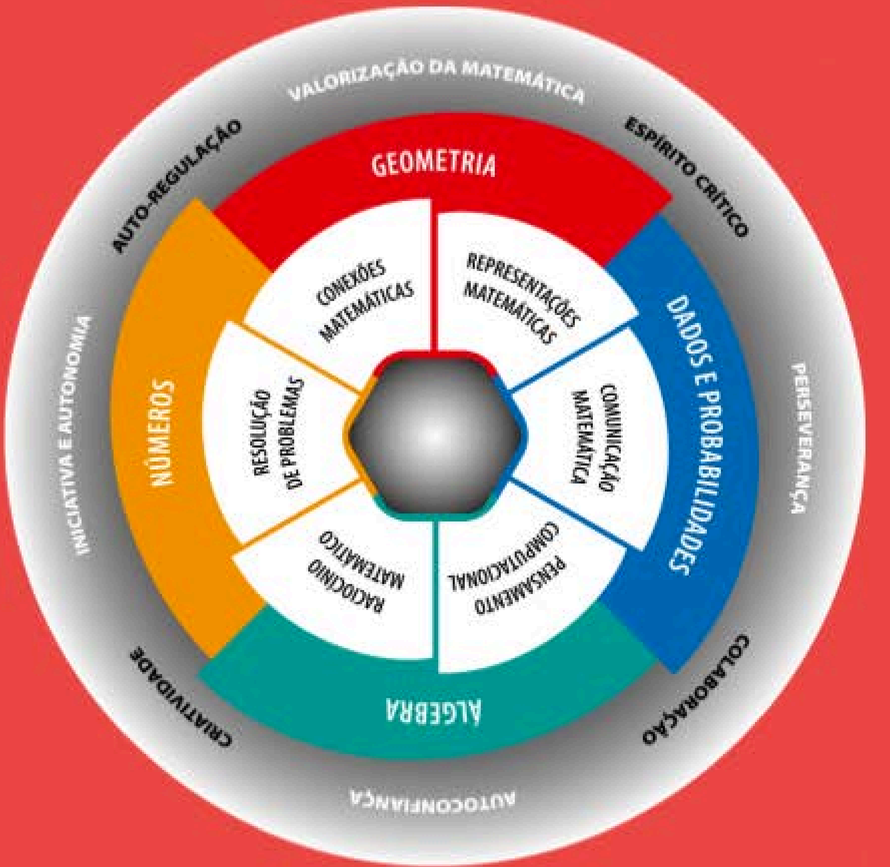
Capacidades matemáticas transversais

no 2.º Ciclo do Ensino Básico



Lina Brunheira, Elvira Santos, Irene Martins, Susana Serra, Ana Paula Canavarro,
Célia Mestre, Cristina Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Leonor Santos,
Neusa Branco, Rosa Tomás Ferreira, Rui Gonçalo Espadeiro

2025

Cofinanciado pela União Europeia

Ficha técnica

Título:
Capacidades matemáticas transversais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Autores:
Lina Brunheira, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Elvira Santos, Escola Superior de Educação da Lusofonia, Instituto Politécnico da Lusofonia
Irene Martins, EB2,3 de Álvaro Velho, Agrupamento de Escolas Álvaro Velho
Susana Serra, EB2,3 Moinhos da Arroja, Agrupamento de Escolas Moinhos da Arroja
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora
Célia Mestre, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Cristina Martins, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança
Hélia Jacinto, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
João Almiro, Escola Secundária de Tondela
Leonor Santos, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Rosa Tomás Ferreira, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo

Edição
Direção-Geral da Educação

Diretor-Geral da Direção-Geral da Educação
David Sousa

ISBN
978-972-742-594-5

Data
2025

À *Leonor,*

com quem sempre aprendemos

Índice

Introdução

Apresentação e contextualização

Apresentação

Esta publicação faz parte de um conjunto de brochuras publicadas pela Direção Geral de Educação (DGE) no quadro do desenvolvimento das medidas de apoio à operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Inicialmente concebidas pelo *Grupo de Trabalho em Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática* (GTDCPM)[1], deram origem a cinco publicações distintas que se constituem como recursos vocacionados para apoiar a generalização das novas orientações curriculares de Matemática nos diferentes ciclos do Ensino Básico. Cada brochura foi redigida por uma equipa de autores que inclui elementos do GTDCPM, tendo a sua maioria participado na escrita das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB), e os professores dos diferentes ciclos de escolaridade que, desde 2021/22, anteciparam a generalização das AEMEB em algumas escolas, em colaboração com o GTDCPM.

Importa sublinhar que estas Aprendizagens Essenciais se constituem como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, com diferenças assinaláveis relativamente a anteriores programas de Matemática para os ciclos de escolaridade correspondentes. Assim, destacamos:

1. Assunção de **três princípios essenciais** que moldam as opções curriculares tomadas: o *princípio da Matemática para todos*, o *princípio da Matemática para o século XXI*, e o *princípio da Matemática é única, mas não é a única*.
2. Privilégio do desenvolvimento da **literacia matemática,** entendendo-a como "a capacidade de raciocinar matematicamente e interpretar e usar a Matemática na resolução de problemas de contextos diversos do mundo real" (Canavarro et al., 2021, p. 2), de modo "que cada pessoa possa viver e atuar socialmente de modo informado, contributivo, autónomo e responsável" (idem, p. 2). A ideia de literacia matemática constitui a finalidade última para a qual as aprendizagens dos diversos conteúdos devem ser orientadas.
3. Consideração de **conteúdos de natureza diversa na aprendizagem em Matemática:** conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Estes conteúdos de aprendizagem são de natureza diversa, e a sua abordagem deve ser feita de forma articulada e continuada, em todos os ciclos de escolaridade.

[1] O GTDCPM é constituído por Leonor Santos (Coordenadora), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Gonçalo Espadeiro, Helena Gil Guerreiro, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Neusa Branco, Paulo Correia e Rosa Tomás Ferreira.

4. Valorização de uma **abordagem integrada e continuada de conhecimentos matemáticos** respeitantes a quatro temas clássicos — Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, e Geometria e Medida (apenas Geometria no 3.º Ciclo) —, prevendo-se que todos os temas sejam abordados ao longo de todos os anos de escolaridade de cada ciclo, através de tarefas que envolvam conceitos associados a quantidade, relações, dados e incerteza, e espaço e forma.
5. Valorização do desenvolvimento de um conjunto alargado de seis **capacidades matemáticas transversais**, incluindo capacidades há muito reconhecidas como centrais — a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática — e ampliando o leque a outras que são agora igualmente contempladas — as representações matemáticas, as conexões matemáticas, e o pensamento computacional.
6. Valorização do desenvolvimento de **capacidades e atitudes gerais transversais** que passam a estar explicitamente previstas, nomeadamente as que decorrem da seleção das capacidades e atitudes das áreas de competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO)(Martins et al., 2016) que mais diretamente se relacionam com o trabalho em Matemática. São elas as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel do conhecimento, neste caso da Matemática. Esta seleção não pressupõe que as outras competências do PASEO sejam excluídas da aula de Matemática, devendo ser consideradas sempre que surgirem como relevantes ao longo do trabalho com os alunos.
7. Assunção da importância da adoção de **métodos de ensino de natureza exploratória**, centrados na atividade dos alunos/as, apoiados por recursos poderosos que ampliem e enriqueçam a experiência matemática dos alunos, como é o caso de recursos digitais.

Temos consciência que a operacionalização das novas orientações curriculares poderá colocar desafios e levantar dificuldades aos professores, nomeadamente no que diz respeito à consideração de uma diversidade de conteúdos de aprendizagem a serem abordados de forma integrada na sala de aula, envolvendo conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Assim, neste conjunto de brochuras, optamos por colocar o foco no trabalho a desenvolver em sala de aula para levar a cabo esta orientação fundamental, dando particular relevo ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

Das cinco brochuras, uma é especialmente focada no pensamento computacional, o que se justifica pelo caráter de novidade que esta capacidade representa. As outras quatro brochuras dedicam-se ao conjunto das seis capacidades matemáticas transversais, com explorações nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º Ciclo — 1.º e 2.º anos, 1.º Ciclo — 3.º e 4.º anos, 2.º Ciclo, 3.º Ciclo).

Cada uma destas quatro brochuras segue uma estrutura comum, organizada em três partes. Após esta introdução, que apresenta as brochuras e caracteriza os contextos em que se antecipou a operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais, no ciclo de escolaridade a que a brochura diz respeito, a segunda parte discute, com apontamentos teóricos e exemplos, o significado atribuído a cada uma das capacidades matemáticas transversais, e a terceira parte apresenta exemplos de tarefas e discute a respetiva exploração com as turmas. Para cada tarefa, inclui-se o enunciado, o enquadramento curricular, uma antecipação de eventuais resoluções esperadas por parte dos alunos, diversos elementos da planificação da(s) aula(s) centradas na exploração da tarefa, descrição da concretização da tarefa na prática, com atenção às diferentes fases da aula, episódios da exploração com os alunos, e a análise das aprendizagens evidenciadas pelos alunos.

Esperamos que este documento possa ajudar os professores na operacionalização das novas orientações curriculares de Matemática para o Ensino Básico, constituindo-se como um recurso quer para o trabalho individual de preparação do professor, quer para o trabalho colaborativo que poderá desenvolver com os seus pares na escola e agrupamento. Se é verdade que os materiais com a natureza destas brochuras, que proporcionam conhecimento da prática de trabalho com alunos reais, em contextos reais, podem ser muito inspiradores de cada um dos professores, o seu efeito será muito mais potenciado se forem entendidos como recursos para apoiar o trabalho nas escolas, entre pares, contribuindo para a concretização do desenvolvimento curricular que importa fazer, tendo em vista a qualificação e adequação das práticas de ensino visando a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos em Portugal.

Contextualização

De seguida apresenta-se uma caracterização da(s) escola(s) e das turma(s) do 2.º Ciclo do Ensino Básico que anteciparam a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática, desde 2021/22, e nas quais se desenrolaram as atividades que relatamos nesta brochura.

Importa salientar que as turmas que anteciparam a generalização das AEMEB não se constituíram como turmas com características especiais. A sua seleção seguiu estritamente os critérios habituais de cada Agrupamento de escolas/Escolas não agrupadas para a sua distribuição pelos docentes. Não foram indicados previamente quaisquer critérios de constituição das turmas que de alguma forma trouxessem excecionalidade ao processo habitualmente usado. Assim, as turmas onde se concretizou a antecipação das AEMEB foram as turmas normais atribuídas aos professores que se disponibilizaram para colaborar com o GTDCPM.

Assim, no 2.º Ciclo, as professoras que iniciaram o trabalho com as AEMEB nas respectivas turmas foram Irene Martins e Susana Serra, ambas professoras profissionalizadas de 2.º ciclo, com vasta experiência de ensino.

A Escola Básica 2.º e 3.º ciclos de Álvaro Velho, onde leciona a professora Irene Martins, situa-se no concelho do Barreiro e iniciou a sua atividade em 1971. Esta escola é a sede do Agrupamento de Escolas de Álvaro Velho que, além desta, inclui mais três escolas do 1.º ciclo: Escola Básica do 1.º Ciclo /Jardim de Infância n.º 1 do Lavradio; Escola Básica do 1.º Ciclo / Jardim de Infância n.º 2 do Lavradio; Escola Básica do 1.º Ciclo / Jardim de Infância dos Fidalguinhos. A população escolar caracteriza-se por ser uma população heterogénea e multicultural. Apesar de separados fisicamente, os estabelecimentos estão muito próximos uns dos outros, permitindo que os alunos se desloquem à escola sede com alguma regularidade para a realização de atividades.

As escolas do agrupamento situam-se na freguesia do Lavradio , no concelho do Barreiro , tendo como limites, a norte, o rio Tejo até ao sitio da Barra-a-Barra (Ponta da Passadeira), e a Este, com o Tejo-esteiro do Montijo, confinando com o concelho da Moita. Insere-se numa sub-região ecológica da Península de Setúbal designada por Estuário do Tejo ou Borda de Água, englobando o Mar da Palha e as áreas ribeirinhas do sul do Tejo.

A turma que participou na antecipação da operacionalização das AEMEB no 5.º ano era constituída por 26 alunos (16 raparigas e 10 rapazes), com uma média de idades de 10 anos. Desta turma, 17 dos alunos mantiveram-se juntos desde o 1.º ciclo, existindo muitos alunos que já se conheciam desde o pré-escolar, bem como os respetivos encarregados de educação. Em termos de necessidades relevantes, um aluno apresentava problemática específica de Hiperatividade com Défice de Atenção.

No 6.º ano, saiu da turma uma aluna e entraram dois alunos que estavam a repetir o 6.º ano, passando a ser constituída por 27 alunos (15 raparigas e 12 rapazes), com uma média de idades de 11 anos. Antes do final do 1.º período, foram integrados na turma e no sistema de ensino português dois alunos (uma aluna de nacionalidade venezuelana e um aluno de nacionalidade guineense).

Tratava-se de uma turma heterogénea, com um grupo de alunos com muita facilidade na aquisição dos conteúdos e interesse na disciplina e outros com algumas dificuldades e algum desinteresse.

A Escola EB 2,3 Moinhos da Arroja, onde leciona a professora Susana Serra, é a sede do Agrupamento de Escolas Moinhos da Arroja que, além desta, inclui mais três estabelecimentos: a Escola do 1.º ciclo / JI de Porto Pinheiro, a Escola do 1.º Ciclo / JI Manuel Coco e o Jardim-de-Infância Dr. João Santos. Apesar de separados fisicamente, os estabelecimentos estão muito próximos uns dos outros, permitindo que os diversos elementos das quatro comunidades educativas se inter-relacionem com alguma facilidade. O Agrupamento está situado num concelho limítrofe de Lisboa – Concelho de Odivelas, zona suburbana considerada problemática em termos sociais e económicos. Nos últimos anos, a população escolar do Agrupamento tem vindo a aumentar, fruto da abertura de turmas novas que pretendem dar uma resposta ao aumento demográfico que se tem vindo a verificar no Concelho de Odivelas. A população escolar caracteriza-se por ser uma população heterogénea e multicultural. A percentagem de alunos com ASE foi de 35,7% e a percentagem de alunos com necessidades de inclusão foi de 7,4%.

A turma que participou na antecipação da operacionalização das AEMEB no 5.º ano era constituída por 27 alunos (15 raparigas e 12 rapazes), com uma média de idades de 10 anos. Desta turma, três alunos apresentavam problemáticas específicas de aprendizagem, a saber: um aluno com diagnóstico de Perturbação Específica da Aprendizagem (com défice na Matemática); um aluno com Hiperatividade e Défice de Atenção e um aluno com perturbação da aprendizagem específica (com défice na leitura e na expressão escrita).

No 6.º ano foram transferidos três alunos e integraram a turma e o sistema de ensino português três alunas: durante o mês de outubro duas alunas, de nacionalidade brasileira, e no mês de dezembro uma aluna de nacionalidade angolana. À exceção destas alunas, a turma manteve-se desde o 1.º ciclo, existindo muitos alunos que já se conheciam desde o pré-escolar, o que por vezes originou conflitos entre eles.

Em termos de comportamento, esta turma era considerada conversadora, com alunos que nem sempre respeitavam as regras da sala de aula em termos de participação, envolvendo-se frequentemente em conversas paralelas.

Tal como a turma do Barreiro, esta era considerada heterogénea, com alguns alunos com muita facilidade na aquisição dos conteúdos e interesse na disciplina e outros com dificuldades e algum desinteresse.

Capacidades matemáticas transversais

Breve caracterização

Resolução de Problemas

A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática. Aprender a resolver problemas capacita os alunos para enfrentar desafios e aplicar conceitos matemáticos em novas situações, pelo que todos os alunos devem ter oportunidade de poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes na resolução de problemas (Canavarro et al., 2021). Esta atividade complexa vai além da mera aplicação de factos e procedimentos matemáticos previamente aprendidos, envolvendo a adaptação ou o desenvolvimento de estratégias adequadas à obtenção de uma solução válida. A resolução de problemas tem o potencial de proporcionar desafios intelectuais aos alunos que, para além de contribuírem para o desenvolvimento de capacidades como a perseverança, a autoconfiança, o pensamento crítico e criativo, reforçam a compreensão de conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Problema como tarefa

Um *problema* é uma situação desafiadora para a qual se pretende obter uma solução sem que, à partida, se saiba como resolvê-la ou se conheça um caminho imediato que garanta a resposta (Abrantes, 1988; Vale et al., 2015). Em particular, o que distingue um problema de um exercício é precisamente o facto de não se conhecer qual o procedimento matemático ou o algoritmo que permita, com algum grau de certeza, alcançar a solução. É importante destacar que um problema pressupõe um nível adequado de desafio e interesse de forma a envolver o aluno na procura da solução, mobilizando conhecimentos matemáticos e adaptando ou desenvolvendo as suas próprias estratégias de resolução. É importante que os alunos contactem com problemas que admitem vários processos de resolução, várias soluções ou até sem solução.

A figura 1 apresenta um exemplo de um problema que pode ser colocado a alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Figura 1. Enunciado do problema "Corrida de tartarugas" (adaptado de Tavares et al., 2019)

Corrida de tartarugas

A tartarugas Riga e a Rosa resolveram fazer uma competição para ver quem chega primeiro ao lago mais próximo, que fica a 180 metros do local onde as duas se encontram.

Depois de darem o som da partida para a competição, a Rosa começou logo a caminhar e a Riga decidiu ficar ainda a descansar uns minutos e só depois se meteu ao caminho. Quando a Riga resolveu começar a caminhar, já a Rosa levava um avanço de 40 metros, ficando a Riga um pouco preocupada, decidiu caminhar 6 metros por cada 4 metros que a Rosa caminhava. Qual das duas tartarugas terá chegado primeiro ao lago?

A resolução de problemas é um tipo de tarefa que, por ser desafiante, tem o potencial para envolver os alunos em trabalho exploratório na aula de Matemática. Apesar de a resolução de problemas ter passado a ser cada vez mais associada a tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2007), enquanto as tarefas de exploração podem apresentar informações sobre a estratégia que o aluno deverá seguir, uma tarefa que desencadeie atividade de resolução de problemas deverá permitir o desenvolvimento de estratégias próprias em que o aluno mobiliza os seus conhecimentos matemáticos e, eventualmente, extra-matemáticos. Cabe ao professor acolher a diversidade de estratégias, valorizando a criatividade dos alunos, a autonomia e perseverança, mobilizando-as para orquestrar discussões coletivas que analisem essas estratégias e as representações usadas, e comparem a sua eficácia na obtenção da solução (Canavarro et al., 2021).

Etapas e estratégias de resolução de problemas

Existem vários modelos que visam explicar como se resolve um problema de Matemática. Pólya (1978), destacando a importância de examinar um dado problema de diferentes perspetivas, propôs um modelo que compreende quatro etapas: (i) *compreensão do problema*, na qual é necessário prestar atenção ao enunciado para interpretá-lo e identificar os aspetos relevantes; (ii) *elaboração de um plano*, etapa que envolve planear a estratégia a ser seguida, considerando que o caminho pode ser longo e desafiador; (iii) *implementação do plano*, na qual se segue o roteiro geral delineado na fase anterior, sem perder de vista o problema em si; e (iv) *análise retrospetiva*, na qual o aluno reconsidera e examina novamente o caminho percorrido e verifica a solução obtida.

A cada uma destas etapas, Pólya associou um conjunto de estratégias gerais que pretendem ajudar os alunos a tornarem-se mais eficazes na resolução de problemas, e que são designadas por *heurísticas*. Assim, na primeira etapa o aluno pode procurar identificar: que dados são fornecidos, se são suficientes, se existem condições e quais, ou o que é pedido como resposta ao problema. Na elaboração do plano pode ser útil pensar se se conhece um problema semelhante, mais geral ou até mais acessível e se é possível usar um método de resolução semelhante, ou analisar se todos os dados serão necessários ou se é possível resolver apenas uma parte do problema. Durante a execução do plano, o aluno deve confirmar se realizou corretamente todos os procedimentos e verificar se consegue justificar matematicamente cada passo. Na etapa final, poderá analisar se é possível verificar o resultado, se está de acordo com os dados e as condições dadas e, eventualmente, poderá procurar outra estratégia de resolução.

Ao longo do Ensino Básico, os alunos devem enriquecer progressivamente o seu leque de estratégias de resolução de problemas. Assim, no 2.º Ciclo, para além das estratégias anteriormente desenvolvidas, os alunos podem ainda procurar descobrir uma regularidade ou um padrão; criar um problema equivalente, fazer uma simulação ou simplificar o problema; explorar casos particulares; recorrer a tentativas, analisar os erros e ajustar as novas tentativas; trabalhar do fim para o princípio; ou organizar uma sequência de passos.

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB) (Canavarro et al., 2021) reconhece-se a relevância das ferramentas tecnológicas como recursos incontornáveis e poderosos na aprendizagem da Matemática, possibilitando a ampliação de contextos e perspetivas sobre objetos matemáticos e permitindo análises e explorações que estariam inacessíveis aos alunos sem acesso a estes recursos. É, pois, nesta linha que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas se pode também fazer mediante o uso de tecnologias digitais. Resolver um problema de matemática com recurso à tecnologia envolve ser-se capaz de identificar os recursos tecnológicos adequados e conjugá-los de forma eficiente com conhecimentos e procedimentos matemáticos, tanto para desenvolver uma estratégia como para explicar, justificar e comunicar o pensamento matemático desenvolvido (Jacinto & Carreira, 2017).

Papel da resolução de problemas na aula de Matemática

A resolução de problemas surge nas AEMEB como um dos oito objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática, como uma capacidade matemática transversal e como um tópico de aprendizagem. Mas qual o seu papel na sala de aula?

Várias perspetivas coexistem sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática. Uma dessas visões, mais tradicional, concebe a resolução de problemas como *aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos*, pelo que o foco deste trabalho reside na aquisição de recursos matemáticos e na sua aplicação mediante a resolução de problemas que surgem, tipicamente, no final da lecionação de um tópico (ensino *para* a resolução de problemas). Numa outra linha concebe-se que os alunos devem tornar-se proficientes na resolução de problemas de matemática, ou seja, aprender a resolver problemas é um *objetivo per si.* Assim, a resolução de problemas é encarada como um conteúdo, o que leva a que ocorra o ensino explícito de heurísticas e estratégias (ensino *sobre* resolução de problemas). Uma terceira via entende a resolução de problemas como *oportunidade para* *construção de novo conhecimento*, pelo que o foco reside na aprendizagem de um conceito ou procedimento e resulta da atividade de resolução de um problema (ensino *através* da resolução de problemas). Todavia, estas perspetivas não devem ser encaradas como alternativas, tal como sugerem Vale et al. (2015) ao propor uma visão que denominaram 'ensino da matemática *com* resolução de problemas', ou seja, a resolução de problemas deve acompanhar o currículo e a prática da sala de aula, deve permitir desenvolver compreensão de conceitos e da estrutura matemática inerente, bem como levar os alunos a adquirir progressivamente um rol de estratégias que sejam produtivas e úteis noutras situações.

Um exemplo

O problema "Corrida de tartarugas" (figura 1) pode ser proposto a alunos do 5.º ano, no tema Álgebra, tópico "Relações numéricas e algébricas", subtópico "Expressões numéricas com letras" e com o objetivo de "Resolver problemas que envolvam expressões algébricas, em diversos contextos". Este problema pode ser resolvido apenas com papel e lápis ou recorrendo à utilização de uma folha de cálculo (figura 2).

Figura 2. Resolução do problema "Corrida de tartarugas"

C42 =C41+6

	A	B	C
1		Distância da Rosa	Distância da Riga
2		0	0
3		4	0
4		8	0
5		12	0
6		16	0
7		20	0
8		24	0
9		28	0
10		32	0
11		36	0
12		40	0
13		44	6
14		48	12
15		52	18
16		56	24
17		60	30
18		64	36
19		68	42
20		72	48
21		76	54
22		80	60
23		84	66
24		88	72
25		92	78
26		96	84
27		100	90
28		104	96
29		108	102
30		112	108
31		116	114
32		120	120
33		124	126
34		128	132
35		132	138
36		136	144
37		140	150
38		144	156
39		148	162
40		152	168
41		156	174
42		160	180

Na resolução apresentada, o aluno organizou as distâncias percorridas pelas tartarugas Rosa e Riga em duas colunas, B e C, respetivamente. Um aspeto interessante desta resolução é o facto de o aluno ter optado por representar o avanço inicial da Rosa, os primeiros 40 metros, que coincidiram com o período de tempo em que a Riga ficou a descansar. A partir daí, a tabela apresenta a distância percorrida por cada uma das tartarugas. A utilização da tecnologia, neste problema, traz uma mais valia à realização do problema com lápis e papel, pois ao programar a folha de cálculo recorrendo aos endereços da célula fica bem patente a noção de variável e de constante.

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, em articulação com outros temas matemáticos, envolve proporcionar oportunidades aos alunos para contactar com uma diversidade de situações problemáticas que possam ser abordadas através de múltiplas estratégias, permitindo-lhes também tirar partido de diversas ferramentas tecnológicas, não só mobilizando conhecimentos prévios como promovendo a compreensão de novos conhecimentos.

Raciocínio matemático

Em linha com as orientações curriculares internacionais em Matemática (OECD, 2018), não é de estranhar que seja dado particular destaque ao raciocínio matemático nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), agora explicitamente considerada como um conteúdo de aprendizagem, à semelhança do que tinha sido expresso no Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007). O raciocínio, desde sempre, esteve relacionado com a Matemática e o seu ensino. Tradicionalmente, era habitual justificar-se a necessidade da Matemática fazer parte do currículo afirmando-se ser a disciplina que, por excelência, promove o desenvolvimento do raciocínio (muito embora se possa falar de raciocínio em outros domínios). Mas do que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Raciocinar é um termo usado na linguagem corrente, mas isso não indica que o seu significado seja consensual. Neste texto entendemos que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (Ponte et al., 2020, p. 7). Seguir uma forma fundamentada implica que o raciocínio é uma atividade consciente e intencional, diferenciando-se, deste modo, de outras formas de pensar. Assim, raciocinar é pensar, mas nem toda a atividade de pensar é raciocinar.

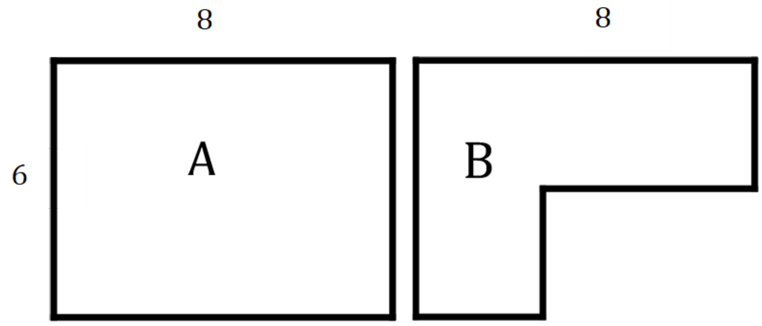
No passado, o raciocínio matemático esteve muito associado à ideia de demonstração, seguindo uma lógica dedutiva, levando mesmo à convicção de alguns que se não houver este processo matemático, não se está a desenvolver nos alunos o raciocínio matemático (Oliveira & Henriques, 2022). Na verdade, embora esta vertente seja fundamental na matemática, tem vindo a emergir uma outra perspetiva que sublinha igualmente o lugar do raciocínio indutivo e abdutivo (Jeannotte & Kieran, 2017). De facto, podemos falar em três tipos de raciocínio: o *raciocínio indutivo*, o *raciocínio abdutivo*, e o *raciocínio dedutivo* (Quadro 1).

Quadro 1. Tipos de raciocínio

<table>
<tr><th></th><th>Indutivo</th><th>Abdutivo</th><th>Dedutivo</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Características e propósitos</td><td colspan="2">Pensamento divergente</td><td>Pensamento convergente</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lógica de descoberta</td><td>Lógica de prova</td></tr>
<tr><td>Verificar</td><td>Explicar</td><td>Demonstrar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plausibilidade</td><td>Certeza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intuição</td><td>Lógica</td></tr>
</table>

De seguida, apresentamos alguns episódios que pretendem ilustrar o raciocínio de alunos do 1.º e 2.º ciclo a partir da tarefa *Comparar perímetros* (Mendes et al., 2022), apresentada na figura 3.

Figura 3. Tarefa *Comparar perímetros* (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 37)



1. Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?
2. Desenha duas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B. (Podes usar papel quadriculado).
3. A Maria diz que existem muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Justifica porquê.

Numa turma de 5.º ano, a professora começou por questionar os alunos sobre a sua expectativa inicial: qual das figuras terá maior perímetro? Esta questão incentivou os alunos a raciocinar indutivamente, avançando com uma primeira conjetura baseada na visualização e algumas justificações iniciais, ainda que pouco fundamentadas, como mostra o diálogo seguinte (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 39):

Conjeturas e justificações iniciais dos alunos sobre a comparação do perímetro das figuras A e B

Ana: Que a B é mais pequena do que a A (…) falta um bocado.

António: Eu não acho, porque eu acho que as duas [linhas] têm o mesmo comprimento.

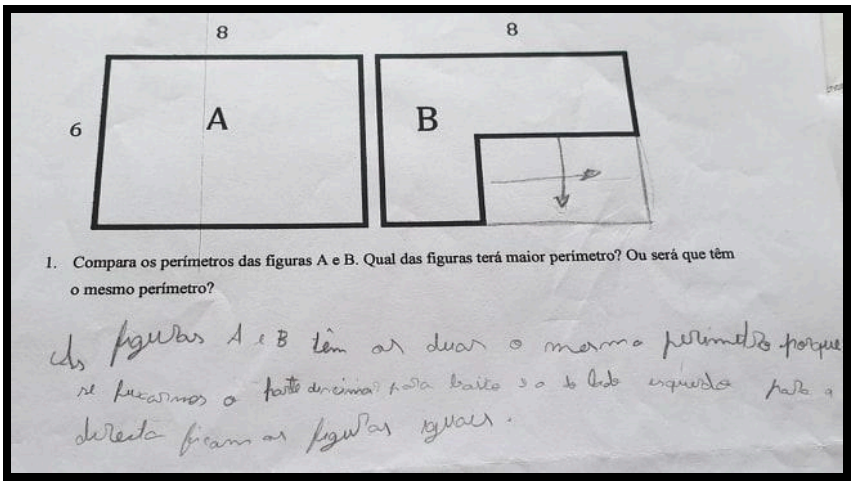
Bruna: Eu acho que a A é mais pequena que a B, que a B é maior (…) porque pode parecer maior, mas se nós tirarmos todas as linhas vai ficar maior.

Conjeturar é o processo de formular afirmações não arbitrárias “sobre relações matemáticas gerais baseadas em evidência incompleta” (Stylianides, 2008, p. 11). Assim, as conjeturas, através da observação, da construção, da transformação de conhecimento prévio ou de combinações entre estes, podem tomar a forma do reconhecimento de padrões ou de propriedades comuns a um conjunto de objetos.

Como vemos no diálogo anterior, as conjeturas poderão posteriormente revelar-se verdadeiras – é o caso da conjetura de António que afirma que as figuras A e B têm o mesmo perímetro – ou falsas, como as conjeturas das raparigas que afirmam o contrário. É natural que os alunos não estejam de acordo e até é possível que o mesmo aluno mude de resposta. Estamos numa fase de descoberta, em que o pensamento pode ser divergente, muitas vezes guiado pela intuição: é o que acontece frequentemente com alunos que, como Ana, associa a uma menor área um menor perímetro. Já António parece intuir corretamente a igualdade dos perímetros e Bruna tem um discurso ainda confuso, próprio de uma primeira etapa de apropriação da situação.

A análise mais atenta do problema levou os alunos a avançar com respostas mais certeiras e, nalguns casos, com uma justificação mais sustentada. É o caso do par de alunos do 3.º ano que justifica que as figuras A e B são isoperimétricas porque "… se puxarmos a parte de cima para baixo e a do lado esquerdo para a direita ficam as figuras iguais" (figura 4), desenhando ainda duas setas junto à figura B que auxiliam a sua explicação. Estamos, assim, perante raciocínio dedutivo que pretende demonstrar a validade da sua conjetura, apresentando argumentos que estabelecem essa certeza.

Figura 4. Resposta de um par de alunos do 3.º ano à questão 1 (Mendes et al., 2022, p. 40)



"As figuras A e B têm as duas o mesmo perímetro porque se puxarmos a parte de cima para baixo e a do lado esquerdo para a direita ficam as figuras iguais"

Voltando ao Quadro 1, pode afirmar-se que os raciocínios indutivo e abdutivo têm diversos aspetos em comum, embora sejam distintos. Através de ambos formulam-se conjeturas que podem ser generalizações quando disserem respeito a um conjunto de objetos matemáticos, ou relações entre objetos desse conjunto, a partir de um dos seus subconjuntos (Jeannotte & Kieran, 2017). Assim, podemos afirmar que todas as generalizações são conjeturas, mas nem todas as conjeturas são generalizações, como foi a afirmação de que as figuras A e B são isoperimétricas. Vejamos um outro episódio que exemplifica a produção de uma conjetura que é uma generalização e que surge no decurso de raciocínio abdutivo, um tipo de raciocínio menos conhecido. Ele surge quando somos confrontados com algo que não estávamos à espera e formulamos uma hipótese explicativa para tal ocorrência, daí a função de explicação que lhe está associada, como referido no Quadro 1.

