade real e usando ferramentas de navegação reais, atuais e que se reconhecem como úteis na vida quotidiana, como o *Google Earth Pro*. Na tarefa Itinerários 2, a utilização de um objeto robótico permitiu ainda ampliar as oportunidades de aprendizagem, promovendo o desenvolvimento do pensamento computacional e as práticas associadas.

Capacidades matemáticas transversais

Nas diferentes etapas das duas tarefas criaram-se oportunidades para que os alunos lessem e interpretassem ideias matemáticas expressas por representações diversas, tanto ao longo dos processos de resolução como nos resultados que construíram para responder a cada questão da tarefa. Os alunos mobilizaram a capacidade de representação nas suas diferentes formas: física – quando usaram o próprio corpo ou o robô na realização dos itinerários; contextual – quando usaram situações reais de programação de uma visita de estudo real e exploraram uma ferramenta digital atual que permite traçar itinerários verdadeiros; visual – quando recorreram a esquemas, desenhos para definirem os itinerários ou leram e interpretaram o itinerário apresentado no *Google Earth Pro*; verbal – quando descreveram os itinerários usando vocabulário adequado; e simbólica – quando recorreram a códigos ou pseudocódigos para construírem o algoritmo para programar o robô Bee. Relativamente ao desenvolvimento da capacidade de pensamento computacional, os alunos tiveram oportunidades de trabalhar as diferentes práticas, sendo mais evidente as práticas de algoritmia e depuração na construção do algoritmo e sua correção ou otimização. A comunicação na sala de aula permitiu a partilha de ideias matemáticas, a disposição para compreender as ideias dos outros através do questionamento e o confronto com a necessidade de clarificar as suas próprias ideias para tornar a comunicação mais eficaz. O professor teve uma atitude de regulação, mas também de colocar questões desafiadoras que permitissem aos alunos progredir nas suas aprendizagens de uma forma ativa enquanto elementos da comunidade de aprendizagem em que se inserem.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Estas tarefas permitiram o desenvolvimento de capacidades e atitudes transversais de nível pessoal e coletivo. Ao permitirem o trabalho a pares e em grande grupo, permitiram desenvolver competências relacionadas com a colaboração, conduzindo a atitudes de respeito de ouvir as ideias e opiniões dos outros, mas também de afirmação das suas próprias ideias, impelindo a ser usado um discurso claro e convincente quando, por exemplo, procuravam expressar opiniões sobre qual seria o itinerário mais curto. A perseverança é uma atitude importante em tarefas mais desafiantes, conduzindo os alunos a desenvolverem hábitos de resiliência e de não desistência perante as dificuldades, como, por exemplo, quando confrontados com a necessidade de depurar programações incorretas dos itinerários. Também a capacidade criativa pode ser identificada nestas tarefas, por exemplo na criação dos itinerários, dos seus desenhos e na criação de pseudocódigos para a programação.

Tarefa — Eleição do Delegado e Subdelegado de Turma

Enunciado da Tarefa

Eleição do Delegado e Subdelegado de Turma

Na Assembleia de Turma, que decorreu num tempo próximo das eleições autárquicas e em que alguns alunos acompanharam os pais quando foram votar, debateu-se sobre as eleições e a necessidade da turma ter um delegado e um subdelegado e como poderiam ser escolhidos. Todos os alunos manifestaram interesse em serem eleitos para delegado e subdelegado. Colocaram-se, então, as seguintes questões aos alunos:

- Como vamos organizar a eleição?
- Como vamos descobrir quem são os alunos eleitos?

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 1.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Dados	Questões estatísticas Recolha de dados Métodos de recolha de dados Registo de dados Análise de dados Comunicação e divulgação de um estudo
Capacidades matemáticas transversais	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Conexões matemáticas	Conexões externas
	Representações	Representações múltiplas Modelos matemáticos
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Persistência

