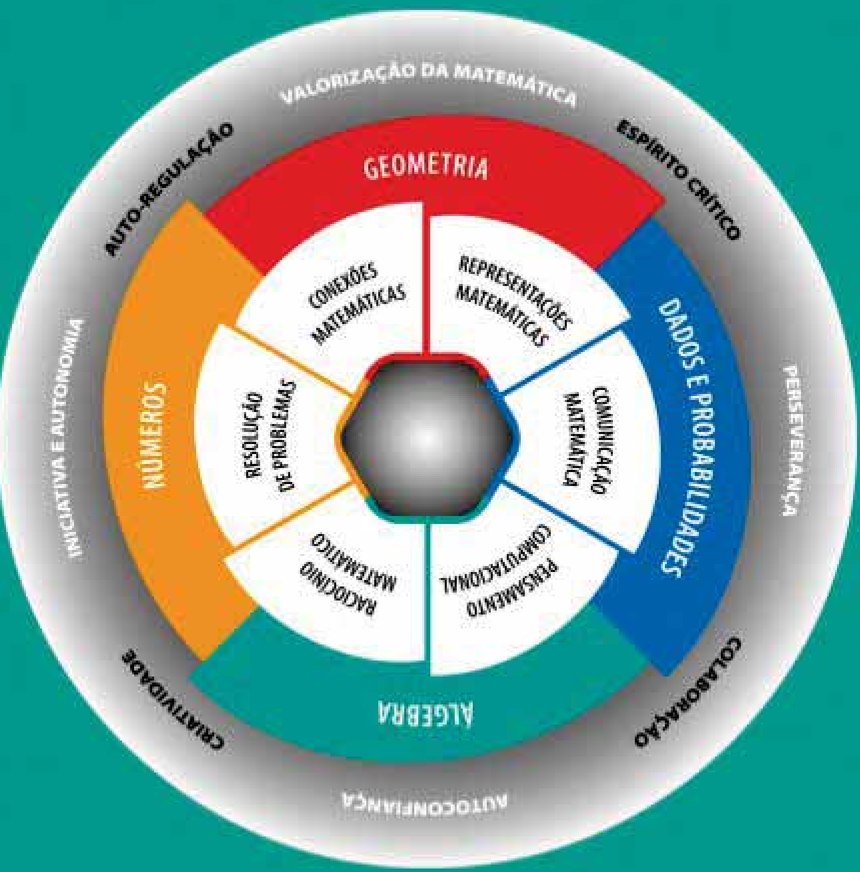
Capacidades matemáticas transversais

no 3.º Ciclo do Ensino Básico



Leonor Santos, Sandra Raposo, António Cardoso, Paulo Correia,

Rui Gonçalo Espadeiro, Ana Paula Canavarro, Célia Mestre,

Elvira Santos, Hélia Jacinto, João Almiro,

Lina Brunheira, Neusa Branco, Rosa Tomás Ferreira

2025

direção-geral da educação | PESSOAS 2030 | PORTUGAL 2030 | Cofinanciado pela União Europeia

Ficha técnica

Título
Capacidades matemáticas transversais no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Autores
Leonor Santos, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Sandra Raposo, Escola Secundária de Pinhal Novo
António Cardoso, Agrupamento de Escolas de Reguengos de Monsaraz
Paulo Correia, Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal
Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora
Célia Mestre, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Elvira Santos, Escola Superior de Educação da Lusofonia, Instituto Politécnico da Lusofonia
Hélia Jacinto, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
João Almiro, Escola Secundária de Tondela
Lina Brunheira, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Rosa Tomás Ferreira, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Edição
Direção-Geral da Educação

Diretor-Geral da Direção-Geral da Educação
David Sousa

ISBN
978-972-742-596-9

Data
2025

À *Leonor,*

com quem sempre aprendemos

Índice

Introdução

Apresentação e contextualização

Apresentação

Esta publicação faz parte de um conjunto de brochuras publicadas pela Direção Geral de Educação (DGE), no quadro do desenvolvimento das medidas de apoio à operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Inicialmente concebidas pelo Grupo de Trabalho em Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM)[1], deram origem a cinco publicações distintas que se constituem como recursos vocacionados para apoiar a generalização das novas orientações curriculares de Matemática nos diferentes ciclos do Ensino Básico. Cada brochura foi redigida por uma equipa de autores que inclui elementos do GTDCPM, tendo a sua maioria participado na escrita das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB), e os professores dos diferentes ciclos de escolaridade que, desde 2021/22, anteciparam a generalização das AEMEB em algumas escolas, em colaboração com o GTDCPM.

Importa sublinhar que estas Aprendizagens Essenciais se constituem como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, com diferenças assinaláveis relativamente a anteriores programas de Matemática para os ciclos de escolaridade correspondentes. Assim, destacamos:

1. Assunção de **três princípios essenciais** que moldam as opções curriculares tomadas: o princípio da Matemática para todos, o princípio da Matemática para o século XXI, e o princípio da Matemática é única, mas não é a única.
2. Privilégio do desenvolvimento da **literacia matemática,** entendendo-a como "a capacidade de raciocinar matematicamente e interpretar e usar a Matemática na resolução de problemas de contextos diversos do mundo real" (Canavarro et al., 2021, p. 2), de modo a "que cada pessoa possa viver e atuar socialmente de modo informado, contributivo, autónomo e responsável" (idem, p. 2). A ideia de literacia matemática constitui a finalidade última para a qual as aprendizagens dos diversos conteúdos devem ser orientadas.
3. Consideração de **conteúdos de natureza diversa na aprendizagem em Matemática:** conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Estes conteúdos de aprendizagem são de natureza

[1] O GTDCPM é constituído por Leonor Santos (Coordenadora), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Gonçalo Espadeiro, Helena Gil Guerreiro, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Neusa Branco, Paulo Correia e Rosa Tomás Ferreira.

diversa, e a sua abordagem deve ser feita de forma articulada e continuada, em todos os ciclos de escolaridade;

4. Valorização de uma **abordagem integrada e continuada de conhecimentos matemáticos** respeitantes a quatro temas clássicos — Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, e Geometria e Medida (apenas Geometria no 3.º Ciclo) — prevendo-se que todos os temas sejam abordados ao longo de todos os anos de escolaridade de cada ciclo, através de tarefas que envolvam conceitos associados a quantidade, relações, dados e incerteza, e espaço e forma.
5. Valorização do desenvolvimento de um conjunto alargado de seis **capacidades matemáticas transversais**, incluindo capacidades há muito reconhecidas como centrais — a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática — e ampliando o leque a outras que são agora igualmente contempladas — as representações matemáticas, as conexões matemáticas, e o pensamento computacional.
6. Valorização do desenvolvimento de **capacidades e atitudes gerais transversais** que passam a estar explicitamente previstas, nomeadamente as que decorrem da seleção das capacidades e atitudes das áreas de competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Martins et al., 2017) que mais diretamente se relacionam com o trabalho em Matemática. São elas as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel do conhecimento, neste caso da Matemática. Esta seleção não pressupõe que as outras competências enunciadas no PASEO sejam excluídas da aula de Matemática, devendo ser consideradas sempre que surgirem como relevantes ao longo do trabalho com os alunos.
7. Assunção da importância da adoção de **métodos de ensino de natureza exploratória**, centrados na atividade dos alunos/as, apoiados por recursos poderosos que ampliem e enriqueçam a experiência matemática dos alunos, como é o caso de recursos digitais.

Temos consciência que a operacionalização das novas orientações curriculares poderá colocar desafios e levantar dificuldades aos professores, nomeadamente no que diz respeito à consideração de uma diversidade de conteúdos de aprendizagem a serem abordados de forma integrada na sala de aula, envolvendo conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Assim, neste conjunto de brochuras, optamos por colocar o foco no trabalho a desenvolver em sala de aula para levar a cabo esta orientação fundamental, dando particular relevo ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

Das cinco brochuras, uma é especialmente focada no pensamento computacional, o que se justifica pelo caráter de novidade que esta capacidade representa. As outras quatro brochuras dedicam-se ao conjunto das seis capacidades matemáticas transversais, com explorações nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º Ciclo — 1.º e 2.º anos, 1.º Ciclo — 3.º e 4.º anos, 2.º Ciclo, 3.º Ciclo).

Cada uma destas quatro brochuras segue uma estrutura comum, organizada em três partes. Após esta introdução, que apresenta as brochuras e caracteriza os contextos em que se antecipou a operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais, no ciclo de escolaridade a que a brochura diz respeito, a segunda parte discute, com apontamentos teóricos e exemplos, o significado atribuído a cada uma das capacidades matemáticas transversais, e a terceira parte apresenta exemplos de tarefas que foram efetivamente explorados com as turmas e discute a respetiva exploração. Para cada tarefa, inclui-se 1) o enunciado, 2) uma planificação detalhada da(s) aula(s) visando a exploração da tarefa, onde se inclui elementos diversos como uma antecipação de eventuais resoluções esperadas por parte dos alunos, 3) descrição da concretização da tarefa na prática, com atenção às diferentes fases da aula, episódios da exploração com os alunos, e conclui-se com 4) a análise das aprendizagens evidenciadas pelos alunos.

Esperamos que este documento possa ajudar os professores na operacionalização das novas orientações curriculares de Matemática para o Ensino Básico, constituindo-se como um recurso quer para o trabalho individual de preparação do professor, quer para o trabalho colaborativo que poderá desenvolver com os seus pares na escola e agrupamento. Se é verdade que materiais com a natureza destas brochuras, que proporcionam conhecimento da prática com alunos reais, em contextos reais, podem ser muito inspiradores de cada um dos professores, o seu efeito será muito mais potenciado se forem entendidos como recursos para apoiar o trabalho nas escolas, entre pares, contribuindo para a concretização do desenvolvimento curricular que importa fazer, tendo em vista a qualificação e adequação das práticas de ensino visando a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos em Portugal.

Contextualização

De seguida apresenta-se uma caracterização das escolas e das turmas do 3.º ciclo do Ensino Básico que anteciparam a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática, desde 2021/22, e nas quais se desenrolaram as atividades que relatamos nesta brochura.

Importa salientar que as turmas que anteciparam a generalização das AEMEB não se constituíram como turmas com características especiais. A sua seleção seguiu estritamente os critérios habituais de cada Agrupamento de escolas/Escolas não agrupadas para a sua distribuição pelos docentes. Não foram indicados previamente quaisquer critérios de constituição das turmas que de alguma forma trouxessem excecionalidade ao processo habitualmente usado. Assim, as turmas onde se concretizou a antecipação das AEMEB foram as turmas normais atribuídas aos professores que se disponibilizaram para colaborar com o GTDCPM.

Assim, no 3.º Ciclo, os professores que iniciaram o trabalho com as AEMEB nas respetivas turmas foram António Cardoso e Sandra Raposo, ambos professores profissionalizados do 3.º Ciclo, com vasta experiência de ensino.

As turmas que anteciparam a generalização das AEMEB não se constituíram como turmas com características especiais. A sua seleção seguiu estritamente os critérios habituais de cada Agrupamento de escolas/Escolas não agrupadas para a sua distribuição pelos docentes. Não foram indicados previamente quaisquer critérios de constituição das turmas que de alguma forma trouxessem excecionalidade ao processo habitualmente usado. Passamos a caracterizar de forma muito breve, quer as escolas, quer as turmas, envolvidas neste processo.

A **Escola Secundária de Pinhal Novo**, onde leciona a professora Sandra Raposo, situa-se no concelho de Palmela que se constitui como um dos 18 municípios da Área Metropolitana de Lisboa (AML), sendo o maior da Península de Setúbal, com aproximadamente 462 Km2 de área e com uma população de 68 856 habitantes. O concelho de Palmela concilia o desenvolvimento industrial com a preservação de muitas das suas características rurais. No entanto, Pinhal Novo é o polo urbano mais dinâmico.

A população escolar, no ano letivo de 2022/23, é constituída por 1977 alunos, distribuídos por 80 turmas, das quais 41 são do 3.º ciclo, cinco do ensino secundário profissional e as restantes

34 do ensino secundário regular. A larga maioria dos alunos são de nacionalidade portuguesa, existindo cerca de 136 alunos de 17 nacionalidades diferentes.

No ano letivo 21/22, a turma era constituída por 20 alunos, 10 raparigas e 10 rapazes. Nos anos letivos 22/23 e 23/24, a turma perdeu um elemento por ter ido viver para outra localidade passando a ser constituída por 9 raparigas e 10 rapazes. Durante os diferentes anos letivos, houve entradas e saídas de alunos, oriundos dos PALOP, mas por curtos espaços de tempo.

Quatro alunos da turma registaram retenções em anos anteriores e um deles ficou retido em mais do que um ano de escolaridade. A maioria dos alunos vive em Pinhal Novo, apenas cinco vivem em zonas rurais limítrofes.

O número de alunos da turma é reduzido, pelo facto de a integrarem três alunos que estão abrangidos pelo Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, Educação Inclusiva, um dos quais com a problemática de Perturbação do Espectro do Autismo.

No início do 7.º ano, a turma apresentava uma enorme falta de autonomia, não procurando informação para desenvolver as tarefas, solicitando constantemente a presença da docente como se desta pudessem obter as respostas para as situações apresentadas. Mostraram alguma resistência na realização das tarefas, deixando-as muitas vezes incompletas. Ao nível do trabalho de pares ou em grupo, também revelavam muitas dificuldades, pois não sabiam ouvir nem respeitar as ideias dos outros, dificultando a gestão das discussões coletivas. Ao longo do processo, verificou-se que, ao ganharem alguma autonomia na pesquisa de informação, têm desenvolvido uma maior confiança na realização das tarefas e consequentemente um maior envolvimento. Apesar de ainda revelarem dificuldades na concretização das tarefas, procuram apoiar-se nos seus pares para as ultrapassar, mostrando preocupação em concluírem as propostas apresentadas.

A turma tem apresentado vários problemas disciplinares, embora estes não tenham ocorrido na disciplina de Matemática, apesar de, em determinados momentos, se revelarem agitados e seja necessário orientá-los por forma a manterem o foco na realização das tarefas propostas.

O **Agrupamento de Escolas de Reguengos de Monsaraz** (distrito de Évora), onde leciona o professor António Cardoso, situado no concelho com uma área de 463,77 km2, para uma população de 9875 habitantes, distribuídos por quatro freguesias (Reguengos de Monsaraz, Monsaraz, Corval, União das freguesias de Campo e Campinho), procura dar resposta a uma população estudantil muito heterogénea, com alunos provenientes de localizações muito diversas (com um número significativo de elementos dos concelhos limítrofes), com algumas disparidades socioeconómicas, e vários níveis de motivação para prossecução de estudos e sucesso escolar. Em setembro de 2022, o Agrupamento tinha 350 alunos de 3.º ciclo, divididos pela Escola Básica António Gião (239 alunos dos 7.º e 8.º anos) e pela Escola Secundária Conde de Monsaraz (111 alunos do 9.º ano).

No ano letivo 21/22, a turma era constituída por 22 alunos, 14 rapazes e 8 raparigas. Sete alunos não transitaram e três alunos ficaram retidos por faltas. No início do ano letivo 22/23, entraram na turma oito novos alunos. No final do primeiro período saiu uma aluna e ingressou uma outra na turma. A turma passou a ser constituída por 20 alunos, 13 raparigas e 7 rapazes. O número de alunos da turma era reduzido, dando cumprimento aos relatórios técnico-pedagógicos de dois alunos da turma. No final do ano letivo, dois alunos não transitaram e um outro mudou de turma, deixando esta de reunir condições para ser uma turma com número de alunos reduzido. No ano letivo 23/24, entraram na turma sete novos alunos, passando a ser constituída por 24 alunos, 17 raparigas e 7 rapazes. Em suma, apenas nove alunos trabalharam as novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico ao longo de três anos com este professor.

Ao longo destes três anos letivos, sempre foi elevado o número de alunos a beneficiarem de medidas de suporte à aprendizagem e inclusão, tanto medidas universais, como medidas seletivas.

Neste ano letivo 23/24, constam da turma quatro alunos com retenções em anos anteriores e três deles ficaram retidos em mais do que um ano de escolaridade. Oito alunos beneficiam do Apoio Social Escolar (ASE). Dez alunos vivem em Reguengos de Monsaraz, sete em localidades do concelho e quatro em concelhos limítrofes (distância máxima da escola de 40 km). Vivem com os pais ou com um dos pais.

Sempre foi uma turma em que muitos alunos são pouco responsáveis e não revelam hábitos de trabalho, dentro e fora da sala de aula, mas, ao longo dos três anos do 3.º ciclo, foi possível verificar melhorias na sua participação, empenho e envolvimento nas tarefas trabalhadas na disciplina de Matemática.

Continuam com um comportamento nem sempre satisfatório. A maioria dos alunos são distraídos, algo irrequietos e demasiado faladores. Denotam algumas dificuldades em respeitar as regras definidas para a sala de aula e são muito dados a interrupções despropositadas.

Capacidades matemáticas transversais

Breve caracterização

Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática. Aprender a resolver problemas capacita os alunos para enfrentar desafios e aplicar conceitos matemáticos em novas situações, pelo que todos os alunos devem ter oportunidade de poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes na resolução de problemas (Canavarro et al., 2021). Esta atividade complexa vai além da mera aplicação de factos e procedimentos matemáticos previamente aprendidos, envolvendo a adaptação ou o desenvolvimento de estratégias adequadas à obtenção de uma solução válida. A resolução de problemas tem o potencial de proporcionar desafios intelectuais aos alunos que, para além de contribuírem para o desenvolvimento de capacidades como a perseverança, a autoconfiança, o pensamento crítico e criativo, reforçam a compreensão de conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Problema como tarefa

Um *problema* é uma situação desafiadora para a qual se pretende obter uma solução sem que, à partida, se saiba como resolvê-la ou se conheça um caminho imediato que garanta a resposta (Abrantes, 1988; Vale et al., 2015). Em particular, o que distingue um problema de um exercício é precisamente o facto de não se conhecer qual o procedimento matemático ou o algoritmo que permita, com algum grau de certeza, alcançar a solução. É importante destacar que um problema pressupõe um nível adequado de desafio e interesse de forma a envolver o aluno na procura da solução, mobilizando conhecimentos matemáticos e adaptando ou desenvolvendo as suas próprias estratégias de resolução. É importante que os alunos contactem com problemas que admitem vários processos de resolução, várias soluções ou até sem solução.

A figura 1 apresenta um exemplo de um problema que pode ser colocado a alunos do 3.º Ciclo.

Figura 1. Enunciado do problema "Pintores e mais pintores" retirado do Campeonato de Matemática Sub14

Pintores e mais pintores

A empresa Pinta Bem enviou 8 pintores para pintar um hotel. Sabe-se que esses 8 trabalhadores vão demorar 34 dias nessa obra. Se a eles se juntarem 24 outros pintores, 10 dias depois de o trabalho ter começado, quantos dias serão necessários para concluírem o trabalho?

A resolução de problemas é um tipo de tarefa que, por ser desafiante, tem o potencial para envolver os alunos em trabalho exploratório na aula de Matemática. Apesar de a resolução de problemas ter passado a ser cada vez mais associada a tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2007), enquanto as tarefas de exploração podem apresentar informações sobre a estratégia que o aluno deverá seguir, uma tarefa que desencadeie atividade de resolução de problemas deverá permitir o desenvolvimento de estratégias próprias em que o aluno mobiliza os seus conhecimentos matemáticos e, eventualmente, extra-matemáticos. Cabe ao professor acolher a diversidade de estratégias, valorizando a criatividade dos alunos, a autonomia e perseverança, mobilizando-as para orquestrar discussões coletivas que analisem essas estratégias e as representações usadas, e comparem a sua eficácia na obtenção da solução (Canavarro et al., 2021).

Etapas e estratégias de resolução de problemas

Existem vários modelos que visam explicar como se resolve um problema de Matemática. Pólya (1978), destacando a importância de examinar um dado problema de diferentes perspetivas, propôs um modelo que compreende quatro etapas: (i) *compreensão do problema*, na qual é necessário prestar atenção ao enunciado para interpretá-lo e identificar os aspetos relevantes; (ii) *elaboração de um plano*, etapa que envolve planear a estratégia a ser seguida, considerando que o caminho pode ser longo e desafiador; (iii) *implementação do plano*, na qual se segue o roteiro geral delineado na fase anterior, sem perder de vista o problema em si; e (iv) *análise retrospetiva*, na qual o aluno reconsidera e examina novamente o caminho percorrido e verifica a solução obtida.

A cada uma destas etapas, Pólya associou um conjunto de estratégias gerais que pretendem ajudar os alunos a tornarem-se mais eficazes na resolução de problemas, e que são designadas por *heurísticas*. Assim, na primeira etapa o aluno pode procurar identificar: que dados são fornecidos, se são suficientes, se existem condições e quais, ou o que é pedido como resposta ao problema. Na elaboração do plano pode ser útil pensar se se conhece um problema semelhante, mais geral ou até mais acessível e se é possível usar um método de resolução semelhante, ou analisar se todos os dados serão necessários ou se é possível resolver apenas uma parte do problema. Durante a execução do plano, o aluno deve confirmar se realizou corretamente todos os procedimentos e verificar se consegue justificar matematicamente cada passo. Na etapa final, poderá analisar se é possível verificar o resultado, se está de acordo com os dados e as condições dadas e, eventualmente, poderá procurar outra estratégia de resolução.

Ao longo do Ensino Básico, os alunos devem enriquecer progressivamente o seu leque de estratégias de resolução de problemas. Assim, no 3.º Ciclo, para além do recurso às estratégias previamente desenvolvidas, os alunos podem também procurar um problema análogo, mas mais simples; admitir que se conhece uma solução, verificá-la, analisar o resultado e ajustar; trabalhar do fim para o princípio; criar um modelo da situação representado por uma equação ou outra relação matemática; ou ainda explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas sobre a situação problemática.

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB) (Canavarro et al., 2021) reconhece-se a relevância das ferramentas tecnológicas como recursos incontornáveis e poderosos na aprendizagem da Matemática, possibilitando a ampliação de contextos e perspetivas sobre objetos matemáticos e permitindo análises e explorações que estariam inacessíveis aos alunos sem acesso a estes recursos. É, pois, nesta linha que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas se pode também fazer mediante o uso de tecnologias digitais. Resolver um problema de matemática com recurso à tecnologia envolve ser-se capaz de identificar os recursos tecnológicos adequados e conjugá-los de forma eficiente com conhecimentos e procedimentos matemáticos, tanto para desenvolver uma estratégia como para explicar, justificar e comunicar o pensamento matemático desenvolvido (Jacinto & Carreira, 2017). Um exemplo de problema em que os alunos podem tirar partido de uma ferramenta tecnológica é a tarefa "E a lua aqui tão perto" (ver a tarefa e as produções dos alunos no capítulo seguinte).

Papel da resolução de problemas na aula de Matemática

A resolução de problemas surge nas AEMEB como um dos oito objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática, como uma capacidade matemática transversal e como um tópico de aprendizagem. Mas qual o seu papel na sala de aula?

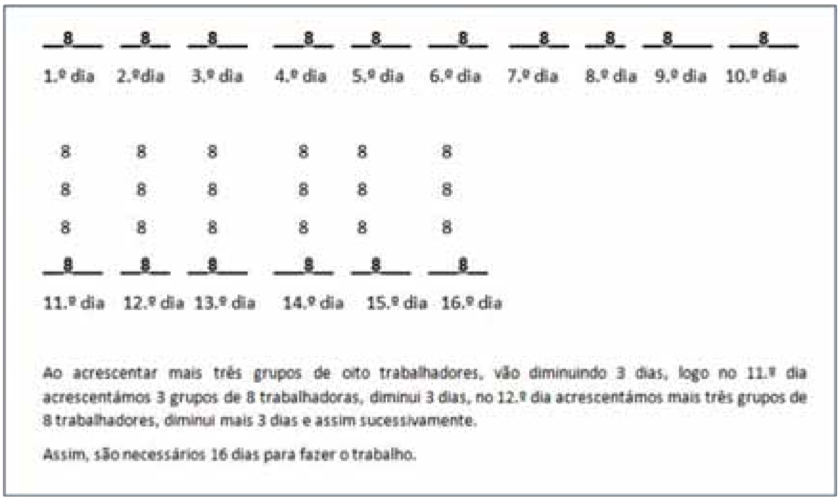
Várias perspetivas coexistem sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática. Uma dessas visões, mais tradicional, concebe a resolução de problemas como aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos, pelo que o foco deste trabalho reside na aquisição de recursos matemáticos e na sua aplicação mediante a resolução de problemas que surgem, tipicamente, no final da lecionação de um tópico (ensino para a resolução de problemas). Numa outra linha concebe-se que os alunos devem tornar-se proficientes na resolução de problemas de matemática, ou seja, aprender a resolver problemas é um objetivo per si. Assim, a resolução de problemas é encarada como um conteúdo, o que leva a que ocorra o ensino explícito de heurísticas e estratégias (ensino sobre resolução de problemas). Uma terceira via entende a resolução de problemas como oportunidade para construção de novo conhecimento, pelo que o foco reside na aprendizagem de um conceito ou procedimento e resulta da atividade de resolução de um problema (ensino através da resolução de problemas). Todavia, estas perspetivas não devem ser encaradas como alternativas, tal como sugerem Vale et al. (2015) ao propor uma visão que denominaram 'ensino da matemática com resolução de problemas', ou seja, a resolução de problemas deve acompanhar o currículo e a prática da sala de aula, deve permitir desenvolver compreensão de conceitos e da estrutura matemática inerente, bem como levar os alunos a adquirir progressivamente um rol de estratégias que sejam produtivas e úteis noutras situações.

Um exemplo em sala de aula

O problema Pintores e mais pintores (figura 1) envolve a noção de proporcionalidade inversa, incluída no tema Álgebra de 9.º ano, embora possa ser resolvido sem recorrer a esta noção e admita o recurso a diversas estratégias para obter a sua solução. Assim, este problema pode ser usado para aplicação ou consolidação de procedimentos associados à noção de proporcionalidade inversa, após a lecionação do tópico. Contudo, proporciona também um bom contexto para introduzir esse conceito, uma vez que os alunos tendem a desenvolver as suas próprias estratégias, mobilizando conhecimentos anteriores. Essa diversidade é indispensável à fase de discussão da aula permitindo analisar e comparar as diferentes abordagens e representações, em particular, a sua eficácia.

A figura 2 apresenta a resolução de uma aluna que recorre a um esquema para representar os dez primeiros dias em que estariam 8 trabalhadores em serviço. A aluna percebeu que a contratação de mais 24 pintores implicaria considerá-los em cada um dos dias seguintes de trabalho e decidiu organizá-los em grupos de 8 trabalhadores pelo que, a partir do 11.º dia de trabalho, passa a considerar um total de 32 trabalhadores. A continuação desta abordagem leva-a a entender que o número de dias necessário para concluir a obra diminui na proporção do número de trabalhadores que aumentou. A aluna, assim, concluiu que, no total, são necessários 16 dias para completar o trabalho.