O episódio aconteceu no decurso da última questão que, implicitamente, convoca os alunos a pensar quantas figuras de 6 lados existirão com o mesmo perímetro de B. No momento de discussão coletiva, numa turma de 5.º ano, depois de terem realizado várias experiências de construção de hexágonos com o mesmo perímetro que B, uma aluna afirma (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 46):

Os alunos começam por identificar a existência de hexágonos nas condições do problema, cujas medidas dos lados podem não ser números inteiros, caminhando para a generalização e para a justificação da sua veracidade

Beatriz: Professora, os números são infinitos então porque é que também não pode ser infinito? Porque é que…

Professora: Se calhar pode.

Raquel: Pode.

Professora: Se calhar, podemos construir infinitas figuras.

Raquel: Sim. Ó professora mesmo uma migalhinha assim. Uma migalhinha é uma figura diferente, nunca vai ficar igual.

Beatriz G.: Ó professora, isso do infinito é verdade porque nós reparámos que tanto ao tirar… imagine, estamos a tirar do canto de cá, não é? Por exemplo, um quarto e tiramos de um canto um qualquer, um que não tem nada a ver e mesmo assim continua com o mesmo perímetro, continua com os mesmos lados e continua… está tudo certo, só que são figuras diferentes.

Estamos de novo na presença de uma conjetura – existem infinitos hexágonos com o mesmo perímetro – que, neste caso, é também uma generalização. O raciocínio abdutivo surge com a formulação da conjetura, algo inesperada, e da sua explicação, também ela influenciada pela intuição – a ideia de "migalhinha" de Raquel, que emerge de experiências físicas e pessoais, e traduz a noção de uma parte infinitamente pequena que pode ser alterada de modo a ter um novo hexágono com o mesmo perímetro.

Alertamos para que existe uma tendência bastante comum de pedir aos alunos para explicarem quando o que se pretende é que justifiquem. Explicar é descrever como se pensou, logo apela para a comunicação matemática, já o ato de justificar solicita a apresentação de um argumento que permita aferir da verdade ou falsidade de uma afirmação.

Para além dos processos de conjeturar, generalizar e justificar, outros são ainda possíveis de ser indicados, sendo vistos sobretudo como processos auxiliares de raciocínio. São eles:

comparar e *classificar* que, através da identificação de semelhanças e de diferenças entre objetos, procuram, respetivamente, fazer inferências e agrupar em classes, e ainda o de *exemplificar* "que analisa exemplos que podem apoiar a procura de semelhanças e diferenças e a procura de uma validação" (Ponte, 2022, p. 8).

Para que o professor possa criar contextos favoráveis à promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio nos seus alunos é necessário não só ter um entendimento aprofundado sobre os tipos de raciocínio e seus processos e formas de os concretizar, como propor tarefas adequadas e explorá-las na sala de aula de forma a tirar partido das suas potencialidades.

Nota: Como fontes possíveis que poderão ajudar os professores a selecionar/adequar/criar tarefas promotoras do raciocínio matemático sugerimos o texto *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos* (Coordenação do Projeto REASON, 2022). Pistas para a exploração de tarefas na sala de aula de Matemática para promover o raciocínio matemático dos alunos poderão ser consultadas em Mendes e colegas (2022) e Delgado e colegas (2022).

Pensamento Computacional

O pensamento computacional é uma das capacidades matemáticas expressa nas Aprendizagens Essenciais de Matemática, a ser desenvolvida e mobilizada em articulação com os diversos temas matemáticos e a par de outras capacidades matemáticas. Wing (2006, 2008) fez emergir o pensamento computacional como uma abordagem que nos permite fazer uso de computadores para resolver problemas. Contudo, seja num contexto digital ou não, o pensamento computacional visa capacitar os alunos para selecionarem e aplicarem estratégias e ferramentas adequadas para resolverem problemas. Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional visa contribuir para que todos os alunos sejam capazes de "melhor conceptualizar, analisar e resolver problemas complexos" (Seehorn et al., 2011, p. 9).

Hoyles e Noss (2015) apresentam diversas práticas que são implicadas no pensamento computacional: abstração (ver um problema em diferentes níveis de detalhe), pensamento algorítmico (predisposição para ver tarefas como passos mais pequenos interligados), decomposição (resolver um problema envolve resolver um conjunto de problemas mais pequenos) e reconhecimento de padrões (ver um problema como estando relacionado com problemas anteriormente encontrados). O teste e a depuração são também aspetos essenciais. Essas práticas visam garantir que a solução encontrada responde com sucesso à tarefa dada. Começa-se pela testagem para verificar o funcionamento. Caso a solução não funcione, o processo de depuração tem início (Ng & Cui, 2021) para localizar erros ou enganos e os corrigir. Nesse sentido, nas Aprendizagens Essenciais a capacidade matemática transversal pensamento computacional "pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos" (Canavarro el al., 2021, p. 3).

Vários estudos têm evidenciado a articulação entre a Matemática e o pensamento computacional, reconhecendo o seu potencial contributo para alcançar a aprendizagem matemática pretendida (Ye et al., 2023). O contexto matemático pode ser usado para valorizar o pensamento computacional, bem como situações relativas ao pensamento computacional podem valorizar a matemática, melhorando a compreensão de conceitos, desenvolvendo de modo integrado capacidades matemáticas diversas (Hardin & Horton, 2017; Ng & Cui, 2021), dando sentido e colocando em prática ideias matemáticas (Sáez-López et al., 2019). A valorização do pensamento computacional oferece aos alunos "oportunidades para explorar uma variedade de conteúdos matemáticos através da reflexão sobre os processos e produtos de construção do pensamento computacional" (Ye et al., 2023, p. 22).

O desenvolvimento desta capacidade é essencial desde os primeiros anos de escolaridade e ao longo de todo o ensino básico, dando um contributo relevante para a Matemática para o séc. XXI. Contudo, o pensamento computacional não vai emergir de modo espontâneo, pelo que o desenvolvimento de conceitos relativos a essa capacidade requer um ensino explícito e específico (Rodríguez-Martínez et al., 2020).

Tal como expressam as Aprendizagens Essenciais, o pensamento computacional deve também surgir em articulação com o uso da tecnologia, nomeadamente para a resolução de problemas, em especial os relacionados com a programação. Nos últimos anos têm surgido diversas ferramentas digitais adequadas ao trabalho com os alunos desde os primeiros anos de escolaridade, tais como ambientes de programação visual. Por exemplo, os alunos podem, numa fase de iniciação, reutilizar e remisturar projetos, construir e ampliar alguns códigos e estruturas existentes para criar novos projetos ou projetos mais complexos (Ng & Cui, 2021). Também os contextos de robótica e programação, em que os alunos estão ativamente envolvidos, podem contribuir para os objetivos do pensamento computacional e trabalho em torno de ideias matemáticas específicas (Sáez-López et al., 2019). Ng e Cui (2021) envolveram os alunos na utilização de objetos tangíveis e na sua programação por meio de um ambiente de programação por blocos para executarem ações físicas, promovendo a modelação e o pensamento algorítmico dos alunos, a prática de depuração e a abstração, com utilização de variáveis.

A utilização da tecnologia e a articulação entre ideias matemáticas e práticas do pensamento computacional podem também potenciar conexões internas e externas, a articulação com outras capacidades matemáticas transversais e o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais.

Um exemplo

Apresentamos em seguida um exemplo referido nas Aprendizagens Essenciais do 2.º ciclo de escolaridade relativo ao pensamento computacional, que se articula com o tema matemático Geometria, no que respeita ao tópico Figuras planas e ao subtópico Construção de triângulos.

A figura 5 apresenta uma tarefa que pode ser proposta aos alunos do 2.º ciclo:

Figura 5. Enunciado da tarefa *Consigo construir um triângulo?*

Consigo construir um triângulo? Constrói um programa, em Scratch, que indique se é possível construir um triângulo dadas três medidas para os lados.

A tarefa proposta consiste na construção de um programa, em Scratch, que averigue se é possível construir um triângulo dadas as medidas para os lados. Para tal, os alunos têm de compreender a condição que as medidas de comprimento dos lados têm de satisfazer para ser possível construir um triângulo com esses lados.

Com este desafio de construção de um programa no Scratch em que um utilizador indica quaisquer três medidas de comprimento que pretende averiguar se podem ser utilizadas para construir um triângulo. Os alunos têm de questionar o utilizador em relação às três medidas e têm de lidar com variáveis (referente a cada uma das medidas de comprimento). Não tendo aqui o propósito de analisar todo o código do Scratch para a construção do programa, são apresentados alguns exemplos de blocos necessários.

Os alunos têm de desenvolver um procedimento passo a passo para saber as três medidas de comprimento que o utilizador quer testar e averiguar se, com esses valores, é possível construir o triângulo. No final tem de dar o feedback adequado ao utilizador do programa.

É essencial existirem três questões, uma para cada medida de comprimento que vai ser testada para a construção de um triângulo. O Scratch guarda o valor indicado pelo utilizador em “a resposta”. A cada pergunta é necessário guardar esse valor noutra variável, para no final das três perguntas termos os três valores disponíveis. Assim, propõe-se a criação de três variáveis, como por exemplo “Lado maior”, “Lado 2” e “Lado 3”, cujos valores alteram para o valor indicado na questão respetiva (figura 6). Ao indicar uma questão que destaque a maior medida de comprimento para o lado já se evidencia conhecimento sobre a condição a verificar e o que é essencial no problema, o vai permitir simplificar o programa.

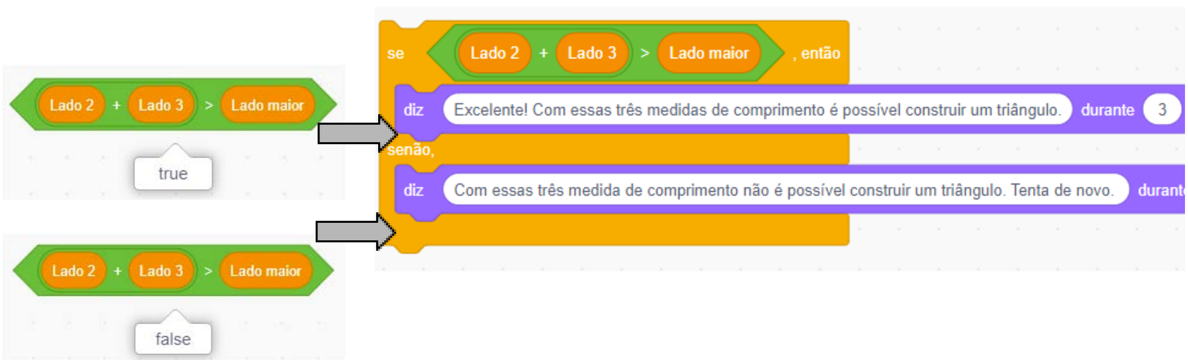
Figura 6. Questão para cada uma das medidas de comprimento e alteração do valor da variável respetiva

Para dar continuidade ao programa, uma possibilidade é utilizar um bloco de Controlo, como por exemplo "Se... então...senão..." (figura 7). O operador, que verifica se a soma das medidas de comprimento dos lados 2 e 3 é maior do que a medida do comprimento do maior lado, é introduzido após o "Se", para ser verificado o seu valor Booleano.

Figura 7. Bloco de Controlo "Se... então... senão"

O aluno tem de decidir o feedback a dar ao utilizador nas duas situações que podem ocorrer, como mostra o exemplo (figura 8):

Figura 8. Código para feedback ao utilizador sobre possibilidade de construção do triângulo



Ao longo da construção do procedimento pode surgir a prática de depuração, podendo os alunos testar o programa, detectando e corrigindo eventuais erros, uma vez que têm eles de definir todo o procedimento. Por exemplo, podem inicialmente não criar as variáveis necessárias ou não alterar o valor da variável para o valor da resposta dada. Esta tarefa visa também capacidades e atitudes transversais tais como autoconfiança, iniciativa e autonomia e autorregulação.

A concluir

A integração do pensamento computacional nas Aprendizagens Essenciais de Matemática visa promover uma abordagem à resolução de problemas numa perspetiva diferente e, tanto quanto possível, numa lógica de recorrer a ambientes computacionais no processo de resolução. Com esta abordagem não se pretende restringir as estratégias de resolução à programação. Consoante as propostas apresentadas, as práticas do pensamento computacional poderão ser desenvolvidas sem o recurso ao computador. Por outro lado, não basta acrescentar ferramentas digitais ao processo de resolução para se garantir que se está a desenvolver o pensamento computacional.

A plena integração do pensamento computacional passa por criar (ou adaptar) tarefas exploratórias e desafiantes que permitam trabalhar um conteúdo matemático e, simultaneamente, possam desenvolver as suas práticas (Espadeiro, 2021).

O papel do professor, na organização e condução dos momentos de aplicação das tarefas, reside na intencionalidade com que promove o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos. Esta intencionalidade, no acompanhamento que faz durante o processo de resolução, poderá passar por questionar os alunos, não com o intuito dar uma resposta mas, para permitir que estes ultrapassem um qualquer bloqueio no seu trabalho e possam, deste modo, desenvolver as práticas de pensamento computacional pretendidas.

Comunicação matemática

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática é um objetivo de aprendizagem transversal a todos os tópicos matemáticos curriculares, em estreita ligação com outras capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Ser capaz de comunicar matematicamente significa conseguir "partilhar e discutir ideias matemáticas, formulando e respondendo a questões diferenciadas, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, negociando a construção de ideias coletivas em colaboração" (p. 3). Ecoando a perspetiva do NCTM (2007), Santos (2018) esclarece que a capacidade de comunicação matemática "inclui conseguir, por um lado, transmitir ideias de forma clara e coerente aos outros, usando uma linguagem matemática correta e precisa, e, por outro, analisar e avaliar ideias e estratégias matemáticas de outros" (p. 11).

A comunicação matemática é indissociável do próprio processo de ensino-aprendizagem (Menezes et al., 2014). À semelhança de outros documentos curriculares (e.g., NCTM, 2007, 2017; Ponte et al., 2007), as atuais recomendações para o ensino da Matemática em Portugal perspetivam a comunicação matemática como uma orientação metodológica, além de um objetivo de aprendizagem (Canavarro et al., 2021). Em particular, "a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório" (Serrazina, 2018, p. 13), uma abordagem fortemente enfatizada nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. De facto, olhando a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem, ela "potencia e é potenciada pelos momentos típicos de (…) trabalho autónomo dos alunos sobre tarefas desafiantes, usualmente em pequenos grupos" (Tomás Ferreira, 2018, p. 1) e de discussão coletiva, tanto na vertente oral, como na vertente escrita. E estas duas fases – trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva – são aspetos distintivos e determinantes nas aulas pautadas por uma abordagem exploratória.

Os alunos têm diferentes estilos de aprendizagem, assim como diversas formas de comunicação preferenciais. Por isso, a comunicação nas aulas de Matemática deve "ser veiculada de diferentes formas, entre elas verbal, visual, gestual, icónica, com objetos ou escrita" (Vale & Barbosa, 2018, p. 2). O recurso a estas formas diferentes de comunicar deve ser ponderado em função do nível de escolaridade dos alunos e, sobretudo, dos objetivos de aprendizagem visados, tendo sempre em vista aquilo que facilita e promove "a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos" (Canavarro et al., 2021, p. 3) para que a comunicação dessas ideias e processos aos outros possa ser clara e, progressivamente, "a linguagem matemática [seja usada] como estratégia de comunicar com maior precisão" (p. 3).

Segundo o NCTM (2007), "os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de Matemática beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática [com compreensão] e aprendem a comunicar matematicamente" (p. 66). As experiências de aprendizagem que são proporcionadas aos alunos determinam a qualidade das suas aprendizagens, em particular as tarefas e a sua exploração em aula (e.g., Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009). As tarefas que se focam na prática de procedimentos mais ou menos rotineiros (como o cálculo ou a manipulação algébrica) não se prestam a fomentar a capacidade de comunicação matemática dos alunos. Pelo contrário, as tarefas de natureza mais desafiante, como os problemas, as investigações e as explorações, já podem constituir bom solo para o desenvolvimento da comunicação matemática (NCTM, 2007).

Comunicação oral

As oportunidades para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos, na sua vertente oral, dependem, de uma forma bastante significativa, da condução do discurso da aula feita pelo professor (Menezes et al., 2014). Por exemplo, quando o professor solicita aos alunos que expliquem como resolveram uma dada tarefa, ou os questiona sobre uma decisão tomada no percurso realizado com vista à resolução de um problema, ou lhes pede que comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros, a comunicação matemática está a ser fortemente estimulada.

A figura 9 apresenta parte de uma tarefa proposta a uma turma de 5.º ano de escolaridade, pressupondo "uma abordagem anterior da classificação dos quadriláteros" (Mendes et al., 2022, p. 27). Depois de uma primeira parte em que os alunos estiveram a "manipular casos particulares de paralelogramos (losango, retângulo, quadrado) e [a] reproduzi-los em papel em malha quadriculada" (p. 27), foram desafiados a "investigar diferentes propriedades dos paralelogramos (igualdade de lados, igualdade de ângulos, outras relações entre ângulos)" (p. 27), para depois os organizarem num diagrama de Venn. A tarefa foi realizada com recurso ao GeoGebra. No caso particular da questão 2.1, "pretende-se que os alunos reconheçam que num paralelogramo lados opostos são iguais" (p. 32).

Figura 9. Excerto de tarefa sobre propriedades dos paralelogramos (Mendes et al., 2022, p. 28)

2. Vamos agora investigar as propriedades dos paralelogramos.
   2.1. Qual é a relação que existe entre os comprimentos dos lados dos paralelogramos? Será que essa propriedade se mantém para todos os paralelogramos? (Manipula os vértices da construção para tirares as tuas conclusões).

Nem sempre é claro para os alunos que "as propriedades identificadas são aplicáveis a todos os paralelogramos, incluindo os seus casos particulares" (Mendes et al., 2022, p. 33). Por este motivo, é importante proporcionar aos alunos oportunidades para verbalizarem o seu pensamento e, deste modo, detetar possíveis incompreensões.

Figura 10. Excerto de diálogo acerca da extensão de uma propriedade a todos os paralelogramos (Mendes et al., 2022, p. 33)

Professora: E isso verifica-se para todos os paralelogramos?

Aluna: Não, não se verifica para o losango e para o quadrado por terem os lados iguais.

Professora: Será que no caso de terem os lados todos iguais, não podemos afirmar à mesma que os lados opostos são iguais?

Alunas: Ah! Pois é!...

Após o diálogo com a professora, as alunas registam, por escrito, "Mesmo os que têm todos os lados iguais também têm os lados iguais dois por dois".

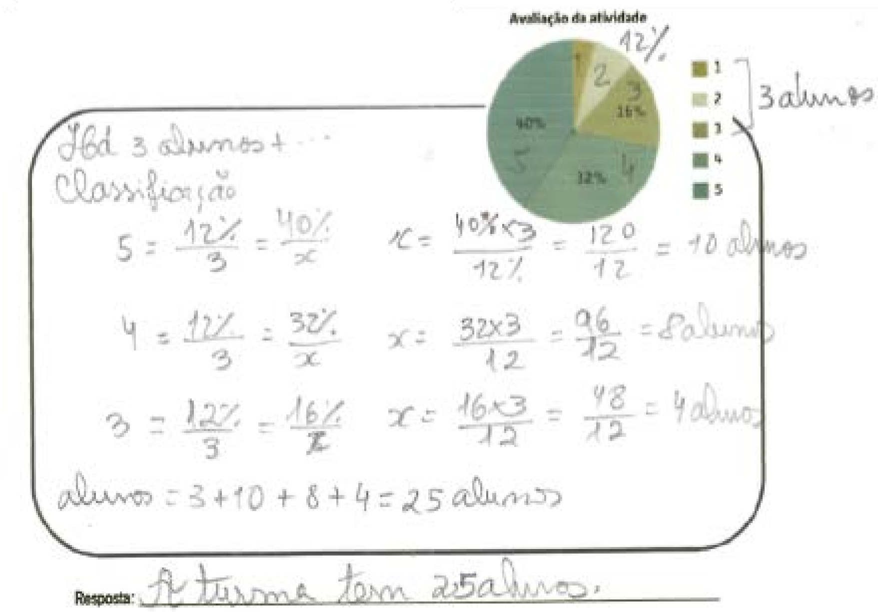
No diálogo apresentado na figura 10, um par de alunas tinha concluído "que os lados opostos [de um paralelogramo] são iguais dois a dois" (p. 33). As questões da professora estimulam as alunas a comunicarem oralmente como pensam e a compreenderem o erro que estavam a cometer.

Segundo o NCTM, "para apoiar eficazmente o discurso da aula, os professores deverão criar uma comunidade na qual os alunos se sintam livres de expressar as suas ideias" (2007, p. 67). Ora, uma outra forma de estimular o desenvolvimento da comunicação matemática consiste em solicitar aos alunos que emitam uma opinião, comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros. Mas, enquanto os alunos dos primeiros anos têm dificuldades em se colocar no lugar dos outros e em ver as coisas segundo uma perspetiva que não é a sua, os seus colegas dos 2.º e 3.º ciclos são, muito frequentemente, relutantes em se expor perante os seus pares. Isto coloca desafios ao professor, que deve ter em conta que "questões bem planeadas e cuidadosamente colocadas poderão ajudar a esclarecer as expectativas para o trabalho dos alunos, relativamente a cada faixa etária" (p. 68).

Comunicação escrita

"A comunicação escrita é trabalhada quando se promove a realização de registos escritos relativos à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos" (Serrazina, 2018, p. 13). Estes são, de facto, os contextos mais frequentes em que a vertente escrita da capacidade de comunicação matemática pode ser promovida (Casa et al., 2016). Mas este estímulo pode trabalhar outros propósitos. Por exemplo, a escrita matemática pode ser usada com o propósito de fazer sentido de um problema, de uma situação ou das próprias ideias; deste modo, o destinatário da produção escrita é o próprio aluno.

Figura 11. Exemplo de escrita matemática com propósito de fazer sentido de um problema (adaptado de Machado, 2022, p. 87)



Na figura 11, encontramos um exemplo de escrita com este propósito exploratório, feita por um aluno do 6.º ano de escolaridade. A situação apresentada é a seguinte: "Os alunos de uma turma participaram todos numa atividade radical. No final, avaliaram a experiência numa escala de 1 a 5. Sabe-se que exatamente três alunos atribuíram classificação inferior a 3. Quantos alunos há na turma?" (Machado, 2022, p. 87). O aluno regista algumas notas que o ajudam a fazer sentido da situação apresentada antes de dar uma resposta à tarefa; faz anotações junto ao gráfico que integra o enunciado da tarefa e reescreve parte da informação fornecida por palavras próprias ("Há 3 alunos + …").

Outro propósito da escrita matemática, talvez aquele a que mais frequentemente se associa a comunicação matemática escrita, é descritivo ou explicativo. Os alunos podem ser chamados a descrever, por escrito, um conceito matemático ou a explicar a estratégia que usaram para resolver um problema, por exemplo (Casa et al., 2016). Uma escrita com este propósito apoia a necessidade de exprimir ideias com clareza e de usar palavras ou outras formas de representação (símbolos, desenhos, etc.) com precisão, para que os destinatários – usualmente o professor e os pares – possam compreender bem o que se pretende comunicar. As figuras 12 e 13 apresentam, respetivamente, uma tarefa proposta a alunos de 2.º ciclo e exemplos de escrita matemática com o propósito de explicar como a tarefa foi resolvida, evidenciando duas estratégias, uma analítica e outra visual (Barbosa & Vale, 2022).

Figura 12. Tarefa proposta a alunos do 2.º ciclo do ensino básico (Barbosa & Vale, 2022, p. 22)

O retângulo [ABCD] foi construído unindo por um lado dois quadrados geometricamente iguais. Cada quadrado tem 5 cm de lado. No retângulo desenhou-se o paralelogramo colorido em que cada vértice é ponto médio de um dos lados dos quadrados iniciais. Qual é área do paralelogramo em cm?

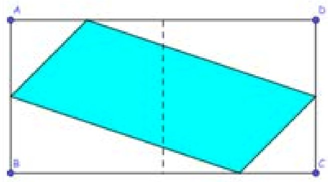
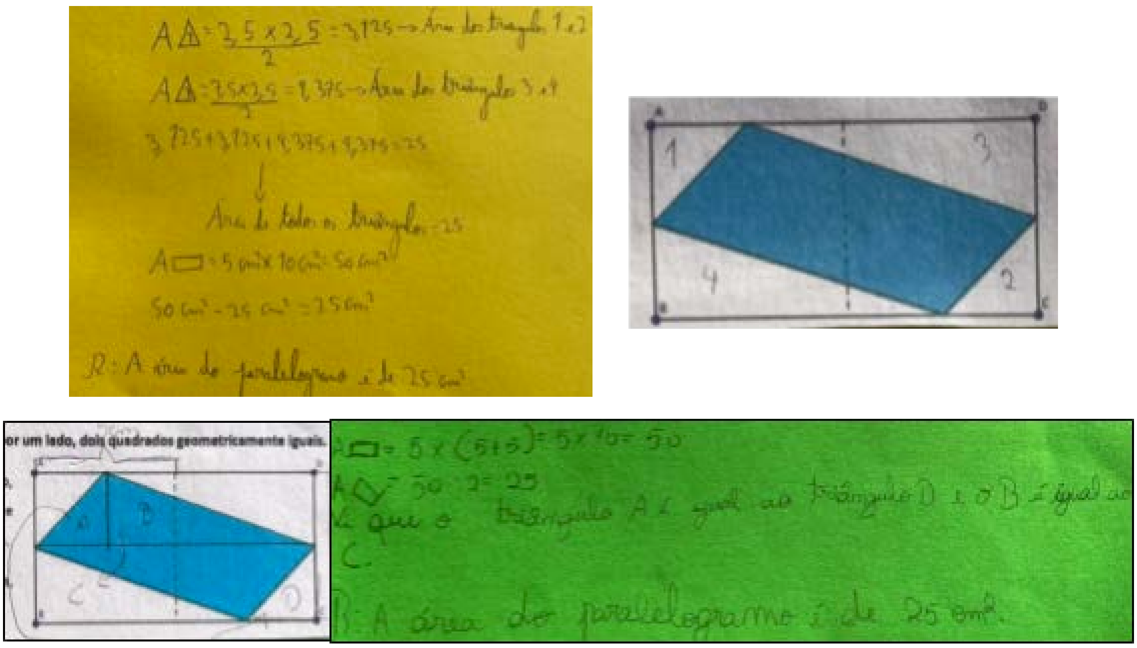
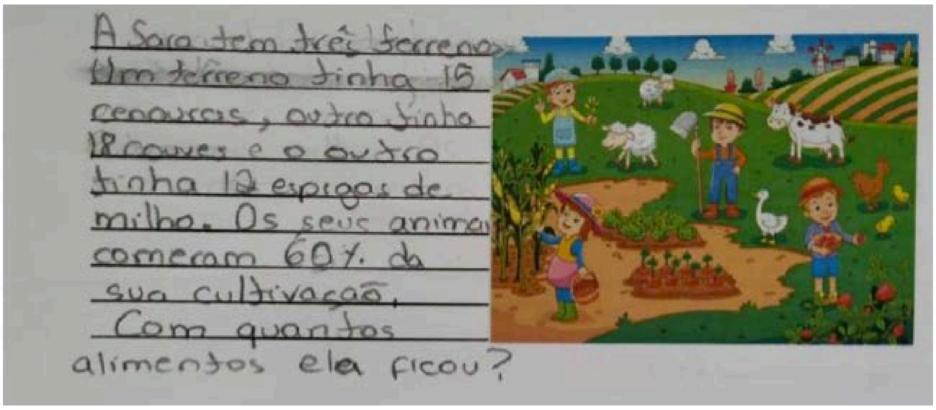


Figura 13. Exemplo de escrita matemática com propósitos explicativos (adaptado de Barbosa e Vale, 2022, p. 22)



Um outro propósito da escrita matemática é de natureza criativa, com vista a registar ideias originais, a evidenciar fluência e flexibilidade de pensamento (isto é, a gerar múltiplas soluções a um problema ou a olhá-lo sob diferentes perspetivas, por exemplo), ou a desenvolver ideias (Casa et al., 2016). Naturalmente que não se espera que os alunos escrevam sobre ideias matemáticas inovadoras – as descobertas que sejam novas para os alunos ou para a turma podem ser consideradas originais: “escrever matematicamente sobre ideias originais poderá englobar alunos a formular problemas ou a questionar [outros], a gerar resoluções originais [considerando o universo em causa] de situações problemáticas, e a escrever sobre estruturas matemáticas ou padrões que tenham descoberto" (p. 17). O destinatário deste tipo de escrita matemática é, muitas vezes, um público autêntico e alargado, além das paredes da sala de aula, o que leva a que os alunos possam recorrer a modos formais ou informais para se exprimirem melhor. A figura 14 apresenta o trabalho de um aluno do 6.º ano de escolaridade numa tarefa de formulação de problemas com base numa imagem fornecida (Miranda, 2019).

Figura 14. Exemplo de escrita matemática com propósito criativo (Miranda, 2019, p. 80)



Quando os alunos iniciam o seu percurso escolar, as suas capacidades de escrita são reduzidas, mas o recurso a desenhos ou outras representações visuais permite-lhes comunicar matematicamente, na forma escrita. As palavras ou os símbolos matemáticos não são, obviamente, os únicos recursos para apoiar a comunicação matemática escrita dos alunos. No entanto, em função dos destinatários e dos propósitos da escrita matemática, esta deve tornar-se progressivamente mais elaborada, como refere o NCTM (2007, p. 68):

> Em alguns casos, os alunos poderão considerar mais apropriado descrever as suas ideias informalmente através da linguagem comum e de esboços, mas, apesar disso, no final do ensino básico (…), deverão, também, aprender a comunicar matematicamente de forma mais formal, usando terminologia matemática convencional.

São várias as formas a que o professor pode recorrer para promover o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita com os diferentes propósitos que foram mencionados anteriormente: elaboração de mapas de conceitos ou posters, escrita de jornais diários ou de textos informativos, *posts* nas redes sociais, criação de vídeos ou outras produções multimédia, formulação de problemas, etc. As audiências podem também ser diversas, desde o próprio aluno, a turma ou um grupo de pares, o próprio professor ou outros professores (da turma ou não), colegas de outras turmas (incluindo de outros anos de escolaridade), e pais ou a comunidade mais alargada (Casa et al., 2016). Os materiais manipuláveis, assim como as ferramentas tecnológicas, constituem-se em apoios essenciais ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto na vertente escrita, como na vertente oral (NCTM, 2007, 2017).

Por último, é importante notar que a ideia de *resolver-e-exprimir problemas* matemáticos (Jacinto et al., 2018) resume a ligação estreita que existe entre a comunicação matemática e a resolução de problemas: um problema está bem resolvido quando o processo de resolução está comunicado de forma clara e completa, ou seja, não basta obter uma resposta matematicamente correta ao problema, é preciso também explicar de modo claro e completo como foi essa resposta obtida, tornar visível como se pensou para se chegar à resposta. A possibilidade de recorrer a diversas representações, com ou sem o apoio da tecnologia, facilita a comunicação de ideias e, ao mesmo tempo, potencia também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Representações matemáticas

No novo programa de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) são definidos oito objetivos para a aprendizagem desta disciplina que todos os alunos devem atingir. Num destes objetivos é explicitada a necessidade de os alunos desenvolverem a capacidade de usar representações matemáticas como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática. Salienta-se, ainda, que as ideias matemáticas são clarificadas quando se conjugam diferentes tipos de representação, sendo a familiaridade e a fluência que os alunos possuem com as várias formas de representação essenciais para a compreensão dessas ideias.

É realçado também neste documento que as capacidades matemáticas transversais são entendidas enquanto conteúdos de aprendizagem na área curricular de Matemática com a mesma importância que os conhecimentos matemáticos. Entre as seis capacidades matemáticas, aprofundadas nos quadros de operacionalização das Aprendizagens Essenciais, surgem as Representações Matemáticas.

Significados e tipos de representações

São vários os significados e interpretações que são atribuídos à ideia de representações matemáticas. Para o NCTM (2007), o termo "representação" refere-se "tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Já para Tripathi (2008), uma representação matemática é "uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre esse conceito e outras ideias" (p. 348). O autor explica, ainda, que uma representação pode ser entendida como "a forma de uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outras pessoas" (p.348). Goldin (2018) afirma que as representações matemáticas são produções visíveis ou tangíveis, tais como diagramas, retas numéricas, gráficos, composições com objetos ou materiais manipuláveis, modelos físicos, textos escritos, expressões matemáticas, fórmulas e equações, ou mesmo imagens exibidas em ecrãs de um computador ou calculadora, que codificam, apoiam ou incorporam ideias matemáticas ou relações entre elas.