Objetivos de Aprendizagem

A exploração da tarefa procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Participar na formulação de questões estatísticas sobre uma característica qualitativa.
- Participar na definição de quais os dados a recolher para responder a uma dada questão estatística e decidir onde observar/inquirir.
- Participar criticamente na definição de um método de recolha de dados adequado a um dado estudo, identificando como observar ou inquirir e como responder.
- Recolher dados através de observação ou inquirição.
- Usar listas para registar os dados a recolher.
- Usar tabelas de contagem para registar e organizar os dados à medida que são recolhidos (ou após a elaboração da lista), e indicar o respetivo título.
- Participar na decisão sobre qual(is) as representações gráficas a adotar num dado estudo e justificar a(s) escolha(s).
- Ler, interpretar e discutir a distribuição dos dados, identificando o(s) dado(s) que mais e menos se repete(m) e dados em igual número, ouvindo os outros e discutindo de forma fundamentada.
- Decidir a quem divulgar um estudo realizado.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões).
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar de forma cooperada uns com os outros.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Folhas para a construção do cartão de identificação, Folhas A4 para o Caderno Eleitoral e os Boletins de Voto, Caixa (urna, para colocar os boletins), Quadro, Caderno diário, Cartolinas.

Resoluções esperadas

Questão 1.

Os alunos decidem a forma de eleição do delegado e subdelegado:

a) Através de votação secreta e contagem posterior dos votos e seu registo no quadro.

b) Através de uma votação pública com registo da votação no quadro

Podem ainda decidir fazer a eleição através de uma votação secreta, passando pelas diferentes fases de um estudo estatístico e simulando os passos principais de uma eleição:

- Criar um cartão de identificação, os cadernos eleitorais e os boletins de voto.
- Calendarizar a eleição.
- Simular o local para a votação, criando na sala de aula uma mesa de voto e o espaço para a votação secretamente.

Questão 2.

Os alunos decidem:

a) Eleger para delegado o mais votado e para subdelegado o segundo mais votado.

Podem ainda continuar as fases de um estudo estatístico: recolha e organização dos dados; representação dos dados; análise dos dados; comunicação dos resultados e conclusões.

Exploração da tarefa

A eleição do delegado e do subdelegado da turma é uma realidade em muitas salas de aula, desde o 1.º ano, e pode ser usada como pretexto para trabalhar o tema Dados, contribuindo para que os alunos atribuam sentido e percebam a importância da Matemática para a vida real e para a sociedade.

Prevê-se que a exploração da tarefa decorra em três momentos distintos e articulados com as etapas de um estudo estatístico:

Apresentação da tarefa. A partir da necessidade de eleger um delegado e um subdelegado da turma, na apresentação da tarefa pode fazer-se a conexão com a realidade através de questionamento sobre o processo das eleições autárquicas/legislativas/presidenciais ou outras. A primeira fase do estudo deverá ser a da formulação da questão estatística e o professor poderá conduzir a turma a essa formulação através do questionamento: "O que queremos saber?; e Como podemos perguntar isso?". As propostas apresentadas pelos alunos devem ser discutidas de modo que estes percebam o tipo de respostas possíveis para as questões que colocam e se essas respostas conduzem ao objetivo do estudo: eleger um delegado e um subdelegado para a turma. Poderá também ser discutido com a turma o método de recolha dos dados. Será igualmente um bom pretexto para discutir a diferença entre uma votação "secreta" ou pública e as suas implicações. Facilmente os alunos poderão indicar métodos como a votação de dedo no ar ou a votação através da escrita dos nomes dos elegíveis em pequenos pedaços de papel que, em seguida, dobram e recolhem. O professor encaminhará os alunos nas diferentes etapas de um estudo estatístico. Tempo previsto: 40 minutos.

Trabalho autónomo. O professor acompanhará os alunos, organizados em grupos, nas diferentes etapas do estudo estatístico e na produção dos materiais necessários para a eleição, por exemplo, na produção individual de um cartão de identificação caso a decisão passe por uma votação secreta. Uma vez que os alunos são do 1.º ano de escolaridade e estão numa fase inicial do processo de aprendizagem da leitura e da escrita, é necessário o apoio do professor a cada aluno no preenchimento do respetivo cartão. Tempo previsto: 40 minutos.

Discussão com toda a turma. As propostas apresentadas pelos alunos, na resposta às duas questões, devem ser discutidas de modo que se chegue a um consenso.