Figura 2. Resolução A do problema “Pintores e mais pintores” (Jacinto & Carreira, 2012)



8 8 8 8 8 8 8 8 8 8

1.º dia 2.ºdia 3.º dia 4.º dia 5.º dia 6.º dia 7.º dia 8.º dia 9.º dia 10.º dia

8 8 8 8 8 8

8 8 8 8 8 8

8 8 8 8 8 8

8 8 8 8 8 8

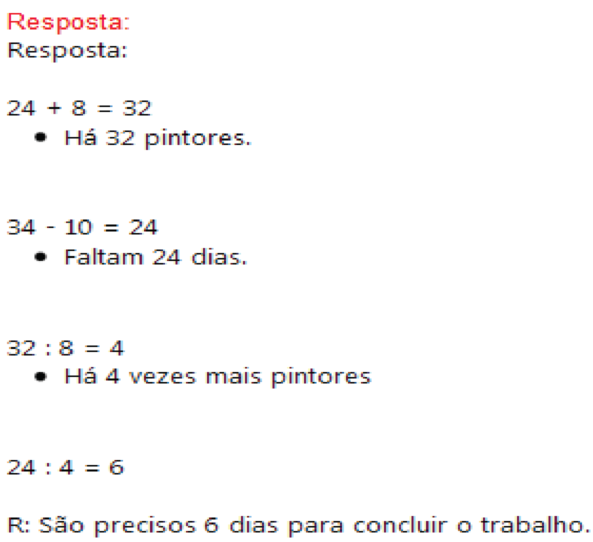
11.º dia 12.º dia 13.º dia 14.º dia 15.º dia 16.º dia

Ao acrescentar mais três grupos de oito trabalhadores, vão diminuindo 3 dias, logo no 11.º dia acrescentámos 3 grupos de 8 trabalhadoras, diminui 3 dias, no 12.º dia acrescentámos mais três grupos de 8 trabalhadores, diminui mais 3 dias e assim sucessivamente.

Assim, são necessários 16 dias para fazer o trabalho.

A estratégia apresentada na figura 3 assenta na organização de uma sequência de passos que pode mesmo ser considerada como um modelo da situação que compreende uma sequência de operações matemáticas. A aluna começou por determinar o número total de pintores que estariam na obra no 11.º dia de trabalho e calculou o número de dias que faltavam para concluir a pintura. Compreendeu então que é necessário determinar a proporção entre o número total de pintores e o número inicial, concluindo que naqueles 24 dias há o quádruplo do número de pintores. Embora não o explicite, a aluna reconhece a existência de uma relação de proporcionalidade inversa entre o número de pintores e o tempo que demoram no trabalho: se há 4 vezes mais pintores, demoram $1/4$ do tempo. Concluiu que os 32 pintores iriam demorar mais 6 dias para terminar a obra.

Figura 3. Resolução B do problema “Pintores e mais pintores” (Jacinto & Carreira, 2012)



Resposta:
Resposta:

24 + 8 = 32
- Há 32 pintores.

34 - 10 = 24
- Faltam 24 dias.

32 : 8 = 4
- Há 4 vezes mais pintores

24 : 4 = 6

R: São precisos 6 dias para concluir o trabalho.

A figura 4 mostra uma resolução que recorre à noção formal de proporcionalidade inversa e a alguns dos procedimentos que lhe estão associados. A aluna começou por determinar a fração de tempo que os 8 pintores demorariam nos primeiros 10 dias de trabalho. Reconhecendo que o número de pintores aumentaria para 32, relacionou através de uma tabela o número de pintores e o tempo necessário para pintar o hotel, recorrendo à noção de proporcionalidade inversa. Constatou então que os 32 pintores demorariam 8,5 dias a concluir a obra, caso estivessem a realizá-la desde o primeiro dia e interpretou o valor obtido como a constante de proporcionalidade inversa. Contudo, este valor levou-a a uma nova etapa da sua estratégia pelo que utilizou a fração do tempo que os 8 pintores já teriam completado nos primeiros 10 dias. Percebe assim que os 32 trabalhadores apenas têm de pintar o restante, ou seja, 24/34 da obra e determinou 24/34 de 8,5 dias para obter o número de dias remanescentes.

Figura 4. Resolução C do problema "Pintores e mais pintores" (Jacinto & Carreira, 2012)

Nos primeiros 10 dias da obra, 8 pintores estiveram a pintar um hotel, e fizeram $\frac{10}{34}$ do trabalho.

10 dias depois de o trabalho ter começado, 24 pintores juntaram-se aos outros 8, formando uma equipa de 32 trabalhadores. $8+24=32$

Para resolver o problema, tive que formular a hipótese de que existiram sempre 32 pintores ao longo de toda a obra. Para isso, tive que fazer uma tabela com a relação entre o número de pintores e os dias que demoraram a concluir o trabalho. Descobri que era necessário utilizar a proporcionalidade inversa para poder completar a tabela.

nº de pintores	8	32
dias que demoram	34	x

$k=8\times 34=272$

$x=\frac{k}{32}=\frac{272}{32}=8{,}5$

K é a constante de proporcionalidade inversa, ou seja, o produto das duas variáveis (o número de pintores e os dias que demoram a fazer a obra).

Se existissem sempre 32 pintores ao longo de toda a obra, eles demorariam 8,5 dias (8 dias e 12 horas) a pintar o hotel.

Mas o problema indica que 8 pintores já tinham feito $\frac{10}{34}$ do trabalho, e os 32 pintores só tinham que fazer $\frac{24}{34}$ do trabalho, visto que: $1-\frac{10}{34}=\frac{34}{34}-\frac{10}{34}=\frac{24}{34}$

Portanto, para responder à pergunta do enunciado, precisamos apenas de saber quanto é $\frac{24}{34}$ de 8,5.

$$\frac{24}{34}\times 8{,}5=\frac{204}{34}=6$$

Passados 10 dias de a obra ter começado, os 32 pintores concluíram o trabalho em 6 dias.

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, em articulação com outros temas matemáticos, envolve proporcionar oportunidades aos alunos para contactar com uma diversidade de situações problemáticas que possam ser abordadas através de múltiplas estratégias, permitindo-lhes também tirar partido de diversas ferramentas tecnológicas, não só mobilizando conhecimentos prévios como promovendo a compreensão de novos conhecimentos.

Raciocínio matemático

Em linha com as orientações curriculares internacionais em Matemática (OECD, 2018), não é de estranhar que seja dado particular destaque ao raciocínio matemático nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), agora explicitamente considerada como um conteúdo de aprendizagem, à semelhança do que tinha sido expresso no Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007). O raciocínio, desde sempre, esteve relacionado com a Matemática e o seu ensino. Tradicionalmente, era habitual justificar-se a necessidade da Matemática fazer parte do currículo, afirmando-se ser a disciplina que, por excelência, promove o desenvolvimento do raciocínio (muito embora se possa falar de raciocínio em outros domínios). Mas do que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Raciocinar é um termo usado na linguagem corrente, mas isso não indica que o seu significado seja consensual. Neste texto entendemos que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (Ponte et al., 2020, p. 7). Seguir uma forma fundamentada implica que o raciocínio é uma atividade consciente e intencional, diferenciando-se, deste modo, de outras formas de pensar. Assim, raciocinar é pensar, mas nem toda a atividade de pensar é raciocinar.

No passado, o raciocínio matemático esteve muito associado à ideia de demonstração, seguindo uma lógica dedutiva, levando mesmo à convicção de alguns que se não houver este processo matemático, não se está a desenvolver nos alunos o raciocínio matemático (Oliveira & Henriques, 2022). Na verdade, embora esta vertente seja fundamental na matemática, tem vindo a emergir uma outra perspetiva que sublinha igualmente o lugar do raciocínio indutivo e abdutivo (Jeannotte & Kieran, 2017). De facto, podemos falar em três tipos de raciocínio: o *raciocínio indutivo*, o *raciocínio abdutivo*, e o *raciocínio dedutivo* (Quadro 1).

Quadro 1. Tipos de raciocínio

<table>
<tr><td></td><td>Indutivo</td><td>Abdutivo</td><td>Dedutivo</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Características e propósitos</td><td colspan="2">Pensamento divergente</td><td>Pensamento convergente</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lógica de descoberta</td><td>Lógica de prova</td></tr>
<tr><td>Verificar</td><td>Explicar</td><td>Demonstrar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plausibilidade</td><td>Certeza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intuição</td><td>Lógica</td></tr>
</table>

De acordo com o Quadro 1, pode afirmar-se que o raciocínio indutivo e abdutivo têm diversos aspetos em comum, embora sejam distintos. Através de ambos formulam-se conjeturas. *Conjeturar* é o processo de formular afirmações não arbitrárias "sobre relações matemáticas gerais baseada em evidência incompleta" (Stylianides, 2008, p. 11), que poderão posteriormente revelar-se verdadeiras ou falsas. Assim, as conjeturas, através da observação, da construção, da transformação de conhecimento prévio ou de combinações entre estes, podem tomar a forma do reconhecimento de padrões ou de propriedades comuns a um conjunto de objetos.

As conjeturas podem ser generalizações quando disserem respeito a um conjunto de objetos matemáticos ou relações entre objetos desse conjunto a partir de um dos seus subconjuntos (Jeannotte & Kieran, 2017). Assim, podemos afirmar que todas as generalizações são conjeturas, mas nem todas as conjeturas são generalizações. Vejamos um exemplo de um episódio (adaptado de Lannin et al., 2011, pp. 65-70), envolvendo raciocínio indutivo com várias das características mencionadas no Quadro 1 acima referido:

Numa turma do 8.º ano, os alunos já tinham chegado à conclusão que dado um retângulo, se considerarmos o dobro do seu comprimento e da sua largura, a área quadruplica.

Artur – O que acontecerá se agora se triplicarmos o comprimento e a largura em vez de duplicarmos?

Um aluno lança uma nova questão a partir da conclusão que os alunos tinham tirado

Prof. – Turma formulem conjeturas sobre o que irá acontecer.

Isaías – Se triplicarmos o comprimento e a largura, eu acho que a área é 6 vezes maior da que partimos.

Isaías formula uma conjetura

Prof. – Porquê seis vezes?

O professor não a valida nem a refuta, questiona

Isaías – Por que quando duplicámos, a área ficou 4 vezes maior, 2x2 vezes maior. Se triplicamos o comprimento e a largura, a área será 3x2 vezes maior, logo 6.

Artur – Não tenho a certeza.

Prof. – Como é que podem descobrir?

Tiago – Vamos experimentar para alguns retângulos.

Tiago propõe testar a veracidade da conjetura através de alguns exemplos

O professor encoraja cada grupo de alunos a verificar a conjetura do Isaías para um retângulo particular.

O professor remete para a turma a testagem da conjetura

Após a refutação da conjetura em análise, o Isaías tem uma nova ideia.

Isaías – Então, quando duplicamos o comprimento e a largura de um retângulo, a área é 4 vezes maior do que a anterior. E quando triplicamos o comprimento e a largura, a área é 9 vezes maior. Talvez quando multiplicarmos o comprimento e a largura por um mesmo número, a área que obtemos vai ser o quadrado desse número vezes maior.

Isaías formula uma generalização

Talvez o raciocínio abdutivo seja o menos conhecido. Ele surge quando somos confrontados com algo que não estávamos à espera e formulamos uma hipótese explicativa para tal ocorrência. Daí a função de explicação, ilustrada no seguinte episódio (adaptado de Ponte et al., 1998, pp. 77-83), que está associada ao raciocínio abdutivo, conforme o Quadro 1 acima referido:

Numa aula do 8.º ano, a professora tinha por objetivo introduzir o significado de uma potência de base inteira e expoente zero. Numa primeira tarefa, através da aplicação da regra do quociente de potências com a mesma base e do quociente de potências com o mesmo expoente, surgiu a potência com expoente zero. Mas diversos alunos não ficaram convencidos, em particular a Joana. Ainda na mesma aula, é-lhes proposto uma nova tarefa em que é dada a sequência

81 27 9 3 1 1/3 1/9 1/27 …

e numa das alíneas pede-se que escrevam os termos indicados na forma de potências de base 3.
Após uma discussão com toda a turma, a professora escreve no quadro a mesma sequência, deixando em branco o termo correspondente a 3^0:

$3^3, 3^2, 3^1, \quad , 1/3^1, 1/3^2, 1/3^3, \ldots$

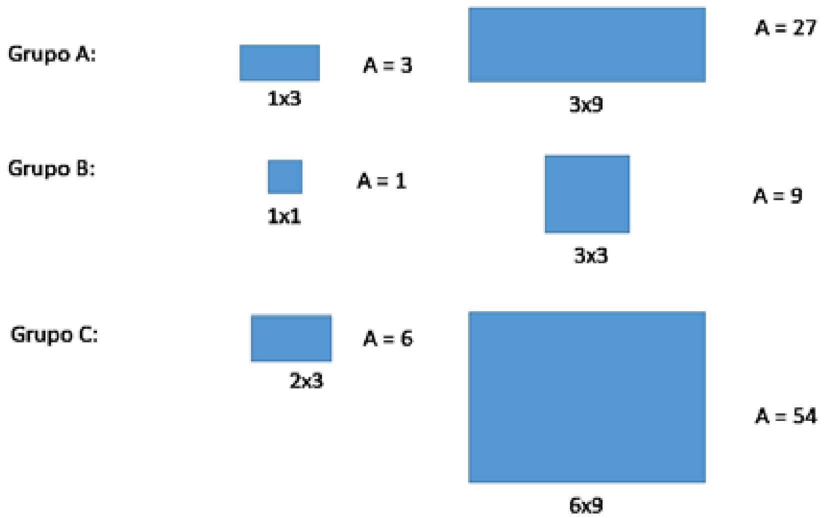
Prof.ª – Começando com os expoentes positivos, chegaria uma altura em que eu não saberia o que haveria de escrever. Mas qual seria a justificação para que seja $3^0 = 1$?
Joana – Stôra, então a resposta do Pedro [de 3.º ser igual a 1], 3.º é por conveniência?

Utilizando um raciocínio abdutivo, Joana avança com uma hipótese que lhe permite explicar algo que a surpreendeu

O raciocínio dedutivo está fortemente associado ao justificar. *Justificar* é um processo de raciocínio matemático que permite aferir da veracidade ou falsidade de uma conjetura. Em matemática está estreitamente associado à abstração, formalização e axiomatização (Davis & Hersh, 1986). Pode ser feito através da coerência lógica, do uso de contra-exemplos, do uso de exemplos genéricos, por exaustão e por absurdo (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Retomando a primeira situação apresentada no primeiro episódio (adaptado de Lannin et al., 2011, pp. 65-70), existiu um período de trabalho autónomo em que os alunos procuraram, através do estudo de diversos casos, verificar a validade da conjetura formulada por Isaías. O grupo de Maria fez a resolução que se apresenta na figura 5, tendo experimentado com três retângulos. Seguiu-se um diálogo na turma.

Figura 5. Exemplos estudados pelo grupo de Maria



Maria – Em cada um dos exemplos que fizemos, a área não é 6 vezes maior do que a anterior. Para o grupo A, 3x9 = 27, para o grupo B, 3 x 3 = 9, e para o grupo C, é 6x9 = 54. Triplicar o comprimento e a largura do retângulo torna a área 9 vezes maior e não 6 vezes.

Maria refuta a conjetura através de alguns contraexemplos.

Após a formulação, ainda por Isaías, de uma generalização, os alunos voltam ao trabalho a pares e experimentam para valores cada vez maiores (3, 5, 6, 7, 20). O professor pergunta sistematicamente "Podemos ter a certeza que é sempre verdade?" O Luís acaba por apresentar no quadro a seguinte justificação:

A = CL

Nova área = C×n × L×n

Nova área = $n^2 \times CL$

E explica: *A área em vez de ser C×L, passa a ser C×n × L×n, que é de onde vem o* n^2.

Luís justifica a veracidade da generalização por coerência lógica, usando simbologia matemática

Carlos – Então quer dizer que o "n" nem sequer precisa ser um número inteiro! Pode ser qualquer número positivo, como um número decimal ou uma fração. Funciona sempre.

Carlos revela ter compreendido a situação, ampliando o conjunto de objetos matemáticos em que a generalização se verifica.

Chama-se a atenção que existe uma prática bastante comum de pedir aos alunos para explicarem quando o que se pretende é que justifiquem. Explicar é descrever como se pensou, logo apela para a comunicação matemática, já o ato de justificar solicita a apresentação de um argumento que permita aferir da verdade ou falsidade de uma afirmação.

Para além dos processos de conjeturar, generalizar e justificar, outros são ainda possíveis de ser indicados, sendo vistos sobretudo como processos auxiliares de raciocínio. São eles: *comparar* e *classificar*, que através da identificação de semelhanças e de diferenças entre objetos, procuram respetivamente fazer inferências e agrupar em classes, e ainda o de *exemplificar* "que analisa exemplos que podem apoiar a procura de semelhanças e diferenças e a procura de uma validação" (Ponte, 2022, p. 8).

Para que o professor possa criar contextos favoráveis à promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio nos seus alunos é necessário não só ter um entendimento aprofundado sobre os tipos de raciocínio e seus processos e formas de os concretizar, como propor tarefas adequadas e explorá-las na sala de aula de forma a tirar partido das suas potencialidades.

Nota: Como fontes possíveis que poderão ajudar os professores a selecionar/adequar/criar tarefas promotoras do raciocínio matemático sugerimos o texto *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos* (Coordenação do Projeto REASON, 2022). Pistas para a exploração de tarefas na sala de aula de Matemática para promover o raciocínio matemático dos alunos poderão ser consultadas em Mendes e colegas (2022) e Delgado e colegas (2022).

Pensamento computacional

O pensamento computacional é uma das capacidades matemáticas expressa nas Aprendizagens Essenciais de Matemática, a ser desenvolvida e mobilizada em articulação com os diversos temas matemáticos e a par de outras capacidades matemáticas. Wing (2006, 2008) fez emergir o pensamento computacional como uma abordagem que nos permite fazer uso de computadores para resolver problemas. Contudo, seja num contexto digital ou não, o pensamento computacional visa capacitar os alunos para selecionarem e aplicarem estratégias e ferramentas adequadas para resolverem problemas. Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional visa contribuir para que todos os alunos sejam capazes de "melhor conceptualizar, analisar e resolver problemas complexos" (Seehorn et al., 2011, p. 9).

Hoyles e Noss (2015) apresentam diversas práticas que são implicadas no pensamento computacional: abstração (ver um problema em diferentes níveis de detalhe), pensamento algorítmico (predisposição para ver tarefas como passos mais pequenos interligados), decomposição (resolver um problema envolve resolver um conjunto de problemas mais pequenos) e reconhecimento de padrões (ver um problema como estando relacionado com problemas anteriormente encontrados). O teste e a depuração são também aspetos essenciais. Essas práticas visam garantir que a solução encontrada responde com sucesso à tarefa dada. Começa-se pela testagem para verificar o funcionamento. Caso a solução não funcione, o processo de depuração tem início (Ng & Cui, 2021) para localizar erros ou enganos e os corrigir. Nesse sentido, nas Aprendizagens Essenciais, a capacidade matemática transversal pensamento computacional "pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos" (Canavarro el al., 2021, p. 3).

Vários estudos têm evidenciado a articulação entre a Matemática e o pensamento computacional, reconhecendo o seu potencial contributo para alcançar a aprendizagem matemática pretendida (Ye et al., 2023). O contexto matemático pode ser usado para valorizar o pensamento computacional, bem como situações relativas ao pensamento computacional podem valorizar a matemática, melhorando a compreensão de conceitos, desenvolvendo de modo integrado capacidades matemáticas diversas (Hardin & Horton, 2017; Ng & Cui, 2021), dando sentido e colocando em prática ideias matemáticas (Sáez-López et al., 2019). A valorização do pensamento computacional oferece aos alunos "oportunidades para explorar uma variedade de conteúdos matemáticos através da reflexão sobre os processos e produtos de construção do pensamento computacional" (Ye et al., 2023, p. 22).

O desenvolvimento desta capacidade é essencial desde os primeiros anos de escolaridade e ao longo de todo o ensino básico, dando um contributo relevante para a Matemática para o séc. XXI. Contudo, o pensamento computacional não vai emergir de modo espontâneo, pelo que o desenvolvimento de conceitos relativos a essa capacidade requer um ensino explícito e específico (Rodríguez-Martínez et al., 2020).

Tal como expressam as Aprendizagens Essenciais, o pensamento computacional deve também surgir em articulação com o uso da tecnologia, nomeadamente para a resolução de problemas, em especial os relacionados com a programação. Nos últimos anos têm surgido diversas ferramentas digitais adequadas ao trabalho com os alunos desde os primeiros anos de escolaridade, tais como ambientes de programação visual. Por exemplo, os alunos podem, numa fase de iniciação, reutilizar e remisturar projetos, construir e ampliar alguns códigos e estruturas existentes para criar novos projetos ou projetos mais complexos (Ng & Cui, 2021). Também os contextos de robótica e programação, em que os alunos estão ativamente envolvidos, podem contribuir para os objetivos do pensamento computacional e trabalho em torno de ideias matemáticas específicas (Sáez-López et al., 2019). Ng e Cui (2021) envolveram os alunos na utilização de objetos tangíveis e na sua programação por meio de um ambiente de programação por blocos para executarem ações físicas, promovendo a modelação e o pensamento algorítmico dos alunos, a prática de depuração e a abstração, com utilização de variáveis.

A utilização da tecnologia e a articulação entre ideias matemáticas e práticas do pensamento computacional podem também potenciar conexões internas e externas, a articulação com outras capacidades matemáticas transversais e o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais.

Um exemplo

Apresentamos, em seguida, um exemplo referido nas Aprendizagens essenciais do 3.º ciclo do ensino básico relativo ao pensamento computacional, que se articula com o tema matemático Álgebra, no que respeita ao tópico Expressões algébricas e equações e ao subtópico Resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita.

A figura 6 apresenta um possível enunciado para uma tarefa que visa explorar a resolução de equações do 1.º grau com recurso ao ambiente de programação visual "Scratch".

Figura 6. Enunciado da tarefa Resolver equações com tecnologia

Resolver equações com tecnologia

1. Considera as seguintes equações.

$2x - 6 = 0$

$3x - 15 = 0$

1.1. Resolve-as no teu caderno.

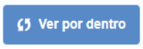
1.2. Considerando que as duas equações anteriores estão na forma $ax - b = 0$, identifica, para cada uma delas, os valores de a e de b.

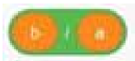
2. Utilizando o link seguinte, acede ao Scratch, e executa o programa:
https://scratch.mit.edu/projects/739872390/
Nota: para iniciar o programa, clica na bandeira verde 

3. Usa o programa para resolver as seguintes equações e anota a solução:

$7x - 63 = 0$

$4x - 1 = 0$

4. Clica em ver por dentro (

), analisa o programa e explica o significado de

.

5. Resolve no teu caderno a seguinte equação: $2x - 3 = 1$

6. Altera o programa para resolver todas as equações do tipo $ax - b = c$.
Nota: Clica em Remisturar, para que possas proceder às alterações. Na página seguinte está um quadro com alguns comandos do Scratch que te podem ajudar.

7. Testa o teu programa com a equação anterior… e, de seguida, com outra inventada por ti…

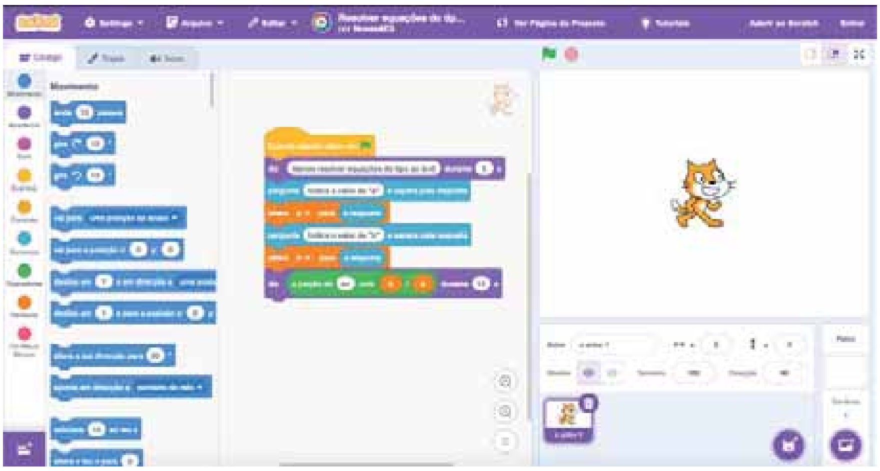
Com a exploração desta tarefa pretendemos que os alunos identifiquem as etapas da resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores) com recurso ao pensamento computacional.

Depois de serem resolvidas algumas equações do tipo $ax - b = 0$, será apresentado aos alunos um projeto em Scratch. Por se poder tratar de uma das primeiras tarefas que trabalham o pensamento computacional, optou-se por uma abordagem que recorre ao ambiente de programação visual Scratch, a partir de um projeto já previamente criado.

Figura 7. Página do projeto base em Scratch

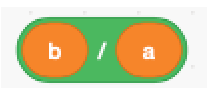
A partir do projeto Scratch (figura 8), os alunos poderão confirmar os resultados obtidos na sua resolução, através da execução do mesmo.

Figura 8. Interior do projeto Scratch sobre resolução de equações



Numa fase seguinte, os alunos serão desafiados a “Ver por dentro” o projeto, ou seja, a analisar os blocos de código que compõem o programa associado (figura 7), em especial o bloco onde é determinada a solução geral das equações deste tipo (figura 9).

Figura 9. Bloco com a expressão geral das soluções



A identificação da expressão, que consta deste bloco, e a sua associação com a solução geral de equações do tipo $ax - b = 0$, contribuirá para o desenvolvimento da prática de reconhecimento de padrões.

Numa última fase da tarefa, os alunos serão desafiados a realizar alterações no projeto para poder resolver equações do tipo $ax - b = c$. Para o poderem fazer, os alunos deverão começar por criar uma cópia do projeto dado, a partir do botão "Remisturar".

Nesta fase, os alunos terão que introduzir os blocos necessários para a recolha e armazenamento do valor do parâmetro "c". É necessária a criação de uma variável com esta designação, mas sugere-se que este elemento seja criado na preparação do programa para eliminar a necessidade desta etapa no trabalho dos alunos para permitir que o foco do trabalho dos alunos seja mais a resolução de equações e menos a programação. A análise prévia ao programa e a identificação de várias etapas, a partir dos blocos que compõem o mesmo, possibilitará desenvolver as práticas de decomposição e algoritmia.
Posteriormente, terão que reformular o bloco onde deverá constar a expressão que corresponde à solução geral de equações do tipo $ax - b = c$.

Por último, os alunos, ao testarem o programa criado e verificarem as soluções para várias equações do tipo $ax - b = c$, previamente resolvidas no caderno, irão ter a oportunidade de desenvolver a prática de depuração.

A concluir, consideramos que a integração do pensamento computacional nas aprendizagens essenciais de Matemática visa promover uma abordagem à resolução de problemas numa perspetiva diferente e, tanto quanto possível, numa lógica de recorrer a ambientes computacionais no processo de resolução. Com esta abordagem não se pretende restringir as estratégias de resolução à programação. Consoante as propostas apresentadas, as práticas do pensamento computacional poderão ser desenvolvidas sem o recurso ao computador. Por outro lado, não basta acrescentar ferramentas digitais ao processo de resolução para se garantir que se está a desenvolver o pensamento computacional.

A plena integração do pensamento computacional passa por criar (ou adaptar) tarefas exploratórias e desafiantes que permitam trabalhar um conteúdo matemático e, simultaneamente, possam desenvolver as suas práticas (Espadeiro, 2021).

O papel do professor, na organização e condução dos momentos de aplicação das tarefas, reside na intencionalidade com que promove o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos. Esta intencionalidade, no acompanhamento que faz durante o processo de resolução, poderá passar por questionar os alunos, não com o intuito dar uma resposta, mas para permitir que estes ultrapassem um qualquer bloqueio no seu trabalho e possam, deste modo, desenvolver as práticas de pensamento computacional pretendidas.

Comunicação matemática

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática é um objetivo de aprendizagem transversal a todos os tópicos matemáticos curriculares, em estreita ligação com outras capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Ser capaz de comunicar matematicamente significa conseguir "partilhar e discutir ideias matemáticas, formulando e respondendo a questões diferenciadas, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, negociando a construção de ideias coletivas em colaboração" (p. 3). Ecoando a perspetiva do NCTM (2007), Santos (2018) esclarece que a capacidade de comunicação matemática "inclui conseguir, por um lado, transmitir ideias de forma clara e coerente aos outros, usando uma linguagem matemática correta e precisa, e, por outro, analisar e avaliar ideias e estratégias matemáticas de outros" (p. 11).