Para além dos significados e interpretações que lhes são atribuídas, as representações matemáticas têm sido caraterizadas e classificadas de várias maneiras, de acordo com a sua natureza e conforme os autores. Por exemplo, o NCTM (2017) defende um modelo em que as representações, associadas à aprendizagem matemática e à resolução de problemas, poderão ser de cinco tipos: física (materiais manipuláveis, objetos), contextual (situações da vida real), visual (pictórica, diagramas, tabelas, gráficos), verbal (linguagem escrita ou oral) ou simbólica (notação simbólica, uso de variáveis, de parâmetros, numerais,…), ilustrando, nesse modelo, as conexões importantes que se verificam entre as várias formas. Também as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) adotam esta classificação, salientando a necessidade de promover a análise de diferentes representações sobre a mesma situação, evidenciando o papel das conexões entre representações para fortalecer a compreensão matemática.

Funções das representações

A Matemática é constituída por conceitos que estão interligados através de variadíssimas relações. Aprender um conceito usualmente implica não só conhecer o seu significado, mas também compreender as múltiplas relações entre esse conceito e outras ideias ou conceitos. Por isso, ao utilizar múltiplas representações de um conceito realçam-se vários aspetos da sua estrutura. Tripathi (2008) salienta esta ideia, afirmando que usar diferentes representações é como examinar um conceito através de uma variedade de lentes, em que cada uma delas proporciona uma perspetiva diferente, possibilitando um conhecimento mais rico e aprofundado desse conceito.

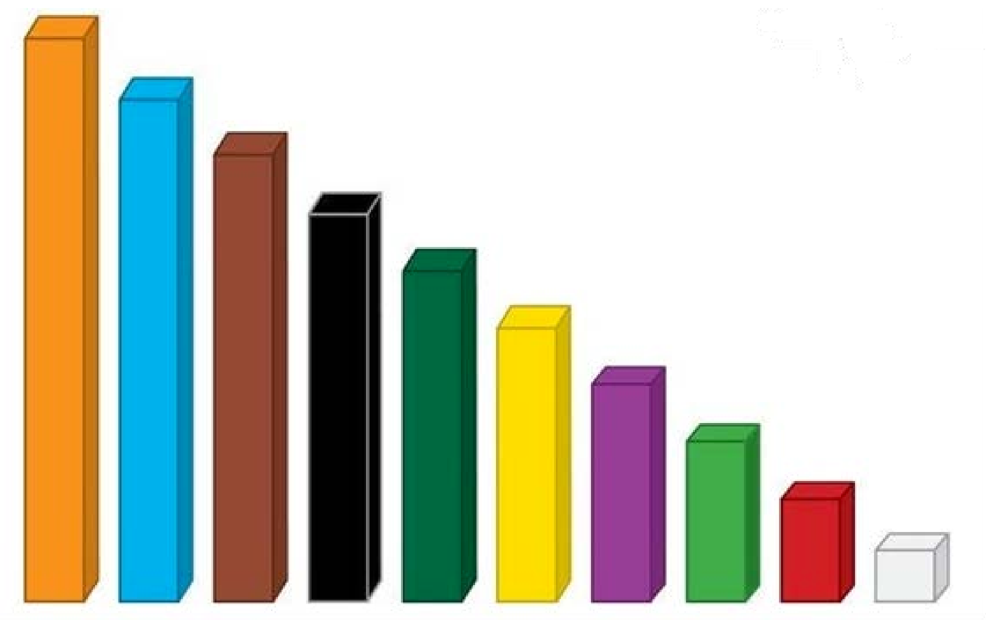
Entre os vários tipos de representação, as representações visuais têm atualmente um papel muito relevante, por estarem muito mais acessíveis aos alunos, em especial devido à evolução tecnológica, com as calculadoras gráficas, as folhas de cálculo, os programas de geometria dinâmica e outros, permitindo estabelecer facilmente conexões entre as várias representações. A tecnologia possibilita a obtenção de representações visuais variadas, nomeadamente tabelas, gráficos, construções geométricas estáticas e dinâmicas. Permite ainda que os alunos rodem, invertam, estiquem e ampliem figuras geométricas ou gráficos, bem como manipulem expressões, variando parâmetros, investiguem conjuntos complexos de dados ou façam simulações que podem ser usadas na investigação de fenómenos, facilitando a formulação de conjeturas.

São vários os investigadores que realçam a importância das representações, especialmente as visuais, para a resolução de problemas. Por exemplo, Barbosa e Vale (2022) apresentam no seu artigo vários exemplos que ilustram e evidenciam o potencial das representações visuais como veículos para chegar à solução de um problema. Estas investigadoras argumentam que, apesar das representações visuais não serem novas na literatura, usualmente são preteridas pelos professores que preferem utilizar as representações analíticas e simbólicas. As abordagens visuais podem ser um excelente complemento às resoluções analíticas, podendo fazer emergir resoluções muito mais simples e com mais significado para os alunos. Estas investigadoras afirmam, ainda, que a abordagem visual de um problema complementada com múltiplas representações e resoluções contribui para uma melhor compreensão da matemática e para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, alterando a sua visão de uma matemática composta por um conjunto de fórmulas e de procedimentos que devem memorizar e dominar.

No exemplo seguinte (figura 15) apresenta-se uma tarefa sobre frações com recurso a barras Cuisenaire na qual os alunos poderão, na sua resolução, recorrer a múltiplas representações.

Figura 15. Representar frações com recurso ao Cuisenaire (Santos et al., 2022)

1. Considera as barras de Cuisenaire:



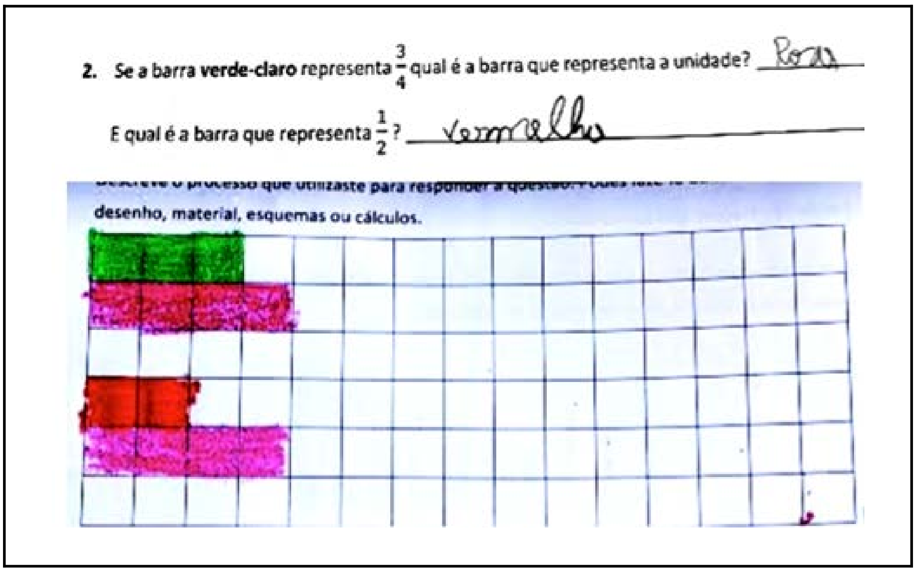
Se a barra verde-claro representar ¾, qual é a barra que representa a unidade?

E qual é a barra que representa ½?

Descreve o processo que utilizaste para responder às questões. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

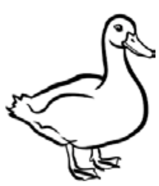
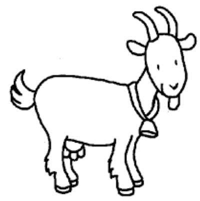
Na figura 16 é apresentada uma resolução desta tarefa em que os alunos utilizaram uma malha quadriculada para representar a forma como pensaram, atendendo ao significado de numerador (barras verde e vermelha) e do denominador (barra rosa).

Figura 16. Produção de alunos (Santos et al., 2022)



O problema que se apresenta de seguida (figura 17) é vulgarmente utilizado no Ensino Básico (por vezes com outras redações semelhantes), e pode ser trabalhado em vários anos de escolaridade, conforme os conceitos e as representações que os alunos já dominam.

Figura 17. Problema dos gansos e das cabras

	O João e a Rita foram à quinta dos avós, onde há gansos e cabras. Ao todo, o João contou 27 cabeças e a Rita contou 84 patas. Quantos gansos e cabras há na quinta?	

Este problema poderá ser resolvido utilizando diferentes representações, como, por exemplo, as apresentadas nas figuras seguintes:

Figura 18. Representação pictórica

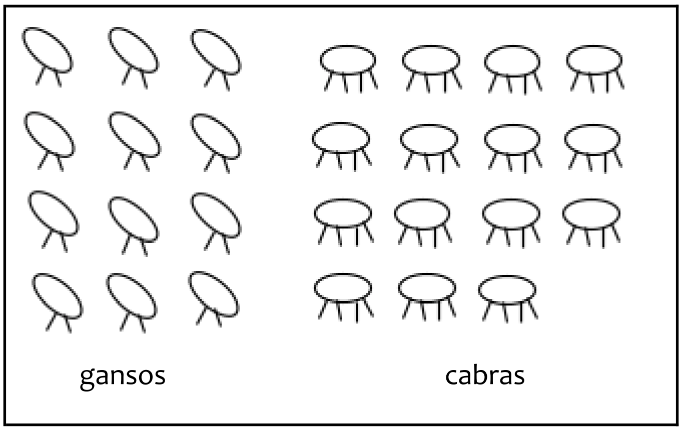


Tabela 1. Representação em tabela

Gansos	Patas dos gansos	Cabras	Patas das cabras	Total de patas
1	2	26	104	106
2	4	25	100	104
3	6	24	96	102
4	8	23	92	100
5	10	22	88	98
6	12	21	84	96
7	14	20	80	94
8	16	19	76	92
9	18	18	72	90
10	20	17	68	88
11	22	16	64	86
12	24	15	60	84

Estas figuras mostram duas representações que possibilitam que os alunos tenham acesso a novas perspetivas que, de certeza, contribuirão para a compreensão e resolução do problema. A resolução de tarefas em que são exploradas múltiplas representações contribui para que os alunos melhorem a sua proficiência na resolução de problemas. Estas representações, mais utilizadas nas primeiras etapas da compreensão de um conceito, estabelecem pontes para as representações simbólicas que virão a ser utilizadas mais tarde, quando se referirem ao mesmo conceito.

É importante a introdução da linguagem simbólica matemática, bem como levar os alunos a apreciar e a valorizar a simplicidade e eficiência dessas formas de representação para comunicar ideias sinteticamente e com precisão. Os significados que vão sendo atribuídos às representações simbólicas desenvolvem-se gradualmente nos estudantes ao estabelecer relações com outras representações, especialmente as visuais. Compete aos professores sugerir aos alunos a utilização da diversidade de representações possíveis, apresentando-lhes as que eles não dominem, questionando-os sobre as relações e conversões entre as diferentes representações e discutindo as escolhas mais adequadas. Através do questionamento e da interpretação das representações utilizadas pelos seus alunos, os professores poderão compreender melhor os seus raciocínios e perceber se aprenderam os conceitos matemáticos em estudo. Assim, cabe aos professores propor aos alunos tarefas em que seja possível o recurso a diferentes representações, onde a tecnologia poderá ter um papel decisivo como suporte visual e como facilitador do reconhecimento de conexões entre as várias representações.

As representações matemáticas têm um papel fundamental no modo como os alunos desenvolvem e aprofundam os seus conhecimentos. Quando criam, utilizam e comparam representações diversas os alunos organizam, registam e comunicam ideias matemáticas. As representações devem ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação das abordagens e dos argumentos, na identificação de conexões entre conceitos, na resolução de problemas e na modelação e interpretação de fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007).

Conexões matemáticas

A ideia de "conexões", no contexto da educação matemática, ganhou visibilidade quando o NCTM, em 2000, elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2007). A assunção de um termo específico e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de Matemática.

O NCTM refere quatro diferentes tipos de conexões (NCTM, 2007): entre conceitos matemáticos, entre diferentes temas matemáticos, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e a vida quotidiana. Os dois primeiros situam-se dentro da Matemática, enquanto que os dois últimos a relacionam com o que lhe é externo, favorecendo a perceção da utilidade dos conhecimentos matemáticos e a apreciação do seu valor (Pierce & Stacey, 2006). Desta forma, em geral, distinguem-se as conexões internas da Matemática e as conexões externas, que a colocam em diálogo com os outros domínios, sendo a modelação matemática uma forma por excelência de concretizar conexões com o mundo em redor. É esta a opção das Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) na abordagem curricular às conexões como uma capacidade matemática transversal.

De qualquer modo, sejam internas ou externas, as conexões têm um potencial imenso para as aprendizagens dos alunos, como tem vindo a ser revelado pela investigação em educação matemática. "O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa" (Canavarro, 2017, p. 38).

Conexões internas

A exploração das conexões internas da Matemática permite evidenciar as relações que existem entre os diversos temas da Matemática, tão frequentemente tratados de forma isolada, correspondendo, nos manuais escolares, a diferentes capítulos que nunca se intersetam. Embora existam claramente conceitos e procedimentos específicos de cada tema da Matemática, existem também múltiplas associações que podem ser feitas, contribuindo para ampliar a compreensão dos conceitos e procedimentos e dar a conhecer a Matemática como uma ciência coerente.

Uma estratégia poderosa para o estabelecimento de conexões internas é o uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2017).

A exploração de conexões matemáticas para potenciar a aprendizagem dos alunos requer uma ação estratégica por parte do professor, da qual faz parte o uso, em sala de aula, de tarefas que recorram a conhecimentos matemáticos de diferentes temas, quer surjam de forma explícita nas questões colocadas aos alunos, quer surjam no desenvolvimento da resolução e discussão das tarefas com a turma, na qual deve intencionalmente ser feita a explicitação das conexões em causa de modo a que os alunos as reconheçam.

Um exemplo de conexões internas que pode ser explorado no 2.º ciclo relaciona o perímetro do círculo com a proporcionalidade direta. A expressão para a determinação do perímetro do círculo é frequentemente memorizada pelos alunos sem que cheguem a compreender a sua origem ou significado e, mais do que isso, identifiquem a relação entre o diâmetro e o perímetro. Na verdade, o famoso π é reconhecido por todos de alguma forma, sobretudo associado às fórmulas da área e do perímetro do círculo, mas raramente é encarado como uma constante de proporcionalidade direta. Tal aprendizagem pode ser promovida por uma tarefa experimental em que os alunos têm à sua disposição objetos cilíndricos de tamanhos diferentes (por exemplo, copos, tampas…) e medem o perímetro das suas bases e diâmetros, gerando vários pares de valores. De seguida poderão responder a um conjunto de questões que orientem a análise para a relação pretendida (figura 19).

Figura 19. Excerto da tarefa *Perímetro do círculo* (Santos et al., 2023, p. 77)

4. Com os dados recolhidos preencham a tabela seguinte.

Objeto	Perímetro (P)	Diâmetro (d)	P : d

5. Usem a vossa calculadora para determinar o valor do quociente entre o perímetro (P) e o diâmetro (d), arredondado às centésimas.
6. Observem a última coluna da tabela. O que podem verificar relativamente à relação entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?
7. Verifiquem para outros valores se a relação entre o perímetro e o diâmetro do círculo se mantém. Para isso usem a aplicação seguinte e movimentem os cursores https://www.geogebra.org/m/t9fctcf4

Como é evidente, numa situação experimental os valores obtidos serão sempre aproximações, tal como o quociente. Contudo, esta também é uma situação útil para discutir os efeitos que pequenos erros podem ter no resultado e a consequente necessidade de rigor. A aplicação que é sugerida no fim da tarefa pode minimizar eventuais dificuldades com os diferentes quocientes obtidos e, sobretudo, apoiar a ideia de que o quociente entre as medidas do perímetro e do diâmetro é constante, sendo por isso uma relação de proporcionalidade direta.

Conexões externas

As conexões externas podem estar associadas a situações muito diversas, pois associam a Matemática a outras disciplinas ou domínios científicos, profissionais, culturais ou da vida do dia-a-dia, na multitude de atividades e de práticas concretas, incluindo lavar os dentes, fazer desporto ou ir ao supermercado.

Uma vantagem inequívoca da exploração de conexões externas é contribuir para eliminar as barreiras entre a Matemática e outros domínios, permitindo aos alunos conhecer e apreciar a aplicabilidade da Matemática, "enquanto forma de observação, representação e interpretação mais clara do mundo que os rodeia" (NCTM, 2007, p. 154). Naturalmente que as conexões matemáticas permitem aprender sobre o assunto com que a Matemática se conecta, constituindo-se como um enriquecimento curricular e uma forma de dar lugar ao desenvolvimento de uma visão mais integrada sobre os saberes.

Existem formas diversas de estabelecer conexões externas e explorá-las de forma relevante com os alunos. Uma possibilidade é a exploração de situações nas quais se possam aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões). Importa que as situações sejam de facto reais, de modo a que os alunos possam reconhecer a Matemática como uma ferramenta efetivamente útil, que contribui para dar respostas verdadeiras, e com isso conhecer melhor o que é objeto de estudo. As situações escolares fabricadas para aplicação da Matemática pelos alunos não têm, a nível do reconhecimento do valor da Matemática, o mesmo potencial que as situações autênticas, nomeadamente das que podem ser vividas pelos alunos. A investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). E o mundo em nosso redor está repleto de situações que permitem desocultar a presença da Matemática — não se diz que ela está em todo o lado?

Um exemplo de uma situação real bastante interessante que conecta a matemática com a vida do dia-a-dia, e a relaciona com áreas das Ciências Sociais e do Ambiente, incluindo a sustentabilidade, tem a ver com as máquinas para a recolha de vasilhame de plástico que se podem encontrar instaladas em locais públicos de grande acesso, como são os supermercados. Estas máquinas recebem os diferentes vasilhames que lhes são introduzidos e trituram-nos, com o objetivo de os reduzir e reciclar. As máquinas atribuem diferentes valores a cada tipologia de vasilhame que é feito (garrafas e garrafões com diversas capacidades), sendo possível que uma família de três pessoas consiga perfazer o valor de 5 euros com o depósito semanal do vasilhame usado para água. O valor obtido não reverte a favor da família — é doado a instituições de solidariedade social ou sem fins lucrativos, ficando assim a família envolvida em causas sociais.

Esta situação oferece múltiplas oportunidades de trabalho com alunos de diferentes ciclos. Importa começar por colocar questões adequadas com vista a obter respostas relevantes neste contexto. Um exemplo poderá ser calcular o montante que cada família da turma consegue totalizar em uma semana com o vasilhame respetivo, tendo em conta os valores reais que a máquina atribui a garrafas e garrafões com diferentes capacidades. Outra será calcular a quantidade de garrafas e garrafões necessários para perfazer um dado montante que se deseja doar. Outra ainda será conceber estratégias para sensibilizar a escola e a comunidade a aderir a esta forma de reciclagem e de solidariedade social. Qualquer um destes exemplos de trabalho envolve diversos conceitos (organização de dados, cálculos diversos, que podem ir da produção de estimativas à obtenção de valores exatos) e diversas capacidades matemáticas (formulação e resolução de problemas, comunicação de resultados, representação de resultados...). Seja qual for a questão (e muitas outras se podem colocar), no final do estudo realizado importa destacar como a Matemática contribuiu para conhecer e compreender melhor a situação.

Outra possibilidade bastante acessível de trabalho com os alunos no âmbito das conexões externas é a identificação da presença da Matemática em contextos diversos reais e a procura de compreensão do seu papel na criação e construção da realidade observada. Esta modalidade pode acontecer no âmbito de visitas de estudo, in loco ou virtuais, que possibilitam o contacto com o mundo fora da escola, mas também pode acontecer por observação das práticas e artefactos da escola, a começar pelo próprio edifício da escola, sendo a Arquitetura uma enorme fonte de conexões externas com a Matemática. Convidar os alunos a observar fachadas de edifícios comuns e a identificar como a Matemática foi usada nessa construção, questionando como terão pensado os seus autores para produzir a obra, constitui uma excelente estratégia para os alunos convocarem ideias matemáticas já aprendidas e lhes darem utilidade e sentido em contexto real. Mas o convite pode ser estendido, com o desafio para que proponham novas fachadas renovadas, apelando à sua criatividade e espírito crítico, tendo em conta os requisitos identificados anteriormente, que certamente envolvem múltiplos conceitos da geometria e da medida. Este trabalho constitui um exemplo de conexão externa com enorme potencial para as aprendizagens, que pode ser usado no 2.º ciclo. Enquanto que os alunos mais novos poderão fazer propostas com recurso a desenho com lápis em papel, os mais velhos poderão usar *software* de geometria dinâmica para replicar as fachadas e fazer novas propostas de sua autoria. Da mesma forma se pode trabalhar na observação de monumentos diversos como, por exemplo, o Cromeleque dos Almendres, de equipamentos modernos para uso comum como, por exemplo, os estádios de futebol, ou ainda estruturas artísticas, como os painéis de azulejos das estações de comboios espalhadas por todo o país.

Modelação matemática

A modelação matemática consiste essencialmente em matematizar, através de objeto(s) matemático(s) que compõem o chamado "modelo matemático", uma dada situação de um contexto extra-matemático, constituindo o trabalho matemático realizado uma fonte de conhecimento, de capacidade de controlo e de tomada de decisões sobre essa situação matematizada. É isto que distingue a modelação matemática do estabelecimento de conexões externas que referimos na secção anterior: as conexões externas não implicam a existência de um modelo matemático que represente uma situação sobre a qual se fica apto a intervir, sendo este aspeto fulcral na modelação matemática.

A modelação matemática concretiza-se através de um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático, muitas vezes representado por um ciclo (Ferri, 2010). A primeira fase do ciclo de modelação consiste na apreensão da situação real a modelar, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar acessível e matematicamente tratável. De seguida, através da aplicação de ideias matemáticas, constrói-se o modelo matemático que vai permitir produzir resultados, que nos permitem agir sobre a situação real.

Assim, a modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

Os modelos matemáticos encontram frequentemente expressão em fórmulas ou funções matemáticas, mas também existem modelos matemáticos representados por outros objetos matemáticos, como, por exemplo, tabelas ou esquemas que traduzem a situação. Estes últimos podem ser mais adequados ao trabalho com crianças e podem estabelecer pontes para representações mais formais.

Um exemplo apropriado ao 2.º ciclo e que mais tarde será formalizado no modelo que designamos habitualmente por exponencial, está associado a várias situações da realidade, nalguns casos do quotidiano dos alunos. O estudo da função exponencial inclui vários aspetos que não são adequados a esta faixa etária, mas há todo o interesse em perceber, por exemplo, quão facilmente se atingem números muito grandes quando multiplicamos, sucessivamente, um número maior do que 1 por si próprio.

A tarefa seguinte (figura 20) apresenta um contexto que pode apoiar a introdução do conceito de potência de forma significativa. Os alunos começam por utilizar diagramas ou outras representações informais para resolver as primeiras questões até reconhecerem a multiplicação sucessiva por 4 que será posteriormente apresentada como potência de 4. A última questão causará provavelmente alguma surpresa que o professor pode aproveitar para discutir com os alunos os motivos pelos quais certas mensagens ou vídeos se tornam "virais", sensibilizando-os ainda para a importância de manter alguns conteúdos na esfera privada. Além disso, pode promover a discussão sobre o modelo associado e a sua adequação à realidade. Os alunos compreendem que os comportamentos humanos não são iguais e não podem ser determinados exatamente por um algoritmo, mas que a Matemática pode desempenhar um papel importante na compreensão de fenómenos de vários tipos, entre eles os sociais. A tecnologia pode também ser útil, por exemplo, através da utilização de uma folha de cálculo que permite investigar facilmente novas situações a partir da alteração das condições iniciais do problema.

Figura 20. Excerto da tarefa *Um desafio no Tik Tok* (adaptado de Santos et al., 2022, p. 33)

Um desafio no Tik Tok

O Luís resolveu iniciar uma *trend* no *Tik Tok.* No sábado, *postou* um desafio a cada um dos seus quatro melhores amigos. Na semana seguinte, cada um destes quatro amigos deve nomear outros quatro amigos. Imagina que esta *trend* continua nas semanas seguintes.

1. Se a cadeia não for interrompida e nenhum dos amigos receber mais do que o desafio, quantos amigos terão recebido o desafio na 3.ª semana? E na 4.ª semana?
2. Organiza os dados anteriores numa tabela.
3. Dá um palpite de quantos amigos terão sido desafiados na 10.ª semana.
4. Descobre agora uma forma rápida de saber quantas pessoas terão recebido o desafio na 10.ª semana.
5. Compara o palpite que deste na questão 3 com o número de pessoas que terão recebido o desafio (obtido na questão 4). Foi um bom palpite?

A concluir, sistematizamos três ideias que importa reter sobre a importância da exploração curricular das conexões matemáticas com os alunos de todos os níveis: 1. Constituem-se como oportunidade de trabalhar de forma interrelacionada, e com ênfase na compreensão, conceitos e procedimentos matemáticos de diversos temas; 2. Proporcionam contextos onde o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais surge com naturalidade; 3. Oferecem a possibilidade de reconhecimento da relevância da matemática. Insistimos na ideia de que não é suficiente que o professor apresente nas aulas exemplos curiosos de conexões matemáticas aos alunos. É necessário que os alunos tenham oportunidade de eles próprios terem experiências que lhes permitam efetivamente conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula (Canavarro, 2017).

Tarefas em sala de aula

Apresentação e discussão

Tarefa — Conhece as bipirâmides

Enunciado da tarefa

Conhece as bipirâmides

Observa os seguintes exemplos de bipirâmides:

 Bipirâmide quadrangular	 Bipirâmide pentagonal	 Bipirâmide hexagonal

Como o nome indica, uma bipirâmide resulta da junção de duas pirâmides congruentes pela sua base. O tipo de base das pirâmides dá o nome à bipirâmide. Por exemplo, se as pirâmides forem pentagonais, têm na base um pentágono e é esse o polígono que dá o nome à respetiva bipirâmide.

Constrói com o teu grupo algumas bipirâmides e responde:

1. Observa as bipirâmides e preenche a tabela seguinte. Se tiveres feito algum cálculo, apresenta-o antes do resultado.

N.º arestas	N.º faces	N.º vértices	Número de lados do polígono que lhe dá nome	Nome do poliedro

2. Observa a tabela e compara o número de arestas com o número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide. O que observas? Escreve essa relação e explica como pensaste. Pinta as arestas de uma bipirâmide acima representada para te ajudar a comunicar o teu raciocínio.
3. Compara agora o número de faces com o número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide. O que observas? Escreve essa relação e explica como pensaste. Podes usar de novo cores para te ajudar a comunicar o teu raciocínio.
4. Finalmente compara o número de vértices com o número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide. O que observas? Escreve essa relação e explica como pensaste. Podes usar de novo cores para te ajudar a comunicar o teu raciocínio.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

5.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Figuras no espaço	Propriedades dos poliedros
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar, generalizar e justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração, perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que, progressivamente, os alunos sejam capazes de:

- Formular e testar conjeturas identificando regularidades em classes de poliedros envolvendo os seus elementos e expressá-las usando linguagem corrente [ou através de expressões algébricas].
- Justificar relações entre os elementos de classes de poliedros recorrendo à sua organização espacial, apresentando e explicando raciocínios e representações.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Desenvolver a capacidade de trabalhar em equipa.
- Desenvolver o pensamento crítico e perseverança.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos. Polígonos encaixáveis (por exemplo, Polydron).

Resoluções esperadas

Questão 1

O preenchimento da tabela fica dependente da forma como os alunos organizam a contagem dos elementos das bipirâmides. A tabela (tabela 1) em baixo inclui diferentes formas de pensar para a bipirâmide quadrangular:

Tabela 1. Formas de contar o número de elementos da bipirâmide

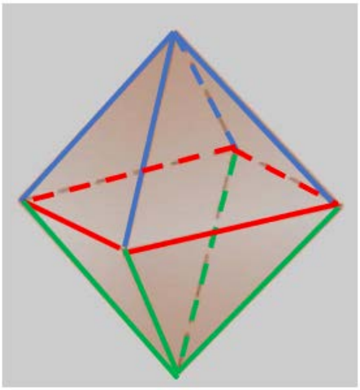
N.º arestas	N.º faces	N.º vértices	Número de lados do polígono que lhe dá nome	Nome do poliedro
4+4+4	4+4	1+4+1	4	bipirâmide quadrangular
8 (de uma pirâmide) +4	4+4	5 (de uma pirâmide) + 1	4	bipirâmide quadrangular
3x4	2x4	2+4	4	bipirâmide quadrangular

As resoluções previstas pressupõem um processo organizado de contagem que, se não for espontâneo, deve ser estimulado pelo professor.

Questão 2

Nesta questão espera-se que os alunos digam que o número total de arestas é o triplo do número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide. Se os alunos já tiverem trabalhado com variáveis em álgebra, poderão usar uma expressão algébrica (3xn). A imagem em baixo ilustra uma forma de pintar as arestas que corresponde à identificação de 3 conjuntos com o mesmo número e que justifica a relação encontrada.

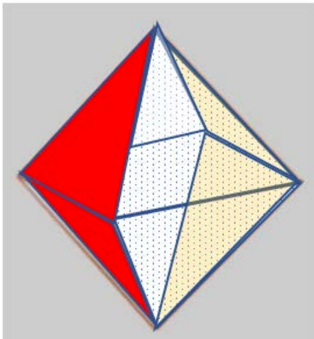
Figura 1. Visualização das arestas



Questão 3

Nesta questão espera-se que os alunos digam que o número total de faces é o dobro do número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide. Se os alunos já tiverem trabalhado com variáveis em álgebra, poderão usar uma expressão algébrica (2xn). A imagem em baixo ilustra uma forma de pintar as faces que corresponde à identificação de duas faces para cada lado do polígono que dá nome à bipirâmide, o que justifica a relação encontrada. Por se tratar de uma representação bidimensional, é muito mais difícil pintar todas as faces de modo percetível. Assim, se existirem modelos em cartolina, os alunos poderão pintar diretamente o modelo e usá-lo para explicar a sua forma de pensar. De forma semelhante, podem usar peças de Polydron da mesma cor para as faces correspondentes.

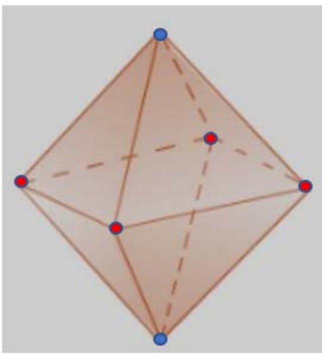
Figura 2. Visualização das faces



Questão 4

Nesta questão espera-se que os alunos digam que o número total de vértices é a soma do número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide com 2. Se os alunos já tiverem trabalhado com variáveis em álgebra, poderão usar uma expressão algébrica (n+2). A imagem em baixo ilustra uma forma de pintar os vértices que corresponde à identificação de um conjunto com o mesmo número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide (4) ao que se juntam os 2 vértices dos topos das pirâmides, o que justifica a relação encontrada.

Figura 3. Visualização dos vértices



Exploração da tarefa

Apresentação da tarefa. Para a realização desta tarefa, propõe-se que os alunos se organizem em grupos de 3 ou 4 elementos. Antes da resolução da tarefa propriamente dita, sugere-se uma atividade livre e exploratória do material, com vista à construção de poliedros diversos (conhecidos ou não) onde poderão surgir, espontaneamente, algumas bipirâmides e outros sólidos desconhecidos dos alunos. O professor poderá então aproveitar essa oportunidade para introduzir a classe das bipirâmides na apresentação da tarefa, mostrando algumas bipirâmides através de modelos tridimensionais e questionando a turma sobre o porquê de ter aquela denominação. Tempo previsto: 30 min + 10 min.

Trabalho autónomo. A segunda fase será realizada em grupos de três a quatro alunos. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Se o professor perceber que os alunos estão a contar cada elemento das bipirâmides um a um, sem um processo organizado, deverá incentivá-los a estruturar a contagem, mas deixando que eles escolham a forma de o fazer. Esse processo pode ser recordado aos alunos no momento em que procuram uma generalização e relacionado com a utilização de cores para comunicar a sua forma de pensar. Tempo previsto: 45 min.

Discussão com toda a turma. Seguir-se-á uma discussão em que o professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes formas e incentivando os alunos a fundamentarem as suas ideias. Esta fundamentação deverá ter por base a forma como os elementos das bipirâmides se encontram organizados e não as regularidades numéricas que reconhecem, pelo que as representações em que usaram cores poderão desempenhar um papel relevante. Nesta etapa, o professor deverá sequenciar as respostas dos grupos segundo um grau crescente de formalização ou eficácia. Por exemplo, se alguns alunos tiverem pensado que podem contar 4+4+4 para chegar às arestas de uma bipirâmide quadrangular e outros fizerem 3x4 para chegar ao valor, esta última proposta, embora equivalente, deve ser valorizada por explicitar a relação multiplicativa. Da mesma forma, para generalizar a relação entre o número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide e o número de arestas, a utilização da representação algébrica (3xn) é mais formal, pelo que deverá ser precedida pela representação em linguagem natural (em que os alunos explicitam que um valor é o triplo do outro).