Após realizado o processo de votação, o professor deverá discutir com os alunos o que devem fazer para saber o resultado dessa votação, ou seja, o registo e organização dos dados. Facilmente os alunos referirão que devem contar os votos. Deve ser discutido como podem registar essa contagem, podendo ser sugerida a criação de uma lista com o nome dos elegíveis e a marcação de cada voto usando traços (*tally charts*). Após esse processo, os alunos deverão fazer a contagem dos votos correspondentes a cada aluno elegível. Poderão ainda construir uma tabela de contagem onde sintetizam os dados recolhidos e dar um título à tabela. Na fase seguinte, representação dos dados, poderão ainda decidir se querem representar os dados recolhidos usando uma representação gráfica, tal como um pictograma (correspondência um para um) ou um gráfico de pontos. O professor deverá conduzir os alunos a darem um título ao gráfico e a elaborarem a respetiva legenda. Na fase da análise dos dados, após a fase de representação dos dados, os alunos deverão interpretar esses resultados, identificando quais os alunos que obtiveram mais votos e quem poderá ser delegado e subdelegado da turma. Por último, a comunicação dos dados e suas conclusões, considerando a importância da eleição que realizaram, a comunicação dos resultados será feita aos meios próprios da escola/agrupamento. Tempo previsto: 3 aulas de 60 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As dificuldades esperadas dos alunos estão relacionadas com a decisão de como organizar a contagem dos votos e o seu registo para responder às questões. O professor orientará os alunos para o registo dos dados no quadro e a criação de uma tabela de contagem com um título e de um gráfico de pontos. Também, pode prever-se uma situação de empate dos votos e a tomada de decisão de como resolver a situação. O professor deverá devolver o problema aos alunos para ser decidido coletivamente.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A aula iniciou com a professora recordando o assunto colocado em Assembleia de Turma sobre a necessidade de eleger um Delegado e um Subdelegado de turma, para o presente ano letivo.

A professora perguntou quem gostaria de exercer estes cargos, ao que todos os alunos responderam afirmativamente, levantando o braço. Após esta resposta coletiva, promoveu a discussão sobre a melhor forma de se escolher os responsáveis pelos dois cargos e colocou as questões:

> *Prof. – Como vamos organizar a eleição? Como vamos descobrir quem são os alunos eleitos?*

Devido à proximidade temporal com as eleições autárquicas e, por alguns alunos terem acompanhado familiares no seu ato eleitoral, a sugestão incidiu em se escolher fazer por votação secreta e num momento único:

> Prof. – Mas como vamos fazer essa votação?
>
> A – Levantamos o dedo?
>
> A – Não. Ninguém pode saber.
>
> Prof. – Porquê?
>
> A – Porque o voto é escondido, só nós é que sabemos em quem votamos.
>
> Prof. – E porquê?
>
> A – Porque assim só descobrimos quando acabar a votação. E depois descobrimos quem ganhou.

Trabalho autónomo dos alunos

Depois de decidido que a votação seria num momento único e por votação secreta, próximo do que acontece numa eleição autárquica, a professora acompanhou os alunos na produção inicial dos materiais necessários para a eleição (a construção do cartão de identidade, dos boletins de voto, do caderno eleitoral e de uma urna), tendo presente as diferentes etapas do estudo estatístico.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

Discutiu-se sobre o que deveria conter o cartão de identificação de cada aluno: o nome, desenho de si próprio (correspondente à fotografia no cartão de cidadão), data de nascimento, filiação e data de validade. A professora orientou os alunos para a elaboração individual do cartão, acompanhando-os no preenchimento dos espaços (figura 1).

Figura 1. Cartões de identidade

Ao circular pelos grupos de trabalho constituídos, a professora foi dialogando com os alunos e percebeu que, ao construírem o cartão, reconheceram como a Matemática está presente no mundo real, contribuindo especificamente para o desenvolvimento do sentido de número.

A – Professora, o cartão também tem números.

Prof. – Sim, e para que servem esses números?

A – São para sabermos quando nascemos… e para saber a nossa idade.

Prof. – E esses números fazem parte da nossa identidade?

A – Sim, porque temos um nome e uma idade.

Prof. – E tem mais números para além da data de nascimento?

A – Tem os números da validade…data da validade.

Prof. – Boa! E para que serve essa data no cartão de identidade?

A – Para sabermos quando acaba e quando temos de fazer outro.

Prof. – Mas, porque é que achas que temos de fazer outro?

A – Porque vamos ficar grandes e a nossa cara muda.

A – Ficamos diferentes, mais velhos.

Prof. – Vou mostrar-vos o meu cartão de identidade que se chama "Cartão de Cidadão".