A comunicação matemática é indissociável do próprio processo de ensino-aprendizagem (Menezes et al., 2014). À semelhança de outros documentos curriculares (e.g., NCTM, 2007, 2014; Ponte et al., 2007), as atuais recomendações para o ensino da Matemática em Portugal perspetivam a comunicação matemática como uma orientação metodológica, além de um objetivo de aprendizagem (Canavarro et al., 2021). Em particular, "a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório" (Serrazina, 2018, p. 13), uma abordagem fortemente enfatizada nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. De facto, olhando a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem, ela "potencia e é potenciada pelos momentos típicos de (…) trabalho autónomo dos alunos sobre tarefas desafiantes, usualmente em pequenos grupos" (Tomás Ferreira, 2018, p. 1) e de discussão coletiva, tanto na vertente oral, como na vertente escrita. E estas duas fases – trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva – são aspetos distintivos e determinantes nas aulas pautadas por uma abordagem exploratória.

Os alunos têm diferentes estilos de aprendizagem, assim como diversas formas de comunicação preferenciais. Por isso, a comunicação nas aulas de Matemática deve "ser veiculada de diferentes formas, entre elas verbal, visual, gestual, icónica, com objetos ou escrita" (Vale & Barbosa, 2018, p. 2). O recurso a estas formas diferentes de comunicar deve ser ponderado em função do nível de escolaridade dos alunos e, sobretudo, dos objetivos de aprendizagem visados, tendo sempre em vista aquilo que facilita e promove "a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos" (Canavarro et al., 2021, p. 3) para que a comunicação dessas ideias e processos aos outros possa ser clara e, progressivamente, “a linguagem matemática [seja usada] como estratégia de comunicar com maior precisão” (p. 3).

Segundo o NCTM (2007), “os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática [com compreensão] e aprendem a comunicar matematicamente” (p. 66). As experiências de aprendizagem que são proporcionadas aos alunos determinam a qualidade das suas aprendizagens, em particular as tarefas e a sua exploração em aula (e.g., Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009). As tarefas que se focam na prática de procedimentos mais ou menos rotineiros (como o cálculo ou a manipulação algébrica) não se prestam a fomentar a capacidade de comunicação matemática dos alunos. Pelo contrário, as tarefas de natureza mais desafiante, como os problemas, as investigações e as explorações, já podem constituir bom solo para o desenvolvimento da comunicação matemática (NCTM, 2007).

Comunicação oral

As oportunidades para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos, na sua vertente oral, dependem, de uma forma bastante significativa, da condução do discurso da aula feita pelo professor (Menezes et al., 2014). Por exemplo, quando o professor solicita aos alunos que expliquem como resolveram uma dada tarefa, ou os questiona sobre uma decisão tomada no percurso realizado com vista à resolução de um problema, ou lhes pede que comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros, a comunicação matemática está a ser fortemente estimulada.

A figura 10 apresenta uma tarefa que pode ser proposta a alunos do 8.º ou 9.º anos de escolaridade. A tarefa tem em vista o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos acerca de áreas de retângulos e o envolvimento em processos de generalização e justificação (processos de raciocínio), relacionando também a geometria com a álgebra (Henriques et al., 2022).

Figura 10. Tarefa “Vamos comparar áreas de retângulos” (Henriques et al., 2022, p. 35)

> O comprimento de um retângulo foi alargado 10% e a sua largura foi reduzida 10%. O que podes dizer sobre a área do novo retângulo quando a comparas com a do retângulo inicial? Justifica a tua resposta.

Na figura 11, apresentamos um excerto de diálogo entre a professora e dois que formularam uma conjetura errada, baseada numa generalização inválida. Um deles explica oralmente como estavam a pensar e usa a folha de papel para ir apontando as medidas a que se refere;

assim, vai comunicando através de gestos e linguagem oral. Na segunda parte do excerto, a professora serve-se de questões e pistas, procurando que os alunos compreendam o erro cometido e cheguem, por si mesmos, à generalização pretendida, continuando a incentivar a comunicação matemática oral.

Figura 11. Diálogo entre dois alunos e a professora (adaptado de Henriques et al., 2022, pp. 36-37)

Afonso -	Estes 10% primeiro aumentam e depois reduzem, a área vai continuar a ser maior, mesmo que seja por pouco.
Prof. -	OK, Podes repetir, se faz favor, Afonso? Vocês acham que vai acontecer o quê à área?
Afonso -	Vai aumentar, por pouco que seja. Porque 10% daqui aqui [comprimento de uma folha] é maior do que 10% daqui aqui [largura da folha]. Logo, se aumentarmos 10% aqui…
Prof. -	No comprimento…
Afonso -	Se reduzirmos os 10% aqui vai… A área vai aumentar.
(…)	
Prof. -	E têm maneira de mostrar isso?
Afonso -	De mostrar? Podemos tentar chegar aí.
Tomás -	Por desenhos.
Prof. -	Alguma justificação? Desenhos, OK, e mais, podem tentar fazer o quê?
Afonso -	Dar números. Podemos dar números.
Prof. -	Podem dar números. Então, experimentem lá dar números.

Segundo o NCTM, "para apoiar eficazmente o discurso da aula, os professores deverão criar uma comunidade na qual os alunos se sintam livres de expressar as suas ideias" (2007, p. 67). Ora, uma outra forma de estimular o desenvolvimento da comunicação matemática consiste em solicitar aos alunos que emitam uma opinião, comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros. Mas, enquanto os alunos dos primeiros anos têm dificuldades em se colocar no lugar dos outros e em ver as coisas segundo uma perspetiva que não é a sua, os seus colegas dos 2.º e 3.º ciclos são, muito frequentemente, relutantes em se expor perante os seus pares. Isto coloca desafios ao professor, que deve ter em conta que "questões bem planeadas e cuidadosamente colocadas poderão ajudar a esclarecer as expectativas para o trabalho dos alunos, relativamente a cada faixa etária" (p. 68).

Comunicação escrita

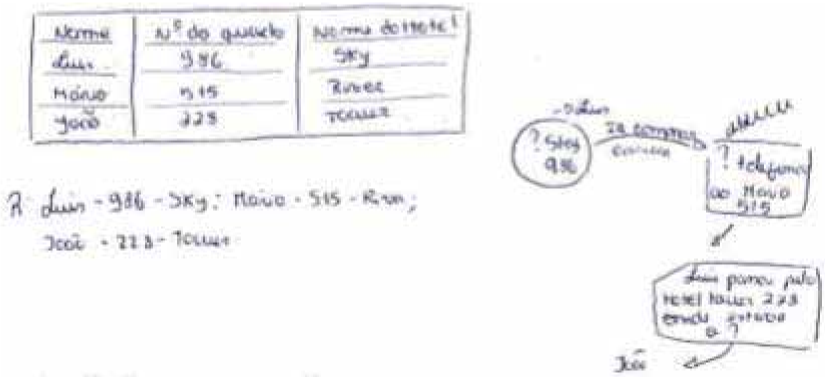
"A comunicação escrita é trabalhada quando se promove a realização de registos escritos relativos à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos" (Serrazina, 2018, p. 13). Estes são, de facto, os contextos mais frequentes em que a vertente escrita da capacidade de comunicação matemática pode ser promovida (Casa et al., 2016). Mas este estímulo pode trabalhar outros propósitos. Por exemplo, a escrita matemática pode ser usada com o propósito de fazer sentido de um problema, de uma situação ou das próprias ideias; deste modo, o destinatário da produção escrita é o próprio aluno.

A figura 12 apresenta um problema proposto a uma turma do 7.º ano de escolaridade, no âmbito de uma atividade regular de resolução de problemas na qual se dava particular ênfase à comunicação do processo de resolução (Seabra, 2022). No lado direito da resolução apresentada por um aluno (figura 13), verificamos as anotações que ele fez com o propósito de interpretar a situação problemática em questão. As anotações ilustram este propósito exploratório da escrita matemática.

Figura 12. Problema colocado a uma turma de 7.º ano de escolaridade (adaptado de Seabra, 2022, p. 23)

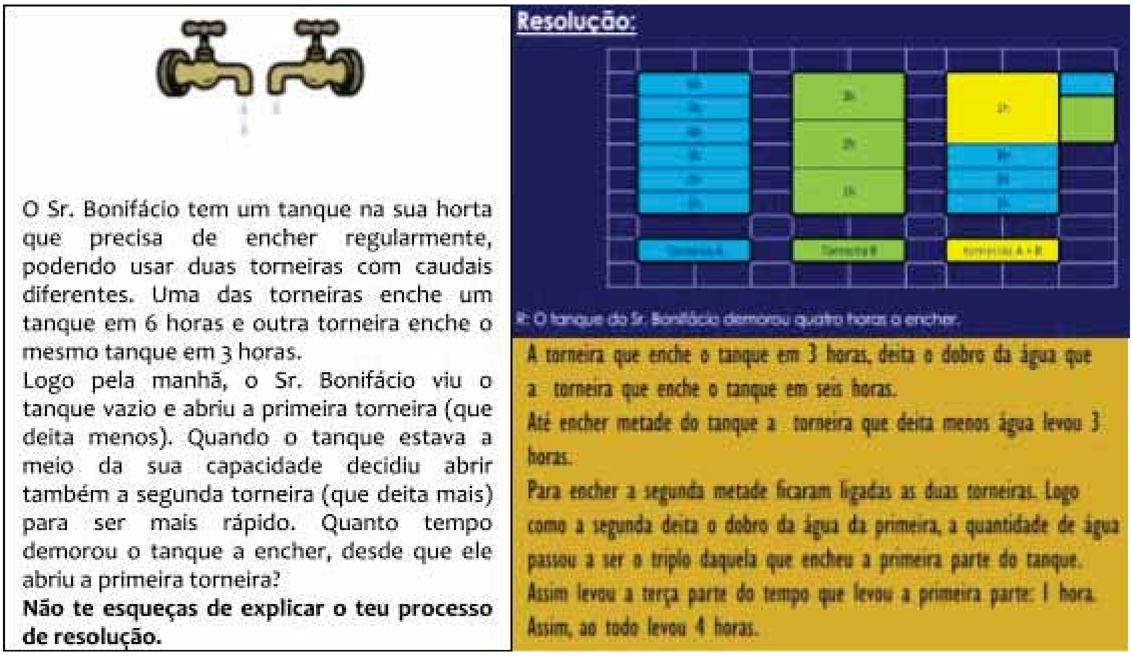
O João, o Luís e o Mário foram de férias para Londres, mas ficaram todos hospedados em hotéis diferentes. Os números dos seus quartos também eram todos diferentes. Sabem-se os nomes dos hotéis: River, Sky e Tower. E sabem-se os números dos quartos: 228, 515 e 986.
No dia da chegada, o jovem que ficou no Sky saiu do seu quarto, que era o 986, para ir comprar uma coca-cola. Uma hora depois, telefonou ao Mário que estava a ver televisão no seu quarto, que era o 515.
Depois de jantar, o Luís passou pelo hotel Tower e pediu na receção para avisarem o cliente do quarto 228 que viesse ter consigo à entrada.
Qual é o nome do hotel e o número do quarto de cada um dos três turistas? Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 13. Exemplo de escrita matemática com propósito de fazer sentido de um problema (Seabra, 2022, p. 61)



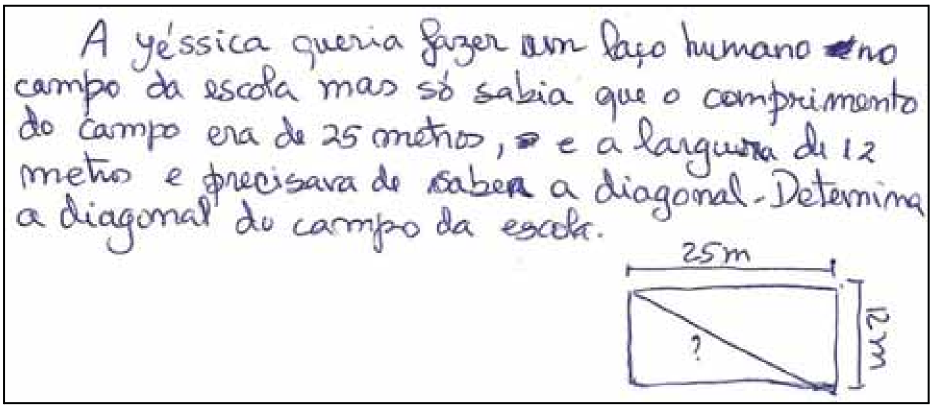
Outro propósito da escrita matemática, talvez aquele a que mais frequentemente se associa a comunicação matemática escrita, é descritivo ou explicativo. Os alunos podem ser chamados a descrever, por escrito, um conceito matemático ou a explicar a estratégia que usaram para resolver um problema, por exemplo (Casa et al., 2016). Uma escrita com este propósito apoia a necessidade de exprimir ideias com clareza e de usar palavras ou outras formas de representação (símbolos, desenhos, etc.) com precisão, para que os destinatários – usualmente o professor e os pares – possam compreender bem o que se pretende comunicar. A figura 14 (à direita) mostra exemplos de escrita matemática de dois alunos com o propósito de explicar como resolveram o problema “Até encher o tanque” (à esquerda). Um aluno explica como pensou recorrendo a um esquema, em que simula o enchimento do tanque; a outra aluna recorre apenas à linguagem natural para descrever o seu processo de resolução.

Figura 14. Exemplo de escrita matemática com propósito explicativo (adaptado de https://matematica5estrelas.ualg.pt/11-12/)



Um outro propósito da escrita matemática é de natureza criativa, com vista a registar ideias originais, a evidenciar fluência e flexibilidade de pensamento (isto é, a gerar múltiplas soluções a um problema ou a olhá-lo sob diferentes perspetivas, por exemplo), ou a desenvolver ideias (Casa et al., 2016). Naturalmente que não se espera que os alunos escrevam sobre ideias matemáticas inovadoras – as descobertas que sejam novas para os alunos ou para a turma podem ser consideradas originais: "escrever matematicamente sobre ideias originais poderá englobar alunos a formular problemas ou a questionar [outros], a gerar resoluções originais [considerando o universo em causa] de situações problemáticas, e a escrever sobre estruturas matemáticas ou padrões que tenham descoberto" (p. 17). O destinatário deste tipo de escrita matemática é, muitas vezes, um público autêntico e alargado, além das paredes da sala de aula, o que leva a que os alunos possam recorrer a modos formais ou informais para se exprimirem melhor. A figura 15 ilustra a resposta de uma aluna do 8.º ano ao desafio que lhe foi colocado, após a visualização do episódio 12 da temporada 1 da série "Isto é Matemática", disponível em https://www.youtube.com/watch?v=1Liyw0fab10: criar um problema que possa ser resolvido recorrendo ao Teorema de Pitágoras (Silva, 2020).

Figura 15. Exemplo de escrita matemática com propósito criativo (adaptado de Silva, 2020, p. 99)



Quando os alunos iniciam o seu percurso escolar, as suas capacidades de escrita são reduzidas, mas o recurso a desenhos ou outras representações visuais permite-lhes comunicar matematicamente, na forma escrita. As palavras ou os símbolos matemáticos não são, obviamente, os únicos recursos para apoiar a comunicação matemática escrita dos alunos. No entanto, em função dos destinatários e dos propósitos da escrita matemática, esta deve tornar-se progressivamente mais elaborada, como refere o NCTM (2007, p. 68):

> Em alguns casos, os alunos poderão considerar mais apropriado descrever as suas ideias informalmente através da linguagem comum e de esboços, mas, apesar disso, no final do ensino básico (…), deverão, também, aprender a comunicar matematicamente de forma mais formal, usando terminologia matemática convencional.

São várias as formas a que o professor pode recorrer para promover o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita com os diferentes propósitos que foram mencionados anteriormente: elaboração de mapas de conceitos ou posters, escrita de jornais diários ou de textos informativos, *posts* nas redes sociais, criação de vídeos ou outras produções multimédia, formulação de problemas, etc. As audiências podem também ser diversas, desde o próprio aluno, a turma ou um grupo de pares, o próprio professor ou outros professores (da turma ou não), colegas de outras turmas (incluindo de outros anos de escolaridade), e pais ou a comunidade mais alargada (Casa et al., 2016). Os materiais manipuláveis, assim como as ferramentas tecnológicas, constituem-se em apoios essenciais ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto na vertente escrita, como na vertente oral (NCTM, 2007, 2014).

Por último, é importante notar que a ideia de *resolver-e-exprimir problemas* matemáticos (Jacinto et al., 2018) resume a ligação estreita que existe entre a comunicação matemática e a resolução de problemas: um problema está bem resolvido quando o processo de resolução está comunicado de forma clara e completa, ou seja, não basta obter uma resposta matematicamente correta ao problema, é preciso também explicar de modo claro e completo como foi essa resposta obtida, tornar visível como se pensou para se chegar à resposta. A possibilidade de recorrer a diversas representações, com ou sem o apoio da tecnologia, facilita a comunicação de ideias e, ao mesmo tempo, potencia também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Representações matemáticas

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) são definidos oito objetivos para a aprendizagem desta disciplina que todos os alunos devem atingir. Num destes objetivos é explicitada a necessidade de os alunos desenvolverem a capacidade de usar representações matemáticas como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática. Salienta-se, ainda, que as ideias matemáticas são clarificadas quando se conjugam diferentes tipos de representação, sendo a familiaridade e a fluência que os alunos possuem com as várias formas de representação essenciais para a compreensão dessas ideias.

É realçado também neste documento que as capacidades matemáticas transversais são entendidas enquanto conteúdos de aprendizagem na área curricular de Matemática com a mesma importância que os conhecimentos matemáticos. Entre as seis capacidades matemáticas, aprofundadas nos quadros de operacionalização das Aprendizagens Essenciais, surgem as Representações matemáticas.

Significados e tipos de representações

São vários os significados e interpretações que são atribuídos à ideia de representações matemáticas. Para o NCTM (2007), o termo "representação" refere-se "tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Já para Tripathi (2008), uma representação matemática é "uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre esse conceito e outras ideias" (p. 348). O autor explica, ainda, que uma representação pode ser entendida como "a forma de uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outras pessoas" (p.348). Goldin (2018) afirma que as representações matemáticas são produções visíveis ou tangíveis, tais como diagramas, retas numéricas, gráficos, composições com objetos ou materiais manipuláveis, modelos físicos, textos escritos, expressões matemáticas, fórmulas e equações, ou mesmo imagens exibidas em ecrãs de um computador ou calculadora, que codificam, apoiam ou incorporam ideias matemáticas ou relações entre elas.

Para além dos significados e interpretações que lhes são atribuídas, as representações matemáticas têm sido caraterizadas e classificadas de várias maneiras, de acordo com a sua natureza e conforme os autores. Por exemplo, o NCTM (2017) defende um modelo em que as representações, associadas à aprendizagem matemática e à resolução de problemas, poderão ser de cinco tipos: física (materiais manipuláveis, objetos), contextual (situações da vida real), visual (pictórica, diagramas, tabelas, gráficos), verbal (linguagem escrita ou oral) ou simbólica (notação simbólica, uso de variáveis, de parâmetros, numerais,…), ilustrando, nesse modelo, as conexões importantes que se verificam entre as várias formas. Também as Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) adotam esta classificação, salientando a necessidade de promover a análise de diferentes representações sobre a mesma situação, evidenciando o papel das conexões entre representações para fortalecer a compreensão matemática.

Funções das representações

A Matemática é constituída por conceitos que estão interligados através de variadíssimas relações. Aprender um conceito usualmente implica não só conhecer o seu significado, mas também compreender as múltiplas relações entre esse conceito e outras ideias ou conceitos. Por isso, ao utilizar múltiplas representações de um conceito realçam-se vários aspetos da sua estrutura. Tripathi (2008) salienta esta ideia, afirmando que usar diferentes representações é como examinar um conceito através de uma variedade de lentes, em que cada uma delas proporciona uma perspetiva diferente, possibilitando um conhecimento mais rico e aprofundado desse conceito.

Entre os vários tipos de representação, as representações visuais têm atualmente um papel muito relevante, por estarem muito mais acessíveis aos alunos, em especial devido à evolução tecnológica, com as calculadoras gráficas, as folhas de cálculo, os programas de geometria dinâmica e outros, permitindo estabelecer facilmente conexões entre as várias representações. A tecnologia possibilita a obtenção de representações visuais variadas, nomeadamente tabelas, gráficos, construções geométricas estáticas e dinâmicas. Permite ainda que os alunos rodem, invertam, estiquem e ampliem figuras geométricas ou gráficos, bem como manipulem expressões, variando parâmetros, investiguem conjuntos complexos de dados ou façam simulações que podem ser usadas na investigação de fenómenos, facilitando a formulação de conjeturas.

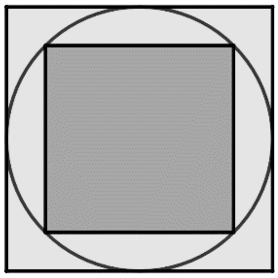
São vários os investigadores que realçam a importância das representações, especialmente as visuais, para a resolução de problemas. Por exemplo, Barbosa e Vale (2022) apresentam no seu artigo vários exemplos que ilustram e evidenciam o potencial das representações visuais como veículos para chegar à solução de um problema. Estas investigadoras argumentam que, apesar das representações visuais não serem novas na literatura, usualmente são preteridas pelos professores que preferem utilizar as representações analíticas e simbólicas.

As abordagens visuais podem ser um excelente complemento às resoluções analíticas, podendo fazer emergir resoluções muito mais simples e com mais significado para os alunos. Estas investigadoras afirmam, ainda, que a abordagem visual de um problema complementada com múltiplas representações e resoluções contribui para uma melhor compreensão da Matemática e para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, alterando a sua visão de uma matemática composta por um conjunto de fórmulas e de procedimentos que devem memorizar e dominar.

Barbosa e Vale (2022) apresentam um problema de geometria (figura 16) vulgarmente utilizado no 3.º ciclo, que pode, com recurso a relações favorecidas pela representação visual, ser resolvido de forma criativa sem recurso a procedimentos.

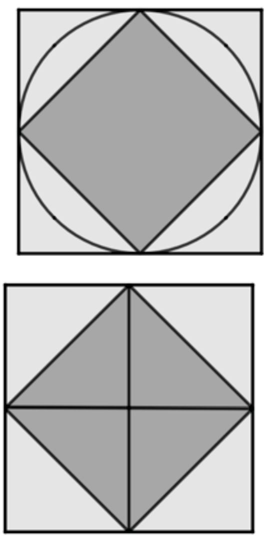
Figura 16. Problema dos quadrados

Num quadrado inscreveu-se um círculo. Nesse círculo inscreveu-se um quadrado. Se a área do quadrado maior for 4 cm^2, qual é a área do quadrado menor?



Recorrendo somente a relações geométricas, basta rodar o quadrado menor de modo a visualizar que a sua diagonal é igual ao lado do quadrado maior. Por fim, decompondo os quadrados em triângulos, conforme a figura 17, observa-se, facilmente, que a área do quadrado menor é metade da área do quadrado maior.

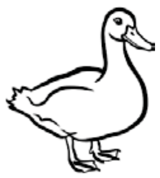
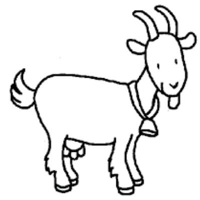
Figura 17. Outras representações dos quadrados



Este exemplo mostra como a alteração da representação visual da figura inicial pode fazer emergir relações mais simples entre os dois quadrados, resolvendo-se o problema sem recorrer a fórmulas e a outros conceitos, como seria, por exemplo, o teorema de Pitágoras, tornando a sua resolução acessível a alunos de níveis inferiores de escolaridade, usando somente propriedades básicas das figuras.

O problema que se apresenta de seguida (figura 18) é vulgarmente utilizado no Ensino Básico (por vezes com outras redações semelhantes), e pode ser trabalhado em vários anos de escolaridade, conforme os conceitos e as representações que os alunos já dominam.

Figura 18. Problema dos gansos e das cabras

	O João e a Rita foram à quinta dos avós, onde há gansos e cabras. Ao todo, o João contou 27 cabeças e a Rita contou 84 patas. Quantos gansos e cabras há na quinta?	

Ao lerem este problema, os professores do 3.º Ciclo do Ensino Básico pensam em resolvê-lo usando somente álgebra, através de um sistema de duas equações com duas incógnitas, em que x representa o número de gansos e y representa o número de cabras, assim:

$$x + y = 27 \ e \ 2x + 4y = 84$$

No entanto, este problema poderá ser resolvido por diversas estratégias, utilizando outras representações, como, por exemplo, as apresentadas nas figuras seguintes:

Figura 19. Representação visual através de diagrama

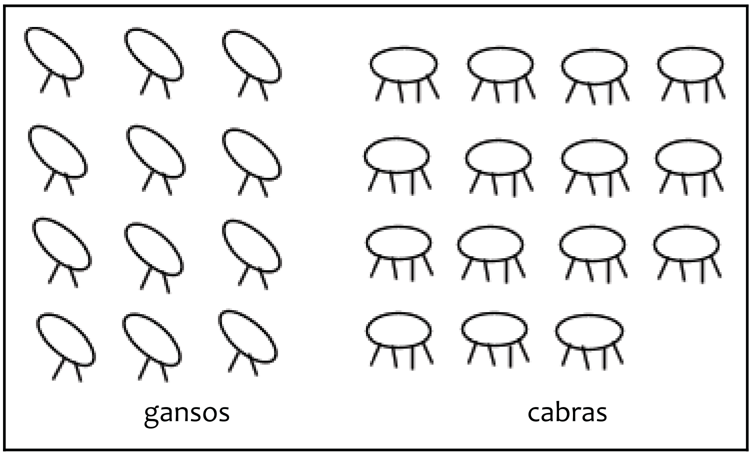
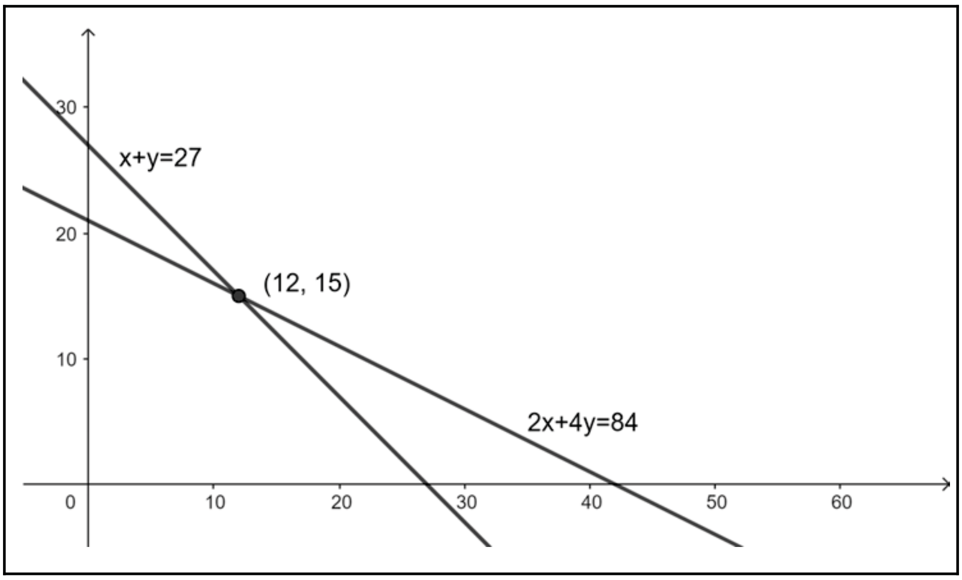


Figura 20. Representação em tabela

Gansos	Patas dos gansos	Cabras	Patas das cabras	Total de patas
1	2	26	104	106
2	4	25	100	104
3	6	24	96	102
4	8	23	92	100
5	10	22	88	98
6	12	21	84	96
7	14	20	80	94
8	16	19	76	92
9	18	18	72	90
10	20	17	68	88
11	22	16	64	86
12	24	15	60	84

Figura 21. Representação gráfica



Estas figuras mostram três resoluções distintas que possibilitam que os alunos tenham acesso a novas perspetivas, que de certeza contribuirão para a compreensão e resolução do problema. A resolução de tarefas em que são exploradas múltiplas representações contribui para que os alunos melhorem a sua proficiência na resolução de problemas. Estas representações, mais utilizadas nas primeiras etapas da compreensão de um conceito, estabelecem pontes para as representações simbólicas que virão a ser utilizadas mais tarde, quando se referirem ao mesmo conceito.