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Os alunos podem omitir ou contar mais do que uma vez o mesmo elemento (aresta, vértice ou face)	Sugerir que os alunos encontrem uma forma organizada de contar
Nas questões 2, 3 e 4, os alunos podem não conseguir explicitar as relações numéricas	Perguntar qual seria o número de vértices/arestas/faces para o caso de uma bipirâmide em particular que não foi contemplada nem construída anteriormente; perguntar como chegou ao valor pedido.

Concretização da tarefa na prática

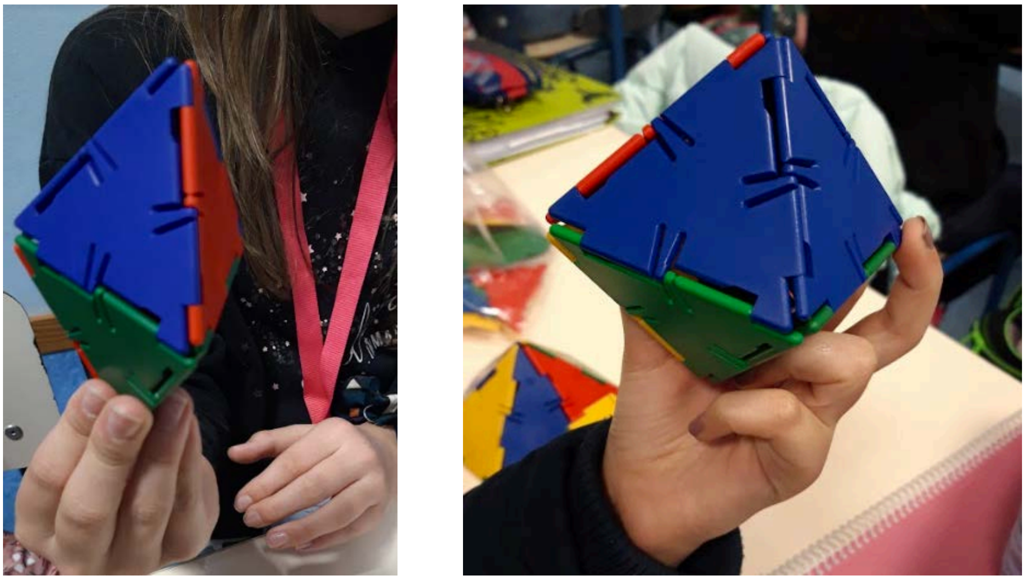
Esta tarefa surgiu na sequência de uma atividade em que os alunos tinham à sua disposição modelos de sólidos geométricos em madeira para, numa primeira fase, classificar os sólidos em poliedros e não poliedros e, posteriormente, distinguir prismas de pirâmides. A versão que aqui apresentamos é ligeiramente diferente da trabalhada com as duas turmas já que, decorrente dessa experiência, considerámos importante introduzir a sugestão de pintar as representações dos sólidos, presentes na tarefa, para ilustrar as relações espaciais.

A tarefa *Conhece as bipirâmides* teve um momento prévio de exploração livre de poliedros. As professoras deram aos grupos peças de Polydron e explicaram que as deveriam usar para construir poliedros, mesmo que não soubessem o seu nome ou nunca os tivessem visto. Desde o início do ano letivo, as professoras trabalhavam com os alunos em grupos de 4 elementos, organização que se manteve nestas aulas.

No relato que se segue, temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Como esperado, os alunos trabalharam com entusiasmo nas suas construções, surgindo rapidamente diferentes poliedros, incluindo antiprismas e bipirâmides. Alguns alunos que construíram estes sólidos questionaram a professora sobre se as suas construções eram poliedros, ao que esta respondeu pedindo que recordassem as características de um poliedro e, de seguida, que verificassem se o sólido construído tinha as características que permitissem classificá-lo como poliedro. Depois de concluídas as construções, o porta-voz de cada grupo mostrou os poliedros construídos pelo grupo e escolheu um para falar das suas características à turma.

Figura 4. Bipirâmides construídas a partir das peças de Polydron



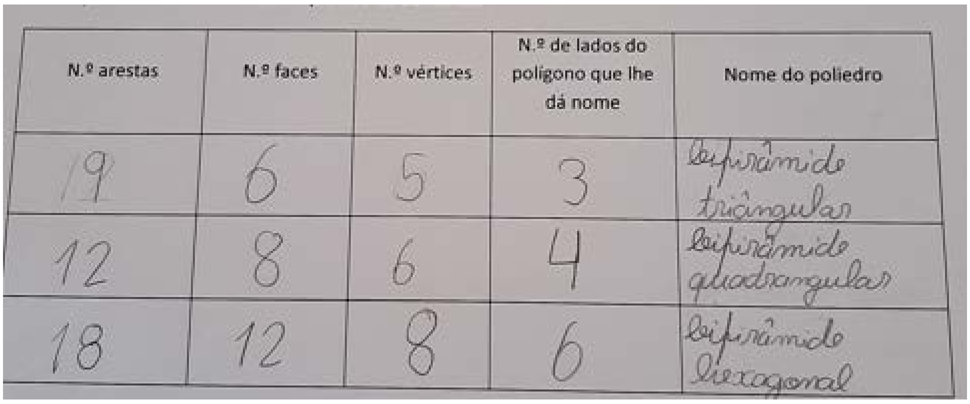
Apresentação da tarefa

Concluído o primeiro momento de exploração, passou-se à tarefa *Conhece as bipirâmides*. A professora distribuiu o enunciado da tarefa e solicitou aos alunos que o lessem e vissem o que tinham de fazer. Indicou tempo previsto para a resolução e discussão da tarefa em pequeno grupo e informou que, durante a discussão com toda a turma, o porta-voz de cada grupo deveria apresentar as conclusões.

Trabalho autónomo dos alunos

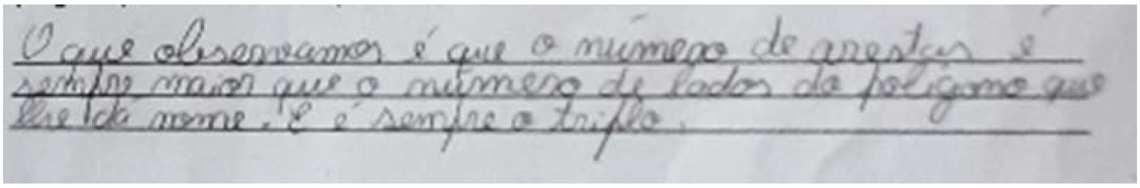
Do observado, nenhum dos alunos/grupos revelou dificuldade na resolução da tarefa proposta, tanto no preenchimento da tabela (ver exemplo da figura 5) como no estabelecimento de relações entre os diferentes elementos do sólido geométrico (ver exemplo da figura 6). Na justificação das suas escolhas identificaram as relações de dobro, triplo e o número de vértices +2, focando-se essencialmente nas relações numéricas. Isto significa que, nos registos escritos, os alunos não relacionam cada regularidade com as relações espaciais descritas anteriormente. Por exemplo, não referem que para obter o número de vértices da bipirâmide adicionam 2 por serem os vértices do topo das duas pirâmides.

Figura 5. Exemplos de respostas à Questão 1



N.º arestas	N.º faces	N.º vértices	N.º de lados do polígono que lhe dá nome	Nome do poliedro
9	6	5	3	bipirâmide triângular
12	8	6	4	bipirâmide quadrangular
18	12	8	6	bipirâmide hexagonal

Figura 6. Exemplos de respostas à Questão 2



O que observamos é que o numero de arestas é sempre maior que o número de lados do polígono que lhe dá nome. E é sempre o triplo.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

A professora reproduziu no quadro a tabela que se encontra no enunciado da tarefa e os grupos deram o seu contributo para o preenchimento da mesma. Para responder às questões seguintes, cada grupo apresentou a sua resposta, indicando também como tinham pensado para chegar à relação pedida.

Após a tabela projetada estar completamente preenchida, a professora questionou os alunos sobre a relação entre o número de arestas da bipirâmide e o número de lados do polígono que lhe dá nome:

Aluno 1. – O nosso grupo concluiu que o número de arestas é o triplo do número de lados do polígono (quadrado).

Prof.ª – Podem exemplificar?

Aluno 1 - Então a bipirâmide quadrangular tem 12 arestas, 3 x 4 é 12.

Aluno 2 – Professora, também dá para a bipirâmide pentagonal. Tem 15 arestas, então 3 x 5 é igual a 15.

Prof.ª – E descobriram outras relações, certo? Quais foram?

Aluno 3 – Que o número de faces da bipirâmide é o dobro do número de lados do polígono que lhe dá nome.

Aluno 4 – Professora, o nosso grupo também descobriu uma relação dos vértices.

Prof.ª – Querem explicar melhor?

Aluno 4 – Então, o nosso grupo descobriu que o número de vértices é igual ao número de lados do quadrado mais 2.

Aluno 5 – Também dá o mesmo para o pentágono.

Prof.ª – Queres dizer para o caso da bipirâmide pentagonal?

Aluno 5 – Sim.

Tal como aconteceu nos registos escritos, espontaneamente os alunos não se referem às relações espaciais. Desta forma, foi necessário incentivar os alunos a fazê-lo e acompanharem a sua explicação com os modelos de sólidos na mão. Quando incentivados a explicar a regularidade com base nas relações espaciais, os alunos não revelaram dificuldades significativas. Contudo, há uma facilidade na explicação oral, facilmente articulada com os gestos sobre os modelos físicos, que é muito diferente quando se passa para um registo escrito. Por esse motivo, a versão da tarefa que aqui apresentamos inclui a sugestão de utilização de cores.

Após a discussão da tarefa, os alunos registaram no caderno diário uma síntese das descobertas realizadas com este trabalho.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Conhece as bipirâmides* em duas turmas do 5.º ano de escolaridade no ano letivo de 2021/22, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Os alunos realizaram com relativa facilidade a tarefa, o que possivelmente beneficiou do trabalho prévio feito com modelos físicos. A designação dos elementos dos sólidos (faces, vértices, arestas…) era do conhecimento das turmas. No entanto, foi importante a fase de construção, com recurso a material manipulável (Polydron) porque facilitou o aparecimento de "novos" sólidos geométricos e a utilização dos termos corretos como uma necessidade para falar sobre esses sólidos.

Nesta tarefa, também era pedido que os alunos estabelecessem a relação entre o número de faces, arestas e vértices com o polígono que dá nome ao poliedro. A maior parte dos alunos conseguiu prever e registar corretamente estas relações. No entanto, demonstraram mais dificuldades para estabelecer a relação entre o número de vértices e o número de lados do polígono que dá nome à bipirâmide.

Capacidades matemáticas transversais

Ao longo do desenvolvimento desta tarefa, as professoras procuraram proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos solicitando, de forma explícita, que os alunos formulassem e testassem conjeturas a partir da identificação de regularidades, como podemos reconhecer nos registos dos alunos feitos em pequeno grupo e nas respostas dadas na discussão em grande grupo. Esta atividade corresponde a algo que muitos alunos apreciam: fazer descobertas e verificar se são válidas experimentando outros casos.

Menos espontânea e acessível é a explicação do seu raciocínio, particularmente o registo escrito. Como exemplificámos anteriormente, argumentar sobre objetos geométricos implica fazer alusão aos seus elementos e à forma como se relacionam. Quando esses objetos são tridimensionais, como aqui acontece, a tradução dessas ideias no plano fica dificultada, pelo que é fundamental que o professor crie condições para promover a comunicação, nomeadamente disponibilizando modelos físicos e dedicando momentos de discussão coletiva sobre as descobertas dos alunos.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Ao longo da resolução da tarefa os alunos trabalharam em grupos de 4 ou 5 alunos. Partilharam os materiais e apoiaram-se na contagem dos elementos dos sólidos e no registo da tabela, o que naturalmente estimulou a capacidade de trabalhar em equipa e de saber ouvir e ser ouvido. Em alguns grupos, houve alunos que chegaram mais rapidamente às conclusões, tendo sido necessário pedir que estes explicassem aos seus colegas o modo como estavam a pensar, e que, em pequeno grupo, chegassem a um acordo sobre o que iriam apresentar à turma. A discussão em torno das conclusões dos diferentes grupos favoreceu ainda o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Tarefa — Vamos explorar as rosáceas

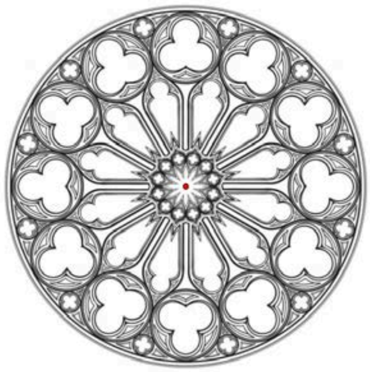
Enunciado da tarefa

Vamos explorar as rosáceas

Dizemos que uma figura tem simetria de rotação se existir uma rotação que deixa a figura "invariante" (além da rotação de 360º). Na prática, é como se depois de efetuada a rotação não notássemos qualquer mudança na figura, nem mesmo na sua posição!

A uma figura plana que tenha um número limitado de simetrias de rotação chamamos **rosácea**.

1. Vamos investigar as simetrias de rotação de rosáceas. Começa por aceder à aplicação do GeoGebra através do link https://www.geogebra.org/m/yadfuqkq



Para cada figura, move os seletores e responde às perguntas que se seguem.

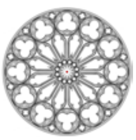
Organiza as respostas na tabela.

a. Qual é a medida do ângulo mínimo que deixa a figura invariante?

b. Quais são as medidas dos ângulos que deixam cada uma das rosáceas invariantes sob rotação?

c. E quantos ângulos deixam a figura invariante?

d. Quantos eixos de simetria tem a figura?

Rosácea	a. Ângulo mínimo	b. Todos os ângulos	c. Quantos ângulos?	d. Quantos eixos de simetria?
				
				

2. Observa a tabela preenchida e, para cada rosácea, descobre relações entre os números representados em cada linha.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Operações com figuras	Simetrias de rotação e reflexão
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar
	Conexões matemáticas	Conexões internas Modelos matemáticos
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e criativo	Pensamento crítico
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da matemática

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que, progressivamente, os alunos sejam capazes de:

- Analisar as simetrias de rotação de rosáceas e explicar a forma como foram construídas, relacionando o ângulo mínimo de rotação com as características das rosáceas.
- Relacionar, para rosáceas com simetria de reflexão, o número de eixos de simetria com a medida da amplitude do ângulo mínimo de rotação.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada.
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

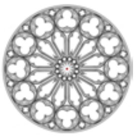
Computador ou *tablet* com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado e o ficheiro descarregado. Enunciado da tarefa.

Resoluções esperadas

Questão 1

Nesta questão esperamos que os alunos preencham a tabela sem grandes dificuldades:

Tabela 1: Preenchimento correto da tabela

Rosácea	a. Ângulo mínimo	b. Todos os ângulos	c. Quantos ângulos?	d. Quantos eixos de simetria?
	60°	60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°	6	6
	30°	30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360°	12	12

Apesar de só se pedir o número de eixos de simetria, os alunos precisarão de os desenhar para poder contá-los. Se a tarefa for dada apenas em suporte digital, também é possível desenhar os eixos de simetria a partir do manipulável digital através da opção "Abrir com uma App GeoGebra", tal como foi feito na figura 1 e figura 2.

Figura 1.Exemplo de eixos

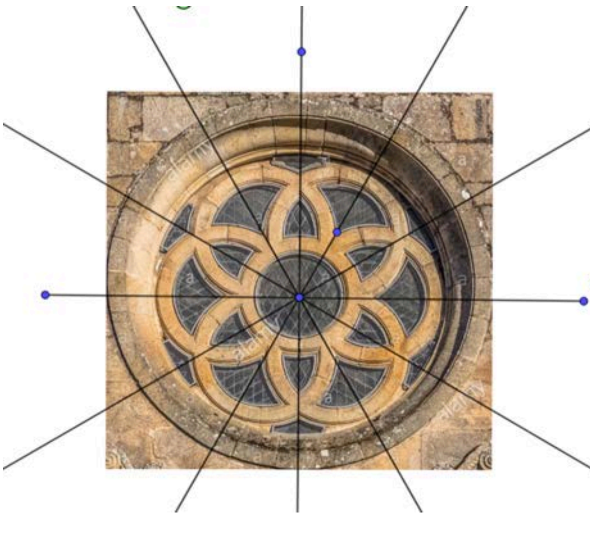
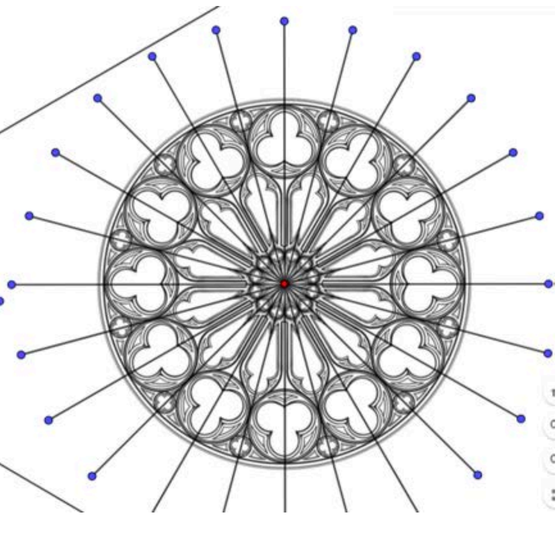


Figura 2. Exemplo de eixos



Questão 2

Embora seja natural que os alunos comparem as duas rosáceas, dizendo, por exemplo, que o número de ângulos e eixos da segunda rosácea é o dobro do número de ângulos e eixos da primeira, nesta questão interessa-nos, sobretudo, que os alunos identifiquem relações entre os números obtidos em cada rosácea. Concretamente, pretendemos que identifiquem que:

- Os ângulos que deixam a figura invariante são todos múltiplos do ângulo mínimo (são todos os múltiplos menores a 360 e o próprio);
- O número de eixos de simetria é igual ao número de ângulos que deixam a figura invariante;
- A medida do ângulo mínimo obtém-se dividindo 360 pelo número de eixos de simetria ou pelo número de ângulos que deixa a rosácea invariante.

Eventualmente, os alunos podem aperceber-se que número de ângulos que deixam a figura invariante sob rotação corresponde ao número de repetições do motivo da rosácea (o elemento que se repete por rotação).

Exploração da tarefa

Sugere-se que os alunos se organizem em pares e que cada par disponha de um computador ou *tablet*. Se existir acesso à Internet, os alunos poderão aceder ao manipulável virtual através do *link* apresentado no enunciado. Se o sinal de rede de Internet for instável, a turma poderá trabalhar offline. Para tal é necessário que os dispositivos tenham o GeoGebra instalado e, previamente, tenha sido descarregado o ficheiro da construção acessível a partir do link no enunciado (primeiro "Abrir com uma App GeoGebra" e fazer o "Download").

Apresentação da tarefa. Uma vez que esta pode ser a tarefa introdutória sobre o conceito de rosácea, e havendo um significado parcialmente partilhado com o conceito arquitetónico que usamos em linguagem corrente, sugerimos que na apresentação da tarefa o professor comece por perguntar aos alunos se sabem o que é uma rosácea e dê alguns exemplos que pode selecionar de monumentos da sua região. Depois deste momento, explica o significado de rosácea no âmbito da matemática, tendo o cuidado de tornar claro o que significa "invariante". É natural que alguns alunos confundam "invariante" com "congruente" (ou "igual"), o que leva à conclusão que qualquer rotação deixaria a figura invariante, o que é falso.

Terminada a apresentação, o professor dá as instruções à turma sobre a forma como o trabalho autónomo se desenvolverá, tendo o cuidado de acautelar as questões tecnológicas. Sugere-se que os alunos se organizem em grupos de 4 elementos ou a pares, desde que haja pelo menos um computador ou *tablet* por grupo. Tempo previsto: 15 min.

Trabalho autónomo. Durante a segunda fase, o professor irá circulando pelos grupos verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Em particular, neste apoio deve estar atento ao rigor que os alunos usam quando fazem coincidir a imagem da rosácea com o seu original, de modo a obter os valores exatos. No que respeita à identificação dos eixos de simetria, é natural que alguns sejam omitidos, pelo que também é um aspeto para o qual deve estar atento. Tempo previsto: 40 min.

Discussão com toda a turma. Depois do trabalho autónomo seguir-se-á uma discussão com toda a turma, em que o professor solicitará as respostas a alguns grupos. Para a questão 1 só há uma possibilidade de resolução correta, mas é bom verificar se existem outras respostas que possam requerer esclarecimento. Já na questão 2, é natural que uns grupos extraiam algumas conclusões diferentes de outros e que se possam complementar. Além da listagem e sistematização de relações numéricas, importa estabelecer uma relação com os elementos da rosácea. Assim, o professor poderá perguntar "por que será que na rosácea à esquerda existem 6 ângulos que tornam a figura invariante?", "vejam bem como é a rosácea", ou ainda, ajudando mais um pouco, "será que há elementos que se repetem?". Tempo previsto: 20 min.

Ainda nesta fase de sistematização, é importante salientar que, para estas rosáceas, existe o mesmo número de simetrias de reflexão e de rotação, mas que existem outras rosáceas que não têm simetria de reflexão e, para essas, claro que a relação não se verifica.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Significado de figura invariante	Usar uma figura com simetria de meia-volta (por exemplo, a letra H, e rodá-la de forma a que ele fique claramente numa posição diferente (por exemplo, 90°) e rodar 180°. Pedir para comparar com o original.
Não contabilizar o ângulo de 360°	Explicar que só não contabilizamos 360° se esta for a única amplitude que deixa a figura invariante.
Não identificar todos os eixos de simetria, por exemplo, identificar eixos em posições particulares como as seguintes:  	Sugerir que os alunos rodem um pouco a folha para verem a figura noutra posição, em particular, rodar a figura de modo a que o eixo ausente, uma vez desenhado, fique na vertical.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi desenvolvida em 3 tempos de 50 minutos.

Como nas tarefas anteriores, os alunos estavam organizados em grupos de quatro e cada par dispunha de um computador ou *tablet*. Na turma em que existia acesso à Internet, os alunos acederam ao manipulável virtual através do *link* apresentado no enunciado. Na turma em que o acesso à Internet não era possível, o GeoGebra foi instalado nos *tablets* e o ficheiro com a construção estava acessível a partir de um *link* no ambiente de trabalho.

No relato que se segue, temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Apresentação da tarefa

Uma vez que os alunos iriam, ao longo desta tarefa, fazer uma investigação sobre simetrias de rotação de rosáceas foi necessário chamar à atenção para a frase no início do enunciado onde se apresenta uma definição de rosácea. Com base na fotografia do enunciado, as professoras pediram aos alunos que se recordassem se já tinham visto alguma imagem semelhante e, se sim, onde. Após alguma discussão, os alunos nomearam alguns monumentos onde é possível observar este tipo de construções.

Antes de os alunos iniciarem o trabalho autónomo, as professoras recordaram como utilizar a aplicação do GeoGebra.

Trabalho autónomo dos alunos

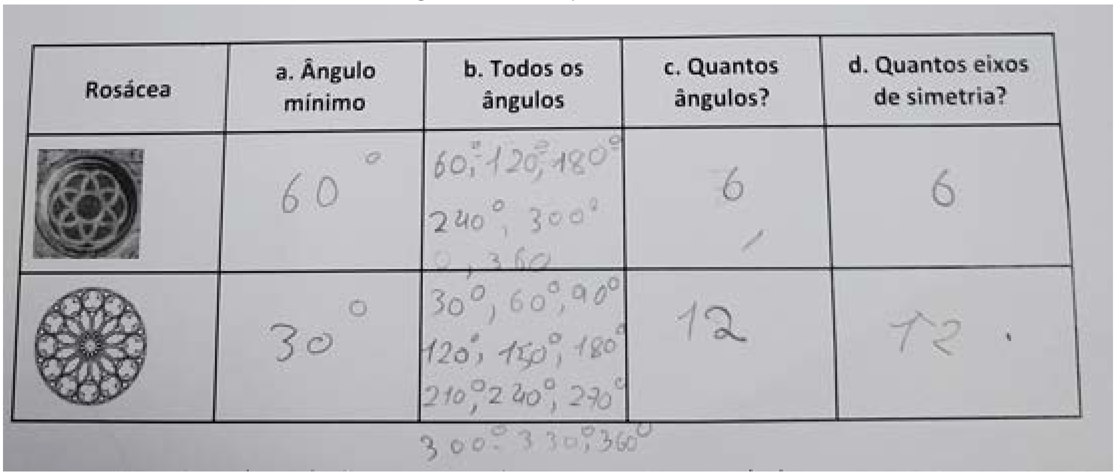
Os alunos iniciaram o trabalho acedendo à aplicação e procurando responder às questões do enunciado (figura 3).

Figura 3. Alunos a trabalhar com *tablet* na aplicação

Para resolver a primeira questão, os alunos usaram os seletores da aplicação e indicaram, para cada figura, o ângulo mínimo de rotação. Contudo, na maior parte dos grupos foi necessário a intervenção da professora, sugerindo, por exemplo, que movessem o seletor com pequenos toques ou muito lentamente, para conseguirem visualizar o ângulo mínimo de rotação na primeira figura. Por se tratar de uma fotografia e haver fundo, a visualização da invariância da figura fica mais difícil. Na segunda figura, por ser um desenho a preto com fundo branco, não verificámos a mesma dificuldade.

Na segunda questão, era pedido aos alunos que descobrissem as medidas de todos os ângulos que deixam cada uma das rosáceas invariantes. Num grupo, foi interessante verificar que os alunos não rodaram a figura até o seletor chegar aos 360 graus porque se aperceberam que "era a tabuada do 60" e, em vez disso, registaram os valores até encontrarem o valor 360 correspondente a uma volta completa. A partir daqui responderam com relativa facilidade à questão "quantos ângulos deixam a figura invariante?".

Figura 4. Produção de alunos



Rosácea	a. Ângulo mínimo	b. Todos os ângulos	c. Quantos ângulos?	d. Quantos eixos de simetria?
	60°	60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360	6	6
	30°	30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360°	12	12.

A pergunta sobre o número de eixos de simetria revelou-se mais difícil. Os alunos tiveram de traçar os eixos de simetria nas figuras representadas no papel (figura 5 e figura 6) para indicar o número de eixos de cada rosácea e, nalguns casos, houve eixos que ficaram por identificar.

Figura 5. Alunos a procurar eixos de simetria

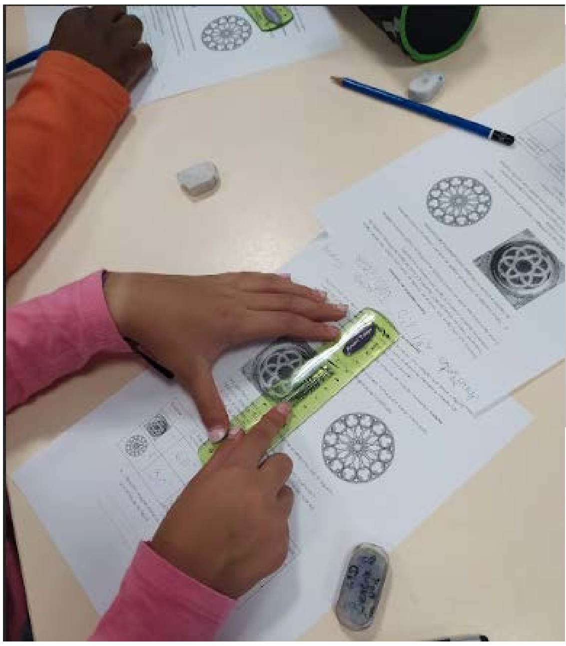
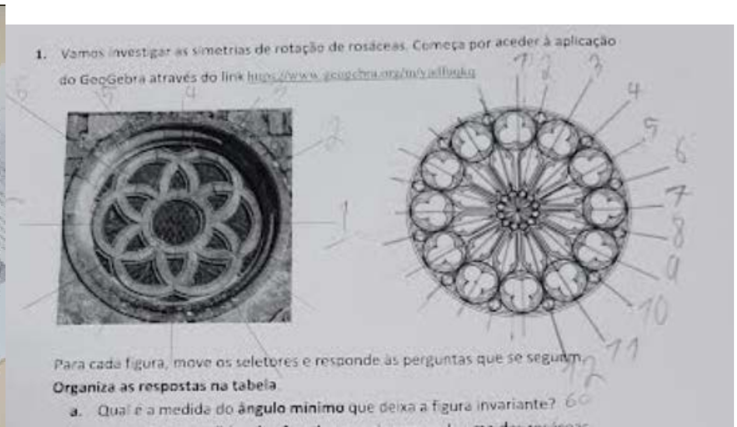
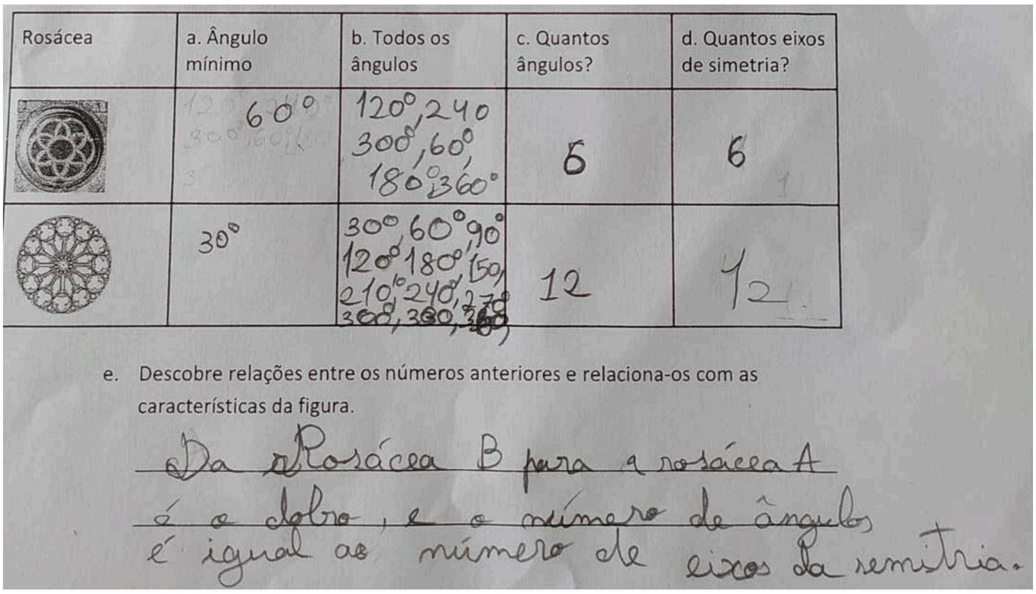


Figura 6. Produção final de alunos



Para responder à última questão, os alunos observaram a tabela e os dados nela registados, tendo alguns grupos demonstrado dificuldades em estabelecer relações entre o número de eixos de simetria e o número de ângulos porque o número de eixos não fora bem identificado. Apesar de não ser o propósito da tarefa, houve grupos que relacionaram as duas rosáceas percebendo, como é exemplo na figura 7, que o ângulo mínimo da primeira rosácea tem o dobro da amplitude do ângulo da segunda rosácea. Trata-se de uma relação bastante evidente, até porque os números envolvidos são de referência.

Figura 7. Produção de alunos



Rosácea	a. Ângulo mínimo	b. Todos os ângulos	c. Quantos ângulos?	d. Quantos eixos de simetria?
	60°	120°, 240, 300°, 60°, 180°, 360°	6	6
	30°	30°, 60°, 90°, 120°, 180°, 150, 210°, 240°, 270, 300, 330, 360	12	12

e. Descobre relações entre os números anteriores e relaciona-os com as características da figura.

Da Rosácea B para a rosácea A é o dobro, e o número de ângulos é igual ao número de eixos da semitria.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

Depois do trabalho em grupo, com base nas descobertas dos alunos, realizou-se uma discussão e apresentação de conclusões em grande grupo. A professora projetou as rosáceas e discutiu com os grupos os resultados a que cada um chegou.