Seguidamente, a discussão centrou-se na realização dos boletins de voto. Dado que todos os alunos tinham demonstrado interesse em serem eleitos ficou decidido que todos iriam constar no boletim:

Prof. – Como vamos fazer os boletins de voto?

A – Têm de ter todos os nomes e as fotografias numa folha.

A – E o nosso número para ficar mais organizado.

A – E quadradinhos para fazermos a cruz. Podemos fazer uma tabela, no computador?

[Os alunos já tinham realizado tabelas para organizar dados, noutras situações.]

Prof. – Podemos. Quantas colunas acham que deve ter?

A – Quatro, uma para o número de ordem da turma, uma para a foto, outra para o nome e outra para o quadradinho.

Prof. – E quantas linhas?

A – Vinte e quatro, tem de ser assim porque somos vinte e quatro alunos.

Prof. – Acham que só devemos fazer um boletim?

A – Não pode ser, temos de fazer um para votarmos o delegado e outro para votarmos o subdelegado.

A – Então são dois. E têm de ter os títulos.

Assim, decidiu-se que os boletins seriam constituídos por uma tabela, na qual cada linha correspondia a um aluno. A ordem dos nomes seria a já estabelecida e que se relaciona com a ordem alfabética dos nomes dos alunos. Então, em cada linha da tabela, indicar-se-ia, para cada aluno, o número, o número, o nome, desenho da fotografia, e um quadrado para assinalar, com uma cruz, a sua preferência. Tomadas as decisões, um grupo de alunos com a ajuda da professora fez as tabelas no computador, utilizando a ferramenta Word. Outro grupo ficou encarregado de confirmar o conteúdo das tabelas para que não faltasse nenhum aluno. Foram assim construídos os boletins de voto (figura 2).

Figura 2. Boletim de voto

A respeito da realização da cruz para efetuar a votação secreta em determinado aluno da turma, a professora reforçou que a cruz tinha de ser bem desenhada dentro do quadrado, o que originou o seguinte diálogo sobre o que é um voto nulo:

A – E se fizermos a cruz fora do quadrado o que acontece?

Prof. – O que acham que acontece?

A – Os votos ficam estragados…

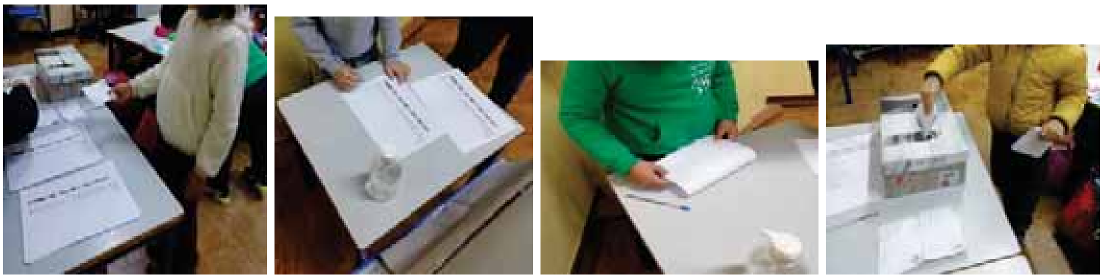
Prof. – E podem contar-se?

A – Não, ficam de fora, estão estragados.

A professora explicou que esses votos não eram contabilizados e se chamavam votos nulos.

A votação realizou-se no dia previamente agendado. Na figura 3 indicam-se alguns registos do momento da eleição.

Figura 3. Registos do momento da eleição



Findo este momento, dois alunos com a ajuda da professora separaram os boletins de voto para o Delegado dos boletins de voto para o Subdelegado. A professora questionou os alunos sobre a forma de contagem e de registo. Os alunos foram dando várias sugestões que se encaminharam para uma organização em tabela. Um aluno, no quadro, explicou a sua ideia desenhando uma linha vertical central e nessa linha, traçou duas linhas horizontais que corresponderiam a cada aluno. Explorando esta ideia a professora questionou:

Prof. – Quantas colunas?

Prof. – Quantas linhas?

Prof. – Onde escrevemos o nome dos alunos?

Prof. – Onde escrevemos os votos que cada aluno obteve?

A professora orientou para o registo dos dados se fazerem em duas tabelas, uma relativa aos votos para eleição do Delegado e outra para a eleição do Subdelegado (figura 4).