É importante a introdução da linguagem simbólica matemática, bem como levar os alunos a apreciar e a valorizar a simplicidade e eficiência dessas formas de representação para comunicar ideias sinteticamente e com precisão. Os significados que vão sendo atribuídos às representações simbólicas desenvolvem-se gradualmente nos estudantes ao estabelecer relações com outras representações, especialmente as visuais. Compete aos professores sugerir aos alunos a utilização da diversidade de representações possíveis, apresentando-lhes as que eles não dominem, questionando-os sobre as relações e conversões entre as diferentes representações e discutindo as escolhas mais adequadas. Através do questionamento e da interpretação das representações utilizadas pelos seus alunos, os professores poderão compreender melhor os seus raciocínios e perceber se aprenderam os conceitos matemáticos em estudo. Assim, cabe aos professores propor aos alunos tarefas em que seja possível o recurso a diferentes representações, onde a tecnologia poderá ter um papel decisivo como suporte visual e como facilitador do reconhecimento de conexões entre as várias representações.

As representações matemáticas têm um papel fundamental no modo como os alunos desenvolvem e aprofundam os seus conhecimentos. Quando criam, utilizam e comparam representações diversas os alunos organizam, registam e comunicam ideias matemáticas. As representações devem ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação das abordagens e dos argumentos, na identificação de conexões entre conceitos, na resolução de problemas e na modelação e interpretação de fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007).

Conexões matemáticas

A ideia de "conexões", no contexto da educação matemática, ganhou visibilidade quando o NCTM, em 2000, elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2007). A assunção de um termo específico e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de Matemática.

O NCTM refere quatro diferentes tipos de conexões (NCTM, 2007): entre conceitos matemáticos, entre diferentes temas matemáticos, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e a vida quotidiana. Os dois primeiros situam-se dentro da Matemática, enquanto os dois últimos a relacionam com o que lhe é externo, favorecendo a perceção da utilidade dos conhecimentos matemáticos e a apreciação do seu valor (Pierce & Stacey, 2006). Desta forma, em geral, distinguem-se as conexões internas da Matemática e as conexões externas, que a colocam em diálogo com os outros domínios, sendo a modelação matemática uma forma por excelência de concretizar conexões com o mundo em redor. É esta a opção das Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) na abordagem curricular às conexões como uma capacidade matemática transversal.

De qualquer modo, sejam internas ou externas, as conexões têm um potencial imenso para as aprendizagens dos alunos, como tem vindo a ser revelado pela investigação em educação matemática. "O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa" (Canavarro, 2017, p. 38).

Conexões internas

A exploração das conexões internas da Matemática permite evidenciar as relações que existem entre os diversos temas da Matemática, tão frequentemente tratados de forma isolada, correspondendo, nos manuais escolares, a diferentes capítulos que nunca se intersetam. Embora existam claramente conceitos e procedimentos específicos de cada tema da Matemática, existem também múltiplas associações que podem ser feitas, contribuindo para ampliar a compreensão dos conceitos e procedimentos e dar a conhecer a Matemática como uma ciência coerente.

Uma estratégia poderosa para o estabelecimento de conexões internas é o uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2014).

A exploração de conexões matemáticas para potenciar a aprendizagem dos alunos requer uma ação estratégica por parte do professor, da qual faz parte o uso, em sala de aula, de tarefas que recorram a conhecimentos matemáticos de diferentes temas, quer surjam de forma explícita nas questões colocadas aos alunos, quer surjam no desenvolvimento da resolução e discussão das tarefas com a turma, na qual deve intencionalmente ser feita a explicitação das conexões em causa de modo a que os alunos as reconheçam.

A representação de alguns números irracionais através de construções geométricas rigorosas é uma oportunidade para dar maior robustez ao conceito de número. A decomposição, quando possível, do quadrado de um número irracional numa soma de quadrados permite recorrer ao Teorema de Pitágoras para definir um procedimento que permita a sua representação formal, na reta numérica. Os diferentes temas matemáticos e as conexões que se estabelecem entre eles permitem ampliar as representações deste tipo de números irracionais, criando situações de aprendizagem mais significativas, que permitem ampliar o conceito de número para além de contagens, diferenças ou proporções. A figura 22 ilustra uma tarefa proposta no 9.º ano, em que se pretende que os alunos definam construções geométricas que permitam a representação rigorosa de alguns números irracionais.

Figura 22 - Excerto de tarefa proposta nas turmas de operacionalização das AE no 9.º ano

- Acede ao GeoGebra usando a ligação https://www.geogebra.org/m/snsx7nvc e executa as instruções seguintes para responder à questão final:

  A - Constrói sobre a reta numérica apresentada um quadrado, com um dos vértices no ponto O e com um dos vértices adjacentes no ponto da reta numérica de abcissa 1;

  B - Desenha uma circunferência com centro em O e raio igual à diagonal do quadrado;

  C - Marca os pontos de interseção da circunferência com a reta numérica.

  Quais as abcissas dos pontos por ti marcados? Explica a tua resposta.

- Define um protocolo semelhante ao que te foi apresentado anteriormente que permita a marcação da $\sqrt{5}$ numa reta numérica.

  Acede ao GeoGebra usando a ligação e segue o protocolo definido, para proceder à sua marcação do ponto de abcissa $\sqrt{5}$.

  Nota: Recorda que $5 = 2^2 + 1^2$

Conexões externas

As conexões externas podem estar associadas a situações muito diversas, pois associam a Matemática a outras disciplinas ou domínios científicos, profissionais, culturais ou da vida do dia-a-dia, na multitude de atividades e de práticas concretas, incluindo lavar os dentes, fazer desporto ou ir ao supermercado.

Uma vantagem inequívoca da exploração de conexões externas é contribuir para eliminar as barreiras entre a Matemática e outros domínios, permitindo aos alunos conhecer e apreciar a aplicabilidade da Matemática, "enquanto forma de observação, representação e interpretação mais clara do mundo que os rodeia" (NCTM, 2007, p. 154). Naturalmente que as conexões matemáticas permitem aprender sobre o assunto com que a Matemática se conecta, constituindo-se como um enriquecimento curricular e uma forma de dar lugar ao desenvolvimento de uma visão mais integrada sobre os saberes.

Existem formas diversas de estabelecer conexões externas e explorá-las de forma relevante com os alunos. Uma possibilidade é a exploração de situações nas quais se possam aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões). Importa que as situações sejam de facto reais, de modo que os alunos possam reconhecer a Matemática como uma ferramenta efetivamente útil, que contribui para dar respostas verdadeiras, e com isso conhecer melhor o que é objeto de estudo. As situações escolares fabricadas para aplicação da Matemática pelos alunos não têm, a nível do reconhecimento do valor da Matemática, o mesmo potencial que as situações autênticas, nomeadamente das que podem ser vividas pelos alunos. A investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). E o mundo em nosso redor está repleto de situações que permitem desocultar a presença da Matemática — não se diz que ela está em todo o lado?

Um exemplo de uma situação real bastante interessante que conecta a matemática com a vida do dia-a-dia, e a relaciona com áreas das Ciências Sociais e do Ambiente, incluindo a sustentabilidade, tem a ver com as máquinas para a recolha de vasilhame de plástico que se podem encontrar instaladas em locais públicos de grande acesso, como são os supermercados. Estas máquinas recebem os diferentes vasilhames que lhes são introduzidos e trituram-nos, com o objetivo de os reduzir e reciclar. As máquinas atribuem diferentes valores a cada tipologia de vasilhame que é feito (garrafas e garrafões com diversas capacidades), sendo possível que uma família de três pessoas consiga perfazer o valor de 5 euros com o depósito semanal do vasilhame usado para água. O valor obtido não reverte a favor da família — é doado a instituições de solidariedade social ou sem fins lucrativos, ficando assim a família envolvida em causas sociais.

Esta situação oferece múltiplas oportunidades de trabalho com alunos de diferentes ciclos. Importa começar por colocar questões adequadas com vista a obter respostas relevantes neste contexto. Um exemplo poderá ser calcular o montante que cada família da turma consegue totalizar em uma semana com o vasilhame respetivo, tendo em conta os valores reais que a máquina atribui a garrafas e garrafões com diferentes capacidades. Outra será calcular a quantidade de garrafas e garrafões necessários para perfazer um dado montante que se deseja doar. Outra ainda será conceber estratégias para sensibilizar a escola e a comunidade a aderir a esta forma de reciclagem e de solidariedade social. Qualquer um destes exemplos de trabalho envolve diversos conceitos (organização de dados, cálculos diversos, que podem ir da produção de estimativas à obtenção de valores exatos) e diversas capacidades matemáticas (formulação e resolução de problemas, comunicação de resultados, representação de resultados...). Seja qual for a questão (e muitas outras se podem colocar), no final do estudo realizado importa destacar como a Matemática contribuiu para conhecer e compreender melhor a situação.

Outra possibilidade bastante acessível de trabalho com os alunos no âmbito das conexões externas é a identificação da presença da Matemática em contextos diversos reais e a procura de compreensão do seu papel na criação e construção da realidade observada. Esta modalidade pode acontecer no âmbito de visitas de estudo, in loco ou virtuais, que possibilitam o contacto com o mundo fora da escola, mas também pode acontecer por observação das práticas e artefactos da escola, a começar pelo próprio edifício da escola, sendo a Arquitetura uma enorme fonte de conexões externas com a Matemática. Convidar os alunos a observar fachadas de edifícios comuns e a identificar como a Matemática foi usada nessa construção, questionando como terão pensado os seus autores para produzir a obra, constitui uma excelente estratégia para os alunos convocarem ideias matemáticas já aprendidas e lhes darem utilidade e sentido em contexto real. Mas o convite pode ser estendido, com o desafio para que proponham novas fachadas renovadas, apelando à sua criatividade e espírito crítico, tendo em conta os requisitos identificados anteriormente, que certamente envolvem múltiplos conceitos da Geometria e da Medida. Este trabalho constitui um exemplo de conexão externa com enorme potencial para as aprendizagens, que pode ser usado no 3.º ciclo. Enquanto que os alunos mais novos poderão fazer propostas com recurso a desenho com lápis em papel, os mais velhos poderão usar *software* de geometria dinâmica para replicar as fachadas e fazer novas propostas de sua autoria. Da mesma forma se pode trabalhar na observação de monumentos diversos como, por exemplo, o Cromeleque dos Almendres, equipamentos modernos para uso comum como, por exemplo, os estádios de futebol, ou estruturas artísticas, como os painéis de azulejos das estações de comboios espalhadas por todo o país.

Modelação matemática

A modelação matemática consiste essencialmente em matematizar, através de objeto(s) matemático(s) que compõem o chamado "modelo matemático", uma dada situação de um contexto extra-matemático, constituindo o trabalho matemático realizado uma fonte de conhecimento, de capacidade de controlo e de tomada de decisões sobre essa situação matematizada. É isto que distingue a modelação matemática do estabelecimento de conexões externas que referimos na secção anterior: as conexões externas não implicam a existência de um modelo matemático que represente uma situação sobre a qual se fica apto a intervir, sendo este aspeto fulcral na modelação matemática.

A modelação matemática concretiza-se através de um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático, muitas vezes representado por um ciclo (Ferri, 2010). A primeira fase do ciclo de modelação consiste na apreensão da situação real a modelar, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar acessível e matematicamente tratável. De seguida, através da aplicação de ideias matemáticas, constrói-se o modelo matemático que vai permitir produzir resultados, que nos permitem agir sobre a situação real.

Assim, a modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

Os modelos matemáticos encontram frequentemente expressão em fórmulas ou funções matemáticas, mas também existem modelos matemáticos representados por outros objetos matemáticos, como, por exemplo, tabelas ou esquemas que traduzem a situação. Estes últimos podem ser mais adequados ao trabalho com crianças e podem, inclusivé, estabelecer pontes para representações mais formais.

A introdução de famílias de funções com progressiva complexidade algébrica cria oportunidades para estudar fenómenos em que a relação com a realidade pode ser verificada a partir da realização de experiências pelos alunos, permitindo estabelecer, de forma clara, conexões com contextos externos à Matemática.

No exemplo da figura 23, ilustra-se uma experiência proposta aos alunos do 9.º ano em que os dados recolhidos permitem identificar uma relação de proporcionalidade inversa, e posteriormente, criar um modelo matemático que descreve a relação identificada. A descrição matemática de um fenómeno cria oportunidades para ilustrar a presença da Matemática em situações menos óbvias para os alunos.

Figura 23 - Atividade proposta nas turmas de operacionalização das AE no 9.º ano

Proporcionalidade por um canudo

Com o conjunto de canudos que vos foi fornecido, e recorrendo à fita métrica afixada na parede, pretende-se que se recolham dados que permitam responder às seguintes questões:

- Um dos elementos do grupo irá posicionar-se num determinado local da sala, fixo, virado de frente para a fita métrica. Em seguida, irá olhar através de cada um dos canudos fornecidos, sem alterar a sua posição anteriormente fixada, e observar o comprimento da fita métrica visível em cada situação, bem como o comprimento de cada canudo usado.

  Regista no caderno os dados obtidos recorrendo a uma tabela como aqui se apresenta:

Comprimento do canudo em centímetros (x)	Comprimento visível na fita métrica em centímetros (y)	$x \times y$
(...)	(...)	(...)

- Descreve o que observas na terceira coluna da tabela.
- Para se conseguir observar um maior comprimento na fita métrica, por qual dos canudos devemos optar? E para observar o menor comprimento, qual é o canudo indicado?
- Encontra uma expressão algébrica que melhor relacione as variáveis x, comprimento do canudo em centímetros, e y, comprimento visível na fita métrica em centímetros, e escreve-a em ordem a y.

A concluir, sistematizamos três ideias que importa reter sobre a importância da exploração curricular das conexões matemáticas com os alunos de todos os níveis: 1. Constituem-se como oportunidade de trabalhar de forma interrelacionada, e com ênfase na compreensão, conceitos e procedimentos matemáticos de diversos temas; 2. Proporcionam contextos onde o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais surge com naturalidade; 3. Oferecem a possibilidade de reconhecimento da relevância da matemática. Insistimos na ideia de que não é suficiente que o professor apresente nas aulas exemplos curiosos de conexões matemáticas aos alunos. É necessário que os alunos tenham oportunidade de eles próprios terem experiências que lhes permitam efetivamente conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula (Canavarro, 2017).

Tarefas em sala de aula

Apresentação e discussão

Tarefa — Caminhos do robô

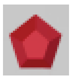
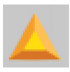
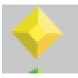
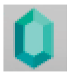
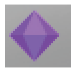
Enunciado da tarefa

Caminhos do Robô

A Alice e o Bernardo estão a controlar um robô num labirinto com pedras preciosas. O robô começa na localização indicada na figura abaixo. O robô segue um caminho até encontrar uma bifurcação. Um dos jogadores decide qual dos caminhos (esquerda ou direita) o robô deve tomar. Depois, o robô segue esse caminho até encontrar outra bifurcação, e assim sucessivamente (o robô nunca volta para trás no seu caminho).

A Alice e o Bernardo decidem à vez qual a direção a seguir, com a Alice a começar, o Bernardo decidindo a 2ª bifurcação, a Alice a 3ª e por aí adiante. O jogo termina quando o robô chegar ao final de um caminho sem saída, com o robô a recolher todas as pedras preciosas que aí encontrar e adicionar o seu valor. A Alice quer que o robô acabe o jogo com o maior valor possível, enquanto o Bernardo quer que o robô acabe o jogo com o menor valor possível. A Alice e o Bernardo sabem que cada um vai tentar ser mais esperto que o outro. Por isso se, por exemplo, o Bernardo redirecionar o robô para uma bifurcação onde é possível obter o valor $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3}$, ele sabe que a Alice vai comandar o robô escolhendo o caminho que leva à maior soma possível, ou seja $\frac{1}{2}$.

Cada pedra tem o seguinte valor:

Pedras								
Valor	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{5}{2}$	$1,5$

1	2	3	4	5	6	7	8

1. Qual a caixa (de 1 a 8) em que se obtém o maior valor?
2. Qual o valor recolhido pelo robô de acordo com as indicações dadas pelos dois jogadores? Indica o percurso feito pelo robô.
3. Se fosse o Bernardo a escolher primeiro o percurso, qual seria o valor recolhido pelo robô? Indica esse percurso. Mostra como chegaste às respostas.

Fonte: Adaptado de http://bebras.dcc.fc.up.pt/2020.html

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 7.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números racionais	Representação e ordenação Adição e subtração
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento computacional	Abstração, Decomposição, Reconhecimento de padrões, Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas Conexões entre representações
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Comparar e ordenar números racionais;
- Adicionar e subtrair números racionais e reconhecer as propriedades da adição de números racionais e aplicá-las quando for relevante para a simplificação dos cálculos;
- Extrair informação relevante de um problema, estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade; reconhecer e identificar padrões, e procurar e corrigir erros;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Analisar e discutir ideias centrando-se em evidências;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com os outros.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Uma versão possível de ser projetada no quadro.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

Prevê-se que os alunos poderão resolver a questão 1.1 seguindo uma das seguintes estratégias:

Estratégia 1: Cálculo do valor de cada caixa de forma independente;

Estratégia 2: A partir da compreensão de como as caixas estão construídas, começam por calcular a caixa que tem apenas duas pedras (coluna 1), passam para a coluna 8 formada pelas peças da coluna 1 às quais se acrescenta nova peça e assim sucessivamente;

Estratégia 3: Compreendendo a relação entre os valores das caixas, tal como acontece na estratégia 2, começam por calcular o valor da 5.ª caixa e através da subtração do valor da última peça de cada expressão numérica vão calculando sucessivamente os correspondentes valores das caixas, seguindo uma ordem inversa à da estratégia anterior.

Cálculos: Os alunos poderão usar a representação fracionária ou decimal ou ambas, fazendo as respetivas conversões quando sentirem essa necessidade. É de fazer notar que os valores escolhidos para cada pedra preciosa permitem uma conversão simples entre estas duas representações de números racionais.

Estratégia 1:

Caixa 1. - 3/2 + ½ = -2/2 = -1 ou – 1,5 + 0,5 = -1

Caixa 2. -3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 = -1 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 = -7/4 +1-2 + 5/2 = -3/4 -2 + 5/2 = -11/4 + 10/4 = -1/4

ou

-3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 = -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 +1 -2 + 2,5 = -1 -0,25 -0,5 +1 -2 +2,5 = -1,75 + 1 -2 +2,5 =- -2,75 + 2,5 = -0,25

Caixa 3. -3/2 + ½ -1/4 -1/2 + 1 = -1 -1/4 -1/2 + 1 = -7/4 +1 = -7/4 + 4/4 = -3/4 ou

-3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 = -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 +1 = -1 -0,25 -0,5 +1 = -1,75 + 1 = - 0,75

Caixa 4. -3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 = -1 -1/4 -1/2 = -7/4 ou -3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 = -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 = -1 -0,25 -0,5= -1,75

Caixa 5. -3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 + 1,5 = -1 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 + 3/2= -7/4 +1-2 + 5/2 + 3/2= -3/4 -2 + 5/2 + 3/2= -11/4 + 10/4 + 3/2= -1/4 + 3/2 = 5/4 ou

-3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 + 1,5= -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 +1 -2 + 2,5 + 1,5= -1 -0,25 -0,5 +1 -2 +2,5 + 1,5= -1,75 + 1 -2 +2,5 + 1,5=- -2,75 + 2,5 + 1,5= -0,25 + 1,5 = 1,25

Caixa 6. -3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 = -1 -1/4 -1/2 + 1 -2 = -7/4 +1-2 = -3/4 -2 = -11/4 ou

-3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 = -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 +1 -2 = -1 -0,25 -0,5 +1 -2 = -1,75 + 1 -2 =- -2,75

Caixa 7. - 3/2 ou -1,5

Caixa 8. -3/2 + ½ -1/4 = -2/2 – ¼ = -4/4 – ¼ = -5/4 ou -1,5 + 0,5 - 0,25 = -1,25

Estratégia 2:

Caixa 7. -3/2 ou -1,5

Caixa 1. -3/2 + ½ = -2/2 = - 1 ou -1,5 + 0,5 = -1

Caixa 8. -1 -1/4 = - 4/4 -1/4 = -5/4 ou -1 – 0,25 = -1,25

Caixa 4. -5/4 -1/2 = -5/4 – 2/4 = - 7/4 ou -1,25 – 0.5 = - 1,75

Caixa 3. -7/4 +1 = -7/4 + 4/4 = - 3/4 ou -1,75 + 1 = - 0,75

Caixa 6. -3/4 – 2 = -3/4 – 8/4 = - 11/4 ou -0,75 – 2 = - 2,75

Caixa 2. -11/4 + 5/2 = -11/4 + 10/4 = - ¼ ou -2,75 + 2,5 = - 0,25

Caixa 5. -1/4 + 1,5 = -1/4 + 3/2 = -1/4 + 6/4 = 5/4 ou -1/4 + 1,5 = -0,25 + 1,5 = 1,25

Estratégia 3:

Caixa 5. -3/2 +1/2 – 1/4 -1/2 +1 -2 +5/2 + 1,5 = -2/2 - 1/4 -1/2 +1 -2 +5/2 + 1,5 = - 5/4 – 1/2 -1 + 5/2 + 1,5 = -7/4 -4/4 + 10/4+6/4 = -11/4+10/4+6/4 = 5/4 ou

-3/2 + 1/2 -1/4 -1/2 + 1 -2 +5/2 + 1,5= -1,5 +0,5 -0,25 -0,5 +1 -2 + 2,5 + 1,5= -1 -0,25 -0,5 +1 -2 +2,5 + 1,5= -1,75 + 1 -2 +2,5 + 1,5=- -2,75 + 2,5 + 1,5= -0,25 + 1,5 = 1,25

A partir daqui vai-se subtraindo sucessivamente o último valor de cada expressão, calculando deste modo o valor das caixas, respetivamente 2, 6, 3, 4, 8, 1 e 7. Por outras palavras, a ordem que se vai obtendo é a inversa da utilizada na estratégia 2.

Questão 2

As condições estabelecidas à partida são que a Alice pretende que o robô termine no maior valor possível e o Bernardo que termine no menor valor possível. Deseja-se que os alunos procurem todas as possibilidades de modo a escolherem a melhor, de forma fundamentada, considerando que cada um vai tentar ser mais esperto do que o outro.

Caminhos 1 e 2: Se **Alice optar por seguir para A**. Bernardo pode escolher o C, e a Alice escolherá H, obtendo (-0,25). Mas o Bernardo não irá facilitar Alice, pelo que Bernardo irá escolher D, Alice escolherá I, obtendo **(-0,75)**.

Caminhos 3 e 4: Se **Alice optar por seguir para B**. Bernardo pode escolher E, então Alice escolherá K, obtendo (1,25). Mas o Bernardo não irá facilitar Alice, pelo que Bernardo irá escolher F, então Alice escolherá N, obtendo **(-1,25).**

Admitindo que ambos jogam bem, a opção mais favorável a Alice é começar por A, pois obterá (-0,75), enquanto se tivesse optado por B, obteria no máximo (-1,25). Deste modo, a estratégia é mais complexa do que procurar qual a caixa que tem maior valor e encontrar o caminho para lá chegar.

Questão 3

Caminhos 1 e 2: Se Bernardo optar por seguir A. Alice pode escolher o D, então Bernardo escolherá J, obtendo (-1,75). Mas a Alice não irá facilitar o Bernardo, pelo que Alice irá escolher C e o Bernardo escolherá G, obtendo (-1).

Caminhos 3 e 4: Se Bernardo optar por seguir B. Alice pode escolher o E, então Bernardo escolherá L, obtendo (-2,75). Mas a Alice não irá facilitar o Bernardo, pelo que Alice irá escolher F e o Bernardo escolherá M, obtendo (-1,5).

Admitindo que ambos jogam bem, a opção mais favorável a Bernardo é começar pelo B, pois obterá (-1,5), enquanto que se tivesse optado por A, obteria no mínimo (-1). Deste modo, a estratégia é mais complexa do que procurar qual a caixa que tem menor valor e encontrar o caminho para lá chegar.

Exploração da tarefa

A exploração da tarefa será feita em dois momentos, considerando três fases para cada um deles.

Apresentação da tarefa

Num primeiro momento, a resolução focar-se-á na questão 1. Nesta fase, o professor distribuirá o enunciado da tarefa, não devendo dar qualquer indicação, deixando os alunos decidirem como calcular o valor de cada caixa. Contudo, poderá questionar os alunos de modo a perceber se compreendem o que lhes é pedido. Tempo previsto 5min.

Trabalho autónomo

Os alunos devem trabalhar em grupos de três a quatro alunos. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que vão fazendo e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 15min.

Discussão com toda a turma

O professor solicita que dois grupos apresentem como realizaram os cálculos: primeiro um grupo que usou a estratégia 1 e de seguida um outro que tenha recorrido à estratégia 2. Os valores calculados de cada caixa deverão ser comparados para que todos os grupos tenham os valores corretos para poderem prosseguir para as questões 2 e 3. Tempo previsto 20min.

Seguir-se-á novo **trabalho autónomo**, agora para a resolução da questão 2. O professor deverá incentivar os alunos a escreverem como pensaram. Os alunos que resolverem mais rapidamente, poderão passar para a questão 3. Tempo previsto 20min.

Seguir-se-á uma nova **discussão com toda a turma**, em que o professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes opiniões, incentivando os alunos a fundamentarem as suas ideias. Caso seja necessário, a questão 3 poderá ser passada para trabalho de casa e ser discutida no início da aula seguinte. Tempo previsto 20min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Compreender o que se pede na questão 1	O que é preciso fazerem para responder à questão 1?
Após a resolução da questão 1, compreender uma estratégia alternativa	Será que precisavas de fazer todos os cálculos em todas as colunas? Olha para as colunas e vê se encontras alguma relação entre elas.
Compreender a razão do título da tarefa	No título da tarefa fala-se em "Caminhos do robô". É um título apropriado? Alguém me explica porquê?
Destacar informação relevante	Qual a informação relevante indicada no enunciado para responder à questão 2? O que quer a Alice? E o Bernardo?
Interpretar uma estratégia descrita no enunciado	Como pode cada um deles ser mais esperto do que o outro? Se a Alice estiver na posição F, deverá escolher o caminho M ou N? Porquê?
Compreender a diversidade de caminhos possíveis e ser capaz de escolher o melhor	Será que o percurso está correto? Será o único possível?
Argumentar a adequação do caminho optado	Porque escolheste esse caminho? Como é que tens a certeza que esse é o melhor caminho? Já esgotaste todas as possibilidades?

Concretização da tarefa na prática

Esta aula realizou-se no início de novembro de 2021. Os alunos tinham começado o ano letivo por conhecer os números inteiros negativos e posteriormente os racionais, e por trabalhar a adição e subtração dos números racionais.