Neste momento, os alunos identificaram as regularidades relativas às medidas dos ângulos, nomeadamente serem múltiplos de 30 e 60 (muito embora essa ideia pudesse ser expressa de outra forma), e a relação entre o número de eixos de simetria e o número de ângulos. Todavia, uma vez que os alunos não tinham estabelecido mais relações, a professora questionou os grupos como é que tinham encontrado a resposta à questão "quantos ângulos deixam a figura invariante?". Todos os grupos responderam que foram contar os número de ângulos registados na coluna "b: Todos os ângulos". Por isso, a professora questionou se não haveria outra maneira de determinar o número de ângulos que deixa a figura invariante, tendo em conta os valores conhecidos e as descobertas realizadas durante o trabalho autónomo. Sem resposta, a docente teve necessidade de orientar mais os alunos questionando "que valor se obteria se dividissem 360 graus pelo valor do ângulo mínimo?" e sugeriu que os alunos dividissem 360 por 30. Ao realizarem a operação, os alunos verificaram que o quociente obtido é 12, que é igual ao número de ângulos que eles tinham contado para a rosácea cujo ângulo mínimo é 30 graus. Fizeram ainda a divisão de 360 por 60 e obtiveram o número de ângulos que eles tinham contado para a rosácea da esquerda. Este questionamento fez então emergir outra relação que as turmas não tinham identificado: o quociente entre 360 e o ângulo mínimo de rotação corresponde ao número de simetrias de rotação.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Vamos explorar as rosáceas* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Nesta tarefa os alunos evidenciaram facilidade em identificar o ângulo mínimo de rotação, bem como o número de simetrias de rotação de cada rosácea, usando o AGD como ferramenta de análise. Já sem essa ferramenta, desenharam os eixos de simetria das rosáceas (um conteúdo relativo ao 1.º ciclo), embora exibindo algumas dificuldades que são comuns em situações em que existem vários eixos, alguns deles oblíquos. Assim, reforçamos aqui a importância da abordagem em espiral, recuperando e alargando a aprendizagem dos conteúdos a situações novas e progressivamente mais complexas. Uma vez identificados todos os eixos de simetria, tornou-se fácil identificar a relação de igualdade entre o seu número e o número de simetrias de rotação. Já no que respeita à relação entre o ângulo mínimo de rotação com as características das rosáceas, foi necessária a intervenção das professoras para que os alunos reparassem que a sua medida resulta do quociente de 360 com o número de simetrias de rotação. Esta é também uma reação esperada, uma vez que os alunos tendem a identificar mais facilmente relações multiplicativas e aditivas. Ainda a este propósito, salientamos que, apesar de os alunos não terem dito que os valores obtidos para os ângulos correspondem aos múltiplos do ângulo mínimo, alguns traduziram essa ideia dizendo que era "a tabuada do 60". Finalmente, os alunos não identificaram que o ângulo mínimo corresponde ao quociente de 360 pelo número de motivos repetidos na rosácea, uma relação que as professoras também não estimularam na discussão por ser alvo de atenção na tarefa seguinte.

Capacidades matemáticas transversais

A análise dos dados da tabela com as respostas à questão 1 favoreceu o estabelecimento de relações numéricas que se traduziram na formulação de conjeturas, tal como estava previsto. Além deste processo de raciocínio, esta tarefa foi também promotora do estabelecimento de conexões: conexões externas, desde logo com a arquitetura e o património histórico em que a construção de rosáceas foi, durante vários séculos, um elemento presente e característico, tendo a geometria um papel fundamental na sua construção; e conexões internas, em particular com o tópico dos múltiplos e divisores que são um elemento estruturante no estudo das rosáceas.

Capacidades e atitudes gerais transversais

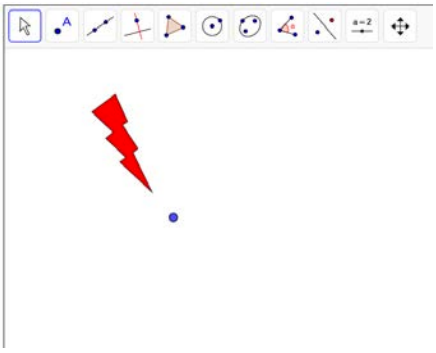
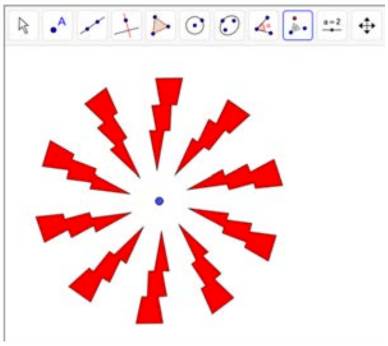
Nesta tarefa pretendemos contribuir também para o pensamento crítico através da análise e discussão de ideias a partir de evidências, o que esteve presente. Além disso, o estabelecimento de conexões externas, referidas no ponto anterior, é outro elemento que poderá favorecer o reconhecimento da importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos. Este é um aspeto difícil de avaliar, mas pudemos perceber que os alunos aderiram muito bem à tarefa e procuraram usar a tecnologia como uma ferramenta poderosa para analisar as rosáceas, o que nos parece ser um bom indicador.

Tarefa — Vamos construir rosáceas

Enunciado da tarefa

Vamos construir rosáceas

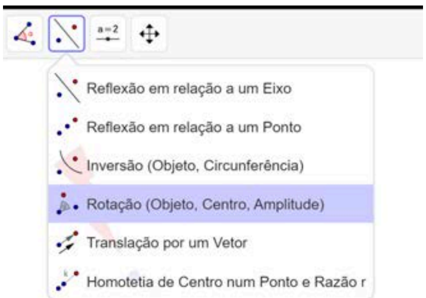
1. Vamos construir uma rosácea de 10 pétalas como mostra a figura da direita, rodando o relâmpago várias vezes.

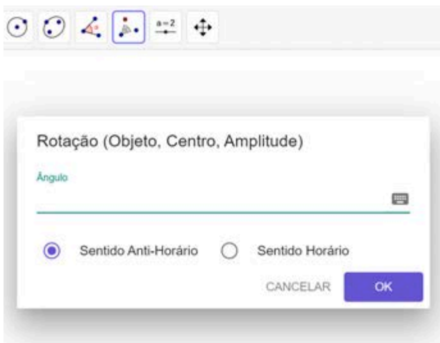



Façam uma previsão da amplitude do ângulo de rotação que vão usar para construir a rosácea. Expliquem como pensaram para chegar a essa previsão.

2. Acedam ao link https://www.geogebra.org/m/msatnsh5. Construam a rosácea usando o ângulo proposto na questão anterior. Usem as informações seguintes para vos ajudar.

Para efetuar a rotação do relâmpago, segue os seguintes passos: 1) escolhe a ferramenta Rotação; 2) clica no relâmpago; 3) clica no ponto azul (centro); 4) apaga a medida do ângulo que surge na caixa, escreve a que desejares e seleciona um sentido.





O que aconteceu?

- Se conseguiram obter a rosácea de 10 pétalas, fotografem-na e enviem a imagem para o mail da professora;
- Se ainda não conseguiram, façam novas tentativas até obter a rosácea tentando perceber qual foi o vosso erro. Ficaram com pétalas a mais ou a menos? O ângulo terá

sido demasiadamente grande ou pequeno? Que alterações têm de efetuar para obterem a rosácea com as 10 pétalas?

Experimentem de novo.

3. Mudem a posição do centro de rotação e observem o que acontece à rosácea.
4. Usem o botão  para voltar a ter a tela inicial. Experimentem construir uma nova rosácea, desta vez com 8 pétalas. Expliquem como pensaram para encontrar a amplitude do ângulo de rotação.
5. Escrevam uma expressão algébrica para a amplitude do ângulo mínimo de rotação de uma rosácea de *n* pétalas.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Operações com figuras	Construção de imagens de figuras por rotação Simetrias de rotação e de reflexão
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento computacional	Abstração, Decomposição, Reconhecimento de padrões, Depuração
	Conexões matemáticas	Conexões internas Modelos matemáticos
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Autorregulação, perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da matemática

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que, progressivamente, os alunos sejam capazes de:

- Construir as imagens de uma figura, por rotações sucessivas, de modo a formar uma rosácea.
- Extrair a informação essencial de um problema.

- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada.
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações.
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Computador ou *tablet* com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado e o ficheiro descarregado.

Resoluções esperadas

Questão 1

Nesta questão espera-se dois tipos de respostas: a) 36° se os alunos tiverem identificado, pelo trabalho efetuado anteriormente (por exemplo, usando a tarefa *Vamos conhecer as rosáceas*), a relação entre o número de elementos da rosácea e o ângulo de rotação; b) um valor estimado, que é natural que esteja enquadrado entre 30° e 60° por comparação com outras rosáceas. Note-se, no entanto, que esta não é uma tarefa para aplicação de uma regra, mas sim para os alunos chegarem à referida relação.

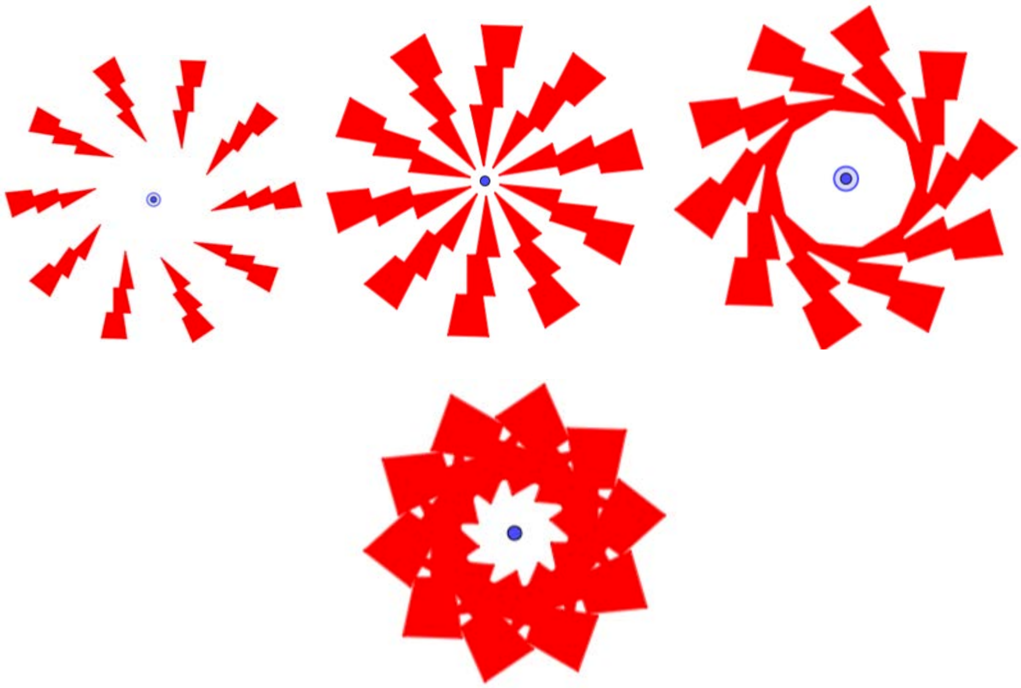
Questão 2

Nesta questão os alunos deverão chegar à imagem da direita que se apresenta no enunciado, o que poderá acontecer ao fim de várias tentativas.

Questão 3

As seguintes rosáceas (figura 1) são apenas alguns exemplos possíveis de obter a partir da manipulação do centro.

Figura 1. Exemplos de rosáceas



A partir da manipulação do centro da rosácea, os alunos poderão verificar que quando o centro se afasta/aproxima de um dos elementos da rosácea, afasta-se/aproxima-se de todos. Poderão ainda, através de uma manipulação mais livre, observar rosáceas em que existe sobreposição entre os vários elementos originando efeitos visuais cativantes.

Questão 4

Se anteriormente os alunos tiverem chegado à amplitude adequada para a rosácea de 10 pétalas dividindo 360 por 10, é natural que agora obtenham rapidamente o valor 45 dividindo 360 por 8. Já para os que resolveram por tentativa e erro, é possível que o façam de novo até descobrirem que o ângulo correto tem 45°. Em todo o caso, para estes alunos, esta descoberta poderá apoiar a identificação da relação que se pede na questão seguinte.

Questão 5

Tendo descoberto a relação em causa e já havendo alguma familiaridade com expressões algébricas, espera-se que os alunos escrevam que a amplitude é dada por 360/n.

Exploração da tarefa

Sugere-se que os alunos se organizem em pares e que cada par disponha de um computador ou *tablet*. Se existir acesso à Internet, os alunos poderão aceder ao manipulável virtual através do link apresentado no enunciado. Se o sinal de rede de Internet for instável, a turma poderá trabalhar offline. Para tal é necessário que os dispositivos tenham o GeoGebra instalado e, previamente, tenha sido descarregado o ficheiro da construção acessível a partir do link no enunciado (primeiro "Abrir com uma App GeoGebra" e fazer o "Download").

Apresentação da tarefa. O professor deverá fazer a apresentação da tarefa explicando que o objetivo será a construção de rosáceas e, conforme a familiaridade da turma com o GeoGebra, poderá mostrar ou recordar como se faz a rotação de uma figura usando o programa. Uma vez que deverão ser os alunos a descobrir como farão para chegar às rosáceas pretendidas, será útil incentivá-los a ser persistentes e convidá-los a partilhar as suas rosáceas consigo para que sejam analisadas coletivamente no fim da atividade. Tempo previsto: 15 min.

Trabalho autónomo. Durante a segunda fase, o professor irá circulando pelos grupos verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Em particular, neste apoio deve estar atento à forma como os alunos tentam chegar às rosáceas propostas. Mesmo quando o fazem por tentativa e erro, o professor pode, ao invés de os encaminhar para a solução, incentivá-los a analisar as tentativas já realizadas: Têm mais ou menos do que 10 pétalas? Isso significa que o ângulo tem de ser maior ou menor? Todos os espaços entre as pétalas são iguais? Tempo previsto: 60 min.

Discussão com toda a turma. Seguir-se-á uma discussão em que o professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes formas e incentivando os alunos a fundamentarem as suas ideias. Se surgirem figuras que não são exatamente rosáceas, o professor poderá convidar os alunos a analisar as figuras obtidas e identificar os erros. Se nenhum grupo tiver encontrado a relação pretendida, poderá fazer uma tabela com diferentes amplitudes e o número respetivo de pétalas da rosácea gerada, de modo a chegar à generalização. Uma vez identificada a relação, os alunos deverão ser desafiados a pensar na justificação pela qual o ângulo mínimo corresponde ao quociente entre 360 e o número de pétalas.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	**Exemplos de possíveis ações do professor**
Não conseguir chegar ao valor 36° na questão 2 ao fim de várias tentativas.	Perguntar aos alunos como fariam para obter uma rosácea com 4 pétalas e, uma vez obtida a resposta correta, pedir para pensarem porque será aquele valor fazendo rotações de 90°
Não conseguir escrever a expressão algébrica.	Pedir para expressar verbalmente como devem proceder para obter a medida do ângulo e questionar com exemplos concretos.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi desenvolvida em 3 tempos de 50 minutos. Numa das turmas, a sala onde decorreu a aula permitia o acesso à Internet e os alunos acederam ao GeoGebra através do *link* apresentado no enunciado. Na outra turma, devido ao sinal de rede de Internet ser muito instável, a turma trabalhou offline. Foi necessário instalar previamente o GeoGebra nos dispositivos móveis e colocar um exemplar da tarefa (em pdf) no ambiente de trabalho.

No que se segue temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Apresentação da tarefa

A professora apresentou o enunciado da tarefa aos grupos recordando o trabalho realizado sobre as rosáceas, simetrias de rotação, amplitude de ângulos e as relações entre ângulos. Depois deu instruções aos alunos relativamente à sua forma de organização. Tal como era hábito desde o início do ano letivo, os alunos trabalharam em grupos de quatro. Contudo, devido às características da tarefa, cada dois partilharam um computador ou um *tablet*, o que influenciou também a dinâmica do grupo.

Trabalho autónomo dos alunos

Seguindo as instruções do enunciado da tarefa, os alunos fizeram as previsões e foram testá-las no GeoGebra para verificarem se estavam ou não corretas. Inicialmente, foi necessário reforçar que uma previsão não está certa nem errada, trata-se de uma hipótese que, posteriormente, se pode verificar ser boa ou não.

Nesta previsão houve alguns grupos, poucos, que avançaram com o valor 36° como primeira medida (figura 2 e figura 3). Pelo valor escolhido, acreditamos que tenham percebido que a medida do ângulo se obtém pela divisão de 360 por 10, relação que foi facilitada pela tarefa *Vamos conhecer as rosáceas*.

Figura 2. Produção de alunos

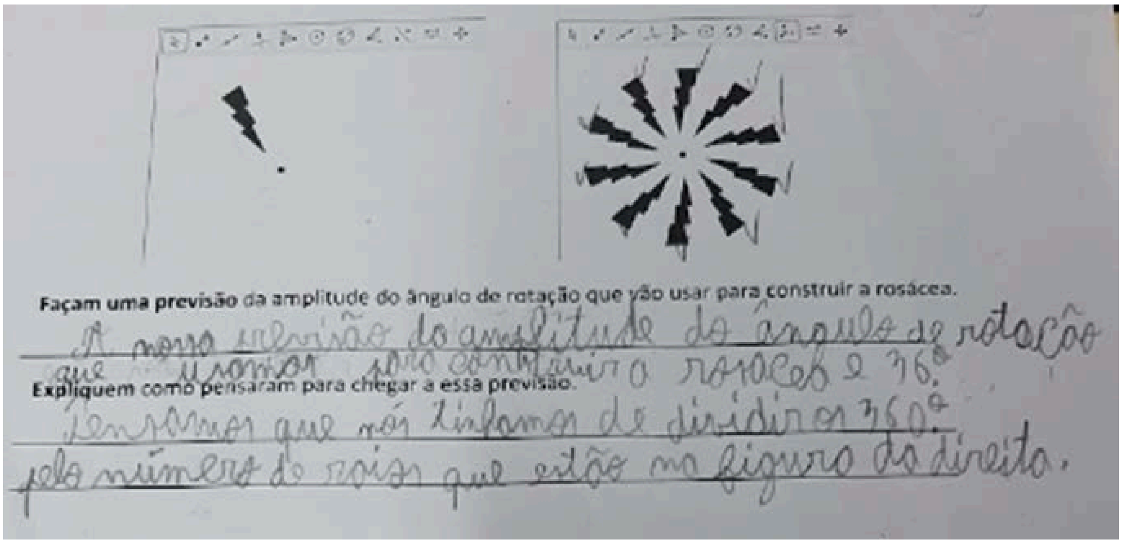
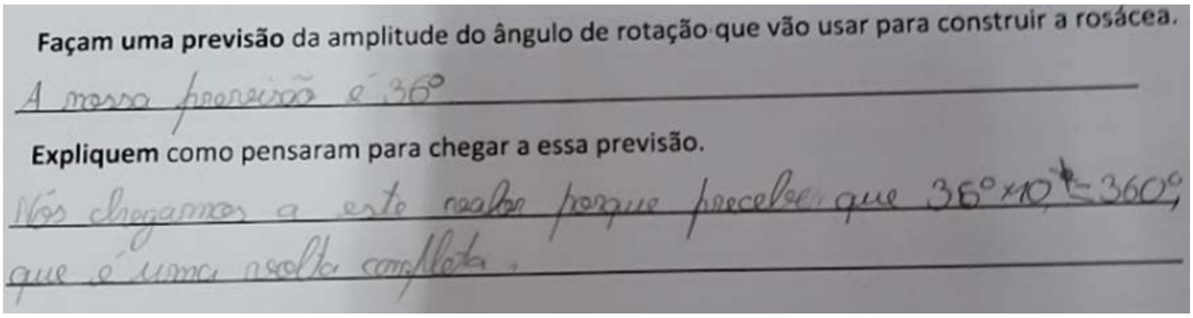
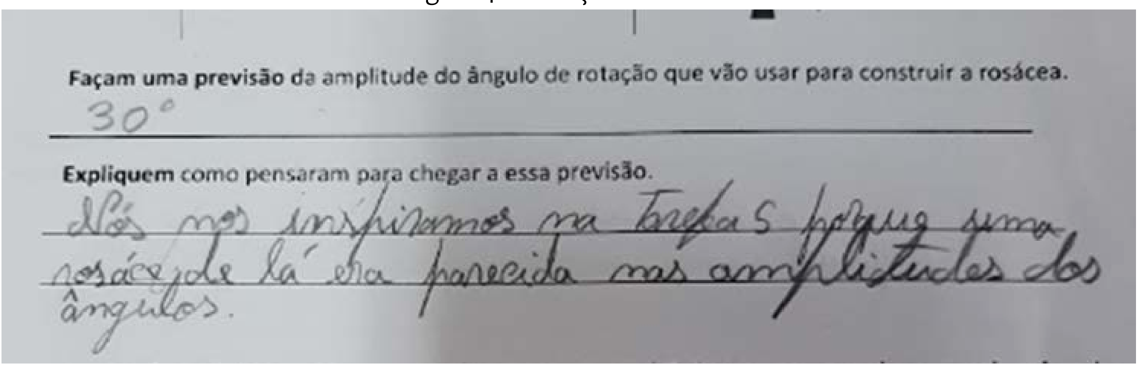


Figura 3. Produção de alunos



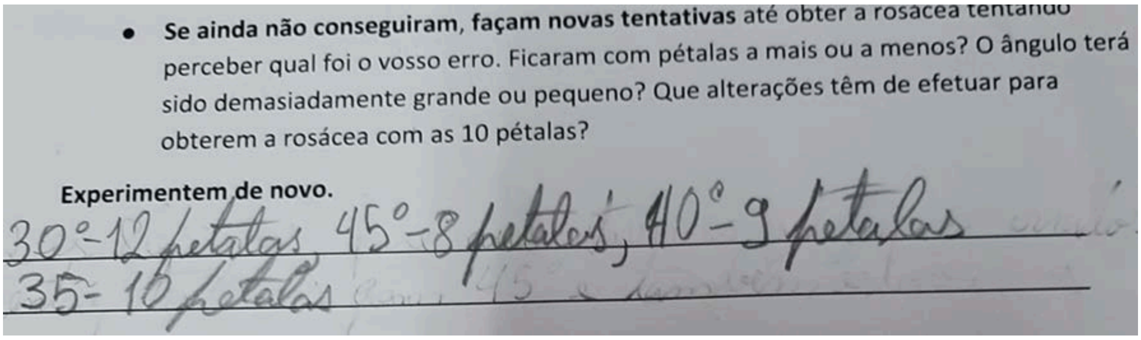
Contudo, houve outros grupos que avançaram medidas que correspondiam a valores estimados, usando, como é natural, múltiplos de 5 como 30° (figura 4). Note-se que, apesar de a medida ser errada, estes alunos apresentam um valor que obtêm por comparação e que consideramos adequado enquanto estimativa do ângulo, o que é um aspeto a valorizar na aprendizagem desta grandeza.

Figura 4. Produção de alunos



À medida que a professora foi circulando pelos grupos, verificou que as previsões feitas por alguns grupos não lhes permitiram obter a rosácea pretendida. Nestes casos, a professora incentivou os alunos a experimentar uma amplitude diferente do ângulo de rotação anteriormente previsto, tal como fez o grupo que deu a resposta da figura 5.

Figura 5. Produção de alunos



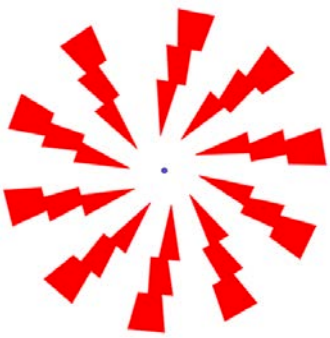
- **Se ainda não conseguiram, façam novas tentativas** até obter a rosácea tentando perceber qual foi o vosso erro. Ficaram com pétalas a mais ou a menos? O ângulo terá sido demasiadamente grande ou pequeno? Que alterações têm de efetuar para obterem a rosácea com as 10 pétalas?

Experimentem de novo.

30°-12 pétalas 45°-8 pétalas, 40°-9 pétalas
35-10 pétalas

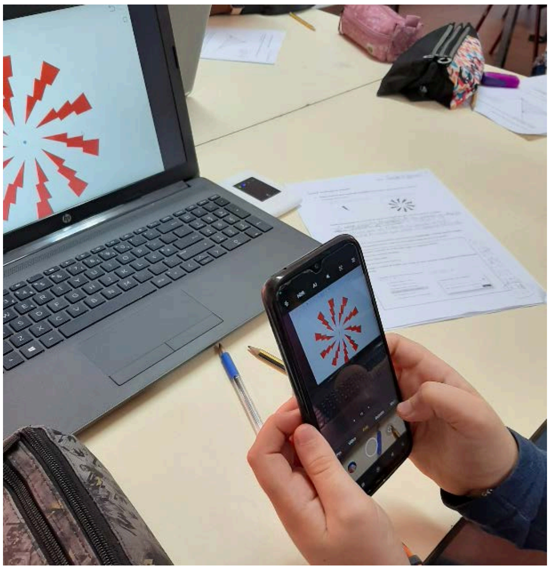
Este grupo, ao construir a rosácea, verificou que com o ângulo de rotação de 30 graus se obtêm 12 pétalas, o que não era o que se pretendia. Fizeram várias tentativas e foram registando o número de pétalas da rosácea, até que usaram um ângulo de rotação de 35° e obtiveram uma figura que lhes pareceu corresponder a uma rosácea de 10 pétalas, concluindo que aquele era o valor pretendido. Note-se que, nesta resolução, o número 35 decorre de uma regularidade interessante: os valores analisados anteriormente (30, 40 e 45) são múltiplos de 5, pelo que a conjetura que os alunos fizeram, ainda que não se verifique, decorre de uma análise crítica dos números obtidos. Além do mais, o resultado visual da rotação sucessiva com o ângulo de 35° conduz a uma figura em que não é óbvio o espaço adicional entre duas pétalas (figura 6), pelo que o grupo deu este valor como válido.

Figura 6. Figura obtida através da rotação sucessiva do elemento original com ângulo de 35°



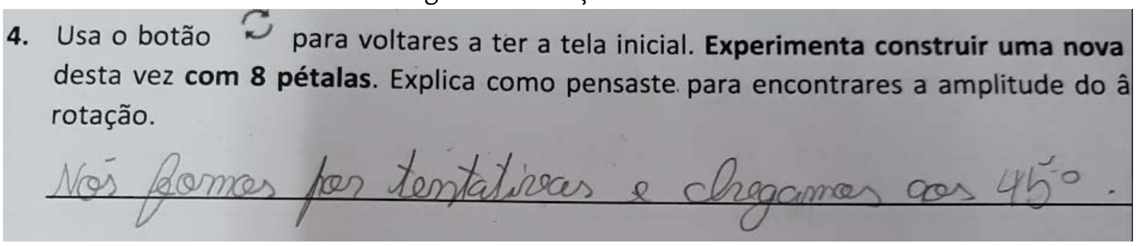
Os restantes grupos continuaram a responder autonomamente às questões colocadas na tarefa usando a aplicação do GeoGebra, como suporte. Quando consideraram ter obtido a rosácea pretendida, fotografaram-na e enviaram o ficheiro para a professora (figura 7).

Figura 7. Alunos a utilizar tecnologia para a resolução da tarefa



Apesar de terem conseguido construir uma rosácea de 10 pétalas, alguns grupos, quando lhes foi pedido para construírem uma rosácea com 8 pétalas, fazem a nova construção por tentativa e erro (figura 8).

Figura 8. Produção de alunos

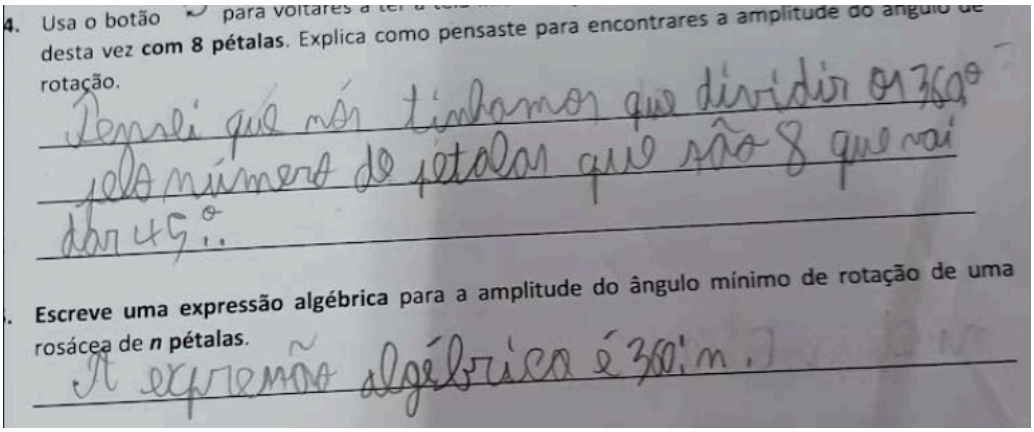


4. Usa o botão para voltares a ter a tela inicial. **Experimenta construir uma nova** desta vez **com 8 pétalas**. Explica como pensaste para encontrares a amplitude do â rotação.

Nós fomos por tentativas e chegamos aos 45º.

Outros alunos conseguiram perceber que tinham de dividir 360 por 8 para obter a amplitude do ângulo de rotação a utilizar na nova construção (figura 9).

Figura 9. Produção de alunos



4. Usa o botão para voltares a ter a tela inicial. ... amplitude do ângulo de desta vez **com 8 pétalas**. Explica como pensaste para encontrares a amplitude do ângulo de rotação.

Pensei que nós tínhamos que dividir os 360º pelo número de pétalas que são 8 que vai dar 45º.

. **Escreve uma expressão algébrica** para a amplitude do ângulo mínimo de rotação de uma rosácea de ***n* pétalas**.

A expressão algébrica é 360:n.

Nos grupos em que os alunos compreenderam que 360° correspondia a uma volta completa, também perceberam que ao dividir 360 pelo número de pétalas da rosácea iriam obter a amplitude do ângulo de rotação. Nestes grupos, foi com relativa facilidade que os alunos chegaram à expressão algébrica, uma vez que já estavam familiarizados com este tipo de representação.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

A professora projetou o enunciado da tarefa e registou as previsões dos diferentes grupos, solicitando que estes explicassem como pensaram para chegar àquelas previsões. Depois, abriu o GeoGebra e pediu a um elemento de cada grupo que demonstrasse como tinham construído a rosácea usando a sua previsão.

Neste ponto todos puderam verificar que, tanto os grupos que usaram um ângulo de rotação de 36 graus como o grupo que usou um ângulo de 35°, tinham obtido uma figura em que surgiam 10 pétalas. A professora questionou então os grupos: "São 35 ou 36 graus, a amplitude do ângulo de rotação?". Desafiados a analisar as duas hipóteses, os alunos observaram as duas figuras e identificaram que, no caso da figura construída com ângulos de 35°, um dos espaços entre as duas pétalas ficava maior do que o espaço entre as restantes. A professora questionou por que razão haveria um espaçamento desigual e um dos alunos respondeu que "como são dez raios e uma volta completa são 360° … 35x 10 =350 e não os 360°", uma forma de pensar correta que recorre à multiplicação em vez da divisão.

Analisado detalhadamente este caso particular, foram apresentadas as restantes construções e os respetivos ângulos de rotação, terminando com a sistematização da regra encontrada: a amplitude de rotação obtém-se fazendo o quociente entre 360 e o número de pétalas da rosácea, que ficou registada em linguagem algébrica.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Vamos construir rosáceas* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Através da atividade realizada, os alunos puderam construir rosáceas e compreender o papel que cada elemento que define uma rotação (centro, medida e sentido do ângulo) desempenha na construção geométrica. O AGD é um recurso fundamental porque permite fazer construções rigorosas e simular o efeito da manipulação de alguns elementos. Note-se que o episódio com o ângulo de 35° que surgiu como possibilidade para a construção de uma rosácea de 10 pétalas é um exemplo da relevância do AGD, já que se a construção tivesse sido manual seria ainda mais difícil detetar que a imagem obtida não constituía uma rosácea.

Capacidades matemáticas transversais

A realização desta tarefa confirmou o seu potencial para o desenvolvimento de algumas capacidades, nomeadamente o pensamento computacional. Por um lado, os alunos são estimulados a estabelecer relações com outras rosáceas que já tenham analisado ou construído e tentar compreender: o que se mantém? o que há de diferente? Como em muitas outras situações da matemática, o processo de abstração é fundamental. Apesar de duas rosáceas poderem ser visualmente muito diferentes, do ponto de vista matemático só interessam dois aspetos: quantas simetrias de rotação têm (que visualmente se traduz no número de pétalas) e se têm ou não simetria de reflexão. Esta tarefa foca-se sobretudo no primeiro aspeto e as experiências de construção e manipulação favorecem o estabelecimento de regularidades, o que é fundamental para chegar à regra pretendida. O facto dessa descoberta não ser imediata, conduz ao teste de resultados e correção de erros, própria do processo de depuração.

O estabelecimento de conexões foi outra capacidade relevante nesta tarefa. Por um lado, como acabámos de afirmar, a identificação de regularidades, tão característica do pensamento algébrico, está muito presente. Por outro, a tradução algébrica do modelo encontrado (360/n) surgiu com naturalidade após a identificação da regra e permitiu estabelecer mais uma ponte entre a Geometria e a Álgebra que já anteriormente fora valorizada.