Figura 4. Registo no quadro dos resultados

Quatro alunos faziam alternadamente a leitura dos boletins de voto e dois alunos registavam no quadro a respetiva votação. Para a contagem dos votos a professora orientou os alunos para o esquema de contagem gráfica para rentabilizar o tempo devido à facilidade de contagem. Após a verificação da correspondência correta entre os votos obtidos e o número de votantes, a professora encaminhou os alunos para a leitura e interpretação da tabela, através de questões.

Prof. – Olhando para a tabela, que perguntas podemos fazer?

A – Quem teve zero votos?

Prof. – Houve votos nulos?

A – Não.

Prof. – Quem obteve mais votos para ser eleito delegado?

A – Foram a Laura e o João. Eles tiveram os mesmos votos.

Prof. – Quem obteve mais votos para ser eleito subdelegado?

A – A Íris e a Luísa.

Facilmente concluíram que tanto na eleição do Delegado como na do Subdelegado houve um empate entre dois alunos. Decidiu-se, em coletivo, a necessidade de fazer nova votação.

Prof. – Então, como vamos fazer?

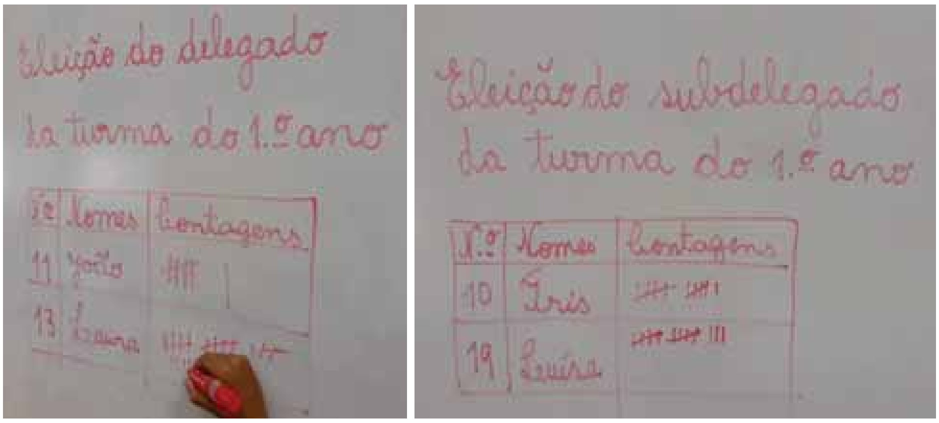
A – Podemos fazer com os nomes escritos em papelinhos, é mais rápido.

Prof. – Todos os nomes? O que acham?

Em consenso os alunos decidiram manter o voto secreto, mas fazendo a votação colocando o nome em pedaços de papel recortados para o efeito, sendo candidatos apenas os alunos que obtiveram mais votos e que tinham empatado.

A professora questionou como seria registada a contagem desses votos e os alunos sugeriram que se fizessem também duas tabelas, uma para cada eleição e indicando com facilidade como as construir. Após a segunda votação, efetuou-se um novo processo de contagem e de registo dos resultados (figura 5).

Figura 5. Registo da votação



Acerca das tabelas, a professora questionou:

Prof. – Quem teve mais votos para delegado?

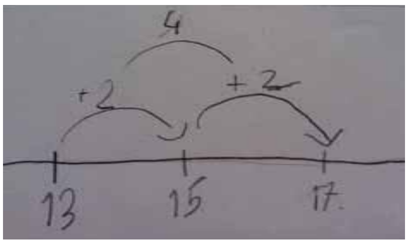
A1 – A Laura, teve 17 votos. É a delegada!

A2 – E ficou a Luísa como subdelegada, obteve 13 votos.

Prof. – Qual é a diferença de votos entre as duas?