Tal como inicialmente planificado, a aula começou com a constituição dos grupos. A professora informou os alunos que iriam trabalhar em pequenos grupos: "Vamos trabalhar em pequenos grupos de três ou quatro alunos, como temos vindo a fazer. Sem grande excitação, vamos fazer os grupos". Estes grupos já tinham funcionado antes, pelo que a sua formação foi muito rápida e sem sobressaltos. Constituíram-se dois grupos de quatro, três grupos de três, um grupo de dois, e dois alunos trabalharam sozinhos, um por vontade expressa do encarregado de educação e o outro abrangido pela educação inclusiva com adequações curriculares não significativas.

Apresentação da tarefa

Depois dos grupos estarem constituídos, a professora distribuiu uma folha com o enunciado da tarefa e referiu:

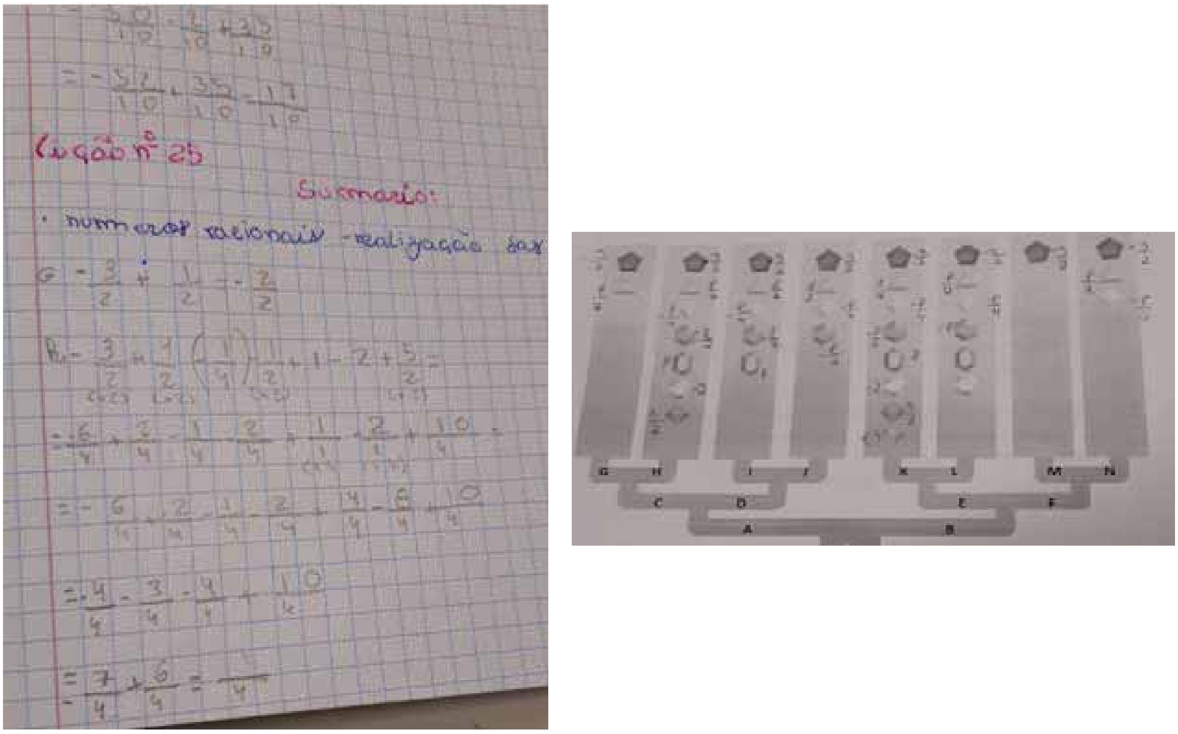
> *Primeiro observem a tarefa. Vejam o que têm de fazer. Depois do tempo dedicado a resolverem, vamos discutir em grande grupo. Já sabem que eu sou muito rigorosa com o tempo! Vão fazer uma leitura atenta do exercício. Não precisam de ler tão alto.*

Trabalho autónomo

Alguns alunos revelaram dificuldades no cálculo. Por exemplo, alguns deles não conseguiam dizer que 2/2 era igual a 1. Outros levaram muito tempo a realizar os cálculos.

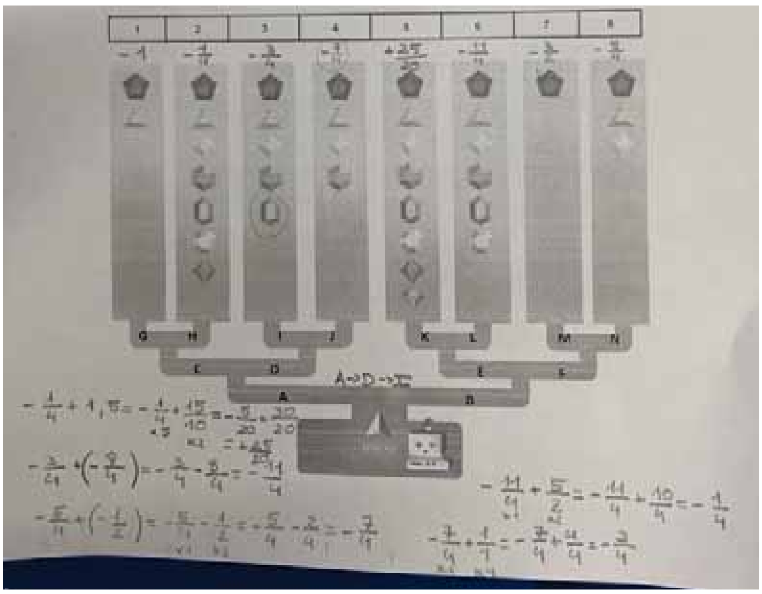
Do observado, apenas um grupo encontrou um padrão e usou-o para calcular os valores das diferentes colunas (estratégia 2). A grande maioria da turma usou a estratégia 1. Como estavam a trabalhar em grupo, dividiram entre eles as colunas, ficando cada um responsável pelo cálculo do seu valor (figura 24).

Figura 24. Resolução de um grupo de alunos que calculou o valor de cada coluna de forma independente



Apenas um grupo de três alunos optou pela estratégia 2 (figura 25). Questionado um desses alunos sobre como tinha calculado o valor de cada coluna, explicou-nos que a coluna 7 só tinha uma pedra que valia (-3/2). A coluna 1 era a coluna 7 a que se tinha acrescentado (1/2), correspondente ao valor da pedra que se tinha juntado. Valia (-1). A seguir tinha calculado o valor total da coluna 8, que era o valor da coluna 1 mais (+1,5). Valia (-5/4). De seguida calculou a coluna 4. E assim sucessivamente.

Figura 25. Resolução do grupo de alunos que usou a estratégia 2



Ao fim de cerca de 30min houve um breve intervalo, recomeçando a aula ao fim de 10min com a discussão com toda a turma da resolução da questão 1.

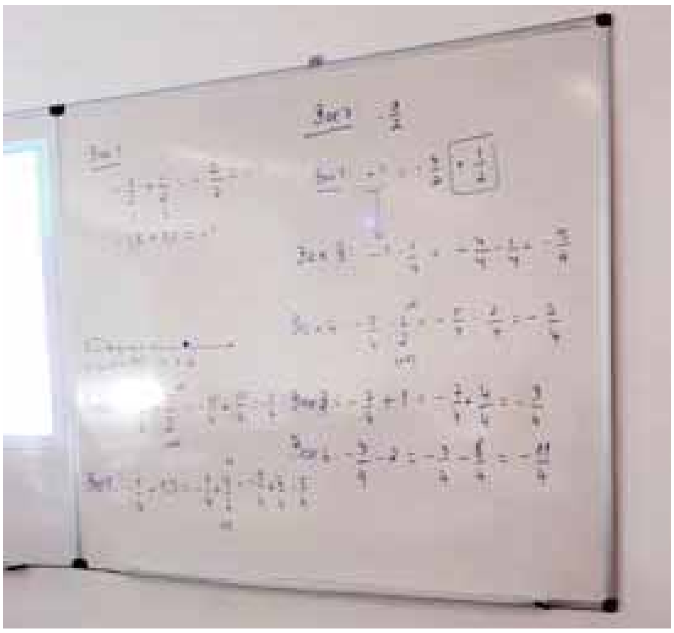
Discussão com toda a turma e síntese das ideias chave

A professora começou por relembrar o que era pedido na questão 1. e recebeu respostas distintas:

> *Prof.ª – A 1.ª questão que vos colocavam era em que box encontravam o maior valor.*
>
> *A1 – 6*
>
> *A2 – 5*
>
> *Prof.ª – Que valores foram buscar?*
>
> *A1 – Das pedras preciosas*
>
> *(…)*
>
> *Prof.ª – Box 1?*
>
> *A3 – (-1) porque -2/2 = -1*
>
> *Professora escreve no quadro Box 1 : -3/2 + ½ = -2/2 (ver figura 26)*

Dado ter sido a estratégia usada pela grande maioria dos alunos, a professora optou por continuar a discussão explorando-a e registando no quadro os diferentes valores obtidos, pedindo aos alunos que explicassem como chegaram a cada valor (figura 26).

Fig. 26. Registo no quadro feito pela professora ao longo da exploração da estratégia 1



Um aluno informou que fez os cálculos com decimais, porque achou mais fácil. Exemplo por si apresentado: -1,5 + 0,5 = -1. A professora aceitou, e aproveitou o comentário do aluno para recordar outras representações matemáticas.

A dada altura, depois de preencher o valor de mais colunas, a professora questionou os alunos sobre a existência de estratégias alternativas. Para facilitar a compreensão dos restantes alunos, a professora projetou o esquema dado no enunciado da tarefa de forma que todos pudessem ver como é formada cada coluna. Um dos alunos que tinha seguido a estratégia 2, começou a explicar como fez: "Comecei com a box 7". A professora pediu ao aluno para ir ao quadro explicar aos colegas. Questionado ainda se poderia ter feito de outro modo, o mesmo aluno respondeu que poderia "ter começado pela box 5 e depois ir tirando", fazendo deste modo referência à possibilidade de ter seguido a estratégia 3.

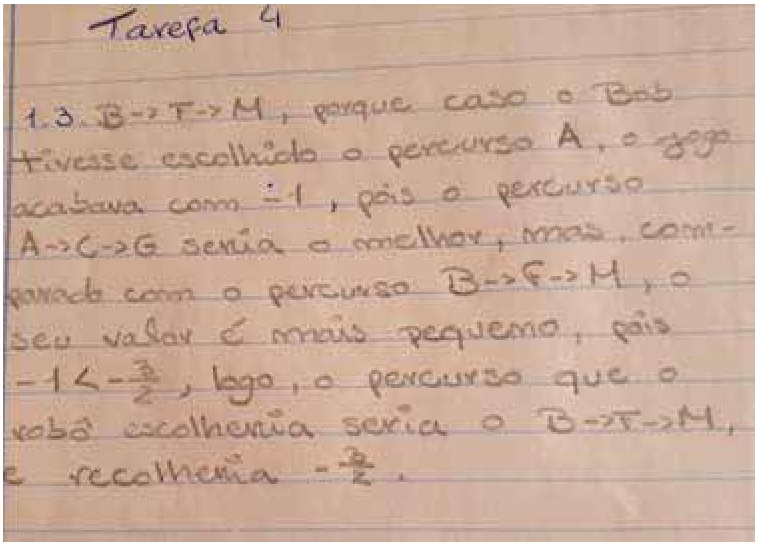
Após esta discussão, passou-se à questão 2. A professora questionou os alunos sobre alguns termos para facilitá-los na interpretação do que se pedia: "Fala em percursos, o que quer dizer?"; "Tem opções diferentes?"; "Se a Alice for pelo B que opções tem?" Teve também necessidade de questionar os alunos sobre relações de ordem entre dois números racionais: "Vamos pensar qual o maior valor (-3/2) ou (-5/4)? Vamos lá pensar em frações equivalentes. Vocês sugeriram reduzir ao mesmo denominador".

De seguida a professora questionou os alunos de modo a ajudá-los a compreender o que estava em causa no estabelecimento dos caminhos:

> *Prof.ª – Será que o percurso está correto? Será que é o único percurso? Gostava que pensassem mais um bocadinho. E se fosse o Bernardo a escolher primeiro? Vou-vos dar 5min para pensarem.*

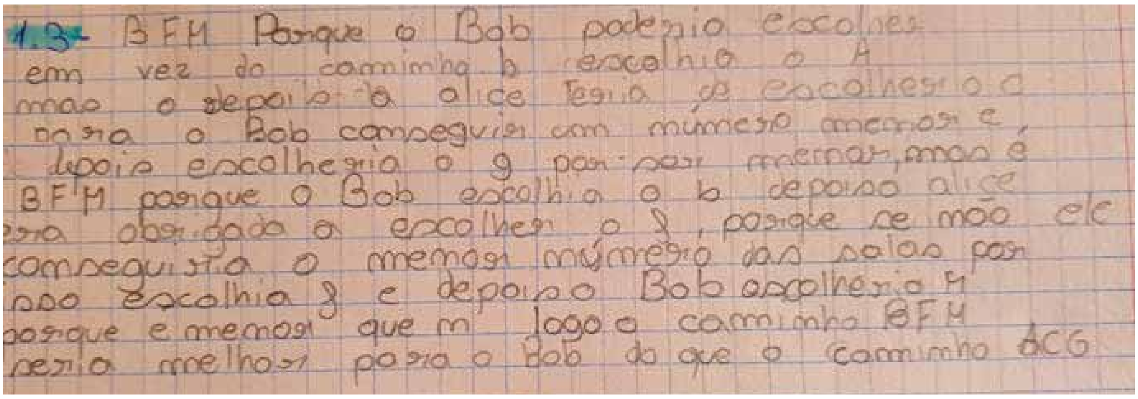
Dado o adiantado da hora, não foi possível terminar a discussão da tarefa. A professora pediu para que em casa escrevessem numa folha à parte a explicação do melhor percurso de Bernardo. Apresentam-se duas resoluções elaboradas por dois alunos diferentes para a questão 3 (figura 27).

Figura 27. Resoluções da questão 3 de dois alunos



Tarefa 4

1.3. B->F->M, porque caso o Bob tivesse escolhido o percurso A, o jogo acabava com -1, pois o percurso A->C->G seria o melhor, mas, comparado com o percurso B->F->M, o seu valor é mais pequeno, pois $-1 < -\frac{3}{2}$, logo, o percurso que o robô escolheria seria o B->F->M, e recolheria $-\frac{3}{2}$.



1.3- BFM Porque o Bob poderia escolher em vez do caminho b escolhia o A mas o depois a alice teria de escolher o c para o Bob conseguir um número menor e, depois escolheria o g para ser menor, mas é BFM porque o Bob escolhia o b depois a alice era obrigada a escolher o f, porque se não ele conseguiria o menor número das salas por isso escolhia f e depois o Bob escolheria M porque é menor que m logo o caminho BFM seria melhor para o Bob do que o caminho ACG

Ambas as resoluções estão bem explicadas para alunos do 7.º ano. É de fazer notar que na primeira resolução, o aluno troca o sinal da relação de ordem, mas explica bem em linguagem natural. Nestas duas resoluções são evidenciados subtópicos do pensamento computacional: Abstração, Decomposição, Depuração.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

A descrição anteriormente apresentada evidencia que a turma em causa é bastante heterogénea quanto ao desempenho matemático dos alunos. Em particular, e no que às aprendizagens matemáticas diz respeito apresentamos, de seguida, algumas conclusões possíveis.

Conteúdos matemáticos

Quanto à representação e ordenação de números racionais, os alunos foram sendo capazes de dar resposta às questões que lhes foram colocadas. Em particular, após o cálculo do valor de cada coluna, ordenaram essas quantidades para poderem responder à questão 1. Contudo, foi diverso o desempenho dos alunos ao adicionarem números racionais, revelando alguns deles ainda bastantes dificuldades. Este foi aliás o balanço feito pela professora, quando afirma que:

> *(…) foi percetível que não dominavam a adição de números racionais, nomeadamente, quando trabalhavam com frações com denominadores diferentes, ou com a adição de números inteiros com frações. Muitos mostraram desconhecer o valor de uma fração cujo numerador é igual ao denominador. Mais do que um aluno não reconheceu que 2/2 corresponde à unidade. Estas dificuldades podem não estar relacionadas com o facto de se estar a trabalhar com a adição de números positivos ou negativos (muitos ao longo do processo refugiaram-se na exploração da reta numérica), mas com o conhecimento de como se adicionam frações e/ou números inteiros com frações bem como da unidade.*

Segundo a professora, parece que as dificuldades evidenciadas não estão apenas diretamente relacionadas com a adição e subtração de números racionais, subtema matemático recentemente trabalhado pela primeira vez por estes alunos, mas também de conhecimentos que se esperaria mais consolidados pois advêm de aprendizagens de anos anteriores. Estas dificuldades de cálculo poderão explicar o período de tempo que levaram a determinar o valor das expressões numéricas, que foi muito para além do considerado na planificação, como assinala a professora: "De referir ainda que a maioria dos alunos estiveram entre cálculos mais de 50 minutos e que mesmo assim não conseguiram chegar corretamente aos valores de todas as boxes".

Capacidades matemáticas transversais

Alguns subtópicos/práticas do pensamento computacional estiveram presentes e foram postos em prática por alguns alunos na resolução da tarefa. A questão 1 apelava para o reconhecimento de padrões levando ao desenvolvimento da estratégia 2 que simplificava de forma significativa os cálculos a realizar. Um grupo de três alunos foi capaz de reconhecer esse padrão, sem qualquer pista dada pelo professor. Os restantes alunos da turma não o detetaram, mas pode ser que esta tarefa os tenha alertado para outras situações similares que lhes venham a aparecer no futuro. As questões 2 e 3 faziam apelo respetivamente à abstração, através da recolha de informação essencial no enunciado da tarefa, à decomposição, presente na análise de cada caminho, considerando-o por partes, e por último à depuração, para o caso da deteção de erros e da sua correção. A figura 27 ilustra como alguns alunos foram capazes de pôr em uso cada uma destas práticas do pensamento computacional. Contudo, a abstração requereu uma ação intencional do professor para que, através do questionamento, os alunos conseguissem extrair a informação mais relevante.

As representações matemáticas e respetivas conversões foram usadas pelos alunos: a linguagem natural essencialmente utilizada nas questões 2 e 3 e as representações fracionária e decimal na questão 1. É de destacar, pela positiva, o que alguns alunos fizeram para simplificar os seus cálculos, convertendo todos os valores representados em fração para a sua representação decimal. Tal decisão permitiu-lhes facilitar os cálculos uma vez que todos eles eram dízimas finitas, opção tomada pela professora na planificação, como fez questão de salientar:

> *O aluno que não estava a trabalhar em grupo chegou corretamente aos valores das colunas, convertendo todos os números representados sob a forma de fração em dízimas, dado que os valores apresentados eram apenas dízimas finitas. Este, também se mostrou um processo eficaz, referido pelo aluno na discussão coletiva e que foi aproveitado por mim para mostrar outras representações matemáticas.*

A comunicação matemática foi outra capacidade matemática transversal a que a resolução da tarefa fez apelo. Os alunos tiveram que expressar as suas ideias e defendê-las sobretudo na discussão com toda a turma, em particular na questão 2. Contudo, uma discussão mais alargada no tempo poderia ter envolvido mais alunos e, deste modo, ter contribuído para um melhor desenvolvimento desta capacidade.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Desde logo o facto de a maioria dos alunos ter trabalhado em grupo exigiu deles a capacidade de trabalhar em equipa. Isso foi notório desde logo nos grupos que seguiram a estratégia 1, que os levou a dividir as tarefas entre eles. Não foi evidenciado, contudo, troca/discussão de ideias durante o trabalho autónomo, aspeto que certamente terá de ser melhorado ao longo do ano.

A falta de uma discussão em torno das ideias que tenham surgido entre alunos de um mesmo grupo de trabalho poderá ter minimizado a oportunidade do desenvolvimento do seu pensamento crítico. Contudo, durante a discussão com toda a turma, houve momentos em que a professora solicitou a apresentação de argumentos, a tomada de posições fundamentadas e a avaliação do impacto das suas decisões, como foi o caso da comparação entre as estratégias 1 e 2 na resolução da questão 1.

Tarefa — Construção de quadriláteros a partir a diagonal

Enunciado da tarefa

Construção de quadriláteros a partir a diagonal

1. Considera [AB] uma das diagonais do quadrado. Recorre à apliqueta **MEWT GYYB** e constrói esse quadrado.

   Refere as propriedades (das diagonais e das isometrias) que mobilizaste na tua construção.

2. Considera [AB] uma das diagonais de um paralelogramo. Recorre à apliqueta **RV7W X6G2** e constrói um paralelogramo que possa ter [AB] como uma diagonal.

   Refere as propriedades (das diagonais e das isometrias) que mobilizaste na tua construção.

Nota: Novos botões nas apliquetas do Geogebra

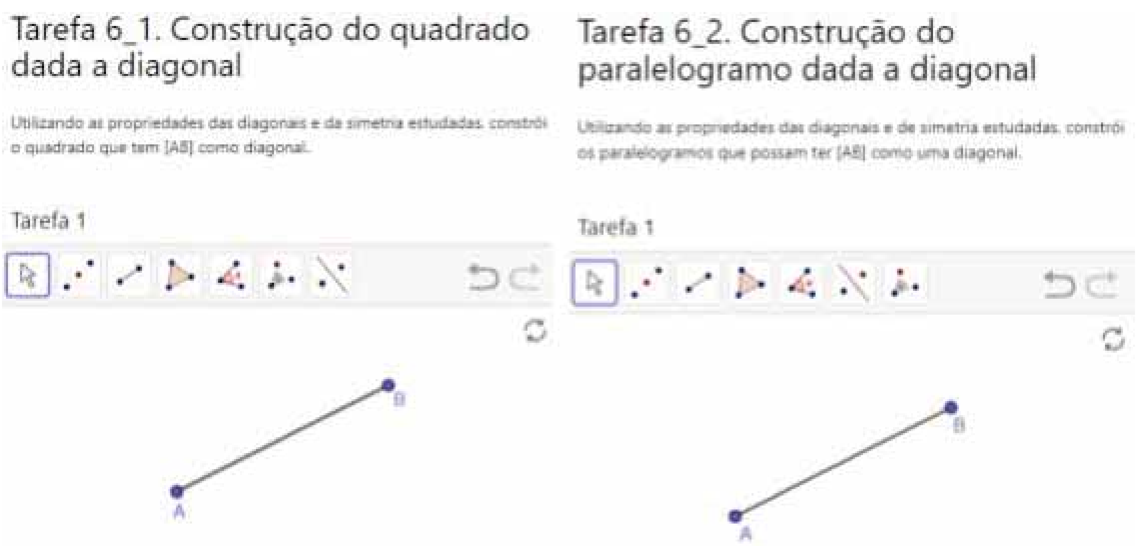
Ponto Médio ou Centro

Reflexão em relação a um Eixo

Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)

Nota: Para criar uma tarefa matemática semelhante a esta (com outros códigos), deve usar a sua conta do GeoGebra e aceder às atividades que as sustentam, por exemplo, em https://www.geogebra.org/m/jexhfhfv#material/jhb64cpp. Para criar uma tarefa a partir desta atividade deve usar o botão "Atribuir", no canto superior direito.

Figura 28. Apliquetas do Geogebra postas às disposição dos alunos para a resolução das questões 1 e 2



Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 7.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nas crianças dos conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Figuras planas	Propriedades das diagonais de um quadrilátero
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégias
	Raciocínio matemático	Justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Perseverança Autorregulação
	Pensamento criativo	Criatividade

Objetivos de aprendizagem

Com o desenvolvimento desta tarefa pretende-se que as crianças sejam capazes de:

- Descrever as propriedades das diagonais de um quadrilátero e aplicá-las para resolver problemas;
- Referir as propriedades e procedimentos das simetrias e aplicá-las para resolver problemas;
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas e aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia;
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica;
- Comunicar matematicamente articulando as propriedades dos quadriláteros com a sua visualização;
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las;
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa;
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Disponibilizar as apliquetas previamente construídas pelo professor e preparar a aplicação para que as resoluções dos alunos possam ser projetadas durante a discussão coletiva.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

Dado que as diagonais do quadrado se bissetam, os alunos devem começar por marcar o ponto médio do segmento de reta já desenhado na apliqueta do Geogebra fornecida. De seguida, dado que as diagonais são perpendiculares entre si, com centro no ponto médio, rodam -90° um dos pontos extremidade do segmento de reta dado, marcando o ponto imagem obtido a partir da rotação realizada. Repetem o processo com o outro ponto extremidade do segmento de reta e por fim ligam os quatro pontos , obtendo o quadrado que tem por uma diagonal o segmento de reta de onde se partiu.

Uma outra possibilidade é a de fazer uma rotação de 90° da diagonal dada, com centro no ponto médio, sendo a imagem obtida a outra diagonal do quadrado. De seguida, ligam-se os quatro extremos dos dois segmentos de reta, obtendo o quadrado que tem por uma diagonal o segmento de reta de onde se partiu.

Questão 2

Dado que as diagonais de um paralelogramo se bissetam, os alunos devem começar por marcar o ponto médio do segmento de reta já desenhado na apliqueta do Geogebra fornecida. De seguida, desenham um segmento de reta com a medida de comprimento que desejarem em que um dos seus pontos extremidades coincide com um dos pontos extremidades do segmento de reta, dado que é uma das diagonais do paralelogramo a construir. Depois, aplicam ao outro ponto extremidade do segmento de reta que desenharam uma rotação de 180°, de centro no ponto médio do segmento de reta dado, ou fazem uma reflexão cujo eixo é a reta que contém o segmento de reta que é diagonal do paralelogramo. Por fim, ligam os quatros pontos, obtendo um paralelogramo que tem por diagonal o segmento de reta dado. Ao contrário do caso do quadrado, a solução não é única. Existem infinitos paralelogramos que têm por uma das diagonais o segmento de reta de onde se partiu.

Caso particular

Uma possível extensão da tarefa é pedir aos alunos que construam o paralelogramo que é um retângulo. Neste caso, as diagonais não só se bissetam como são congruentes (têm a mesma medida de comprimento). Assim, após marcarem o ponto médio do segmento de reta dado, rodam um dos seus pontos extremidade com centro no ponto médio marcado e uma qualquer amplitude. De seguida, rodam 180º o ponto anteriormente obtido com centro ainda no ponto médio do segmento de reta dado. Finalmente, ligam os quatros pontos, obtendo o retângulo que tem por uma das diagonais o segmento de reta de onde se partiu.

Exploração da tarefa

A exploração desta tarefa é pensada considerando que é antecedida por algumas aulas onde os alunos foram incentivados a explorar propriedades de quadriláteros e a classificá-los, com o recurso a apliquetas do Geogebra.

Os alunos terão de criar uma conta no portal do GeoGebra. Para aceder às apliquetas previamente preparadas pelo professor, é necessário que forneça aos alunos um código com oito caracteres, como o que se encontra no enunciado da tarefa. Os alunos selecionam na barra lateral esquerda do portal do GeoGebra o comando Tarefas, colocam o código, e, ao clicar em "JUNTAR", surge um novo quadro com a sua identificação. Ao selecionarem "INÍCIO" têm acesso imediato à tarefa.

Para os alunos que resolverem a tarefa rapidamente e sem dificuldades assinaláveis, a questão 2 poderá ser ampliada para o caso do retângulo.

Apresentação da tarefa

O professor explica que a sua exploração será feita em dois momentos. Num primeiro momento, a resolução focar-se-á na questão 1. O professor distribuirá o enunciado da tarefa, não devendo dar qualquer indicação, deixando os alunos decidirem como construir o quadrado a partir da diagonal dada e aplicando as suas propriedades no caso deste quadrilátero. Contudo, poderá questionar os alunos de modo a perceber se compreendem o que lhes é pedido. Tempo previsto 5 minuntos.