Capacidades e atitudes gerais transversais

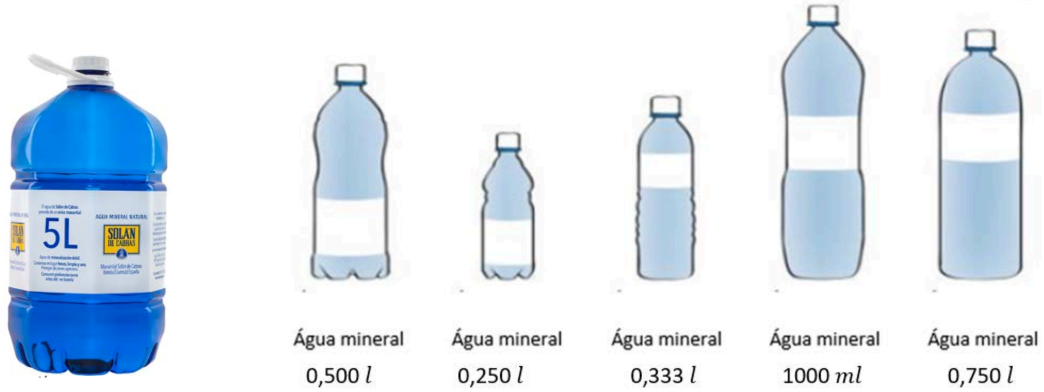
Esta é outra dimensão com especial importância nesta tarefa. Apesar de não ser aberta do ponto de vista de diferentes resoluções (além do aspeto diferente que as rosáceas de cada grupo podem ter) e, por isso, não esperarmos grande discussão, a verdade é que ela surge com frequência em tarefas em que se dá a possibilidade de os alunos experimentarem, errarem e descobrirem relações. Mais uma vez, salientamos o papel que o AGD teve para fazer emergir a análise de ideias, centrando-se em evidências. Não só podemos perceber com rigor e rapidez o efeito da alteração de valores (mesmo que seja 1°), como é possível pedir a análise e melhoramento das resoluções, fomentando também a persistência – algo que seria impraticável num trabalho com papel e lápis.

Tarefa — Encher garrafas

Enunciado da tarefa

Encher garrafas

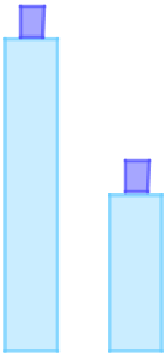
A professora de Ciências, para comemorar o Dia Mundial da Água, vai distribuir aos seus alunos garrafas de água reutilizáveis. A turma do Rui recebeu várias garrafas.



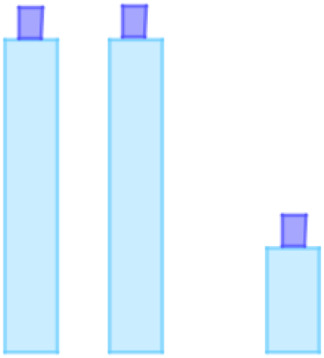
1. Para cada garrafa, convertam os numerais decimais em frações. Para a garrafa de 0,333l considerem a fração $\frac{1}{3}$l.
2. Imaginem que os alunos da turma do Rui vão usar as garrafas reutilizáveis, enchendo-as com a água que têm disponível noutras garrafas. Para cada uma das seguintes questões, escrevam uma expressão numérica que represente a situação e usem os esquemas fornecidos em anexo para chegar à resposta.
   a. Uma garrafa com 1l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{2}$l?
   b. Uma garrafa com 2l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{3}$ l?
   c. Um garrafão com 5l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{4}$l?
3. Sistematizem as conclusões que foram encontradas na discussão coletiva.
4. Vamos usar a regra encontrada para resolver outras situações que envolvam a divisão de frações, começando por escrever a expressão que traduz a situação. Na folha anexa encontram a representação de uma garrafa de 1l. Usem-na para verificar as respostas às seguintes alíneas.
   a. Uma garrafa com $\frac{3}{2}$l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{4}$l?
   b. Uma garrafa com $\frac{3}{4}$l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{2}$l?
   c. Uma garrafa de $\frac{1}{4}$l de água enche que parte de uma garrafa de 2l?

Anexo

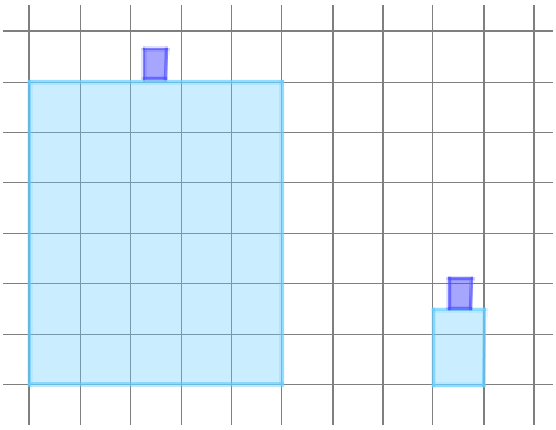
2a.



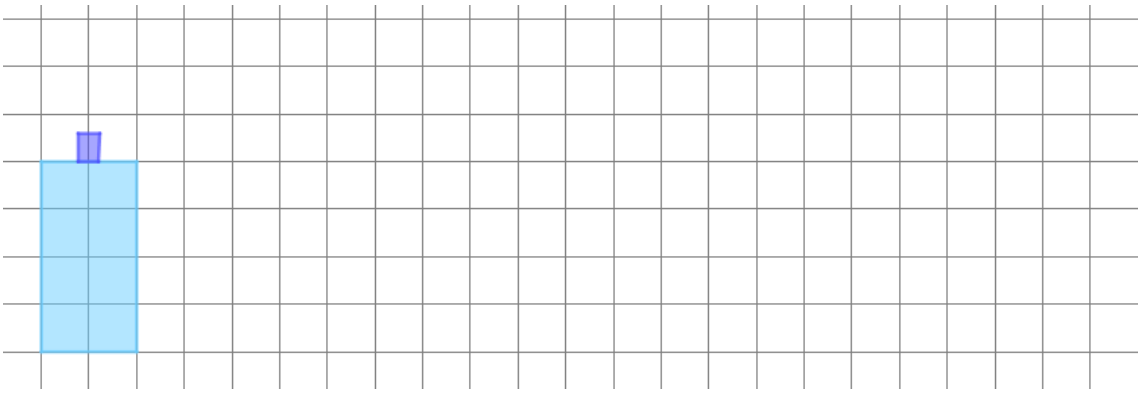
2b.



2c.



4.



Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nos alunos dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Frações	Divisão de frações
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar, generalizar e justificar
	Resolução de problemas	Resolver problemas que envolvam a interpretação e modelação de situações.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações matemáticas	Usar representações múltiplas para exprimir ideias e processos matemáticos.
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração, perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que alunos progressivamente sejam capazes de:

- Dividir duas frações com recurso à multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor.
- Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Resoluções esperadas

Nesta tarefa é esperado que os alunos encontrem uma regra para dividir um número inteiro por uma fração e estendam essa regra à divisão entre duas frações e entre uma fração e um inteiro. Para tal, pretende-se que os alunos mobilizem o conceito de número inverso já do seu conhecimento.

Questão 1

Para esta questão, envolvendo números de referência, os alunos podem fazer a conversão com base em conhecimentos anteriores ou, partindo da primeira garrafa (0,5 l) cuja conversão para ½ l é muito simples, chegar às restantes frações estabelecendo relações: ¼ l para 0,250 l (metade de ½), ¾ l para 0,750 l (o triplo de ¼). Também poderão transformar os números em representação decimal para frações decimais e reduzi-las.

Questão 2

É esperado que os alunos usem as representações das garrafas, presentes no anexo, para estabelecer relações entre as frações, já que as áreas das representações das garrafas respeitam a proporção das suas capacidades. Para a alínea a, pode não haver tal necessidade dada a facilidade em compreender que 1 l dá para encher duas garrafas de ½ l.

Na alínea b, o desenho das garrafas apoia o pensamento de que 1 l enche 3 garrafas de ⅓ l e, portanto, 2l enchem 6. Já no caso da alínea c, a malha quadriculada deve apoiar os alunos na decomposição do retângulo, de modo a compreenderem que o garrafão contém 20 vezes a capacidade da garrafa de ¼ l.

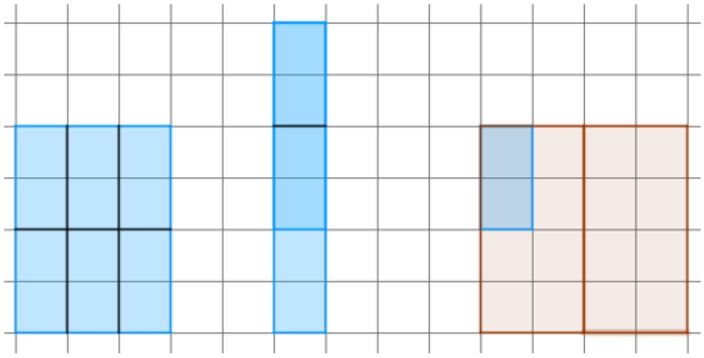
Questão 3

É com base na questão 2 que pode surgir a generalização da regra de divisão de um inteiro por uma fração. Assim, num momento de discussão coletiva, o professor confronta os raciocínios dos alunos, levando-os a concluir que o quociente de um número inteiro por uma fração obtém-se através do produto desse inteiro pelo inverso da fração. Esta regra pode ser registada usando diferentes tipos de representações e o professor deve decidir se é adequado avançar para esse registo em conjunto com os alunos ou se o mesmo poderá ser feito em trabalho de grupo.

Questão 4

Para esta questão, os alunos devem aplicar a regra descoberta, estendendo-a agora a uma nova situação: a divisão entre duas frações ou entre uma fração e um inteiro. Para verificarem se os resultados obtidos estão corretos, devem recorrer de novo ao anexo onde está representada uma garrafa de 1 l. Neste caso, já deverão ser os alunos a fazer as representações de 3/2 l, ¾ l e ¼ l para fazer as respetivas decomposições (figura 1):

Figura 1. Possíveis representações das operações da questão 4, tendo por base a representação de 1 l fornecida no anexo



$\frac{3}{2}:\frac{1}{4}=6$ $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}$

Exploração da tarefa

Para a realização desta tarefa sugere-se que o professor organize a turma em grupos de 3 ou 4 elementos.

Apresentação da tarefa. Antes da resolução o professor deverá fazer a apresentação da tarefa para a dar a conhecer, incentivando os alunos a utilizar as representações das garrafas, presentes no anexo, para estabelecerem relações entre as frações. Neste momento, poderá ainda questionar a turma sobre as capacidades das garrafas que estão presentes no seu quotidiano e fazer algum esclarecimento necessário sobre as unidades de medida e suas conversões. Tempo previsto: 10 minutos.

Trabalho autónomo dos alunos. De seguida, o trabalho autónomo dos alunos será realizado em duas fases. Na primeira fase, os grupos irão trabalhar na tarefa até à questão 2, inclusivé. O professor irá circular pelos grupos para verificar o que fazem e assim apoiar o trabalho que está a ser desenvolvido, incentivando a utilização das representações das garrafas que se encontram no anexo. Tempo previsto: 40 min.

Discussão com toda a turma, Seguir-se-á uma discussão com toda a turma, em que o professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes formas de raciocinar, incentivando os alunos a fundamentar as suas ideias. Esta fundamentação deverá ter por base os esquemas realizados, por cada grupo, recorrendo ao anexo da tarefa. Consoante a avaliação que o professor faça das aprendizagens realizadas, poderá sistematizar as conclusões ou remeter esse trabalho para o grupo. Tempo previsto: 20 min.

Após esta discussão, o trabalho da aula voltará a recorrer ao trabalho autónomo para resolver as últimas questões. De novo, o professor irá circular pelos grupos para verificar o que fazem e apoiar o trabalho que está a ser desenvolvido, incentivando à utilização das representações das garrafas que se encontram no anexo. O professor poderá ainda pedir uma síntese com a generalização da regra para a divisão de frações recorrendo, se possível, ao uso de expressões simbólicas. Tempo previsto: 25 min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Os alunos podem ter dificuldade em escrever as expressões numéricas.	O professor pode usar um exemplo com números inteiros: Se eu quiser saber "quantas garrafas de 2 l enche um garrafão de 6 l?", qual é a operação que uso? Como escrevo a expressão numérica?
Os alunos podem ter dificuldade em usar os esquemas para resolver as questões.	O professor deve apoiar a interpretação das representações. Por exemplo, evidenciar que em 2a estão representadas as garrafas de 1 l e de ½ l; em 2b estão duas garrafas de 1 l (equivalente a ter uma garrafa de 2 l) e uma de ⅓ l; e em 2c, está 1 garrafão de 5 l e uma garrafa de ¼ l. Poderá perguntar o que fazer para descobrir quantas vezes enchem uma garrafa com outra.
Os alunos podem revelar dificuldades no desenvolvimento de uma regra para qualquer quociente entre um número inteiro e uma fração.	O professor deverá, através da discussão coletiva, construir uma sequência de etapas onde seja perceptível aos alunos o que varia e, também, o que se mantém, no sentido da elaboração de uma regra com recurso ao registo simbólico, onde fique patente a generalização da regra alcançada na discussão coletiva.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa, desenvolvida em duas aulas consecutivas de 50 minutos, foi precedida do trabalho, em sala de aula, sobre o conceito do inverso de um número. Como habitualmente, nas aulas de matemática de ambas as turmas da operacionalização, os alunos trabalharam em grupos de quatro.

No relato que se segue, temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Apresentação da tarefa

A professora distribuiu a cada aluno o enunciado da tarefa e um anexo por grupo, com o propósito de proporcionar a discussão de ideias entre todos os elementos. Em seguida, foi apresentada à turma a tarefa esclarecendo algumas dúvidas apresentadas pelos alunos que remetiam para a conversão dos numerais decimais em frações. A dúvida ficou esclarecida recorrendo à leitura do numeral como um todo e desprezando a leitura símbolo a símbolo, como por exemplo: "500 milésimas do litro" em vez de "zero vírgula quinhentos litros". A professora salientou, ainda, a importância de utilizar as representações das garrafas disponíveis no anexo para facilitar a resolução da tarefa.

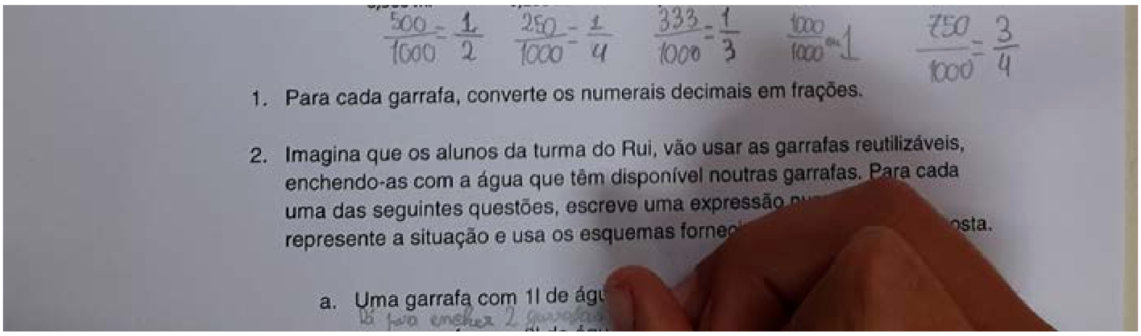
Dado que a aula de Matemática se realizou em dois blocos consecutivos de 50 minutos cada, a primeira parte da aula foi utilizada para contacto com a tarefa, resolução pelos grupos e debate das questões até à 2. Na segunda parte, os grupos apresentaram à turma as suas resoluções e o modo como pensaram e voltaram a trabalhar em grupo para a realização das questões 3 e 4.

Trabalho autónomo dos alunos

Após as explicações iniciais efetuadas pela professora, os alunos começaram o seu trabalho em grupo. Durante esta fase da aula, a professora circulou pela sala conversando com os grupos, tentando perceber as estratégias que estavam a ser utilizadas.

Para a realização da questão 1, em todos os grupos os alunos começaram por converter as medidas dadas em frações decimais, sem dificuldade, e posteriormente transformaram essas frações noutras frações irredutíveis, como se pode ver na figura 2.

Figura 2. Produção de alunos



Apesar de já terem os valores das capacidades representados na forma de fração, para dar resposta às três alíneas da questão 2, os alunos converteram essas quantidades de litros para mililitros de modo a trabalhar com a divisão de inteiros, dado que esta lhes era familiar. Assim, relativamente à questão "Uma garrafa com 1l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{2}$l?", os grupos identificaram que 1000ml correspondia a 1 litro, e que 0,500l correspondia a 500 ml, obtendo a resposta que a garrafa de 1 litro dava para encher 2 garrafas de meio litro. A professora propôs que os alunos utilizassem as imagens do anexo para validarem o resultado das expressões numéricas anteriormente resolvidas e obterem uma outra representação para a mesma resolução. Deste modo, os grupos observaram que, efetivamente, são necessárias duas garrafas de ½ l para ocupar o espaço da garrafa de 1 l, como é possível ver na figura 3.

Figura 3.Produção de alunos

Na questão 2b, os grupos recorreram novamente à divisão das duas garrafas de 1 litro por garrafas de 0,333l fazendo a conversão para mililitros (figura 4). Contudo, neste caso, já fizeram a decomposição das duas garrafas em 3 partes iguais, obtendo as 6 garrafas de 1/3l.

Figura 4. Produção de alunos

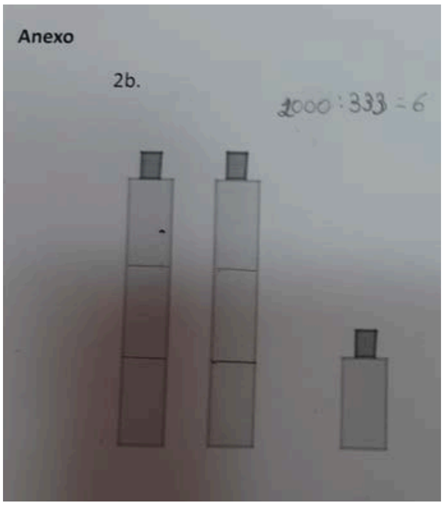
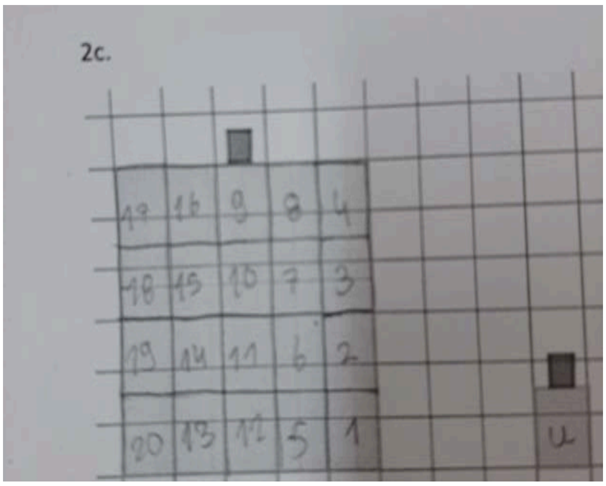


Figura 5. Produção de alunos



Embora pareça que os alunos recorrem sempre à mesma estratégia, a crescente complexidade das questões leva-os a fazer registos mais detalhados das decomposições do recipiente de partida. Assim, na questão 2c (“Um garrafão com 5l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{4}$l?”), os alunos decompuseram a imagem do garrafão, descobrindo o quociente 20 (figura 5). Apesar de não ser visível na imagem, mais uma vez recorreram à divisão de inteiros usando os valores 5000 ml e 250 ml, o que evidencia como se sentem mais confortáveis a operar com números inteiros.

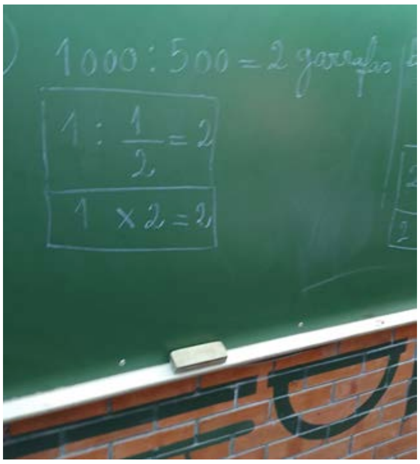
Discussão com toda a turma e síntese das ideias chave

Após o trabalho autónomo, os alunos elegeram o porta-voz de cada grupo e apresentaram as conclusões à turma. A professora optou por ir registando as conclusões no quadro à medida que os alunos as apresentavam.

Como o objetivo era que os alunos aprendessem um processo para dividir frações, a professora sugeriu a utilização de outras expressões numéricas, equivalentes às apresentadas pelos alunos, recorrendo à representação dos números na forma de fração, como se pode observar nos registos elaborados no quadro da sala (figura 6). Mobilizando para a discussão as várias representações por eles já utilizadas, os alunos reconheceram que a expressão 1000:500 é equivalente à expressão 1 : ½ . Surgiu então a questão: como é que 1 : ½ é igual a 2? E, assim, após a observação das imagens em que duas garrafas de 1/2 l equivalem a uma garrafa de 1 l, não restaram dúvidas que o resultado seria efetivamente 2.

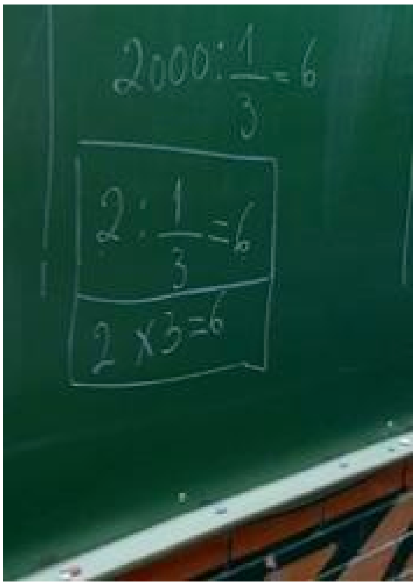
Para apoiar os alunos na identificação da regra para a divisão de frações, a professora orientou os alunos no reconhecimento da operação inversa e do inverso de um número, registando a expressão numérica 1x2=2.

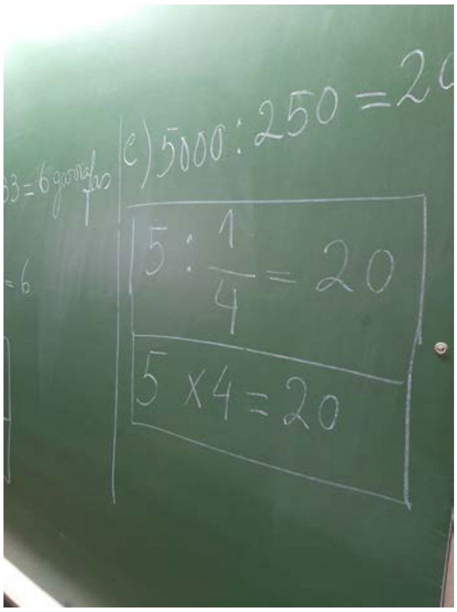
Figura 6. Registos no quadro da sala de aula resultantes das apresentações dos alunos



Para continuar a discussão dos trabalhos da questão 1, mas relativa à pergunta "Uma garrafa com 2l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{3}$ l?", um dos grupos traduziu a questão e respetiva resposta através da expressão 2000 : ⅓ = 6, cuja justificação foi também suportada pelo esquema com as garrafas.

Figuras 7 e 8. Registos no quadro da sala de aula resultantes das apresentações dos alunos





A professora alertou para a utilização da mesma unidade de medida (litro), registou a expressão correta (2 : ⅓ = 6) e, posteriormente, transformou a expressão no produto pelo número inverso (figura 7). Para a resolução da questão "Um garrafão com 5l de água dá para encher quantas garrafas de $\frac{1}{4}$l?" seguiu-se o mesmo processo (figura 8).

No fim da apresentação das três alíneas, a professora voltou a reforçar a utilização da divisão de um inteiro por uma fração escrevendo as respetivas expressões numéricas que traduzem a situação matemática apresentada e questionou "como é que conseguimos obter os resultados a partir destas expressões numéricas (1:½ =2; 2:⅓=6 e 5:¼ = 20)?".

Este questionamento da professora pretendia levar os grupos à construção da regra para a divisão de um inteiro com uma fração e, após algumas discussões, os alunos começaram a fazer referência às expressões 1x2=2, 2x3=6 e 5x4=20. A professora questionou "como podemos relacionar o 2 com ½ , o 3 com ⅓ e o 4 com ¼?" levando os alunos a mobilizar a relação com o inverso de ½, ⅓ e ¼, respetivamente. Depois, colocou o seguinte desafio: "Será que podemos pensar que dividir um número por uma fração é o mesmo que multiplicar esse número pelo inverso do divisor?". Alguns alunos responderam afirmativamente, justificando que 2x ½ é igual a 2/2 que, simplificado, é 1, corroborando que 2 é efetivamente o inverso de ½ . Outros mencionaram os exemplos anteriormente registados no quadro para confirmar a afirmação. Após esta discussão, foi sistematizada a regra oralmente.

Trabalho autónomo dos alunos

Seguindo a planificação, a aula volta a uma fase de trabalho autónomo dos grupos e a regra é registada nos seus cadernos diários.

Para dar resposta às questões seguintes, a professora optou por resolver a primeira em conjunto com toda a turma, fazendo a leitura da regra e simultaneamente escrevendo a expressão numérica:

> *Prof.ª- Então 3/2 a dividir por ¼ é igual a? Qual é a regra?*
> *Alunos - 3/2 vezes o inverso do divisor.*
> *Prof. - Então e qual é o inverso de ¼ ?*
> *Alunos - É 4.*
> *Prof.ª- Então qual é o resultado da expressão ?*
> *Aluno 1 - É 12/2.*
> *Aluno 2 - Também podemos dizer que o resultado é 6.*

As restantes questões foram resolvidas autonomamente pelos alunos, dentro dos grupos, tendo estes utilizado como metodologia de trabalho a mesma que a professora utilizou anteriormente. Ou seja, um elemento lia a regra e os restantes resolviam a expressão numérica. A professora teve o cuidado de ir passando pelos diferentes grupos para verificar se todos estavam a usar a regra corretamente. As respostas à questão 4 foram apresentadas pelos diferentes grupos, sendo confirmado pelos outros se a regra estava a ser bem aplicada e se a resolução de cada questão estava correta, recorrendo, em alguns casos, à representação da garrafa de 1 l.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Encher as garrafas* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A elaboração desta tarefa tinha como propósito proporcionar aos alunos vários exemplos que favorecessem a elaboração de uma regra. Os alunos realizaram a tarefa com relativa facilidade, o que possivelmente beneficiou do trabalho prévio com o inverso de um número e com o recurso à representação das garrafas, no material anexo à tarefa. A utilização destas representações permitiu aos alunos visualizar e dar significado aos valores que encontraram e à própria operação de divisão com o sentido de medida, ao considerarem quantas vezes o conteúdo de uma garrafa cabe na outra. A opção por iniciar com a divisão de um inteiro por uma fração mostrou-se adequada, uma vez que os alunos puderam resolver as operações usando representações visuais a que deram significado (apesar de tenderem a recorrer aos números inteiros que resultaram da conversão de litros para mililitros). A proposta de extensão da regra à divisão de frações parece ter sido aceite e mobilizada com relativa facilidade.

Capacidades matemáticas transversais

Ao longo do desenvolvimento desta tarefa, as professoras procuraram proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos solicitando, de forma explícita, que estes formulassem uma regra para o cálculo do quociente entre um número inteiro e uma fração, a partir da observação da regularidade em três casos e estendessem essa regra ao cálculo do quociente entre duas frações. Estas situações têm uma grande relevância para o desenvolvimento da capacidade de generalizar e este tópico constitui uma boa oportunidade para envolver os alunos neste processo de raciocínio.

Ao incluir um anexo com figuras das garrafas sugeridas nas questões da tarefa, as professoras proporcionaram a utilização de diversas representações para, através de diagramas ou cálculos, demonstrar compreensão, exprimir ideias e processos matemáticos.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Ao longo da resolução da tarefa os alunos trabalharam em grupos de 3 ou 4 alunos. Apoiaram as suas decisões na utilização do anexo onde, com a utilização de diagramas, fundamentaram as suas decisões. A discussão em torno dos registos elaborados favoreceu a argumentação e o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos. A escolha de um porta-voz de cada grupo para apresentar à turma as suas conclusões permitiu que tivessem de explicar o que estavam a pensar e chegar a um acordo.

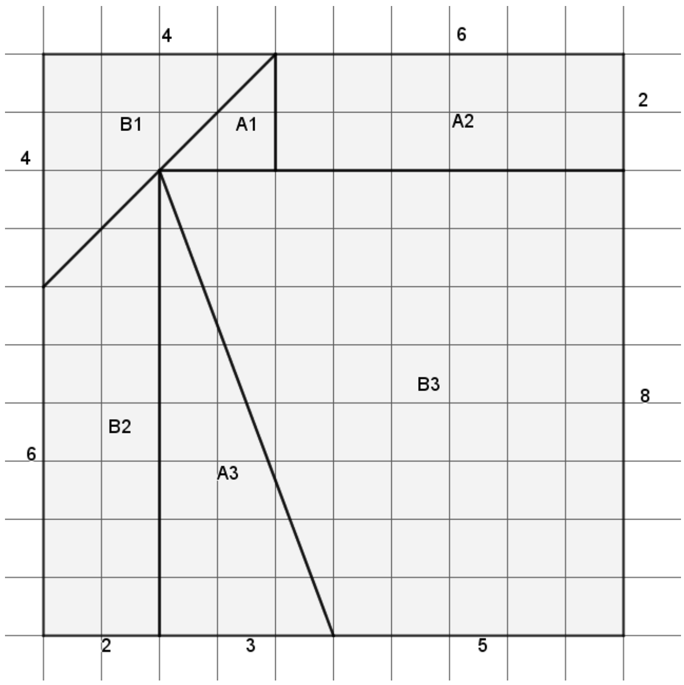
Tarefa — Ampliar o puzzle

Enunciado da tarefa

Ampliar o puzzle

O puzzle seguinte deve ser ampliado, de modo que cada segmento de 4 cm passe a medir 6 cm. Para realizar esta tarefa, o grupo deve organizar-se de forma que um par construa a ampliação das peças A e outro para as peças B. As novas peças devem ser desenhadas na folha quadriculada.

No fim reconstruam o puzzle.



Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nos alunos dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	**Tópico**	**Subtópicos**
Conteúdos matemáticos	Proporcionalidade direta	Relação de proporcionalidade direta
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Resolver problemas que envolvam a interpretação e modelação de situações de proporcionalidade direta.
	Raciocínio matemático	Conjeturar, generalizar e justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Conexões matemáticas	Conexões internas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração, perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que alunos progressivamente sejam capazes de:

- Reconhecer a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são.
- Reconhecer a fração como representação de uma razão entre duas partes de um mesmo todo.
- Explicar, por palavras suas, o significado da constante de proporcionalidade, razão e proporção no contexto do problema.
- Resolver problemas que envolvam a interpretação e modelação de situações de proporcionalidade direta.
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para cada grupo com puzzle, folhas de papel quadriculado e tesoura.

Resoluções esperadas

Nesta tarefa é esperado que os alunos possam identificar a relação multiplicativa existente entre as medidas de dois segmentos do puzzle — a medida do segmento do puzzle inicial e a medida do segmento correspondente do puzzle transformado. Deste modo, pretende-se que os alunos identifiquem a relação existente entre os 4 cm e os 6 cm dos lados, respetivamente, das peças original e ampliada, percebendo que a segunda medida é uma vez e meia a primeira. Esta relação pode ser identificada de modo equivalente, por exemplo, percebendo que a 1 cm da medida do lado da peça original corresponde 1,5 cm da medida do lado da peça ampliada. Na tabela seguinte apresentamos uma possível organização do raciocínio para revelar as relações entre possíveis dimensões, aplicando sucessivamente a relação de metade ao valor referido inicialmente no enunciado da tarefa e até conseguir a relação para 1 cm.

Tabela 1: Preenchimento das medidas do puzzle recorrendo à relação de metade

Medida no puzzle original	**Medida correspondente no puzle ampliado**
4 cm	6 cm
2 cm	3 cm
1 cm	1,5 cm

Conhecendo esta relação, os alunos podem fazer o percurso inverso, dando origem às dimensões de cada lado das figuras geométricas que compõem o puzzle.

Tabela 2: Preenchimento das medidas do puzzle a partir da razão 1,5

Medida no puzzle original	**Medida correspondente no puzzle ampliado**
2 cm	2 x 1,5 = 3 cm
3 cm	3 x 1,5 = 4,5 cm
4 cm	4 x 1,5 = 6 cm
5 cm	5 x 1,5 = 7,5 cm
6 cm	6 x 1,5 = 9 cm

Exploração da tarefa

Apresentação da tarefa. Para a realização desta tarefa, propõe-se que os alunos se organizem em grupos de quatro elementos. Após a apresentação da tarefa, o professor propõe que, seguindo as instruções que a tarefa indica, o grupo decida que duplas ampliam as peças A e as peças B. Tempo previsto: 10 min.

Trabalho autónomo. Na segunda fase, o professor irá circulando pelos grupos, verificando o que fazem e apoiando o trabalho das duplas de cada grupo sem interferir nas decisões tomadas, dando resposta a solicitações de natureza operacional, incentivando os alunos a registar todos os cálculos utilizados para a ampliação do puzzle para que, no momento da discussão coletiva, os diferentes grupos expliquem o seu raciocínio à turma, tornando esta fase da aula mais enriquecedora. Após a conclusão da ampliação das diferentes peças, cada grupo deverá reconstruir o puzzle e verificar se a sua ampliação foi bem sucedida. O professor deve ainda garantir que a composição do puzzle ampliado se faça usando todas as peças ampliadas e de forma a que não existam sobreposições. Tempo previsto: 45 min.