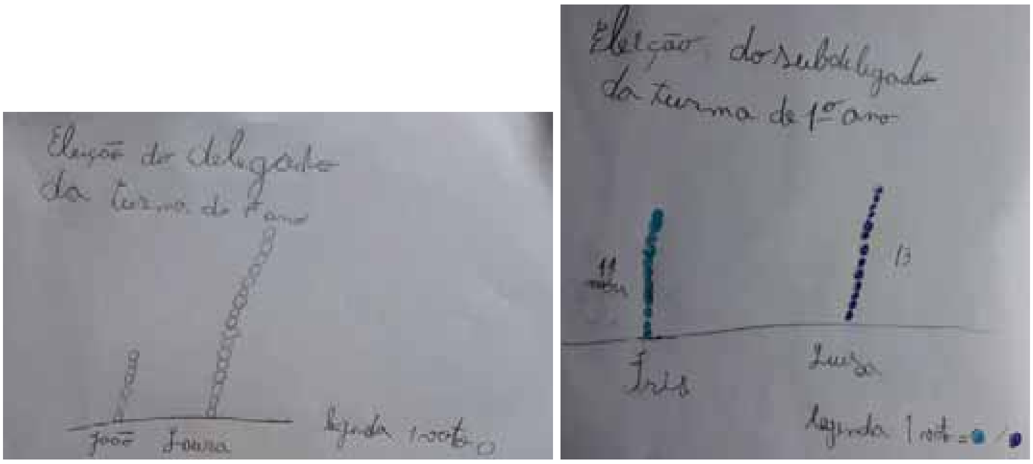
Os alunos realizaram os cálculos no caderno recorrendo a diferentes representações (por exemplo, a expressa na figura 6) e apresentaram à turma o resultado e a forma como pensaram.

Figura 6. Exemplo da resolução de um aluno que usou uma reta numérica



No momento seguinte, a professora, ainda com as tabelas expostas no quadro, questionou os alunos se queriam fazer a organização dos dados de outra maneira. Desta forma, conduziu os alunos à construção do gráfico de pontos. Na discussão sobre como se fazia o gráfico, a professora orientou para as etapas de construção de um gráfico de pontos: desenhar um eixo horizontal ou vertical, neste caso horizontal, assinalar as categorias, os nomes dos alunos, e colocar um ponto por cada voto, colocar um título e fazer uma legenda. A professora registou no quadro estas indicações para os alunos copiarem. Falou-se ainda no facto dos gráficos permitirem uma visualização mais rápida. Seguidamente os alunos fizeram o gráfico correspondente à segunda votação para delegado e subdelegado com o acompanhamento da professora (figura 7).

Figura 7. Representações dos gráficos de pontos



Através de questões colocadas aos alunos, a professora promoveu a leitura e interpretação do gráfico para os alunos retirarem algumas conclusões e responderem ao objetivo do estudo realizado: *Quem obteve mais votos?; Quem obteve menos votos?; Quantos votos faltam ao aluno que ficou em 2.º lugar para ter o mesmo número de votos do aluno do 1.º lugar, em cada uma das votações?* e, então, *Quem elegeram para Delegado e quem elegeram para Subdelegado?*

No momento coletivo de reflexão sobre a tarefa, os alunos sugeriram que no próximo ano letivo as votações se realizassem em momentos separados, facilitando tanto a contagem como a organização e registo dos dados. A professora questionou os alunos sobre a quem se devia comunicar os resultados da eleição do delegado e subdelegado. Os alunos decidiram comunicar à coordenadora de estabelecimento e às outras 4 turmas da escola. De seguida, os alunos organizaram-se em 5 grupos (um para a efetuar a apresentação à coordenadora de escola e os outros para realizarem a apresentação a cada uma das turmas). Cada grupo fez um cartaz com o nome dos eleitos e o número de votos para divulgar os resultados.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição sobre a exploração da tarefa *Eleição do delegado e subdelegado da turma*, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Esta tarefa possibilitou aos alunos do 1.º ano o desenvolvimento do pensamento estatístico, num contexto real de recolha de dados e numa análise exploratória em que se organizaram os dados em tabelas e gráficos. A forma como os alunos foram decidindo sobre como recolher os dados para poder responder às questões da tarefa "Como vamos organizar a eleição?" e "Como vamos descobrir quem são os eleitos?" permitiu que os alunos associassem a análise e interpretação dos dados com o contexto do estudo. Na fase da análise dos dados é importante que o professor seja desafiador, colocando questões, mas que também promova nos alunos o envolvimento e a participação, tornando-se também eles questionadores, pensando no que perguntar e como perguntar. Nesta tarefa destaca-se o papel desempenhado pelos alunos em todos os momentos, desde a recolha de dados à análise dos resultados. Desta forma, os alunos não fizeram apenas a análise e interpretação de dados facilitados pelo professor, mas experienciaram um estudo, com tomadas de decisões, processos de recolha, de registos, de análise e de comunicação dos resultados.