Trabalho autónomo

O professor deve propor que os alunos trabalhem em pares. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 15 minuntos.

Discussão com toda a turma

Os alunos serão solicitados para que expliquem como procederam e justifiquem a adequação da estratégia seguida. Em particular, deverá ser promovida uma discussão sobre as propriedades utilizadas e que outras poderiam ser utilizadas se tivessem outros botões disponíveis nas apliquetas. Tempo previsto 15min.

No segundo momento, os alunos irão resolver a questão 2, em **trabalho autónomo**. O professor deverá ir incentivando os alunos a justificarem a estratégia seguida. Tempo previsto 20min.

Seguir-se-á uma **discussão com toda a turma**, em que o professor solicitará a justificação de como os alunos procederam baseada nas propriedades das diagonais e nas operações que efetuaram, proporcionando o confronto entre diferentes estratégias, que possivelmente irão surgir. Em particular, deverão ser discutidas as propriedades utilizadas na construção do paralelogramo e o que seria necessário fazer no caso particular do paralelogramo ser um retângulo. Tempo previsto 25min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Não usar as propriedades das diagonais, mas sim tentar desenhar uma figura que seja um quadrado.	Se movimentares a tua figura continua a ser um quadrado? Verifica. Quais as indicações que te são dadas no enunciado? Seguiste estas indicações?
Não ter presente as propriedades das diagonais de um quadrado.	Consulta o teu caderno e relembra as propriedades das diagonais de um quadrado. De que modo estas propriedades te podem ser úteis para desenhares o quadrado?
Utilizar as propriedades das diagonais de um quadrado.	Desenha um quadrado no teu caderno. O que sabes dizer sobre as diagonais de um quadrado? Sabes que as diagonais de um quadrado bissetam-se. O que quer isso dizer? Como podes usar esta informação para resolveres a questão 1?
Usar de forma adequada os novos comandos do Geogebra, muito em particular o que respeita à marcação do ângulo de rotação.	Não apagar o símbolo do grau pois caso contrário a rotação não será executada.
Não ter presente as propriedades das diagonais de um paralelogramo.	Consulta o teu caderno e relembra as propriedades das diagonais de um paralelogramo. De que modo estas propriedades te podem ser úteis para desenhares o paralelogramo?
Não ter presente o que acontece quando se reflete em relação a um eixo.	O que acontece quando refletes em relação a um eixo um segmento de reta? Qual o eixo? Qual o segmento de reta?
Identificar qual a amplitude da rotação que interessa fazer.	De quanto deves rodar o ponto? Qual a propriedade da diagonal que deve ser verificada?

Concretização da tarefa na prática

O que a seguir se segue resultou da exploração da tarefa **"Construção de quadriláteros a partir a diagonal"** numa das turmas que anteciparam as novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para 7.º ano de escolaridade no ano letivo de 2021/22. Esta aula realizou-se em fevereiro de 2022. Os alunos já estavam habituados a trabalhar com apliquetas do Geogebra no seu *smartphone*. O estudo dos quadriláteros, suas propriedades e classificação, já tinha sido anteriormente realizado.

Não houve indicação explícita da professora sobre o modo como os alunos se iriam organizar, pelo que o seu trabalho aconteceu tal como estavam sentados na sala, em pares na sua grande parte.

Apresentação da tarefa

A professora distribuiu uma folha com o enunciado da tarefa. De forma a garantir a apropriação da tarefa pelos alunos, a professora indicou de forma muito sucinta o que tinham de fazer e procurou perceber se os alunos entendiam a última frase de cada questão:

> *Prof.ª – Têm estado a trabalhar com as apliquetas do Geogebra. Vocês já estão mestres nas apliquetas. Já sabem entrar. O que é que eu pretendo? Que vocês construam alguns quadriláteros mediante algumas condições e utilizem algumas das propriedades que nós já falámos noutras aulas e noutras tarefas. Está bem? Entendido? Antes de avançarem para a tarefa propriamente dita eu gostava que vocês lessem o terceiro parágrafo da questão 1: "Refere" leiam lá "Refere as propriedades (das diagonais e das isometrias) que mobilizaste na tua construção". Vocês sabem o que isto quer dizer? Não? Ou seja vocês têm de referir, de indicar, as propriedades que utilizaram para construir o quadrilátero pedido, está bem? Nós vamos circulando para vos ir apoiando. Vamos lá tirar. Tirar os telemóveis…*

A apresentação da tarefa pela professora e o cuidado que teve em verificar se a última frase era compreensível não pareceu ter sido suficiente para todos os alunos. Uma aluna perguntou à professora o que queria dizer a última frase:

> *A – Nós temos que fazer o quê?*
>
> *Prof.ª: Então vamos lá ver. O que sabes sobre as diagonais de um quadrado?*
>
> *A – As diagonais de um quadrado cruzam-se.*
>
> *Prof.ª – Em que ponto?*
>
> *A – No ponto médio.*
>
> *Prof.ª – No ponto médio. Vê lá onde se encontra o ponto médio.*
>
> *A – É aquele dos três pontinhos.*
>
> *Prof.ª – Exatamente.*

A – Ponho assim.

Prof.ª – Exatamente. Já tens aí o ponto médio.

Trabalho autónomo

Todos alunos começaram a pegar nos seus *smartphones* e a abrir a apliqueta indicada no enunciado da tarefa na questão 1. De início houve alunos que colocaram à professora algumas dúvidas. É o caso de um aluno que apresentou dificuldades em arrancar com a resolução da questão 1. A professora sugeriu-lhe que desenhasse um quadrado no seu caderno de modo a ajudá-lo a pensar sobre este quadrilátero:

> *Prof.ª – Então vamos pensar. Pensa nas duas diagonais de um quadrado. Aonde é que elas se intersetam?*
>
> *[O aluno não responde.]*
>
> *Prof.ª – Desenha um quadrado.*
>
> *A – No ponto médio.*
>
> *Prof.ª – Já tens o ponto médio. Agora se eu quiser uma imagem.*
>
> *A – Rodo 90º.*
>
> *Prof.ª – Muito bem Então como é que eu vou fazer isso?*
>
> *A – Vou fazer uma rotação.*
>
> *Prof.ª – Qual é o botão da rotação?*
>
> *A – Este.*
>
> *Prof.ª – Então queres fazer rodar este vértice. Seleciona. Agora o centro de rotação.*

Este tipo de ação da professora foi replicado noutro par de alunos:

> *Prof.ª –Desenhem lá as diagonais. As diagonais têm uma propriedade. Se eu as desenhasse o que acontecia?*
>
> *[As alunas desenham um quadrado no seu caderno.]*
>
> *Prof.ª –Desenha as duas diagonais.*
>
> *[A aluna não faz nada.]*
>
> *Prof.ª –O que são diagonais? Liga daqui aqui (aponta para dois vértices opostos).*
>
> *A – Ah, é isso!*
>
> *Prof.ª –Aonde se cruzam?*
>
> *A – No ponto médio.*

Prof.ª –Sim, então têm de começar a marcar o ponto médio.

A – Temos de rodar 90º.

Prof.ª –Então vamos selecionar primeiro o ponto A. Depois o centro. Com esta setinha porque não se pode apagar o grau. Escreves 90º e agora já podes apagar os 45º. Isso.

A – Bissetam-se.

Prof.ª – Adorei essa palavra! Bissetam-se quer dizer que se cruzam no ponto?

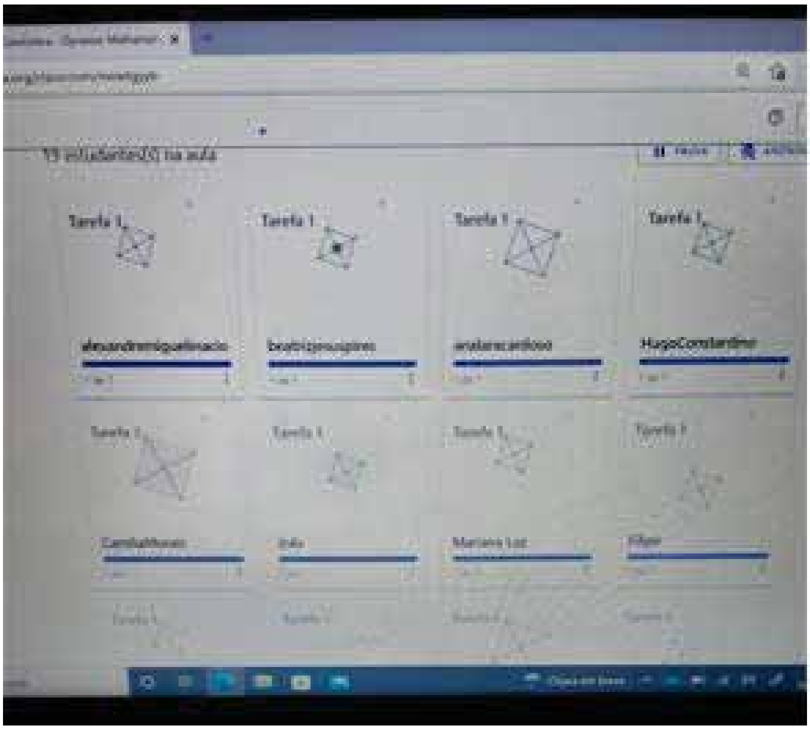
A – Médio.

Prof.ª – Isso, sem medo! Então vê lá como marcar o ponto médio.

É de fazer notar que nesta aula foram incluídos três novos comandos do Geogebra: ponto médio ou centro, reflexão em relação a um eixo e rotação (objeto, centro, amplitude), pelo que é natural que tivessem surgido algumas dificuldades técnicas por parte dos alunos. Prevendo que a introdução do valor da amplitude do ângulo de rotação poderia levantar dificuldades técnicas a mais alunos, a professora alertou a turma para o modo como deveriam introduzir o ângulo de rotação: "Não apaguem o símbolo do grau senão não conseguem fazer a rotação".

A professora tinha aberta a aplicação Tarefas do GeoGebra (figura 29) que lhe permitia ir acompanhando o que os alunos iam produzindo e ter uma ideia geral das suas dificuldades, mesmo quando não solicitada:

Figura 29. Informação disponível na aplicação *Tarefas do GeoGebra*

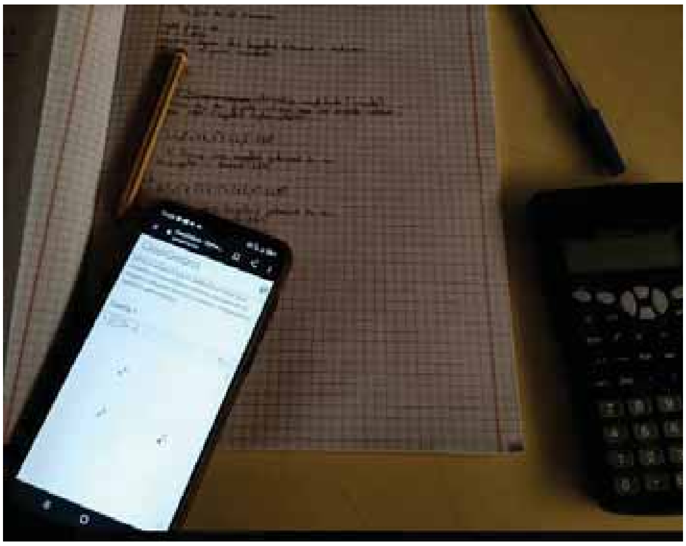


Em caso de dúvida, poderia mover as figuras para perceber se a construção foi feita de forma adequada. Tal é o caso de um par de alunos que tinham traçado um segmento de reta e desenhado uma figura "a olho" que parecia ser um quadrado. De modo a manter o desafio cognitivo e a autonomia dos alunos, a professora pediu clarificações e colocou-lhe questões, de modo a levá-los a entender que a estratégia seguida não era adequada. Deu-lhes ainda a indicação que deveriam seguir outra estratégia:

> *Prof.ª – Mas como desenhaste esse quadrado? Explica-me lá. Então se eu mexer aqui o que acontece? Fica um quadrado sempre?*
>
> *A – Não.*
>
> *Prof.ª – Eu quero é que desenhes uma figura que se eu mexer não fique outra coisa que não seja um quadrado. Não é chegar aí e desenhar os segmentos todos.*

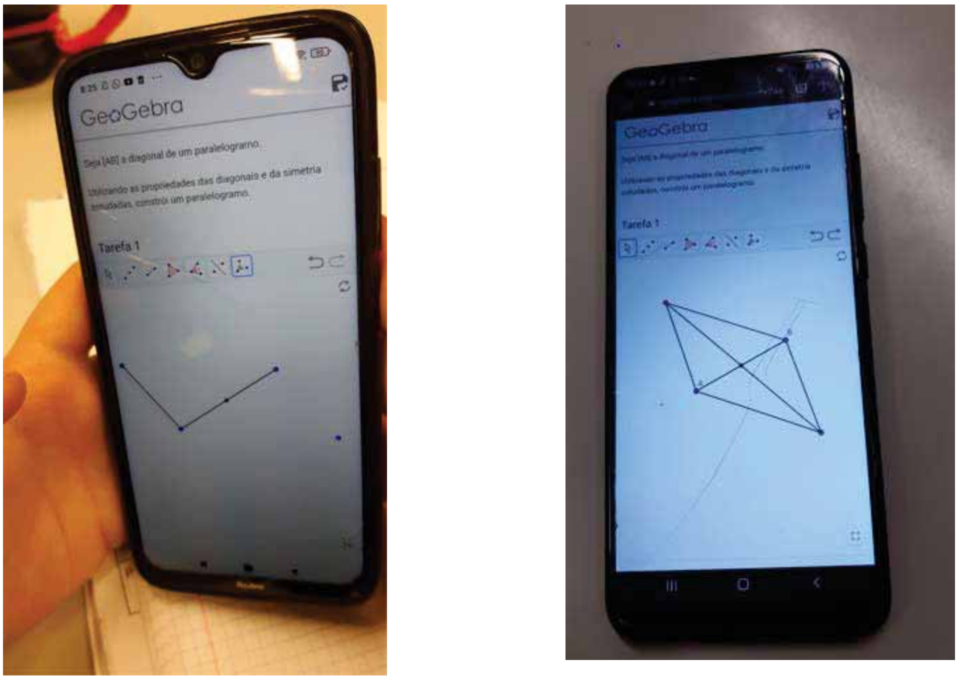
Contudo, na sua globalidade, construíram o quadrado seguindo a estratégia esperada.

Figura 30. Resolução da questão 1. por um par de alunos



A construção do paralelogramo levantou mais dificuldades aos alunos, embora alguns pares tivessem conseguido fazê-lo (figura 31).

Figura 31. Resolução da questão 2. por dois pares de alunos



Contudo, a sua justificação foi de facto o principal problema que a grande parte dos alunos evidenciou, como é ilustrado no seguinte excerto em que as alunas não foram capazes de justificar o procedimento correto que aplicaram:

A – Rodámos de 180º.

Prof.ª – Porquê 180º?

A – Porque depois não dá para mexer? Para ficar bem?

Prof.ª – Porquê 180º e não 100º, por exemplo?

A – Porque é a rotação do paralelogramo.

Prof.ª – Estão a rodar o paralelogramo? O que vocês fizeram foi rodar o paralelogramo?

A – Não sei explicar!

Prof.ª – O que é que vocês sabem sobre as diagonais de um paralelogramo?

Noutro caso, a explicação de como tinham procedido foi feita, mas a relação de cada passo com as propriedades das diagonais levantou dificuldades aos alunos:

Prof.ª – Expliquem lá o que fizeram.

A – Então, nós fomos ao ponto médio.

Prof.ª – Porquê ao ponto médio?

A – Porque acho que dá para bissetar se fizermos assim [com o dedo faz o movimento de desenhar a diagonal que falta]. Depois colocámos um ponto, foi um ponto que nós próprias colocámos para fazer uma parte da figura.

Prof.ª – Marcaram um ponto e depois um segmento de reta, é isso?

A – Sim. Qual foi o ponto que desenharam?

[Aluna aponta para o ponto.]

Prof.ª – OK.

A – Depois pegámos no ponto e no ponto médio e colocámos 180.

Prof.ª – 180?

A – Sim, 180º. É a rotação para a figura ficar igual. E deu-nos este ponto. Depois unimos todos os pontos e deu o paralelogramo.

Prof.ª – Então as propriedades das diagonais do paralelogramo que usaram quais foram?

A – O ponto médio.

Prof.ª – O ponto médio não é uma propriedade das diagonais. Que propriedade da diagonal estou a pensar quando fui marcar o ponto médio?

[Silêncio]

Prof.ª – Tu estás a pensar bem, estás é a explicar-te mal.

[Silêncio]

Prof.ª – Que propriedades das diagonais do paralelogramo foste usar?

[Silêncio]

Prof.ª – O que sabemos sobre as propriedades de um paralelogramo?

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

A discussão em grande grupo desta tarefa aconteceu apenas na aula seguinte porque a aula iniciou-se com a conclusão do trabalho ainda em curso, fazendo com que não houvesse tempo para a sua discussão.

A professora, tendo-se apercebido da dificuldade dos alunos associarem as suas construções às propriedades das diagonais dos quadriláteros desenhados, procurou não só recordar a tarefa da aula anterior como estabelecer conexões de forma explícita com aprendizagens anteriores. Assim, começou por pedir aos alunos que lhe recordassem o que tinham feito na tarefa da aula anterior:

Prof.ª – Quem é capaz de me dizer o que foi ontem proposto na tarefa?

A – [Lendo o sumário da aula passada] Fomos construir quadriláteros a partir das propriedades das diagonais.

Prof.ª – Hum, o sumário é sempre orientador!

A – Usando o Geogebra.

Prof.ª – Muito bem. Tendo a diagonal construir alguns quadriláteros. Certo? Muitos de vocês conseguiram construir os quadriláteros solicitados, no entanto tiveram alguma dificuldade quando tiveram de concretizar, quando tiveram de identificar as propriedades que tinham de mobilizar para a construção.

Foi questionando os alunos sobre o significado das propriedades e registando no quadro as propriedades relativas ao quadrado (figura 32):

Prof.ª –Então vamos lá recordar as propriedades que *estudámos*, creio que foi na tar*efa 2. Que propriedades das diagonais dos quadriláteros analisámos?*

A: Bissetam-se.

Prof.ª –Primeiro, bissetam-se. É um palavrão, não é? Vocês sabem o que quer dizer bissetarem-se?

A – Cruzam-se.

Prof.ª –Mas cruzam-se assim em qualquer ponto?

A – No ponto médio.

Prof.ª –Ah! No ponto médio. Cruzam-se ali a meio das diagonais. Bissetam-se. [Regista no quadro "Bissetam-se"]. Mais? Outras propriedades que foram vistas?

A – Nem todos têm diagonais com o mesmo comprimento.

Prof.ª –Diagonais com o mesmo comprimento. Até podemos chamar diagonais congruentes, não é? [Volta a registar no quadro]. Mais? Só isto? Ninguém se lembra de nada?

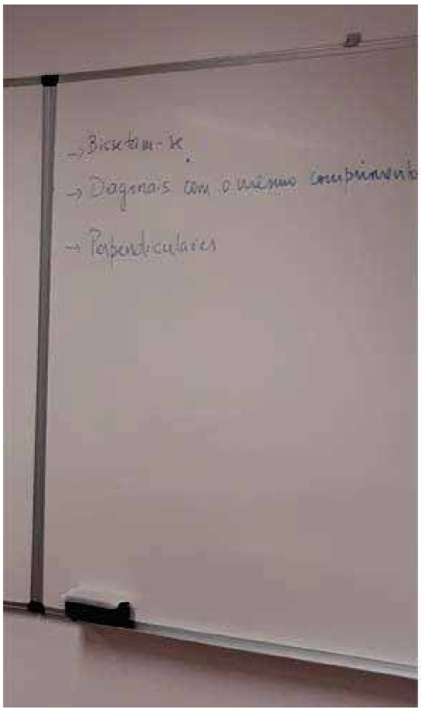
A – Nem em todos são perpendiculares.

Prof.ª –Nem em todos são perpendiculares. Então, outra característica é poderem ser perpendiculares, certo? O que é isto de serem perpendiculares?

A – Fazem ângulos de 90º.

Prof.ª –Fazem ângulos de 90º. OK. Então temos mais ou menos todas as propriedades das diagonais ali no quadro. Agora gostava de explorar convosco o que fizeram ontem. Quem quer aqui vir mostrar como construíram o quadrado?

Figura 32. Registos no quadro durante a discussão coletiva



De seguida, a professora pediu a uma aluna que fosse ao quadro resolver a questão 1., usando a projeção no quadro da apliqueta do Geogebra para a construção do quadrado fornecida aos alunos. Frequentemente solicitou a justificação de cada passo da resolução que a aluna foi produzindo:

Prof.ª –Então o que começaste por fazer?

A1 – Marquei o ponto médio.

Prof.ª –Então força.

[Recorrendo aos comandos do Geogebra, marca o ponto médio do segmento de reta já desenhado na apliqueta]

Prof.ª – Porque decidiste construir o ponto médio e não outro ponto qualquer?

A1 – Para poder fazer rodar de 90º.

Prof.ª –Então qual foi a propriedade das diagonais que utilizaste aí?

A1 – O serem perpendiculares.

Prof.ª –O serem perpendiculares… Vamos lá ver. Será que não consigo desenhar uma reta perpendicular a esta que não passe pelo ponto médio? Será que é a perpendicularidade?

A1 – Não.

Prof.ª –Não, então qual é que será?

A1 – Bissetarem-se.

Prof.ª –O que quer dizer bissetarem-se? Vocês há bocado disseram muito bem o que era.

A1 – Tocam-se no ponto médio.

Prof.ª –Tocam-se no ponto médio, só que são diagonais que têm uma característica particular no quadrado. Qual é?

A2 – Têm o mesmo tamanho.

Prof.ª –Têm o mesmo tamanho e para além disso?

A3 – São perpendiculares.

Prof.ª –Muito bem. É a perpendicularidade que poderás vir a usar a seguir na construção do quadrado. Então como continuaste a construir o quadrado?

De forma a aprofundar a discussão, foi questionando a aluna, onde incluiu a turma no seu geral, sobre as opções que foi tomando. Este foi, por exemplo, o caso da amplitude de 90º para a rotação:

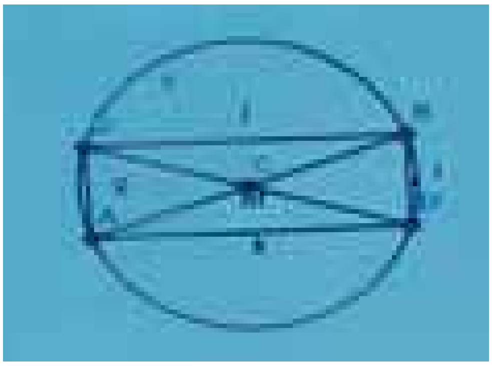
Prof.ª – Por que é que selecionaste 90º e não 40º ou 30º?

A – Porque para desenhar um quadrado as diagonais têm de ser perpendiculares.

Mas a justificação oral não foi considerada suficiente pela professora. Reconhecendo que a comunicação escrita é ainda uma dificuldade para muitos alunos, foi solicitando-lhes propostas de frases para registo escrito no caderno.

A discussão da questão 2., seguiu a mesma linha de ação e focos semelhantes. É, contudo, de assinalar que surgiu uma resolução não esperada de um aluno para a construção de um retângulo: o aluno obteve o ponto D como a rotação do ponto A com centro em C (com uma amplitude à sua escolha), garantindo que os segmentos [AC] e [CD] são congruentes, pelo que as diagonais também são congruentes. Na apresentação à turma desta construção, o aluno refez a construção, agora recorrendo a uma circunferência, para obter o ponto D equidistante do centro relativamente ao ponto A (figura 33).

Figura 33. Construção realizada pelo aluno na apresentação à turma



Com esta construção, foi possível concluir-se que o arrastamento do ponto D sobre a circunferência, permite obter a família de retângulos que tem como diagonal o segmento de reta dado.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "**Construção de quadriláteros a partir a diagonal"** numa turma do 7.º ano de escolaridade no ano letivo de 2021/22, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A tarefa em análise é uma tarefa de aplicação dos conteúdos matemáticos já anteriormente estudados: as propriedades das diagonais de um quadrilátero. Contudo, esta aplicação requer o estabelecimento de relações entre uma compreensão aprofundada do significado de cada propriedade e as implicações que a propriedade determina no procedimento a seguir. Assim, não se trata de uma aplicação direta. Está-se a trabalhar numa situação nova para os alunos que não requer apenas a memorização e procedimentos sem conexões. Esta tarefa exige procedimentos com conexões, facto que levou a que se verificassem algumas dificuldades por parte dos alunos, como, aliás, foi reconhecido pela professora:

> No desenvolvimento da tarefa, surgiram dificuldades por parte dos alunos, *nomeadamente*, no que diz respeito à mobilização das propriedades que permitissem a construção de cada uma das figuras planas cuja diagonal era dada em cada uma das apliquetas.

Tais dificuldades surgiram em ambas as questões. Se é certo que a resolução da questão 1., a construção do quadrado, os alertou para o modo como deveriam pensar, o facto das

diagonais do paralelogramo apresentarem outras propriedades levou-os a novas interrogações.
As isometrias estudadas em anos anteriores não revelaram constituir dificuldades para os alunos.

Capacidades matemáticas transversais

Pelas características da tarefa podemos considerá-la como um problema. Para a sua resolução os alunos foram solicitados a interpretá-lo e a escolher estratégias que lhe permitissem resolvê-lo. Podemos afirmar que na sua grande maioria, com maior ou menor dificuldade, os alunos conseguiram construir os polígonos pretendidos.
O mesmo não será possível dizer no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular quanto ao processo de justificar. As justificações requeridas exigiam fazer apelo de uma dada propriedade do quadrilátero para explicar a adequação dos diversos procedimentos realizados. Esta foi de facto a maior dificuldade evidenciada pelos alunos, muito embora tenham revelado conhecer as propriedades no seu conjunto.
A comunicação oral, em particular a expressão de ideias e o uso de terminologia apropriada, revelou-se um desafio para os alunos, muitas vezes ultrapassado com o questionamento que a professora lhes foi fazendo. A comunicação escrita foi mais apoiada pela professora e surgiu sobretudo na fase da discussão em grande grupo.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Como já foi anteriormente referido, houve alunos que começaram a resolver a tarefa de forma incorreta (por ex. desenhando um quadrado "a olho"). Mas com o questionamento da professora foram capazes de compreender que a estratégia inicialmente seguida não era adequada e recomeçaram a resolução, sem desistirem. Pode-se assim afirmar que esta tarefa criou situações favoráveis ao desenvolvimento da perseverança e da autorregulação.
A natureza da tarefa proporcionou o aparecimento de estratégias pouco habituais na turma (família dos retângulos), muito embora não respondesse ao que era pedido (família dos paralelogramos), mas criando um momento rico de discussão coletiva.
O facto de esta tarefa ter sido trabalhada após uma sequência de outras tarefas que fizeram recurso também a apliquetas do Geogebra, trabalhadas nos seus *smartphones*, permitiu-lhes adquirir um grande à vontade no manuseamento do recurso, mesmo quando na tarefa surgiram ferramentas novas. As dificuldades que surgiram estão diretamente relacionadas com questões técnicas que foram rapidamente ultrapassadas por todos os alunos.

Outros comentários

Ao longo da aula descrita pode afirmar-se que todos os alunos estiveram envolvidos na realização da tarefa, não se observando conversas paralelas ou alunos sem trabalhar. Este facto toma particular significado se tivermos em linha de conta as características desta turma.