Discussão com toda a turma. Seguir-se-á a fase da discussão coletiva em que os alunos devem apresentar à turma as suas construções e a estratégia utilizada para concretizar as ampliações. Para implementar esta fase o professor deverá selecionar, em primeiro lugar, as ampliações que não foram bem sucedidas, suscitando o debate sobre as dificuldades encontradas na composição do puzzle. Com a ajuda do professor, todas estas contribuições devem proporcionar a identificação das melhores estratégias para a ampliação do puzzle e identificar os erros que ocorreram durante o trabalho.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Os alunos adicionam 2 cm a cada lado da peça, usando um raciocínio aditivo em vez de um raciocínio multiplicativo, como deve ser usado.	Esta tendência não deve ser contrariada pelo professor para que os alunos se apercebam da deformação das peças que impedirá de formar o puzzle. Este efeito, embora possa ser momentaneamente frustrante, é fundamental para que os alunos compreendam o erro e a natureza multiplicativa da relação.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi desenvolvida em duas aulas de 50 minutos e surge na sequência de uma outra tarefa sobre o tópico. Contudo, ainda não tinham sido formalizadas algumas noções ligadas à noção de proporcionalidade direta. Os alunos trabalharam em grupos de quatro, tendo nomeado um porta-voz, responsável pela partilha das descobertas dos elementos dos grupos.

Os primeiros 50 minutos de aula foram dedicados à interpretação do enunciado e à construção das peças ampliadas do puzzle. Nos segundos 50 minutos, os grupos tentaram reconstruir o puzzle e apresentaram à turma as suas construções, bem como o modo como pensaram para fazer a ampliação e a construção do novo puzzle.

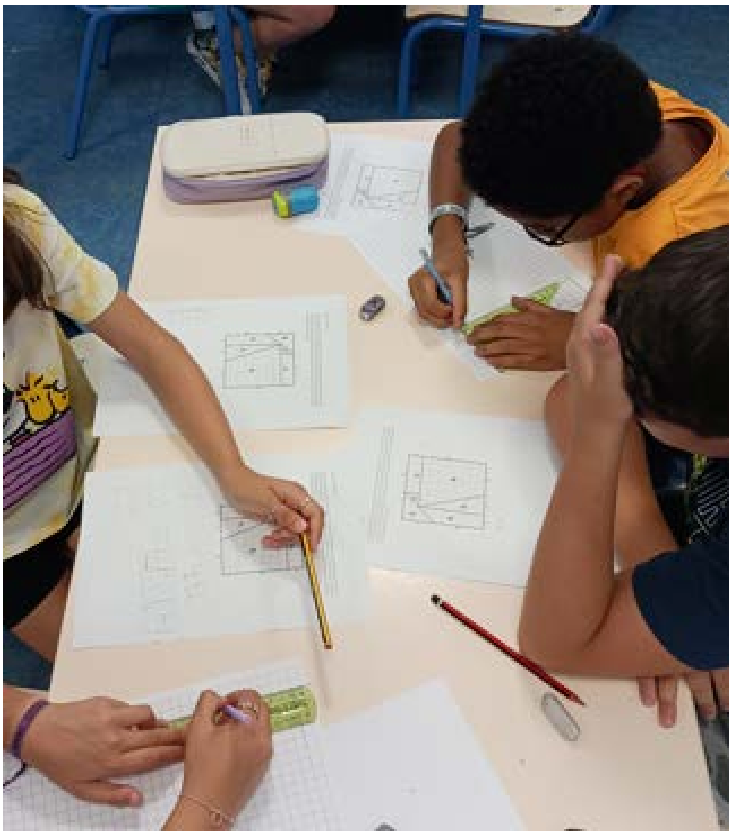
No relato que se segue temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Apresentação da tarefa. A professora distribuiu a cada grupo o enunciado da tarefa e apresentou o problema, reforçando que deviam respeitar a organização proposta no enunciado: "Para realizar esta tarefa, o grupo deve organizar-se de forma que dois alunos construam a ampliação das peças A e o outro par as peças B. As novas peças devem ser desenhadas na folha quadriculada."

Posteriormente foi distribuído, a cada grupo, uma folha quadriculada. Os alunos já tinham nos seus materiais as réguas e as tesouras necessárias para a execução da tarefa.

Trabalho autónomo dos alunos. Os alunos trabalharam autonomamente durante aproximadamente 40 minutos para realizar a ampliação do puzzle. Durante este trabalho, a professora incentivou os alunos a registar todos os cálculos utilizados para a ampliação do puzzle. Na maioria dos grupos, os pares de alunos partiram imediatamente para a construção das peças, adicionando 2 cm a cada uma das medidas dadas, tendo recortado em seguida cada uma das peças. A professora verificou que os alunos ignoraram as suas sugestões, ou seja, antes de começarem a desenhar as peças não fizeram o cálculo das medidas dos comprimentos, pois tendo adicionado 2 cm a cada lado utilizaram o cálculo mental para isso.

Figura 1. Grupo de alunos a trabalhar na tarefa

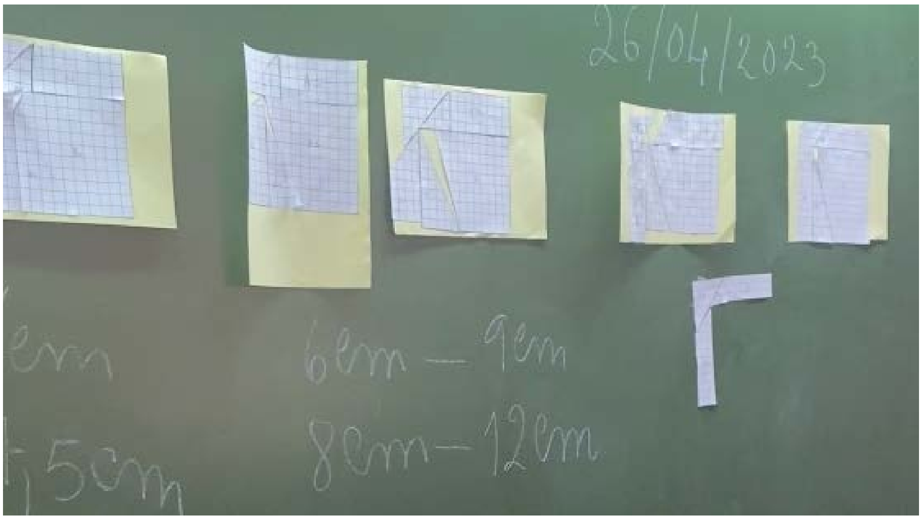


Após o trabalho de pares para a ampliação das diferentes peças, os alunos começaram a montagem do puzzle agora ampliado. Apenas um grupo em cada uma das turmas construiu corretamente o puzzle, pois estes alunos calcularam a constante de proporcionalidade e usaram-na para determinar o "tamanho" das medidas de cada lado das peças ampliadas.

Assim, ao tentarem montar as peças do puzzle e colarem-nas na folha de papel, a maioria dos grupos verificou que estas não encaixavam corretamente umas nas outras. Para contornar o problema, um dos grupos resolveu sobrepor as peças de modo a obter um quadrado semelhante ao do enunciado da tarefa; outros deixaram simplesmente os espaços entre as peças que não conseguiram encaixar.

Finalizada a construção da ampliação do puzzle, os grupos colocaram as suas construções no quadro da sala de aula por ser um local visível para todos (figura 2). Foi disponibilizado um tempo para que os alunos pudessem tomar contacto com os trabalhos dos restantes grupos.

Figura 2. Exposição dos trabalhos de ampliação de cada grupo



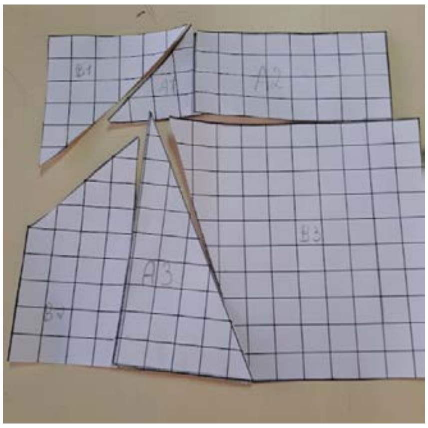
Discussão com toda a turma. Posteriormente, passou-se à fase da discussão coletiva dos trabalhos em que cada grupo, através do seu porta-voz, apresentou a estratégia utilizada para realizar a ampliação das peças.

No final de cada apresentação, a professora questionou a turma sobre o puzzle. No caso do puzzle com as peças sobrepostas perguntou: "Será que este puzzle está exatamente igual ao desenhado na vossa folha?". Alguns alunos responderam: "Não! Porque não vale colar peças em cima uma das outras, as peças têm de ficar encostadas". Quanto a outros puzzles, outros alunos comentaram que em alguns deles ficavam espaços porque as peças não "encaixavam". Assim, todos os alunos concluíram que os cinco primeiros grupos que apresentaram o seu trabalho não tinham usado uma estratégia adequada.

O puzzle corretamente construído foi o último a ser colado no quadro, o que permitiu à professora lançar uma questão para o grande grupo: "Porque será que apenas o grupo da Maria conseguiu montar o puzzle corretamente, sem sobreposição de peças ou com espaços entre as peças?"

O porta-voz de um dos grupos disse: "No nosso grupo decidimos acrescentar mais 2 cm a cada peça porque na tarefa diz que o segmento de 4 cm passa a medir 6 cm".

Figura 3. Exemplo de tentativa de ampliação



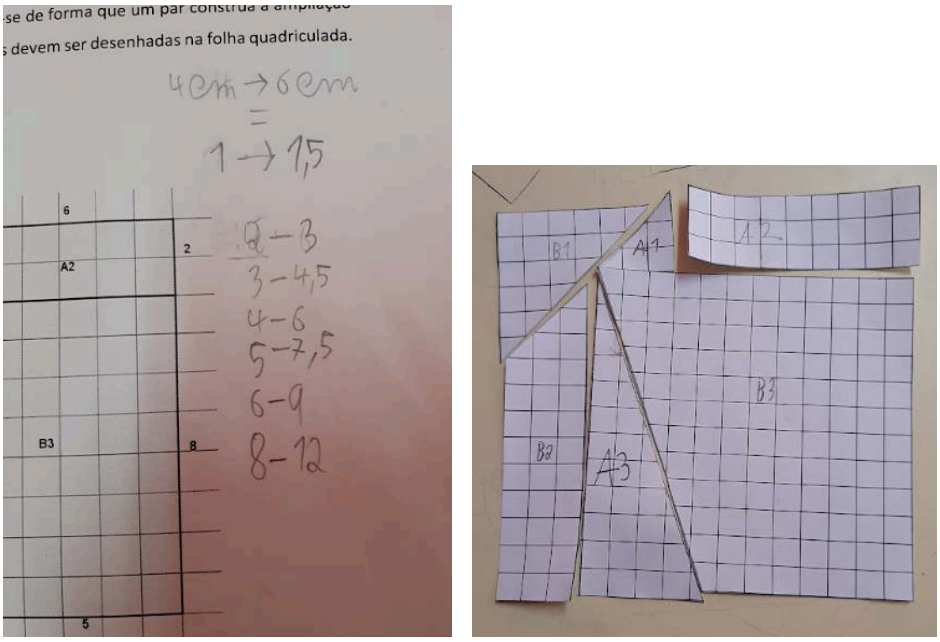
Será que foi uma boa estratégia? - perguntou a professora

Aluno 1 - Não! porque assim nós não fizemos o puzzle correto.

Prof.º - Então o grupo da Maria quer explicar aos colegas como pensaram?

Aluno 1 - Nós tentámos pensar: se um quadradinho medisse 1 cm de lado, então chegámos à conclusão que a ampliação seria 1,5 cm e fomos ver se realmente era. Fizemos 1,5 x 2 = 3; 1, 5 x 3= 4,5 … chegamos à conclusão de multiplicarmos 1,5 por qualquer número dava o resultado da ampliação, e assim conseguimos as medidas corretas.

Figura 4. Exemplos de cálculos e respetiva ampliação



No final das apresentações, a professora destacou a estratégia usada por este grupo explorando a relação multiplicativa, reforçando a ideia de que se as medidas de um dos lados da peça aumentar, os outros lados terão de aumentar na mesma proporção.

Os grupos que não tinham tido sucesso na ampliação do puzzle, voltaram a construí-lo, agora com a ampliação correta.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Ampliar o puzzle* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos. Com esta tarefa pretende-se que os alunos resolvam um problema com recurso à relação de proporcionalidade direta, reconhecendo a sua natureza multiplicativa. Com a exploração desta tarefa pretendeu-se promover a compreensão sobre o significado da constante de proporcionalidade no contexto de um problema, evidenciando assim a relevância da Matemática na interpretação da realidade. Note-se que a reação inicial da maioria dos grupos, raciocinando aditivamente, já era esperada, apesar de os alunos terem tido sucesso na resolução de um problema de proporcionalidade direta na aula anterior. Efetivamente, as medidas 4 cm e 6 cm foram pensadas intencionalmente para provocar a reação natural de adicionar 2 cm. Provavelmente, a mesma reação não seria obtida se o segundo valor fosse o dobro do primeiro. De certa forma, pode-se dizer que a tarefa convida a errar, o que é verdade. Contudo, a identificação do erro tem aqui um papel fundamental que pretende vincar a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis provocada pela experiência do resultado final fracassado.

Capacidades matemáticas transversais. Esta tarefa surge como um problema uma vez que a turma estava ainda numa fase muito inicial relativamente ao tratamento da proporcionalidade direta. Deste modo, não se tratava de aplicar procedimentos previamente trabalhados, mas sim encontrar uma estratégia adequada. Essa opção foi intencional, pois pretendia-se que os alunos trabalhassem com sentido os dados do problema em vez de aplicar uma regra sem pensar na situação, ainda que se antecipasse que a escolha dessa estratégia pudesse estar errada. Efetivamente, a escolha da estratégia errada é decisiva para enfatizar o raciocínio proporcional associado à ampliação de uma figura e a relação multiplicativa entre as variáveis.

No que respeita ao raciocínio, o processo de justificar foi especialmente mobilizado quando os alunos identificaram a razão dos seus erros e a forma correta de encontrar as medidas do puzzle aumentado. No que respeita à comunicação, a organização dos grupos em duplas com vista a uma produção comum, a procura da estratégia adequada ou a discussão dos erros fomentou a troca de ideias. Salienta-se ainda a discussão coletiva, com base na exposição das produções dos alunos, que foi muito relevante para a análise matemática e síntese de ideias.

Finalmente, assinalamos que, apesar de o assunto principal se incluir no tema de Álgebra, a ligação óbvia à Geometria permitiu estabelecer conexões entre os dois temas com benefício para a compreensão mais profunda da proporcionalidade direta.

Capacidades e atitudes gerais transversais. Ao longo da resolução da tarefa, os alunos trabalharam em grupos de 4 ou 5 alunos que se organizaram em subgrupos com atribuições distintas. A discussão em torno dos registos elaborados, particularmente com vista à identificação de erros, favoreceu a argumentação, o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, bem como a autorregulação. Finalmente, nesta tarefa em que se cometeram erros e foi necessário refazer o trabalho já realizado, foi também uma oportunidade para desenvolver a persistência.

Tarefa — O peso das mochilas

Guião do professor

Parte I

Os seguintes pontos dizem respeito a ações desencadeadas pelo professor.

1. Apresentar a seguinte situação à turma e distribuir o enunciado com a tabela. O trabalho é retomado noutra aula ou na mesma, dependendo do local de recolha de dados.

Com certeza sabes que transportar demasiado peso faz mal à saúde e pode causar problemas à tua estrutura óssea, em especial à coluna vertebral. Um estudo publicado pela DECO refere mesmo que um ser humano não deve carregar mais do que 10% do próprio peso.

Será que a tua mochila tem um peso adequado para ti?

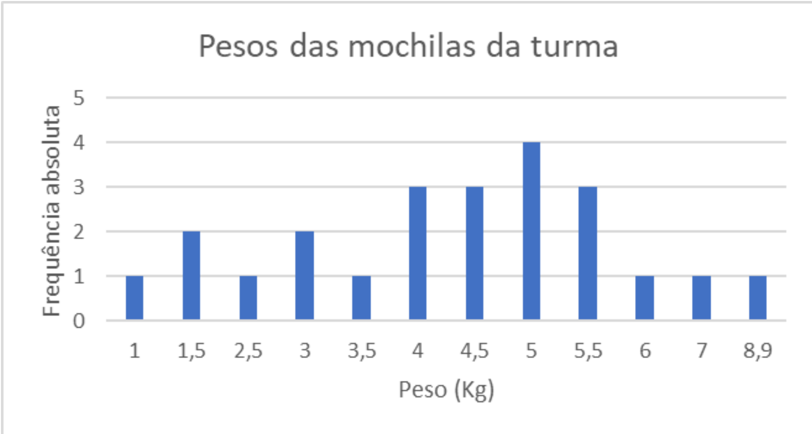
E o que acontece com a generalidade das mochilas dos alunos da tua turma?

Recolhe os dados dos alunos do teu grupo relativo ao peso dos alunos e ao peso das mochilas.

Aluno	Peso	Peso com a mochila	Peso da mochila

---

2. Pedir aos alunos que observem a tabela com os dados recolhidos sobre o peso das mochilas dos alunos da turma levando à constatação da grande variedade de dados.
3. Discutir com a turma como organizar e representar esses dados.
4. Deixar que os alunos experimentem as formas sugeridas ou, caso o tempo seja limitado, projetar os dados representados num gráfico de barras previamente preparado (uma opção habitualmente sugerida pelos alunos) para evidenciar a limitação que um gráfico de barras pode ter nestas situações e analisar eventuais erros.
   Exemplo (com base em dados reais):



5. Sugerir a realização de um diagrama de caule-e-folhas (caso os alunos não estejam recordados ou não tenham trabalhado este tipo de gráficos, recordar como se constrói e lê um diagrama caule-e-folhas).
6. Construir um diagrama com os dados recolhidos.
7. Projetar um diagrama e comparar com o gráfico de barras.
8. Contornar os retângulos formados pelas folhas do diagrama de modo a visualizar a representação próxima do histograma. Apresentar este conceito.
9. Discutir com os alunos a possibilidade de organizar os dados noutras classes de modo a facilitar a interpretação da situação.

Parte II

1. Propor que os grupos organizem os dados em classes, permitindo que os alunos façam propostas de classes que considerem adequadas aos dados (pedir aos alunos que encontrem intervalos em que a diferença entre os valores máximos e mínimos se mantenha constante). A partir dessa organização, pedir que os grupos:
   a. Construam uma tabela com os dados agrupados em classes.
   b. Construam o histograma partindo dos dados da tabela.
   c. Interpretem o histograma.
2. Apresentar o conceito de classe modal.
3. Propor aos alunos a realização de um trabalho em que apresentam os resultados à turma ou à escola e apresentem propostas de soluções para eventuais problemas detetados.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nos alunos dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Questões estatísticas recolha e organização de dados	-Questões estatísticas. -Métodos e fontes de recolha de dados. -Tabelas de frequências organizadas em classes
	Representações gráficas	-Gráficos de caule-e-folhas -Histogramas
	Análise de dados	-Resumo dos dados -Interpretação e conclusão
	Comunicação e divulgação do estudo	Divulgar o estudo com recurso a um relatório, contando a história, e comunicando de forma fluente e adequada ao público a que se destina.
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Resolver problemas a partir de uma situação dada, em contextos diversos.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Conexões matemáticas	Conexões externas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração, perseverança
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Valorização da matemática	Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que alunos progressivamente sejam capazes de:

- Formular questões estatísticas do seu interesse, sobre características quantitativas contínuas.
- Participar na definição de quais são os dados a recolher e decidir onde devem ser recolhidos, quem inquirir e/ou o que observar.
- Recolher dados a partir de fontes primárias.
- Reconhecer que os dados contínuos envolvem grande variedade de números levando à necessidade de agrupar os dados em classes.
- Construir classes de igual amplitude, sem recorrer a regras formais.
- Usar tabelas de frequências absolutas e relativas para organizar os dados para cada uma das classes. Usar título na tabela.

- Representar dados através de histogramas, usando escalas adequadas, e incluindo fonte, título e legendas.
- Reconhecer a(s) classe(s) modal(ais) como a classe que apresenta maior frequência e identificá-la.
- Analisar criticamente qual(ais) as medida(s) resumo apropriadas para resumir os dados, em função da sua natureza.
- Ler, interpretar e discutir a distribuição dos dados, salientando criticamente os aspetos mais relevantes.
- Retirar conclusões, fundamentar decisões e colocar novas questões pelas conclusões obtidas.
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.

Recursos

Balança, tabela para organização dos dados de cada grupo, computador ou *tablet* com *software* para construção de gráficos (por exemplo, uma folha de cálculo para os histogramas).

Resoluções esperadas

Nesta tarefa é esperado que os alunos possam identificar métodos de recolha, organização e representação de dados contínuos e, por fim, divulgar o estudo a um público cujas informações revelem interesse. Uma vez que o desenvolvimento do trabalho fica muito dependente dos dados recolhidos e das sugestões dos alunos, neste ponto salientaremos apenas alguns aspetos que nos parecem mais relevantes.

Parte I - Questões 3 e 4:

Nestas questões é natural que os alunos sugiram a organização de uma tabela de frequências, uma vez que esse é um método que devem conhecer de anos anteriores. Ao fazerem-no, é provável que reparem que a tabela é invulgarmente grande, uma vez que nestas situações tende a haver uma reduzida repetição dos dados. Da mesma forma, para a representação de dados poderão escolher um gráfico de barras. Neste caso, a variabilidade de dados traduz-se num gráfico em que as frequências tendem a ser baixas, podendo dificultar a análise de tendências de valores para os pesos das mochilas, o que complica a interpretação. Além disso, a distribuição desigual dos dados e um possível valor elevado para a amplitude podem levar os alunos a construir um gráfico como o ilustrado no guião (exemplo real) em que a escala no eixo horizontal não foi respeitada, o que constitui um erro. Estas situações têm um potencial de aprendizagem relevante, pois é importante que os alunos compreendam por que razão é errado desrespeitar a escala, identificando o efeito visual que provoca e, consequentemente, a interpretação errada que sugere.

Parte II - Questão 1:

Nesta questão os alunos têm liberdade para sugerir diferentes formas de organização dos dados em classes. Uma vez que não se trabalha, no 2.º ciclo, a regra para determinar o número de classes, é preciso discutir com os alunos um valor razoável e adequado à situação, tendo ainda em conta que a amplitude de cada intervalo deve ser igual. Esta liberdade pode implicar que os grupos decidam construir classes diferentes, o que conduzirá a diferentes representações e, eventualmente, conclusões distintas.

Exploração da tarefa

Esta proposta de investigação estatística tem como ponto de partida um estudo publicado pela DECO que refere que um ser humano não deve carregar mais do que 10% do seu próprio peso.

Apresentação da tarefa. O professor apresenta a tarefa levantando a questão se o peso das mochilas dos alunos da turma cumprirá esta recomendação. Tempo previsto: 10 min.

Ao contrário do trabalho habitual que se desenvolve em três ou quatro fases distintas e sequenciais — apresentação da tarefa, trabalho autónomo, discussão e síntese das aprendizagens — nesta tarefa há uma fase prolongada em que o trabalho se desenvolve coletivamente, intercalando com momentos de trabalho de grupo. Isto acontece porque há necessidade do professor introduzir conceitos e procedimentos que vão emergindo da necessidade de tratar os dados de natureza contínua, os quais surgem no 6.º ano pela primeira vez.

Trabalho autónomo. Assim, a segunda fase de resolução da tarefa inicia-se com o trabalho autónomo dos alunos, organizados em grupos de três a quatro alunos. O professor distribui a cada grupo o enunciado que consta no guião, de modo a que os alunos façam a recolha dos dados. Na sala de aula, os alunos têm à sua disposição uma balança para se pesarem com e sem mochila (para agilizar este processo, a recolha do peso dos alunos poderá ser realizada em casa ou em colaboração com o professor de Educação Física). O professor deverá escolher o dia da semana em que vai realizar esta tarefa e recomendar aos alunos que tragam todo o material necessário para as atividades desse dia. A utilização de uma balança digital facilitará a leitura dos pesos.

Depois de recolhidos os dados, as questões 2 e 3 são realizadas em trabalho coletivo. O professor deve ouvir as propostas dos alunos, formular questões e deixar que os colegas argumentem sobre a adequação das ideias apresentadas. De seguida, os alunos voltam ao trabalho de grupo e concretizam as estratégias que decidiram para organizar e representar os dados. O professor circula pela aula e fotografa algumas resoluções que considere relevantes para a discussão. O exemplo real apresentado na Questão 4 corresponde a um gráfico de barras com características (e erros) prováveis de surgir. A restante Parte I da tarefa será realizada em trabalho coletivo, seguindo as indicações propostas no guião.

A Parte II é centrada no trabalho autónomo dos alunos que, agora conhecendo o conceito de histograma, irão usá-lo para representar os dados e tirar conclusões. A forma de divulgação deve ser também da responsabilidade dos grupos, ainda que negociada e supervisionada pelo professor.

No fim, seguir-se-á a **divulgação do trabalho realizado** em que cada grupo poderá partilhar as conclusões da investigação com a turma ou divulgar esses resultados junto da comunidade escolar.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Os alunos têm dificuldade em se organizar para recolher os dados de toda a turma.	Sugerir que os grupos se organizem atribuindo responsabilidades a cada elemento, de modo a poder recolher os seus dados e os dos colegas dos outros grupos. Alternativamente, o professor pode projetar uma tabela e os alunos podem preenchê-la autonomamente ou em trabalho coletivo.
Os alunos têm dificuldade em decidir quais as classes que devem fazer.	O professor pode sugerir associar a cada classe a ideia de serem mochilas leves, pouco pesadas, etc., desde que se mantenha o foco na variável quantitativa e que os intervalos tenham igual amplitude.

Os alunos têm dúvida sobre qual a classe em que incluem os extremos dos intervalos.	O professor deve estipular com a turma o que fazer nesses casos e todos devem adotar a mesma regra.
Os alunos não sabem como concluir se os pesos das mochilas ultrapassam ou não 10% do seu peso	Aqui existem hipóteses bastante diferentes. Por exemplo, pode acrescentar-se uma coluna à tabela do enunciado com o quociente entre o peso da mochila e do aluno (uma folha de cálculo será útil) e fazer a análise deste novo conjunto de dados. Alternativamente, pode-se usar as médias dos pesos das mochilas e dos alunos e comparar.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi desenvolvida em 4 aulas de 50 minutos. Atendendo ao momento do ano em que foi realizada, foi necessário fazer alguns ajustes relativamente à planificação apresentada anteriormente. As duas turmas não seguiram exatamente a mesma dinâmica, nem os produtos de divulgação foram os mesmos.

O relato que apresentamos de seguida conjuga os elementos mais importantes das duas experiências.

Apresentação da tarefa. A turma foi organizada em grupos de 4 elementos. As professoras conversaram com os alunos sobre o problema do peso excessivo das mochilas, motivando-os para o estudo. Posteriormente, distribuíram o enunciado que consta no guião para que os alunos fizessem a recolha dos dados. Numa das turmas, utilizou-se uma balança para os alunos se pesarem, com e sem as suas mochilas com todo o material necessário para um dia de aulas e, na outra turma, os alunos pesaram-se em casa e trouxeram os dados registados que foram trabalhados na aula seguinte.

Trabalho coletivo. Coletivamente, para que a turma tivesse acesso aos dados de todos os alunos, as professoras construíram no quadro, com a sua colaboração, a listagem dos dados. Como forma de organizar os dados, os alunos sugeriram uma tabela de frequências mas, à medida que se ia construindo, verificou-se que a variedade de dados era grande e que esta não seria a melhor opção para os organizar. Os alunos sugeriram também um gráfico de barras e, numa das turmas em que a professora teve acesso prévio aos dados, preparou o respetivo gráfico para ser discutido coletivamente. Apesar de perceberem que esta representação não favorecia a interpretação, os alunos repararam imediatamente em dois valores particularmente elevados e quiseram saber o motivo: num caso, tratava-se de um aluno que vivia alternadamente com o pai e com a mãe, pelo que em dias de mudança de casa tinha de carregar mais material; noutro caso, a preguiça em preparar a mochila no dia anterior ditou que o mais fácil seria ter sempre todo o material necessário…

Recordando outras formas de organizar dados, conhecidas dos alunos, as professoras sugeriram que estes construíssem um diagrama de caule-e-folhas. Uma vez que poucos alunos se recordavam deste diagrama, foi rapidamente revista a sua forma de construção e os alunos concluíram-na autonomamente.

Depois de os alunos concluírem os seus diagramas foi projetado um deles no quadro e as professoras contornaram os retângulos formados pelas folhas do diagrama, de modo a obter uma representação mais próxima do histograma (figura 1). Depois de o fazerem, perguntaram "o que vos faz lembrar o diagrama assim pintado?", ao que os alunos responderam "um gráfico de barras deitado". Esta ideia foi aproveitada pelas professoras que salientaram o facto de as barras estarem juntas e introduziram o conceito de histograma.

Figura 1. Lista de pesos das mochilas, diagrama de caule-e-folhas e proposta de agrupamento dos dados em classes de um grupo

Peso das Mochilas
4,5
3
2,5
5
4
7
5,5
3,5
4,5
6
8,8
5
1,5
1
4
3
1,5
5
4
4,5
5,5
5
5,2

Peso das Mochilas
Diagrama de caule e folhas

1	0	5	5				
2	5						
3	0	0	5				
4	0	0	0	5	5	5	
5	0	0	0	0	2	5	5
6	0						
7	0						
8	8						

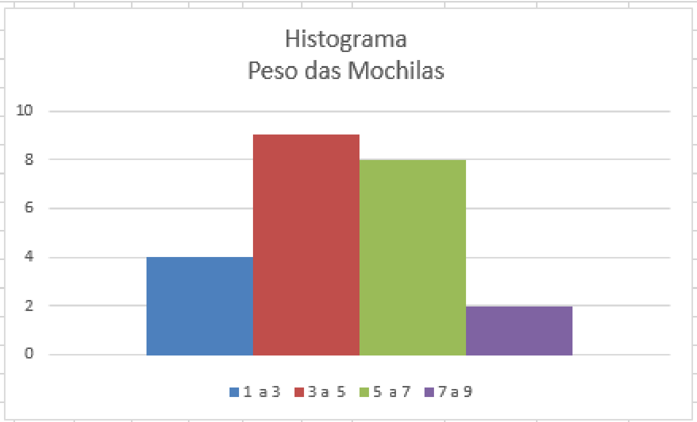
tabela de frequências

classes	F.A.
1 a 3	4
3 a 5	9
5 a 7	8
7 a 9	2

Ao analisar os dados contidos em cada retângulo, verificou-se que existiam alguns com vários valores e outros com poucos e, além disso, havia um número elevado de retângulos (ou seja, classes). Assim, foi proposto aos alunos agrupar os dados formando novas classes de modo a facilitar a interpretação da situação.

Trabalho autónomo. Os alunos voltaram a trabalhar em grupos para pensar numa nova organização dos dados em classes adequadas. As professoras deram a indicação aos grupos para que encontrassem intervalos em que a diferença entre os valores máximos e mínimos se mantivesse constante, uma indicação que nem sempre foi respeitada pelos alunos. Cada grupo construiu uma nova tabela com os dados agrupados em classes e, a partir desta, um histograma como o apresentado na figura 2.

Figura 2. Exemplo de histograma



Para concluírem se existiria ou não um peso excessivo nas mochilas, os grupos recorreram à média dos pesos dos alunos e das mochilas, tendo chegado a resultados diferentes: numa das turmas, a média dos pesos das mochilas não excedia os 10% da média dos pesos dos alunos, mas noutra sim. Apesar do resultado positivo do primeiro caso, os alunos compreenderam que o facto de a média não ultrapassar o valor de referência não implicava a inexistência de situações problemáticas.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias chave. Atendendo aos resultados obtidos e à sua discussão coletiva, as duas turmas chegaram à conclusão que o peso das mochilas era, em muitos casos, acima do recomendado e consideraram oportuno tomar medidas de divulgação e sensibilização junto da comunidade escolar. Numa das escolas, os alunos fizeram panfletos com recomendações para serem distribuídos aos alunos no ano letivo seguinte (figura 3). Na outra escola, a turma enviou uma mensagem de email ao Diretor do Agrupamento (figura 4) expondo as conclusões da investigação e fazendo algumas recomendações que, no seu entender, poderiam minimizar o problema do peso das mochilas. Esta mensagem recebeu a atenção do Diretor que respondeu à turma indicando as medidas já realizadas, aquelas que seriam tomadas e, ainda, explicando a impossibilidade de acolher todas as propostas (figura 5).