Capacidades matemáticas transversais

Na tarefa foi muito importante partir de um contexto real para que os alunos tivessem oportunidade de comunicar, questionar, esclarecer as dúvidas, comunicar com o seu vocabulário e discutir entre si os seus raciocínios, argumentando e justificando. O professor deve promover estes momentos, apoiar os alunos e também conduzi-los no debate para a utilização da linguagem matemática e de diferentes representações. O contexto real foi uma motivação muito grande para os alunos que perceberam que a matemática está na sua vida levando-os a construir modelos matemáticos adequados às situações.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Esta tarefa contribuiu para que os alunos trabalhassem numa metodologia ativa, de forma cooperada, em grande grupo e pequeno grupo, discutissem com os colegas e se entreajudassem na compreensão das questões e nas resoluções, tornando a aprendizagem mais atrativa, inclusiva, participativa e motivadora para os alunos, mas também para o professor. Desta forma, os alunos constroem a sua autonomia, sendo observadores, criativos, desenvolvendo o seu pensamento analítico e crítico e a autoconfiança para comunicarem.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... . *Educação e Matemática*, *8*, 7-35.

Bonotto, C. (2001). How to Connect School Mathematics with Students' Out-of-School Knowledge, *ZDM*, *33*(3), 75–84.

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, *144-145*, 38-42.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, *21*(2), 51–80. https://doi.org/10.48489/quadrante.22880

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática no ensino básico*. ME-DGE. httProf. - //www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Casa, T. M., Firmender, J. M., Cahill, J., Cardetti, F., Choppin, J. M., Cohen, J., ... & Zawodniak, R. (2016). *Types of and purposes for elementary mathematical writing: Task force recommendations.* httProf. - //mathwriting.education.uconn.edu

Coordenação do Projeto REASON (2022). Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. In J. P. Ponte (Org.), Raciocínio matemático e formação de professores (pp. 100-108). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. httProf. - //reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Delgado, C., Mendes, F., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Números*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. httProf. - //reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Espadeiro, R. G. (2021). O pensamento computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, *110*, 19-25.

Hardin, J. S., & Horton, N. J. (2017). Ensuring that mathematics is relevant in a world of data science. *Notices of the American Mathematical Society*, *64*(9), 986-990. https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p986.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). *Revisiting programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium* (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes modos de utilização do GeoGebra na resolução de problemas de Matemática para além da sala de aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 266-288.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!": Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática*, *149-150*, 76-80.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Martins, O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, V., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. ME-DGE.

Mendes, F., Delgado, C., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Geometria.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. httProf. -//reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Menezes, L., Tomás Ferreira, R. A., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135–164). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Miranda, P. (2019). *Estratégias de resolução de problemas e formulação de problemas: Um estudo nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Minho.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

OECD (2018). *PISA 2021 Mathematics framework* (Draft) https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Oliveira, H., & Henriques, A. (2022). Aprofundar o conhecimento sobre o raciocínio matemático na formação inicial de professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 86-101). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. httProf. -//reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38*(3), 214-225.

Pinto, M. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade.* [Dissertação de Mestrado não publicada]. Universidade de Évora.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 419–430.

Ponte, J. P. (2022). Introdução. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 6-8). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. httProf. -//reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7-11.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. MEC-DGIDC.

Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: An experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments, 28*(3), 316–327. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1612448

Sáez-López, J. M., Sevillano-García, M. L., & Vazquez-Cano, E. (2019). The effect of programming on primary school students' mathematical and scientific understanding: Educational use of mBot. *Educational Technology Research and Development*, *67*(6), 1405–1425. https://doi.org/10.1007/ s11423-019-09648-5.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de matemática (versão de autor). In C. Lopes., & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11-34). Mercado Letras.

Seehorn, D., Carey, S., Fuschetto, B., Lee, I., Moix, D., O'Grady-Cunniff, D., ... & Verno, A. (2011). *CSTA K--12 Computer Science Standards: Revised 2011*. ACM.

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, *149–150*, 13–16.

Stein, M. K., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *165*, 22-28.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16. httProf. - //www.jstor.org/stable/40248592

Tomás Ferreira, R. A. (2018). Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem. *Educação e Matemática*, *149-150*, 1.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). O contributo de uma *gallery walk* para promover a comunicação matemática. *Educação e Matemática*, *149-150*, 2-8.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39-60.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*(1881), 3717–3725.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L., & Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: A systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education*, *10*(3). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w