Ambas as opções tomadas – o uso de *smartphones* dos alunos e a indicação de apenas as ferramentas necessárias para a resolução da tarefa – parecem ter sido adequadas e facilitadoras para a resolução da tarefa. O uso dos *smartphones* dos alunos permitiu que a tarefa fosse realizada na sequência natural do andamento das aulas, sem necessidade de se ultrapassar possíveis constrangimentos por vezes existentes nas escolas, como seja horário disponível na(s) sala(s) com computadores. A indicação de apenas algumas ferramentas do Geogebra encaminhou os alunos a utilizarem-nas e eliminou as dificuldades inerentes à sua seleção, quando está disponível um amplo conjunto de ferramentas desconhecidas ou irrelevantes para a construção pretendida.

Tarefa — Simular para calcular

Enunciado da tarefa

Simular para calcular

Pretendemos proceder à simulação da experiência que consiste no lançamento de dois dados tetraédricos (faces numeradas de 1 a 4) e anotar a soma dos valores indicados nas faces viradas para baixo.

Para tal vamos usar as potencialidades da folha de cálculo e repetir a "experiência" umas centenas (ou milhares) de vezes…

Pretende-se determinar um valor da probabilidade da soma das duas faces que ficam voltadas para baixo.

Para tal, sugerimos que:

- uses duas colunas para a simulação de cada dado e uma outra para a soma das duas anteriores

  =ALEATÓRIAENTRE(1;10)

  A expressão anterior (a título de exemplo), devolve um número inteiro aleatório entre 1 e 10, inclusive

- procedas à simulação do lançamento dos 2 dados
- escrevas numa outra coluna todas as somas possíveis
- uses células de uma outra coluna para proceder à contagem de todas as somas encontradas

  =CONTAR.SE(C:C;1)

  A expressão anterior (a título de exemplo), conta o número de vezes que o valor "1" surge na coluna C

- determines a frequência relativa correspondente a cada uma das somas obtidas

De acordo com os dados obtidos na folha de cálculo, indica qual a probabilidade de:

1. a soma ser 6?
2. a soma ser 10?
3. a soma ser par?
4. a soma ser inferior a 9?

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 8.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	**Tópico**	**Subtópicos**
Conteúdos matemáticos	Probabilidades	Probabilidade frequencista
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento computacional	Abstração Decomposição Algoritmia
	Representações matemáticas	Conversões entre representações
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento Crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Saber científico, técnico e tecnológico	Saber tecnológico

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que, progressivamente, os alunos sejam capazes de:

- Estimar a probabilidade de acontecimentos utilizando a frequência relativa;
- Estimar a probabilidade de acontecimentos (teórica);
- Extrair a informação essencial de um problema;
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema;
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos;
- Desenvolver o pensamento crítico;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com os outros;
- Não desistir à primeira dificuldade, desenvolvendo a sua perseverança.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Smartphone ou computador.

Dados tetraédricos para permitir exemplificar a realização da experiência e concretizar a ocorrência de situações concretas.

Resoluções esperadas dos alunos

Com as ferramentas colocadas à disposição dos alunos, e tendo em conta a experiência do ano anterior na manipulação da folha de cálculo em *smartphones* ou computadores, é esperado que procedam como a seguir se indica para resolver as questões propostas.

Primeiro momento (manipulação da folha de cálculo)

Os alunos devem começar por identificar uma coluna da folha de cálculo com os registos do lançamento de um dos dados, recorrendo à fórmula exemplificada na tarefa, procedendo aos devidos ajustes, nomeadamente a alteração do valor 10 para o valor 4, uma vez que se pretende simular o lançamento de um dado tetraédrico. Poderão copiar a fórmula para as células abaixo da mesma coluna, para simular vários lançamentos, ou para deixar este processo para uma fase posterior.

Depois devem replicar o procedimento na coluna imediatamente à direita para simular o lançamento do segundo dado. Esta operação não implica qualquer alteração na fórmula.

Numa terceira coluna deve ser calculada a soma das duas células imediatamente à esquerda, ou seja, a soma dos valores obtidos em cada um dos dados, isto é, o resultado de cada ocorrência da experiência aleatória.

Finalmente os alunos devem identificar todos os valores possíveis para a soma dos valores de cada dado. Numa outra coluna, devem proceder à contagem de todas as somas identificadas (frequência absoluta), recorrendo à fórmula exemplificada na tarefa, procedendo às adaptações necessárias, bem como o número total de ocorrências.

A obtenção dos valores das frequências relativas a partir das frequências absolutas pode ser realizada na folha de cálculo ou nos registos convencionais (caderno) dos alunos. Na folha de cálculo espera-se que os alunos acrescentem uma nova coluna para o cálculo da frequência relativa, usando o quociente entre a frequência absoluta de cada uma das somas possíveis, anteriormente determinadas, e o número total de experiências realizadas, optando por apresentar o resultado na forma de percentagem, ou não.

Segundo momento (identificação da frequência relativa como medida de probabilidade)

Com as questões finais da tarefa pretende-se que os alunos possam dar significado aos valores obtidos a partir da simulação, no contexto descrito na tarefa proposta, aplicando os seus conhecimentos sobre probabilidade frequencista e estimação (teórica) da probabilidade de acontecimentos.

As questões 1 e 2 podem ser resolvidas com recurso direto às frequências relativas registadas anteriormente, a primeira por observação do valor associado à soma 6 e a segunda pela observação da impossibilidade da ocorrência da soma 10. Para a resolução da questão 3, os alunos devem identificar a frequência relativa de cada uma das somas pares e proceder à sua soma, enquanto que na questão 4 poderão apenas concluir que, tratando-se de um acontecimento certo, a probabilidade é 1 (ou 100%).

Exploração da tarefa

A exploração desta tarefa foi pensada considerando que no ano anterior os alunos trabalharam tarefas onde o recurso à folha de cálculo foi um elemento central. De igual modo, ao longo deste ano letivo o recurso à folha de cálculo aconteceu com alguma frequência, pelo que este ambiente tecnológico não é um elemento pouco familiar para os alunos.

Apresentação da tarefa

O professor deve salientar que são indicadas sugestões de expressões a usar na folha de cálculo (como exemplos), e simulará o lançamento de dois dados tetraédricos, como forma de exemplificar a experiência aleatória. Tempo previsto 10min.

Trabalho autónomo

Propõe-se que os alunos trabalhem em pares. Nesta fase, a resolução focar-se-á no trabalho com a folha de cálculo. O professor irá circulando pelos grupos, verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Deverá igualmente certificar-se que a folha de cálculo não é um constrangimento para o desenvolvimento da tarefa e, simultaneamente, que o significado das funções indicadas no enunciado da tarefa é claro para os alunos no contexto da situação que estão a estudar. Tempo previsto 60min.

Discussão com toda a turma

O professor solicitará a justificação de como os alunos procederam, valorizando a importância de realizar um número elevado de experiências para conseguir uma maior fiabilidade do valor da frequência relativa como uma medida aproximada da probabilidade teórica. Deverá igualmente ser discutida a importância das diferenças obtidas entre as frequências relativas, contribuindo para clarificar disparidades entre procedimentos algébricos e procedimentos experimentais. Tempo previsto 30min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	**Exemplos de possíveis ações do professor**
Digitação das fórmulas na folha de cálculo, nomeadamente erros de sintaxe.	Verifica se inseriste o sinal de '=' no início da fórmula. Observa com atenção se não te falta algum parêntesis ou se não colocaste ',' em vez de ';'.
Usar a folha de cálculo como documento de registo sem tirar partido da possibilidade de copiar/arrastar a fórmula para automatizar os cálculos.	Haverá uma forma mais rápida de conseguir fazer os cálculos? Consegues lembrar-te como fizemos nas outras vezes que usámos a folha de cálculo?
Compreender que cada linha da folha de cálculo representa uma ocorrência da experiência aleatória.	O que significa o valor da soma na primeira linha? Por que razão, por vezes, esse valor é maior do que 4? Como estariam os dados para obter o valor 2?
Identificar os valores possíveis para a soma das faces de cada dado	É possível obter qualquer valor para a soma? será possível obter 1? Qual é o valor mínimo? E máximo?
Atribuir o significado adequado ao comando de contagem.	Podemos contar "à mão" quantos 5 apareceram? Se fizermos a mesma fórmula para a coluna B, e o valor 5, qual será o valor que é dado pela fórmula?
Não compreender a correspondência entre a frequência relativa e a probabilidade.	Achas que o outro grupo encontrou os mesmos valores que os teus? As diferenças são importantes?
Não compreender a relevância do número de experiências analisadas ser muito grande.	E se tivéssemos analisado só as simulações do teu grupo, o resultado seria igual? Qual é o valor mais fiável?

Concretização da tarefa na prática

Numa das turmas, os alunos usaram exclusivamente o *smartphone* e na outra turma alguns alunos usaram o computador, não tendo sido observadas diferenças entre as duas alternativas, podendo afirmar-se que a escolha do instrumento tecnológico não foi relevante na resolução desta tarefa.

Os alunos trabalharam maioritariamente a pares, por sugestão dos professores.

Apresentação da tarefa

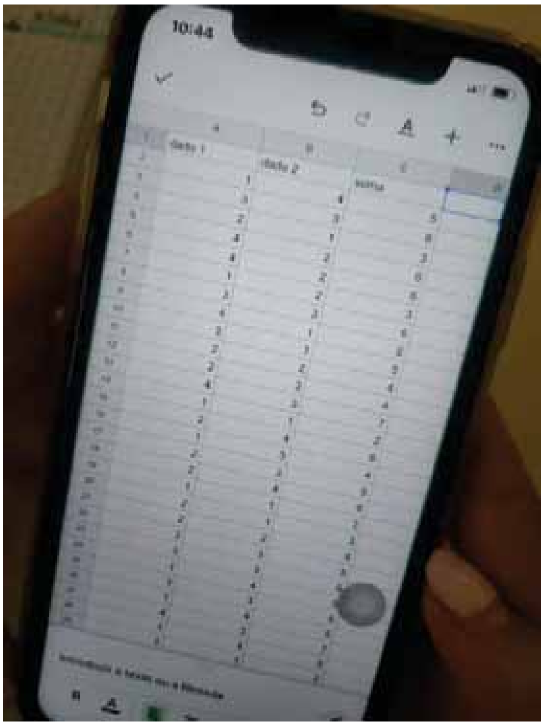
Os professores distribuíram uma folha com o enunciado da tarefa. De forma a garantir a compreensão da tarefa pelos alunos, mostraram ainda dados tetraédricos para permitir uma apropriação do contexto e da experiência aleatória que se pretendia simular na folha de cálculo.

Foi ainda realizada uma breve análise do enunciado no sentido de clarificar os objetivos da tarefa.

Trabalho autónomo

Os alunos começaram a trabalhar na folha de cálculo demonstrando alguma familiaridade com a ferramenta, e não evidenciando dificuldades na compreensão da situação proposta. A figura 34 ilustra o trabalho realizado por alunos.

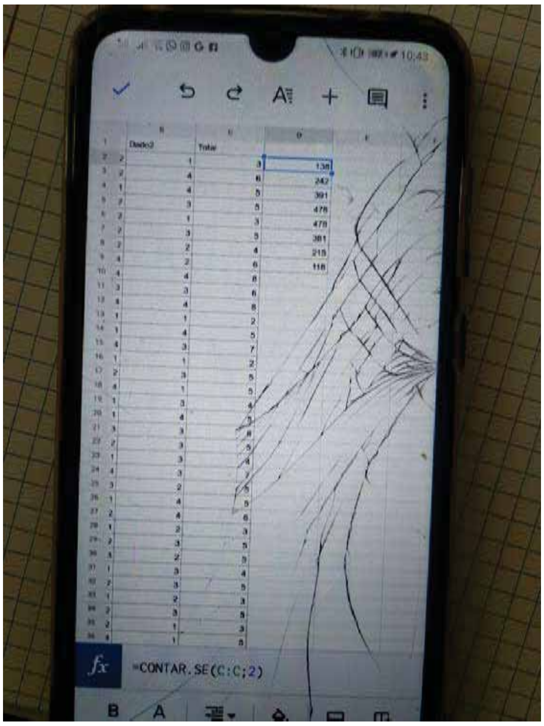
Figura 34. Resoluções de dois pares de alunos da primeira parte da tarefa



Nas duas turmas, alguns alunos solicitaram a ajuda dos professores para fazerem a contagem do número de ocorrências de cada soma, evidenciando uma compreensão clara do objetivo da tarefa, embora não tenham prestado a devida atenção à forma de contagem indicada no enunciado. Depois de terem sido alertados pelos professores para a existência de uma fórmula no enunciado da tarefa, a interpretação da sintaxe e o objetivo da sua utilização foi facilitada.

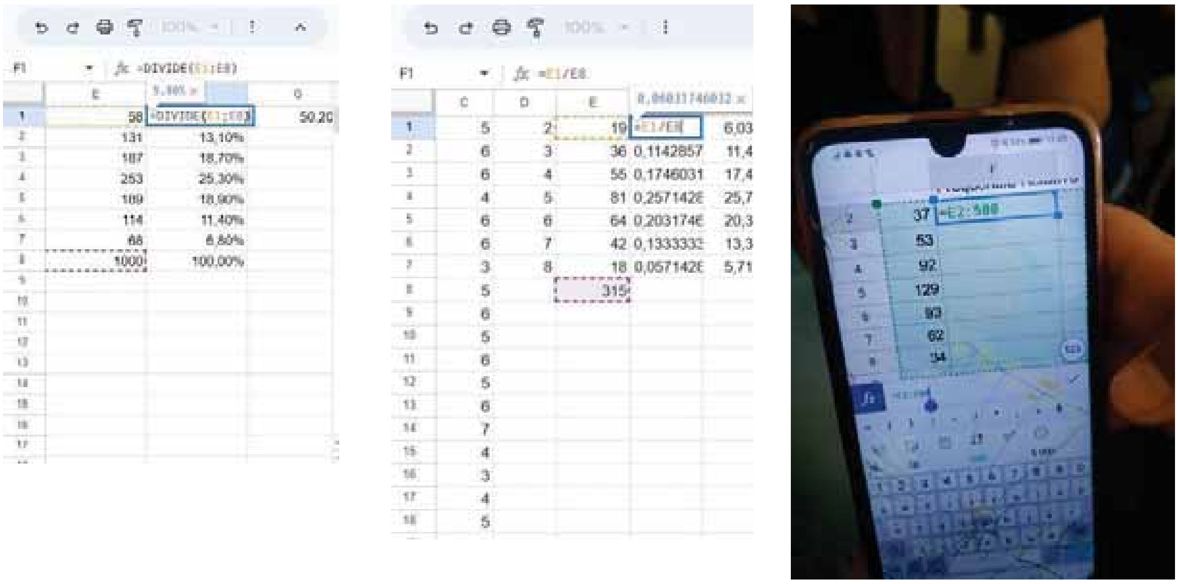
Não houve grandes dificuldades na identificação de todas as somas possíveis de obter por parte da maioria dos alunos, sendo esta questão facilmente ultrapassada com poucas ajudas do professor. Relativamente à organização da informação e facilidade de leitura posterior dos dados, foi necessário solicitar a alguns grupos que identificassem claramente a que soma a frequência relativa dizia respeito. A figura 35 ilustra um exemplo em que as somas não estão identificadas, tendo que se colocar o cursor na célula respetiva para se perceber a que soma diz respeito.

Figura 35. Determinação da frequência absoluta



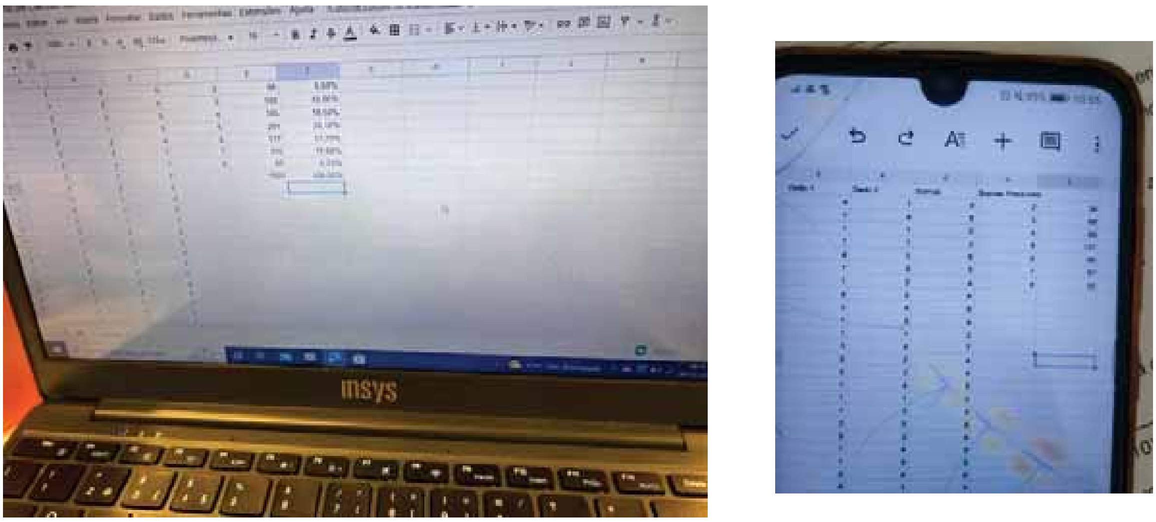
Da análise dos registos dos alunos foi possível identificar diferenças na escrita e sintaxe das fórmulas na folha de cálculo, nomeadamente no cálculo da frequência relativa. Estas diferenças evidenciaram a autonomia dos alunos na procura de uma forma de fazer o cálculo e na opção por diferentes alternativas ao seu dispor. Os professores não observaram dificuldades dos alunos na realização desta parte da tarefa (figura 36).

Figura 36. Formas de obter a frequência relativa utilizadas pelos alunos



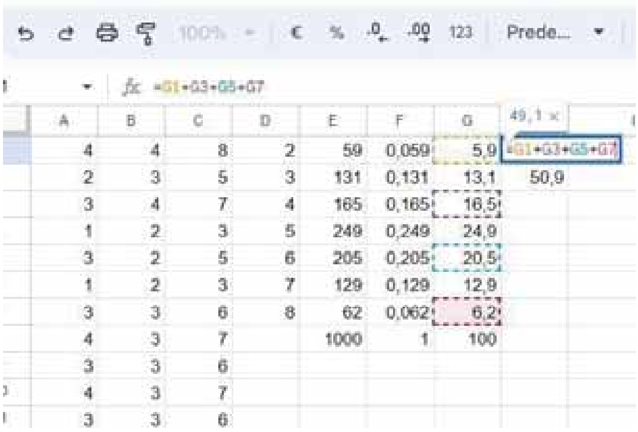
Foi ainda possível identificar alguma diversidade no cuidado que os alunos colocaram nas suas produções. Alguns pares usaram a primeira linha como título de cada coluna, outros apresentaram o total das frequências relativas e absolutas e outros não evidenciaram a mesma preocupação nos seus registos (figura 37).

Figura 37. Folhas de cálculo que evidenciam cuidados com a apresentação



Na última parte da tarefa, alguns pares de alunos mostraram uma grande apropriação da folha de cálculo, como ferramenta de trabalho, onde os cálculos puderam ser realizados de forma eficaz, a partir dos resultados anteriores. O professor teve o cuidado em solicitar aos alunos que explicitassem o significado dos cálculos e fórmulas utilizados (figura 38).

Figura 38. Cálculo das probabilidades realizados na folha de cálculo



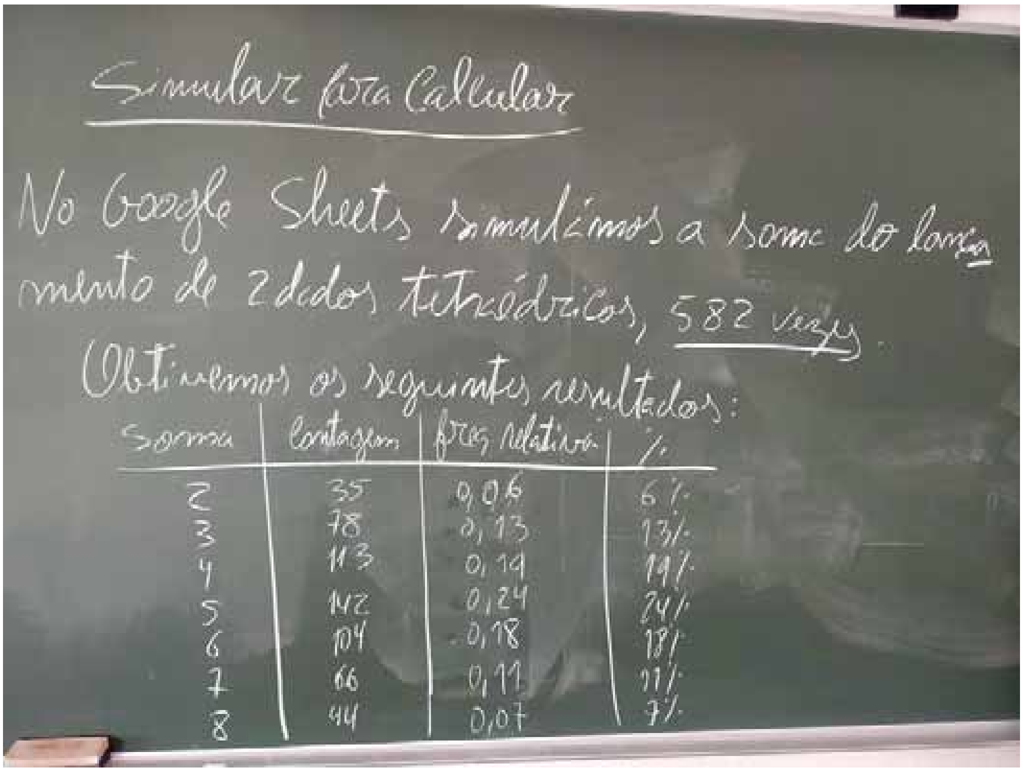
A	B	C	D	E	F	G	
4	4	8	2	59	0,059	5,9	=G1+G3+G5+G7
2	3	5	3	131	0,131	13,1	50,9
3	4	7	4	165	0,165	16,5	
1	2	3	5	249	0,249	24,9	
3	2	5	6	205	0,205	20,5	
1	2	3	7	129	0,129	12,9	
3	3	6	8	62	0,062	6,2	
4	3	7		1000	1	100	
3	3	6					
4	3	7					
3	3	6					

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

Numa primeira fase foi feito um balanço da concretização das estratégias desenvolvidas pelos alunos, procurando-se perceber as diferenças na utilização da folha de cálculo e de como cada uma das opções de "simulação" da experiência de lançamento dos dois dados tetraédricos foi mais ou menos eficiente. A maioria dos pares definiu as fórmulas para a simulação do lançamento dos dois dados e do cálculo da respetiva soma, numa primeira linha da folha de cálculo, e usou-a para gerar centenas de "simulações" do lançamento do dado.

Como a maioria dos pares usou a folha de cálculo para o registo de todas as somas possíveis, bem como a respetiva contagem para posteriormente determinar a frequência relativa, os professores optaram por apresentar a produção de um dos pares no quadro, como exemplo do registo que deveriam fazer nos seus cadernos diários (figura 39).

Figura 39. Síntese do trabalho de um par de alunos para acompanhar a discussão final



Na fase final da discussão, os alunos não apresentaram dificuldades nas respostas às questões colocadas, fazendo uso das suas produções na folha de cálculo e do seu conhecimento sobre a relação entre a frequência relativa de um acontecimento e a sua respetiva probabilidade.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "Simular para calcular" em duas turmas do 8.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A tarefa serviu para a consolidação do tema estudado na aula anterior: Probabilidade frequencista. Contudo, esta tarefa implica a ampliação do conceito através da introdução da simulação computacional de um elevado número de ocorrências da experiência aleatória, permitindo ilustrar com um exemplo significativo a possibilidade de interpretar a frequência relativa como uma estimativa da probabilidade.

Capacidades matemáticas transversais

O desenvolvimento do pensamento computacional a partir do trabalho realizado na folha de cálculo parece ter sido bem conseguido. Os alunos revelaram a capacidade de se concentrarem na informação essencial para resolver a tarefa (abstração). De igual modo, os alunos mostraram uma apropriação da situação real que havia sido demonstrada e concretizada com os dados tetraédricos pelos professores, mobilizando-a para o contexto da tarefa que lhes foi proposta com recurso à tecnologia (decomposição). Revelaram ainda a capacidade de interpretar as fórmulas como processos de automatização de rotinas que não poderiam ser realizadas de outra forma (algoritmia). Também evidenciaram compreender a relação entre as variáveis do problema e as relações de dependência que deveriam estabelecer.

Não foram identificadas dificuldades significativas, relativamente à capacidade de mobilizar o mesmo conjunto de dados, utilizando diferentes representações num contexto específico.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Esta tarefa criou situações favoráveis ao desenvolvimento do pensamento crítico, pela atitude demonstrada de identificação dos problemas que se colocaram em cada etapa da tarefa e pela procura de soluções para esses problemas, nomeadamente através da descoberta autónoma de fórmulas que permitiram trabalhar os dados gerados de forma conveniente.

O facto de esta tarefa ter sido trabalhada a pares permitiu uma discussão permanente entre os dois elementos, clarificando o significado e a relevância dos procedimentos adotados, promovendo a colaboração.

Proporcionar o recurso à folha de cálculo em contextos significativos permite favorecer o desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico dos alunos.

Outros comentários

Ao longo das aulas dos dois professores, a generalidade dos alunos esteve envolvida na realização da tarefa, não se tendo observado conversas paralelas ou alunos sem trabalhar.

O recurso à tecnologia revelou-se uma estratégia eficaz, podendo este sucesso ser atribuído a dois fatores: o papel relevante da folha de cálculo na tarefa, por possibilitar um número de simulações inacessível em situações tradicionais; e também pela experiência prévia dos alunos com este recurso, que permitiu capitalizar o investimento anterior.

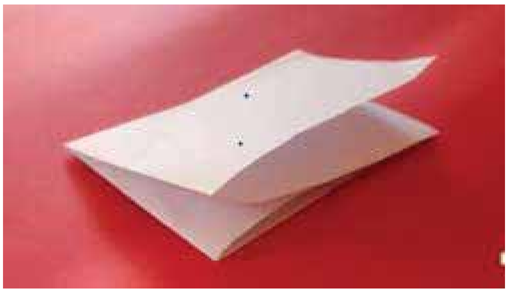
A opção por um currículo em espiral, que se traduz por uma abordagem progressiva do conceito de probabilidade no 7.º ano e no 8.º ano, cria um contexto favorável para a aprendizagem e consolidação deste conceito.

Tarefa — A Lua aqui tão perto

Enunciado da tarefa

A Lua aqui tão perto

Imagina que seria possível dobrar uma folha de papel tantas vezes quantas quisesses. Vamos considerar uma folha de papel de espessura 0,0001m e que a distância média da Terra à Lua é de 384 403 km (embora varie conforme o curso da órbita da Lua).



1. Quantas vezes te parece que seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?
2. Com recurso a uma folha de cálculo, determina agora o número exato de dobragens necessárias para atingir a distância da Terra à Lua. Explica o teu procedimento.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 8.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números racionais	Potências de base racional e expoente inteiro
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégias
	Conexões matemáticas	Conexões internas Conexões externas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da Matemática
	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico

Objetivos de aprendizagem

A exploração desta tarefa procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Interpretar situações matemáticas que envolvam potências de base racional e expoente inteiro e resolver problemas associados;
- Reconhecer e aplicar etapas do processo de resolução de problemas;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia;
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas;
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos;
- Analisar e discutir ideias centrando-se em evidências;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com os outros;
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Recursos

Mensagem preparada para motivar os alunos.
Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.
Computador ou telemóvel.
Uma versão possível de ser projetada no quadro.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

A questão 1 pede um valor estimado. Espera-se que os alunos não realizem qualquer cálculo, mas sim que apontem para um valor baseado na sua intuição, que neste caso é provável que se afaste bastante da realidade. Assim, é esperado que indiquem um valor bastante superior ao correto.