Figura 3. Exemplo de um panfleto

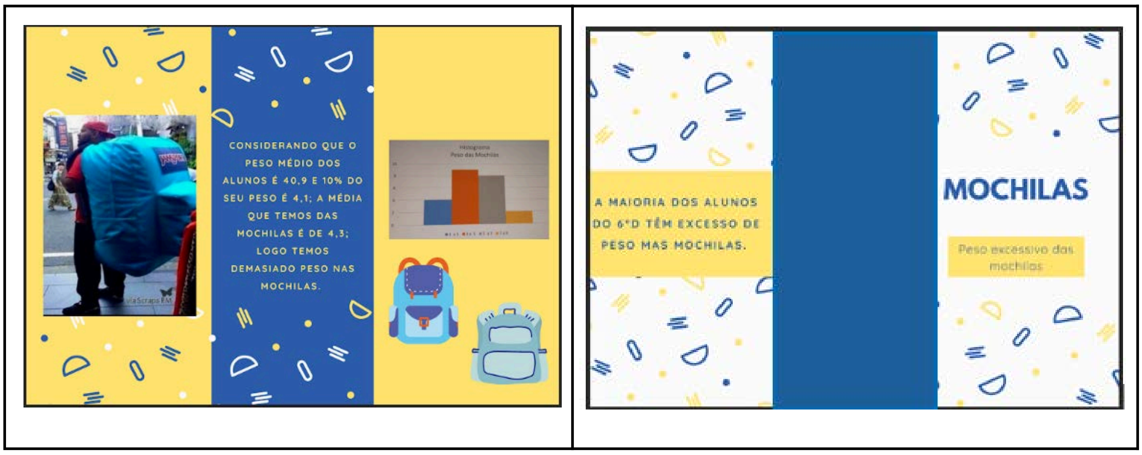


Figura 4. Carta dirigida ao Diretor do Agrupamento

Bom dia Sr. Diretor

Na aula de matemática a turma do 6.ºG fez uma investigação sobre os pesos das mochilas dos alunos, e descobrimos que um estudo publicado pela DECO recomendava que o peso das mochilas não fosse superior a 10% do peso dos alunos.

Desta investigação concluímos que o peso das mochilas dos alunos do 6º G, **no dia em que foram pesadas**, apresentavam o peso dentro do recomendado, ou seja, menos de 10% da média do peso dos alunos.

Infelizmente, **nem todos os dias isto acontece**, por isso, pensamos que seria muito importante que a escola:

Disponibilizasse cacifos, de modo a que os alunos possam guardar os seus pertences. Pois desta forma os alunos podem ter a sua mochila com um peso adequado ao longo do dia de aulas;

Implementasse um dia em que os alunos apenas sejam portadores do computador - "Dia da Mochila Leve";

Implementasse a prática de salas fixas para cada turma.

Temos a certeza que estas nossas sugestões merecerão a melhor atenção por parte da direção da nossa escola.

Com os melhores cumprimentos

Os alunos do 6.º G e a diretora de turma
Irene Martins

Figura 5. Resposta do Diretor do Agrupamento à turma

Bom dia,

Prof.ª Irene Martins
Alunos da turma do 6.º G

Agradeço, desde já, as sugestões que me enviaram e é com todo o gosto que a elas respondo.

No que respeita aos cacifos, posso adiantar que no próximo ano letivo os mesmos serão disponibilizados aos alunos.

Quanto ao dia da "mochila leve", será mais difícil concretizar, dado que não temos a modalidade dos manuais digitais implementada e os cadernos e manuais das disciplinas são necessários.

No que respeita às salas de aula, era nossa intenção termos uma turma por sala, porém dado o elevado número de turmas e ao número de salas que são utilizadas para disciplinas específicas (ET, EV, EM e TIC) não nos é possível concretizar essa intenção. E neste particular, temos feito um esforço para criar novas salas de aula, como são exemplo a 44b e a nova sala 51b, a construir neste verão.

Uma vez mais, muito obrigado.

Com os melhores cumprimentos,

Reflexão final : Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *O peso das mochilas* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos. Nesta tarefa os alunos passaram pelas diferentes fases de uma investigação estatística, mobilizando estratégias que já conheciam, nomeadamente a organização dos dados em tabelas de frequências e sua representação em gráficos de barras ou diagramas de caule-e-folhas. Uma vez que este pequeno estudo envolveu, pela primeira vez, uma variável quantitativa contínua, a sua abordagem favoreceu o reconhecimento que os dados desta natureza envolvem uma grande variedade de números, levando à pertinência de os agrupar em classes e representá-los através de um histograma. Além disso, os alunos tiveram de selecionar uma medida — no caso, a média — que se mostrasse pertinente para formular um juízo e tirar conclusões.

Capacidades matemáticas transversais. Partir de uma questão, mesmo que colocada pelas professoras, proporcionou a formulação de um problema num contexto do quotidiano dos alunos. A análise dos dados, a elaboração de tabelas e gráficos, incluindo a utilização da tecnologia, evidencia a elaboração de estratégias. Esta tarefa foi também promotora da comunicação matemática, oral e escrita, através da expressão de ideias, que foi importante em vários momentos: inicialmente, na fase de discussão sobre as formas adequadas de organizar e representar os dados, mas também na fase de apresentação das conclusões e divulgação do estudo, nomeadamente na elaboração de panfletos a disponibilizar na escola ou da carta ao Diretor do Agrupamento, dando a conhecer o estudo e as suas conclusões. O estabelecimento de conexões foi outra das capacidades matemáticas desenvolvidas, nomeadamente as conexões externas, em que os alunos aplicaram ideias matemáticas na resolução de um problema da realidade que era sua, procurando intervir fundamentadamente com a proposta de soluções.

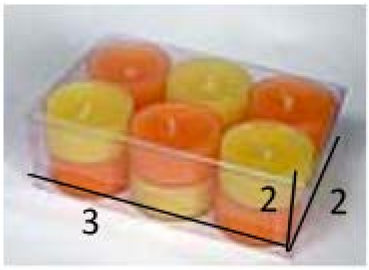
Capacidades e atitudes gerais transversais. Nesta tarefa pretendemos contribuir também para o pensamento crítico e criativo dos alunos, através do tratamento dos dados que mais convém ao estudo em causa para divulgar a mensagem pretendida com rigor. O desenvolvimento de um pequeno estudo contribuiu para fortalecer a colaboração e a perseverança através da discussão de ideias a partir de evidências. Além do mais, partir de um problema que afeta a vida dos alunos e, através da matemática, perceber a sua relevância e desenvolver ideias para a sua resolução, permitiu contribuir para a valorização da matemática.

Tarefa — Embalagens de velas

Enunciado da tarefa

Embalagens de velas

1. As velas podem ser arrumadas de diferentes formas, como mostram as imagens que encontras em baixo. As embalagens paralelepipédicas contêm velas do mesmo tamanho arrumadas em camadas, com o menor desperdício de espaço possível.



A embalagem da figura tem 12 velas. Na embalagem, as velas foram dispostas do seguinte modo: duas camadas em altura, três em largura e duas em profundidade (2 x 3 x 2).

1.1. Existem outros tipos de embalagens paralelepipédicas, diferentes das da figura, que permitem arrumar 12 velas iguais, também com o mínimo desperdício de espaço.

a. Descobre uma dessas embalagens e faz o seu esboço.

b. Explica como se dispõem as velas na embalagem, através de um produto com 3 fatores, de acordo com o exemplo anterior.

2. A caixa da imagem tem 50 velas.

2.1. De quantas formas diferentes podes arrumar 50 velas numa caixa?

Explica todas as formas de dispor as velas na caixa, através de um produto com três fatores.

2.2. A Joana adora números primos. Escolheu a disposição onde só aparecem números primos. Indica a disposição escolhida pela Joana.

Adaptado de: Embalagens de Velas http://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/2022-09/401.pdf

Planificação da aula

Enquadramento curricular

6.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nos alunos dos conteúdos apresentados na tabela seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números naturais	Decomposição em fatores primos
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Resolver problemas que envolvam a interpretação e modelação de situações.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações matemáticas	Usar representações múltiplas para exprimir ideias e processos matemáticos.
Capacidades e atitudes gerais transversais	Perseverança	Não desistir prematuramente da resolução da tarefa
	Valorização da Matemática	Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que alunos progressivamente sejam capazes de:

- Representar números naturais como produto de fatores primos e reconhecer que essa decomposição é única.
- Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos. Materiais que possam simular a organização das velas.

Resoluções esperadas

Nesta tarefa é esperado que os alunos descubram diversos produtos que traduzam a disposição de um número de velas numa embalagem, o que permitirá ao professor introduzir a decomposição de números em fatores primos.

Questão 1

Os alunos poderão identificar um caso entre 15 hipóteses com números diferentes dos apresentados no exemplo. Na verdade, considerando apenas os valores possíveis, existem três produtos: 1x1x12, 1x2x6 e 1x3x4. Contudo, atendendo a que cada fator corresponde a uma dimensão, existem 3 embalagens para o primeiro produto e 6 para cada um dos outros produtos. Este aspeto poderá levantar a dúvida entre os alunos sobre se, por exemplo, 1x3x4 é ou não a mesma embalagem que 3x1x4, pelo que a atribuição de significado a cada fator é fundamental.

Uma vez que todas as possibilidades de arrumação de 12 velas, ainda por descobrir, implicam que uma das dimensões tenha valor 1 (ou seja, uma camada de velas) propõe-se que os alunos façam o seu esboço, o que ainda assim pode levantar dificuldades.

Questão 2

Embora a tarefa não proponha que os alunos organizem as suas descobertas numa tabela para encontrar todas as possibilidades de decomposição, é interessante desafiá-los a fazê-lo para terem a noção de que conhecem todas as possibilidades. Deste modo, após as primeiras tentativas realizadas pelos alunos, e dependendo do trabalho que os grupos desenvolverem, poder-se-á questionar como fazer para ter a certeza de que temos todos os produtos. Para 50 velas é possível verificar que, se um dos fatores é 1, só existem 4 possibilidades que cumprem a condição dos fatores serem todos números naturais, duas possibilidades em que um dos fatores é 2; três possibilidades em que um dos fatores é 5; e, outras duas possibilidades em que um dos fatores é 10.

Do mesmo modo se verifica que não existem produtos cujos fatores sejam diferentes dos apresentados na figura 1.

Figura 1. Possibilidades de fatores inteiros para um produto de valor 50

1	1	50
1	2	25
1	3	16,7
1	4	12,5
1	5	10
1	6	8,3
1	7	7,1
1	8	6,3
1	9	5,6
1	10	5

2	1	25
2	2	12,5
2	3	8,3
2	4	6,3
2	5	5
2	6	4,2
2	7	3,6
2	8	3,1
2	9	2,8
2	10	2,5

5	1	10
5	2	5
5	3	3,3
5	4	2,5
5	5	2
5	6	1,7
5	7	1,4
5	8	1,3
5	9	1,1
5	10	1

10	1	5
10	2	2,5
10	3	1,7
10	4	1,3
10	5	1
10	6	0,8
10	7	0,7
10	8	0,6
10	9	0,6
10	10	0,5

Para além da procura organizada das diferentes possibilidades de produtos de inteiros cujo valor é 50, é possível conhecer os casos que têm números primos como fatores e verificar que existem duas possibilidades (2x5x5 e 5x5x2), atendendo ao significado da organização das velas na embalagem.

Exploração da tarefa

Para a realização desta tarefa, propõe-se que os alunos se organizem em grupos de 3 ou 4 elementos. Na **apresentação da tarefa**, é necessário apoiar os alunos na compreensão do significado do produto de fatores relacionando com a disposição das velas nas caixas. Tempo previsto: 5 min.

Na segunda fase, o **trabalho autónomo dos alunos**, o professor irá circulando pelos grupos observando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Se os alunos tiverem material para simular a disposição das velas, o professor deverá incentivar a que, no devido tempo, os alunos abandonem o material e passem a usar apenas as representações numéricas como forma de chegar (ou verificar) se um dado caso é possível. Para os grupos mais adiantados, poderá ainda desafiá-los a encontrar todos os casos possíveis de um modo organizado. Tempo previsto: 45 min.

Seguir-se-á uma **discussão com toda a turma**, em que o professor solicitará as soluções encontradas, bem como a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes formas e incentivando os alunos a fundamentar as suas ideias. Neste momento, pode ser útil voltar à discussão de aspetos suscetíveis de gerar confusão:

Precisamos escrever 1 em representações como 1x5x10? Uma caixa destas é diferente da caixa 5x1x10? Porquê?

Durante a sistematização das várias possibilidades, o professor pode ainda aproveitar para explorar relações como a de dobro/metade nos casos 1x2x25 e 1x1x50 e fazer notar a eficácia destas representações e relações na resolução do problema.

Dificuldades previstas e ações do professor

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Pode surgir a dificuldade em assumir o 1 (um) como um fator necessário para descrever caixas como a de 1x2x6 e a necessidade de acompanhar com materiais (por exemplo, cubos de encaixe) e representações adequadas para dar significado.	O professor poderá ultrapassar a situação recorrendo à representação física da caixa das velas para identificar a que corresponde determinado número e assim estabelecer relação entre o número 1 e o nível de velas na caixa.
Os alunos poderão sentir dificuldade em desenhar o esboço visto tratar-se de um objeto tridimensional.	O professor pode sugerir o desenho de esquemas alternativos que não correspondam a um desenho em perspetiva da caixa.
Os alunos podem não conseguir estruturar o conjunto de 50 velas e relacionar com a representação em produto de 3 fatores.	O professor pode voltar ao exemplo de abertura e, com material, mostrar que 2x3 corresponde ao número de velas na camada horizontal da base (modelo retangular) e o último fator em 2x3x2 corresponde ao número de camadas.

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi desenvolvida em três aulas de 50 minutos, em trabalho de grupo, após a mesma ter sido apresentada à turma pela professora. Foi distribuído a cada aluno um enunciado e, a cada grupo, um conjunto de peças circulares encaixáveis.

Os primeiros 100 minutos foram utilizados pelos grupos para debate e resposta às diferentes questões da tarefa. Nos 50 minutos restantes, os grupos apresentaram à turma as suas resoluções e o modo como pensaram.

No relato que se segue temos como referência os acontecimentos de uma turma, tendo a aula da outra turma seguido um desenvolvimento semelhante.

Apresentação da tarefa

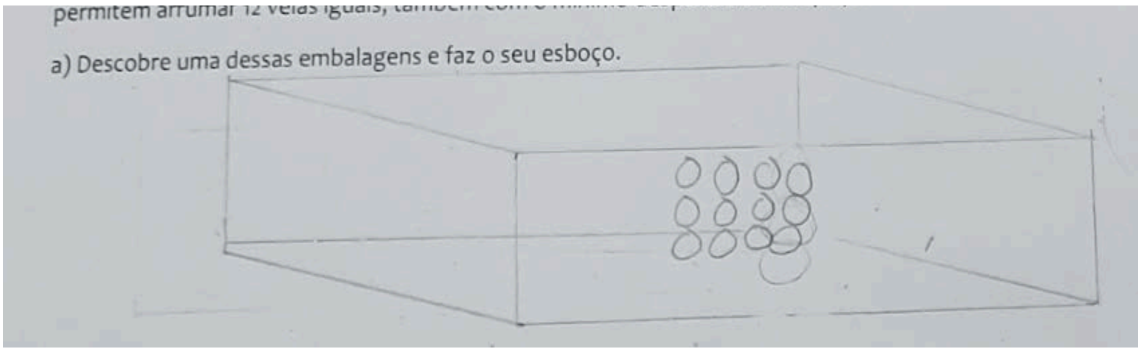
A professora apresentou a tarefa à turma, chamando a atenção para a forma como as velas estavam dispostas na embalagem, as dimensões da embalagem (2x3x2) e o seu significado. Para este efeito, verificou-se útil a utilização de material para modelar a situação. De seguida, deu indicações aos grupos sobre o trabalho a desenvolver e passou-se ao trabalho autónomo.

Trabalho autónomo

Durante esta fase da aula a professora circulou pela sala, conversando com os grupos, tentando perceber as estratégias que estavam a ser utilizadas pelos alunos para a resolução da tarefa.

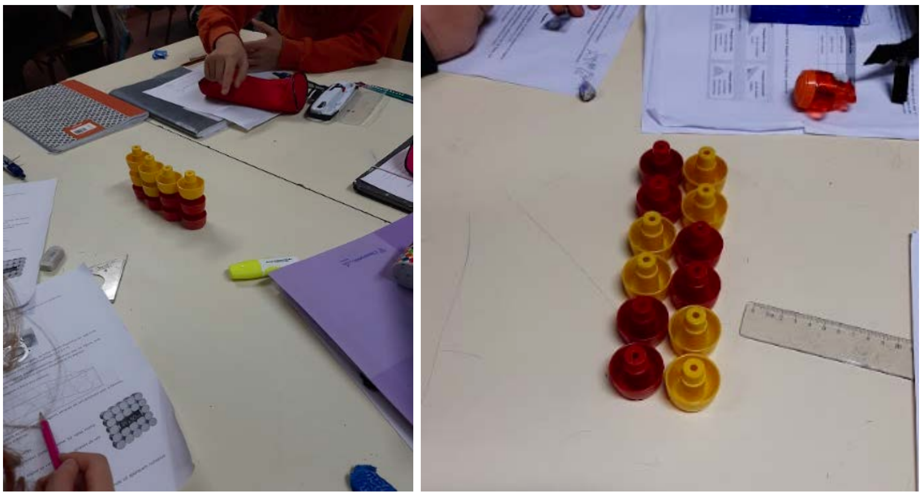
Uma dificuldade que sobressaiu no início diz respeito à construção de um esboço de uma solução. A arrumação de 12 velas numa só camada de 4 por 3 correspondeu a uma solução simples e intuitiva, mas no seu esboço alguns alunos tentaram um desenho em perspetiva, próximo da fotografia apresentada no enunciado, o que, como vemos na figura 2, levantou dificuldades.

Figura 2. Produção de um aluno



Dado que a representação visual não apoiava eficazmente a identificação de soluções possíveis, foi necessário recorrer a material (peças de encaixe) que simulasse as velas para que os alunos conseguissem visualizar a sua arrumação dentro da embalagem (figura 3).

Figura 3. Utilização do material manipulável para visualizar a arrumação das velas na caixa



Esta estratégia foi fundamental para os alunos encontrarem novas soluções e, a partir daí, passarem para a representação numérica através de um produto de três fatores. Para alguns grupos foi também importante esta concretização para atribuírem significado ao 1 como uma possível dimensão da embalagem. Na sua forma de pensar, bastaria representar a hipótese à esquerda (figura 3) através do produto 4x3 (4 de largura e 3 de altura), como se estivesse implícito que existe apenas uma camada; analogamente, o caso da direita seria representado por 2x6. De certa forma, a inclusão do 1 como uma das três dimensões acabou por ser muito mais difícil de entender do que o exemplo de abertura (2x3x2), mas as discussões apoiadas no material minimizaram essa dificuldade.

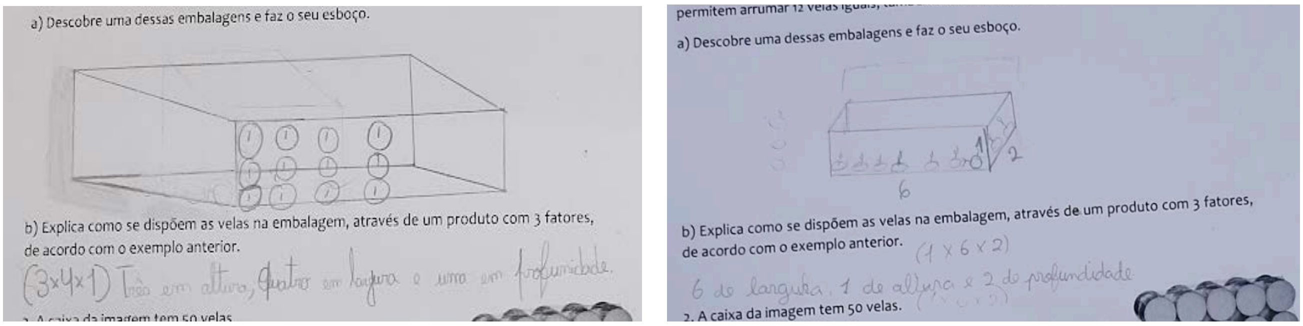
Na questão 2 da tarefa, os alunos tinham de arrumar 50 velas numa embalagem, representando esta arrumação através de um produto de 3 fatores. Ao circular pelos grupos, a professora foi respondendo a questões colocadas pelos alunos. Alguns questionaram se a expressão 50x1x1 ou a expressão 1x50x1 eram válidas, evidenciando como a situação de ter 1 numa das dimensões pode ser desafiante. Esta interrogação também pode evidenciar algum sentido crítico, uma vez que estas formas de organizar podem não fazer muito sentido do ponto de vista prático. A professora respondeu que sim, uma vez que ambos os produtos representavam possíveis arrumações.

Enquanto o primeiro caso analisado correspondia a um valor muito pequeno de velas (12), com rápida identificação dos divisores e respetivos casos, esta nova situação, com um número muito maior de velas e já sem material, constituiu um desafio. Os grupos apresentaram soluções, mas a maior parte deles não conseguiu encontrar todas as possíveis, o que levou a professora a incentivar os alunos a partir da fatorização do 50.

Discussão com toda a turma

Nesta fase, os grupos apresentaram as suas conclusões à turma. Relativamente à primeira questão, os alunos optaram por fazer o esquema no quadro e o respetivo produto de 3 fatores que representava a arrumação de 12 velas. As imagens (figura 4) ilustram o trabalho desenvolvido em dois dos grupos. A produção à esquerda exibe o mesmo tipo de dificuldade já reportada; a produção à direita mostra uma forma de contornar o problema — os alunos encontram um esquema próprio em que desenham apenas as velas encostadas às faces da embalagem e colocam os números correspondentes a cada dimensão — uma representação que combina o caráter visual com outro simbólico. Ao lermos a resposta à alínea b, percebe-se que os dois grupos atribuem o significado correto às representações feitas.

Figura 4. Produções dos alunos apresentadas na discussão coletiva da questão 1



Na segunda questão, os grupos apresentaram os produtos de 3 fatores para diferentes disposições das 50 velas numa embalagem. De um modo geral, como se pode ver pela figura 5, os alunos mantiveram um dos fatores e variaram os outros dois fatores, mas não procuraram uma forma organizada de descobrir a totalidade das possibilidades. No entanto, há a destacar o facto de terem registado os diferentes ternos utilizando também a linguagem natural, dando assim a conhecer à professora o significado que atribuíam a cada um dos fatores.

Figura 5. Produção dos alunos

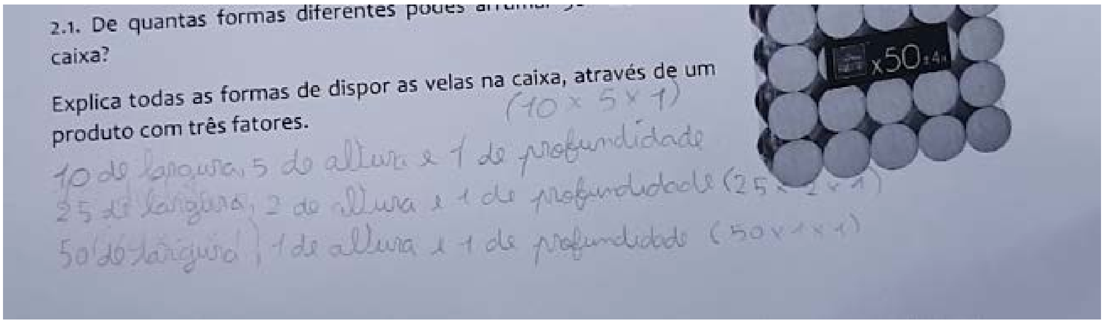
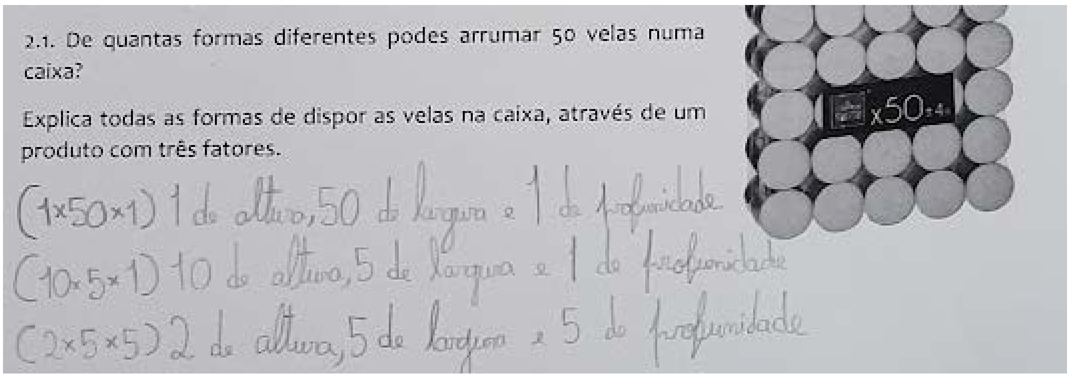


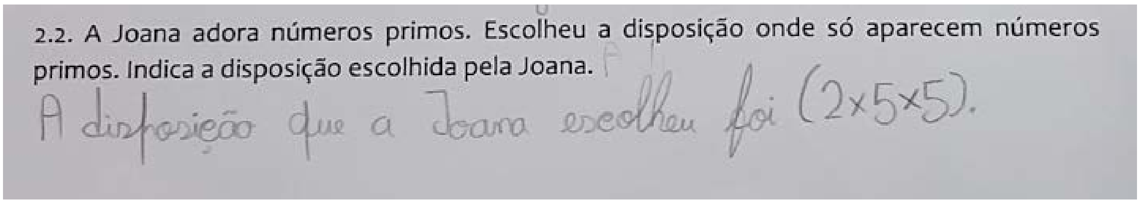
Figura 6. Produção dos alunos



Após as apresentações de alguns grupos, a professora perguntou se algum tinha encontrado produtos diferentes dos já apresentados e um dos grupos referiu que também podia ser o produto 2x5x5.

Os diferentes produtos foram registados no quadro e a professora perguntou aos alunos qual o produto que escolheriam para responder à questão 2.2. Uma vez que durante o trabalho autónomo a professora verificou que alguns dos alunos não se recordavam do conceito de número primo, sentiu necessidade de lançar a questão para a turma e recordar a definição com o apoio de outros alunos, seguindo-se a apresentação de uma disposição possível (figura 7)

Figura 7. Produção dos alunos


2.2. A Joana adora números primos. Escolheu a disposição onde só aparecem números primos. Indica a disposição escolhida pela Joana.

A disposição que a Joana escolheu foi (2×5×5).

No fim da atividade, além de rever o conceito de número primo, a professora apresentou as técnicas que permitem decompor um número em fatores primos e assinalou, ainda, que tal decomposição é única.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Embalagens de velas* em duas turmas do 6.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Com esta tarefa pretende-se criar uma situação em que a decomposição de um número em fatores surja com relevância, de modo a introduzir a decomposição em fatores primos. A sua resolução envolve o trabalho com divisores, já do conhecimento dos alunos, bem como a noção de número primo. Os alunos não mostraram dificuldades em lidar com os aspetos estritamente numéricos ou até em encontrar soluções para o problema, mas antes com a interpretação do modelo matemático e respetivas representações, a que nos referimos no ponto seguinte. Não obstante, a tarefa cumpriu o propósito para a qual foi concebida.

Embora o assunto principal se inclua no tema dos Números e não tenhamos estabelecido objetivos relativos à Geometria, a ligação a este tema é óbvia. Efetivamente, ao analisar diferentes arranjos com o mesmo número de velas, os alunos estão a estruturar diferentes paralelepípedos mantendo o seu volume. Este conceito não foi abordado, nem pensamos que deva sê-lo a este propósito, mas este trabalho pode apoiar posteriormente a compreensão da medição do volume e a expressão para o seu cálculo em paralelepípedos.

Capacidades matemáticas transversais

Ao longo da resolução desta tarefa, as professoras procuraram desenvolver a aprendizagem da resolução de problemas que, no caso particular em que são pedidas todas as soluções, constitui uma oportunidade para valorizar uma estratégia útil em muitos problemas matemáticos ou do quotidiano: conceber uma estratégia organizada e sistemática na procura de soluções. Alguns alunos perceberam, por exemplo, que fixar um valor e variar outros é uma forma de obter diferentes soluções. No que respeita à eficácia de diferentes estratégias, ela está bastante dependente de outro aspeto muito relevante nesta tarefa: a utilização de representações. De facto, os alunos mobilizaram representações visuais, físicas, verbais e simbólicas, tendo em alguns casos utilizado uma combinação de modos de representação. Entre estas, perceberam que as representações simbólicas têm, neste caso, o poder de concentrar informação e facilitar o raciocínio e a comunicação dos casos possíveis. De certa forma, pode-se dizer que a tarefa convida os alunos a reconhecer o significado da posição de cada fator num produto, quando o mesmo traduz as dimensões de um objeto tridimensional — uma situação comum no quotidiano.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Nesta tarefa procurou-se fomentar, particularmente, a persistência e a valorização da Matemática. No que respeita à primeira atitude, foi fundamental ter o contributo do material disponível porque este apoiou a descoberta de soluções e a descodificação do significado simbólico do produto de três fatores. Note-se ainda que, sempre que se solicitam todas as soluções possíveis e existe um número significativo, é necessário estimular a persistência e, simultaneamente, apoiar os alunos nessa procura sugerindo algum tipo de estratégia. No que respeita à valorização da matemática, ela decorre da utilização de uma representação simples e eficaz para resolver e comunicar um problema com ligação à vida real. Este tipo de situações de empacotamento não será, provavelmente, algo para o qual os alunos estejam despertos e não se pode dizer que seja um problema *seu*. Contudo, o exemplo das velas é simples e pode corresponder a uma primeira abordagem a um assunto em que a matemática é, efetivamente, muito relevante.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-35.

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, *166*, 19-24.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Casa, T. M., Firmender, J. M., Cahill, J., Cardetti, F., Choppin, J. M., Cohen, J., et al. (2016). *Types of and purposes for elementary mathematical writing: Task force recommendations.* http://mathwriting.education.uconn.edu

Coordenação do Projeto REASON (2022). Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 100-108). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Delgado, C., Mendes, F., & Mata-Pereira, J. (2022). Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Números. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Espadeiro, R. G. (2021). O Pensamento Computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Goldin, G. A. (2018). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer.

Hardin, J.S., & Horton, N.J. (2017). Ensuring that mathematics is relevant in a world of data science. *Notices of the American Mathematical Society,* *64*(9), 986-990. https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p986.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). Revisiting programming programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes modos de utilização do GeoGebra na resolução de problemas de Matemática para além da sala de aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 266-288.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!": Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática, 149-150*, 76-80.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* *96*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Machado, A. (2022). *Resolver e formular problemas na aprendizagem dos números e operações no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Minho.

Martins, O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, V., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., Rodrigues, S. (2017). Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. ME-DGE.

Mendes, F., Delgado, C., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Geometria*. IEUL. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Menezes, L., Tomás Ferreira, R. A., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135–164). IEUL.

Miranda, P. (2019). *Estratégias de resolução de problemas e formulação de problemas: Um estudo nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Minho.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM.

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education,* 53(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

OECD (2018). *PISA 2021 Mathematics framework* (Draft) https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Oliveira, H. & Henriques, A. (2022). Aprofundar o conhecimento sobre o raciocínio matemático na formação inicial de professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 86-101). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38*(3), 214-225.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 419–430.

Ponte, J. P. (2022). Introdução. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 6-8). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7-11.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. MEC-DGIDC.

Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: An experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments, 28*(3), 316–327. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1612448 Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática, 149–150*, 13–16.

Sáez-López, J. M., Sevillano-García, M. L., & Vazquez-Cano, E. (2019). The effect of programming on primary school students' mathematical and scientific understanding: Educational use of mBot. *Educational Technology Research and Development, 67*(6), 1405–1425. https://doi.org/10.1007/ s11423-019-09648-5.

Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., & Serra, S. (2022). Coletânea de tarefas – 5.º ano de escolaridade. https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_5ano.pdf

Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., & Serra, S. (2023). Coletânea de tarefas – 6.º ano de escolaridade. https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_6ano.pdf

Santos, E., Martins, C., Martins, I., Serra, S. (2022). Representações no estudo das frações no 5.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática*, 166, 67-70.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de matemática? In C. Lopes. & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11-34). Mercado Letras.

Seehorn, D., Carey, S., Fuschetto, B., Lee, I., Moix, D., O'Grady-Cunniff, D., Owens, B., Stephenson, C., & Verno, A. (2011). *CSTA K--12 Computer Science Standards: Revised 2011*. ACM.

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática, 149–150*, 13–16.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16. http://www.jstor.org/stable/40248592

Stein, M. K., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 165*, 22-28.

Tavares, D., Pinto, H., Menino, H., Rocha, I., Rodrigues, M., Rainho, N., Rodrigues, M., Cadima, R., & Costa, R. (2019). *Desafios matemáticos: 20 anos de problemas para os primeiros anos.* Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico *de Leiria.*

Tomás Ferreira, R. A. (2018). Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem. *Educação e Matemática, 149-150*, 1.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13, 438–445.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). O contributo de uma *gallery walk* para promover a comunicação matemática. *Educação e Matemática, 149-150*, 2-8.Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39-60.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society a: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*(1881), 3717–3725.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L., & Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: a systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education*, *10*(3). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w