Poderá haver alunos que não compreendendo bem o problema, apontem para um valor próximo da distância da Terra à Lua dada a espessura da folha ter um valor de 1 numa medida eventualmente pouco clara para si.

Questão 2

É esperado que haja alunos que comecem a dobrar uma folha retirada do seu caderno para se apropriarem da situação apresentada. Esta fase de manipulação poderá ajudá-los a compreender como a espessura da folha sucessivamente dobrada vai crescendo.

Passada esta primeira fase, como no enunciado é proposto aos alunos que utilizem a folha de cálculo, ferramenta já usada anteriormente por eles em outras tarefas, é expectável que abram os seus smartphones e comecem a usar esta ferramenta.

Poderá ser sugerido aos alunos o uso de uma nova coluna da folha de cálculo para realizarem a conversão de metros para quilómetros.

Após o cálculo da espessura da folha de papel com diversas dobragens, há que procurar o primeiro valor igual ou maior que a distância da Terra à Lua, tendo em atenção que esta comparação requer a conversão à mesma unidade.

Apresentação da tarefa

A apresentação começará pela apresentação de uma mensagem preparada pelo professor de forma a motivar os alunos e concentrá-los no trabalho a realizar. O enunciado da tarefa será distribuído numa folha de papel a cada par de alunos. O professor não prevê fazer uma explicação oral da situação traduzida no enunciado do problema. Tempo previsto 10min.

Trabalho autónomo

Os alunos deverão trabalhar a pares. Na aula anterior foi solicitado que trouxessem o computador ou o telemóvel, porque seria necessário nesta aula. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que vão fazendo e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 30min.

Discussão com toda a turma

O professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes opiniões, incentivando-os a fundamentarem as suas ideias, nomeadamente no algoritmo a usar na folha de cálculo, e na necessidade de comparar valores expressos na mesma unidade de medida.

A resolução deste problema servirá para discutir com os alunos as diversas etapas a percorrer na resolução de um problema, de forma a ficar consensualizado um conjunto de etapas para resolver qualquer problema. Este conjunto de etapas passará a constituir um guião para os alunos poderem aperceber-se da sua capacidade de resolver problemas, bem como uma referência para classificar as suas resoluções. Tempo previsto 20min.

Sendo a aula de 50min, está previsto que a exploração da tarefa seja terminada somente na aula seguinte.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Compreender o que se pede na questão 1	O que se pede? É para indicares um valor que te parece, uma estimativa.
Compreender como a espessura vai crescendo	Já experimentaste com uma folha de papel? Faz algumas experiências e calcula como vai crescendo a espessura. O que verificas?
Tirar partido das potencialidades da folha de cálculo	Vais calcular os valores de cada célula? Como pode a folha de cálculo libertar-te desse trabalho?
Compreender a necessidade de converter os diferentes valores à mesma medida	Podes comparar de forma direta o valor da distância da Terra à Lua com os valores que a folha de cálculo determinou? Que cuidado deves ter?
Fazer conversões	Quantos metros tem um quilómetro? Quantos milímetros tem um metro?
Compreender que apesar de nenhum valor calculado corresponder à distância pretendida, a resposta será o menor valor que a excede	Vê se o valor anterior é suficiente. O enunciado pede para obter a distância exata à lua? Será melhor arredondar por excesso ou por defeito?

Concretização da tarefa na prática

Esta tarefa foi proposta no 8.º ano de escolaridade. A aula iniciou-se, como habitualmente, com a escrita do sumário: Resolução da tarefa 7 - "A lua aqui tão perto". Os alunos estavam sentados a pares (à exceção de uma mesa onde se encontravam três alunos para evitar que algum ficasse sozinho) e a professora começou por valorizar o facto dos alunos terem atendido ao seu pedido feito na aula anterior:

> *Prof.ª – Primeiro já estou a ver aí alguns computadores abertos. Eu tinha-vos pedido para trazerem o material.*
>
> *A – Eu trouxe um tablet.*

Prof.ª – Tudo bem, mas se não for funcional também podem usar o telemóvel. Quem trouxe os computadores, obrigada por trazerem.

Os alunos já tinham usado o telemóvel, quer no ano letivo anterior, quer este ano, para trabalharem a folha de cálculo e o Geogebra.

Prof.ª – Aquilo que eu tenho para proposta não sou eu que vos vou apresentar, mas tenho aqui uma mensagem para vocês. Tomem lá então atenção. O que vos peço é que tomem atenção para saber o que vos é pedido.

Apresentação da tarefa

A professora preparou uma introdução ao problema, fazendo sugerir o recebimento de uma mensagem da "Missão Impossível", acompanhada da música desse filme[2]. Nesta mensagem era sugerida a utilização da folha de cálculo (figura 40).

Figura 40. Parte da mensagem apresentada aos alunos para introdução da tarefa

Prof.ª –Qual é o código?

Vários alunos em uníssono -Tarefa 7

Prof.ª –Muito bem. Leiam com atenção o enunciado para saberem o que têm de fazer.

Todos os alunos ficaram muito atentos à mensagem. Fez-se um silêncio completo. De seguida foi distribuído por cada par de alunos o enunciado do problema. Foi proposto aos alunos que trabalhassem a pares.

Trabalho autónomo dos alunos

As respostas que os alunos foram dando à questão 1 foi bastante variável: 7000; 7569; 384403; 40000. Sem explicarem porquê houve um par de alunos que disse: "40 e tal, 42". A professora não discutiu com nenhum par de alunos a razão da sua estimativa, apenas que a

[2] Apresentação acessível em https://www.powtoon.com/online-presentation/gbwTYSSsOFh/a-lua-aqui-tao-perto

registassem. Contudo, diversos alunos mostraram alguma resistência inicial em indicar um valor, o que levou a professora a clarificar que o que se pedia era uma estimativa e não um valor exato:

> *Prof.ª – A primeira questão não é para usarem a folha de cálculo. Quantas vezes vos parece? Escreve. Quantas vezes é que acham que é preciso dobrar a folha para chegarem à lua?*
>
> *A – Está certo?*
>
> *Prof.ª – O que vos parece?*

A forma como os pares de alunos pensaram sobre o problema foi variada. Uns começaram a preencher as primeiras células da folha de cálculo, outros tiveram a necessidade de arrancar uma folha do caderno e começar a fazer dobragens, contando quantas folhas ficavam sobrepostas ao fim de cada uma das dobragens. À exceção de um grupo, todos os outros compreenderam a situação.

De seguida, passaram à utilização da folha de cálculo. Nesta fase, alguns pares de alunos tiveram necessidade de interagir com a professora:

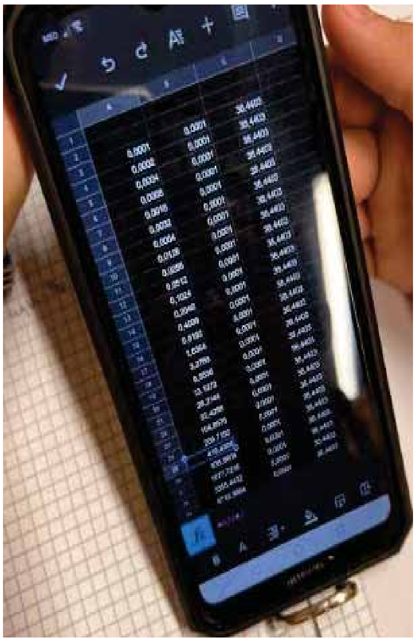
> Prof.ª –Quando a folha está aberta, qual é a espessura da folha?
>
> *A – 0,0001*
>
> *Prof.ª –E agora como fazes para a segunda? Não te esqueças que eu tenho de programar uma fórmula para a folha de cálculo me dar as respostas que eu pretendo. Vocês já me explicaram que ia sempre…*
>
> *A – Duplicar.*
>
> *Prof.ª – Duplicar. Então como vou programar a folha para me dar a resposta ao problema?*
>
> *A – Duplicar o anterior.*
>
> *Prof.ª –Então como vou escrever a fórmula?*
>
> *A – Coloco o igual*
>
> *Prof.ª –Muito bem e depois o que vou escrever?*
>
> *A – Seleciono a célula e ponho vezes 2*
>
> *Prof.ª – Muito bem. Como é o vezes na folha?*
>
> *A – É com o asterisco.*
>
> *Prof.ª –Muito bem. E agora o que vou fazer a seguir? Já está programada essa célula.*

Com outro par de alunos:

> *Prof.ª* –Não, eu não vos vou dizer como é a fórmula. Têm de pensar o que vou dizer à folha de cálculo de forma que ela me ajude a encontrar a resposta. Tenho de pensar é no que vai acontecer à nossa folha de papel?
>
> A – A gente dobra, duplica e fica 2, Depois voltamos a dobrar e fica quatro.
>
> *Prof.ª –É aí que ficam esses valores. O que vos diz esses valores todos? O que é o 0,0008?*
>
> *A – É a folha dobrada 3 vezes.*
>
> *Prof.ª – E se dobrarem quatro vezes?*
>
> *A – Dá 16.*
>
> *Prof.ª –Então esses valores o que representam? É o número de dobras?*
>
> *A – Não, é a espessura com que fico.*
>
> *Prof.ª –É a espessura e o que eu quero saber é quando é que essa espessura me leva até à lua. O que eu vos recomendo é que alarguem a coluna porque ele está a escrever os números em notação científica. Lembrem-se do que estivemos a trabalhar o ano passado.*

Na figura 41 seguinte apresentam-se as folhas de cálculo de alguns pares de alunos.

Figura 41. Resoluções na folha de cálculo de diferentes pares



fx =A1*2

A	B
0,0001	0
0,0002	1
0,0004	2
0,0008	3
0,0016	4
0,0032	5
0,0064	6
0,0128	7
0,0256	8
0,0512	9
0,1024	10
0,2048	11
0,4096	12
0,8192	13
1,6384	14
3,2768	15
6,5536	16
13,1072	17
26,2144	18

	C	D
32	29	53687,0912
33	30	107374,1824
34	31	214748,3648
35	32	429496,7296
36	33	858993,4592
37	34	1717986,918
38	35	3435973,837
39	36	6871947,674
40	37	13743895,35
41	38	27487790,69
42	39	54975581,39
43	40	109951162,8
44	41	219902325,6
45	42	439804651,1
46	43	879609302,2
47	44	1759218604
48	45	3518437209
49	46	7036874418
50	47	14073748836
51	48	28147497671
52	49	56294995342
53	50	112589990684
54	51	225179981369

Uma dificuldade que surgiu por vezes foi a realização da necessária conversão para a mesma unidade. A distância da terra à lua era dada em quilómetros e a espessura obtida através das diversas dobragens em metros. Para encontrar o número de dobragens necessária para chegar à lua, essa conversão tinha de ser feita. Esta conversão levantou dificuldades a alguns alunos, como se poderá verificar no diálogo que se segue:

Prof.ª – Então se quisessem escrever a distância em milímetros quanto ficaria?

A – Acrescentava um zero.

Prof.ª – Um quilómetro quantos metros são?

A – 1000

Prof.ª – E um metro quantos milímetros são?

A – 1000.

Prof.ª – Então para escreverem a distância em milímetros quantos zeros tinham de acrescentar?

A – Seis

Prof.ª – Mas quanto é a espessura da folha? É um milímetro?

No final dos 50min de aula, todos os pares de alunos tinham resolvido o problema à exceção de um par. Diversos pares de alunos deram resposta ao problema, percebendo que tinham de fazer 42 dobragens, ultrapassando a distância, porque com 41 ainda não teriam chegado à lua. A discussão final do problema teve de ficar para a aula seguinte.

Antes de terminar a aula, a professora pediu aos alunos para partilharem com ela as suas resoluções, enviando-lhas por email. Solicitou, ainda, que pensassem, para a próxima aula, que etapas estiveram envolvidas em todo o processo de resolução de problemas.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias-chave

A aula seguinte iniciou-se com a discussão em grande grupo do problema resolvido na aula anterior. A professora teve a necessidade de relembrar aos alunos o enunciado do problema, solicitando-lhes que recordassem como o tinham resolvido:

Prof.ª – Vamos lá recuperar um bocadinho o que vos foi proposto. Na primeira pergunta, muitos de vocês responderam uma estimativa. Pensaram quantas vezes seria preciso dobrar a folha para chegarem a uma altura igual à distância da terra à lua. Por exemplo, no par da M., quanto foi a vossa estimativa?

M – 40000

H – 7040 vezes

Prof.ª – E depois foram para a folha de cálculo, algo de diferente aconteceu? O que foi que aconteceu?

A1 – 42 vezes

Prof.ª – Como pensaram?

A2 – Fomos vendo que, cada vez que dobrávamos a folha, a altura era sempre o dobro da anterior. E vimos que não era preciso dobrar mais do que 42 vezes.

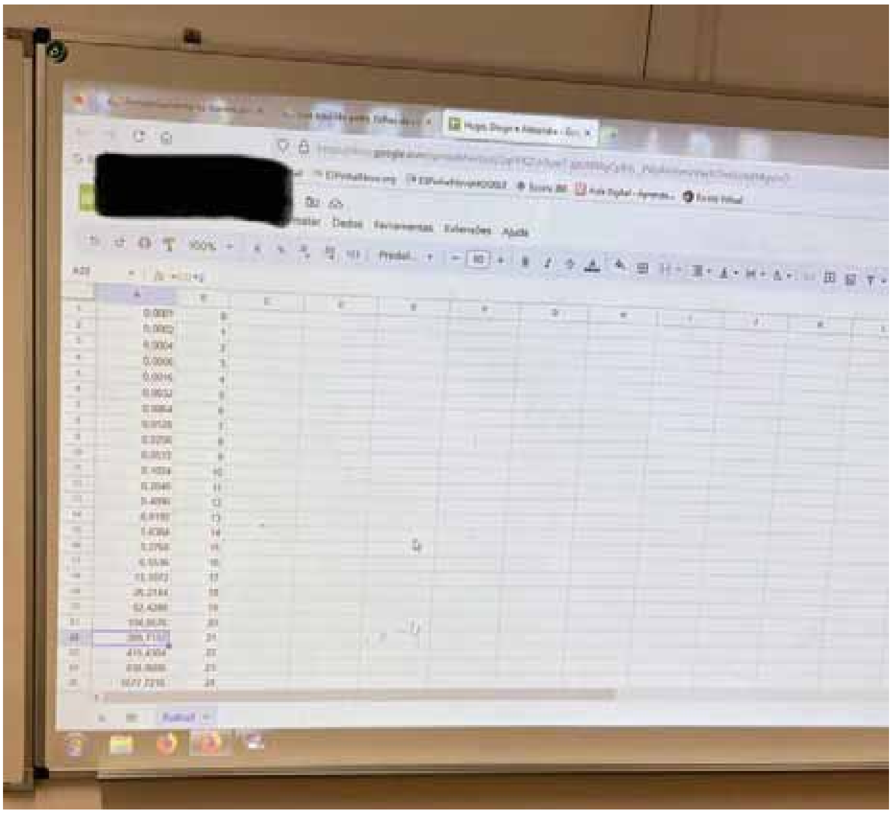
Prof.ª – OK. O grupo do Al., logo na fase inicial, disse que a espessura vai duplicando sucessivamente ao que íamos obtendo. Acho que foi o H. que teve a intervenção e disse: O sotora Então são as potências de … quê? Já não se lembra!

A2 – De 2.

De forma a poder ser mais claro para todos os alunos o que foi feito, projetou uma resolução de modo que a discussão pudesse ser sustentada num exemplo concreto (figura 42). Uma preocupação da professora foi o de clarificar o significado de cada coluna da folha de cálculo:

Prof.ª – As potências de 2. Exatamente. As potências de 2 surgem ali de forma clara para nos ajudar a completar o que nós pretendíamos. Eu vou-vos mostrar um dos vossos trabalhos partilhados e explorar aqui um bocadinho o que vocês me fizeram chegar do trabalho que realizaram na folha de cálculo. (…)
Vou pegar um de forma aleatória.

Figura. 42. Projeção de uma resolução para sustentar a discussão



Foi percorrendo todo o processo de resolução de problemas seguido pelos alunos através de sucessivos questionamentos:

Prof.ª – Temos aqui o 1.º valor, 0,0001. O que indica este valor?

A – A espessura da folha.

Prof.ª – Já tinha dobragens?

A – Não.

Prof.ª – Zero dobragens. Com uma dobragem o que aconteceu?

A – Duplicou.

Prof.ª – Duplicou a espessura anterior, certo? Ficou 0,0002. E agora acham que tenho de fazer célula a célula os cálculos? O que é que vocês fizeram?

A – Usámos uma fórmula.

Prof.ª – Que fórmula?

A – Igual

Prof.ª – Igual e depois?

A – Selecionamos a primeira e depois vezes 2.

A professora regista no quadro o que os alunos estão a dizer.

Prof.ª – Foi isto? E copiaram a fórmula para as células seguintes. E depois? Esperaram que a folha de Excel vos desse a resposta?

A – Não.

Prof.ª – Atenção. Tínhamos aqui uma questão. A espessura da folha estava em metros.

A – Tínhamos de passar os quilómetros para metros.

A – Tínhamos de acrescentar três zeros.

Prof.ª – Exatamente, e chegaram ao valor do número de dobragens para atingir a distância da terra à lua. Por que não 41?

A – Porque não chega!

Prof.ª – Certo, não é o suficiente.

A – Quer dizer se eu dobrasse 42 vezes chegava à lua?

Prof.ª – (Sorri) O D. fez logo uma observação à tarefa. O que foi que me disseste?

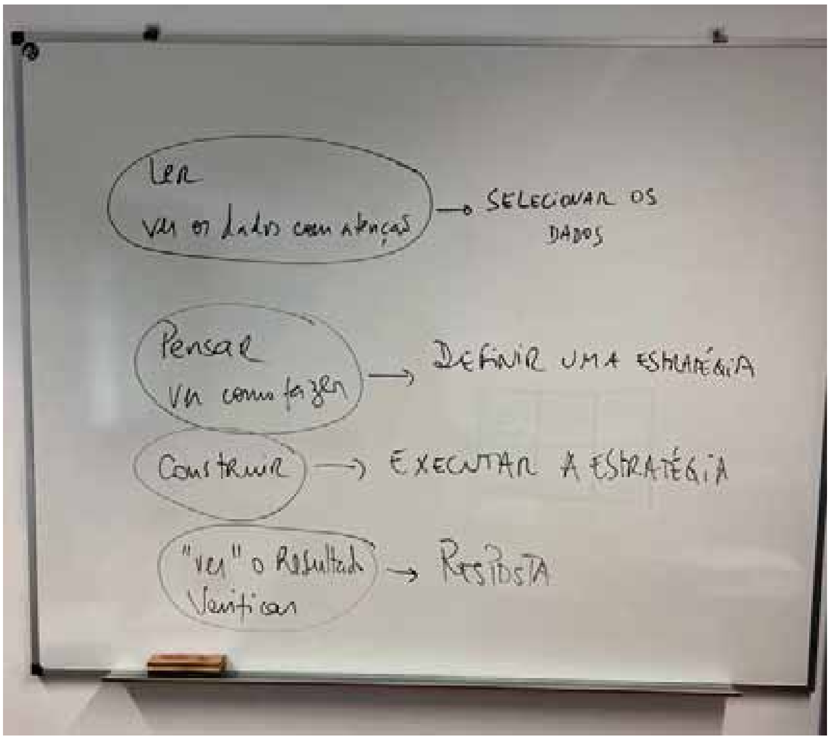
D – Tirei uma folha do caderno e comecei a dobrar.

Prof.ª – E a certa altura o que aconteceu?

D – A dada altura já não dava.

Com o intuito que os alunos começassem a identificar as diferentes fases da resolução de um problema, segundo objetivo desta discussão, orientou o seu questionamento para o que os alunos tinham feito, passando a dada altura a registar no quadro as ideias chave que foram sendo produzidas (figura 43).

Figura 43. Etapas da resolução de problemas sintetizadas no quadro pela professora



Prof.ª – Estamos a resolver um problema, OK. (…) Pensem no percurso que estiveram a fazer.

A – Pegámos na folha de cálculo.

Prof.ª – Então a folha de cálculo surgiu porquê? Iam à folha de cálculo, ok e era só isso?

A. Colocávamos a fórmula.

Prof.ª – Verificavam se estava lá a fórmula, sim, e mais?

A – Depois tínhamos de procurar o resultado.

Prof.ª – A resposta, é? Mas antes de chegarmos à estratégia que vocês definiram, vocês não tiveram de fazer nada?

A – Demos a nossa opinião.

Prof.ª – Sim, mas antes disso?

A – Lemos

Prof.ª – Leram. E imaginem que eu vos dava no problema o diâmetro da lua.

(silêncio) Para resolver este problema precisavam desse dado?

A – Não.

Prof.ª – Então antes de começarem a resolver a tarefa tiveram de fazer algo. Aqui o Filipe estava a dizer 'temos de ler'. Mas a leitura leva-vos a uma coisa muito importante.

A – A perceber.

Prof.ª – E a tirar de lá o quê? (silêncio) Selecionar criteriosamente os dados. Está bem entendido? E agora? Vamos lá estruturar isto. Primeiro o que fizeram?

A. Lemos e selecionámos os dados.

Prof.ª – E é importante saber se selecionaram bem os dados. E a seguir?

A – Depois dos dados selecionados tivemos de os pôr em prática.

Prof.ª – Fizeram esse processo todo. Leram, tiraram os dados, definiram uma estratégia que passou por isso tudo que estás a dizer e depois chegaram a quê? Ninguém chegou a nada?

A – Chegámos ao 42.

Prof.ª – E o 42 o que quer dizer?

A – O número de vezes que se tem de dobrar a folha para chegar à lua.

Prof.ª – Então para vocês quais são as etapas de resolução de um problema? Conseguem dar-me pistas depois disto que estivemos aqui a falar?

A – Ler

A – Perceber

A – Retirar os dados

Prof.ª – A seguir? Independentemente de ser este ou outro problema qualquer?

A – Pensar ou construir

Prof.ª – Para definir tal estratégia. E depois? Pensamos e depois temos de fazer. E depois?

A – Chegar ao resultado.

Prof.ª – Chegar à resposta e validar a resposta, ver se a resposta tem algum sentido no nosso problema.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "A Lua aqui tão perto" numa turma do 8.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A tarefa em análise apela à interpretação de situações matemáticas que envolvam potências de base racional e expoente inteiro. Os alunos ao compreenderem a situação apresentada teriam de identificar que o crescimento da espessura do papel acontece duplicando o valor anterior, isto é, estão perante uma potência de base 2 e expoente natural. Não têm de realizar praticamente nenhum cálculo, desde que usem a folha de cálculo como é recomendado. Todos os alunos, à exceção de um grupo, revelaram interpretar corretamente a situação proposta, sem grandes dificuldades. O não entendimento de forma clara da situação apresentada por parte do grupo de alunos referido anteriormente, prendeu-se com o facto de terem interpretado a situação como se de uma sobreposição de folhas se tratasse e não de dobragens sucessivas. Para ultrapassar a dificuldade a professora sugeriu que os alunos pegassem numa folha e que fizessem o procedimento descrito, o que veio a contribuir positivamente para clarificar a situação.

É de fazer notar a relutância que a maioria dos alunos demonstraram para indicar um valor aproximado que estimasse o número de dobragens necessárias. Será que a razão para tal relutância se deve à valorização que se dá habitualmente, na aula de Matemática, aos valores exatos/corretos? Certamente que um pedido para fazer uma estimativa soa estranho aos alunos pois contradiz a cultura do trabalho em Matemática. Mesmo um grupo de alunos que fez uma estimativa muito próxima do valor correto ("40 e tal, 42") não foi capaz de explicar as razões que os levaram a esse valor.

Capacidades matemáticas transversais

Pelas características da tarefa podemos considerá-la um problema. Para a sua resolução, os alunos foram solicitados a interpretá-lo e a escolher uma estratégia que lhe permitisse resolvê-lo. Podemos afirmar que, na sua grande maioria, os alunos conseguiram fazê-lo. De igual modo, com a orientação da professora, foram identificando os diferentes passos necessários para resolver um problema.

Para compreenderem e resolverem o problema proposto, recorreram a representações múltiplas: representação física (folha de papel que se dobra) e representação visual (tabela), revelando facilidade na conversão entre as representações usadas.

Por último, embora de forma não explícita para si, estabeleceram conexões entre os Números e a Álgebra (na folha de cálculo ao introduzirem a fórmula), e conexões com a realidade, traduzindo em linguagem matemática a situação que lhes foi colocada.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Dado que o trabalho a pares é usual na sala de aula de Matemática, os alunos revelaram ser capazes de trabalhar com outros. Também no momento da discussão coletiva, ouvem os outros e aceitam diferentes pontos de vista.

O trabalho com a folha de cálculo foi feito sem grandes problemas, tendo os alunos evidenciado o evidenciado o conhecimento necessário para o manuseamento desta ferramenta tecnológica.

A valorização da Matemática assume uma expressão forte neste problema, uma vez que a Matemática permitiu-lhes verificar que a sua intuição os conduziu para um valor totalmente falso. A intuição apontava-lhes para um número elevado de dobragens enquanto que de facto 42 dobragens seriam suficientes para chegar da Terra à Lua, caso este processo pudesse ser de facto possível de concretizar.

Por último, o pensamento crítico é também desenvolvido neste problema, nomeadamente quando os alunos se apercebem que para comparar valores os têm de escrever na mesma unidade de medida (não podem comparar quilómetros com metros).

Comentários finais

O balanço final da exploração da tarefa "A Lua aqui tão perto" é bastante positivo. Os alunos reagiram bem ao problema proposto e a sua grande maioria compreendeu-o e conseguiu resolvê-lo corretamente. O recurso à folha de cálculo foi bem-sucedido e os alunos mostraram capacidade de trabalhar com esta ferramenta. Perante alguma dúvida, também não tiveram problemas em questionar a professora. Os alunos estiveram ao longo dos 50min de aula envolvidos na sua resolução, não havendo qualquer chamada de atenção, por parte da professora, para a necessidade de se concentrarem no trabalho.

As suas principais dificuldades deveram-se, por um lado, à estranheza do que era pedido na questão 1 e, por outro, num conhecimento abordado no 1.º ciclo, a conversão de valores em diferentes subunidades do metro. A primeira dificuldade referida leva-nos a questionar e a refletir sobre o tipo de trabalho realizado habitualmente na sala de aula de Matemática. Fica assim a chamada de atenção para a necessidade de propor aos alunos situações que apelem ao uso de estimativas em futuras tarefas.

Passadas algumas semanas, foi proposta a resolução de um outro problema "Banhos (frios) públicos", agora como um instrumento de avaliação sumativa.

Banhos (frios) públicos

No verão de 2014, surgiu a moda dos banhos públicos de água fria nas redes sociais, um desafio que terá começado nos EUA com uma iniciativa de solidariedade.

O Alberto tomou conhecimento desta iniciativa e decidiu, no dia 1 de janeiro de 2023, tomar um banho e partilhou o vídeo numa rede social. Escolheu ainda três amigos e lançou-lhes o desafio de, em 24 horas, publicarem na mesma rede social um vídeo a tomarem um banho (frio). Cada um destes amigos desafia, nas 24 horas seguintes, outros três, e assim sucessivamente.

Sabe-se que a população da freguesia de Pinhal Novo é de 27 010 e consideramos que todos os amigos indicados aceitam o desafio e ninguém o inicia sem ser contactado por outro.

- Qual o primeiro dia em que o número de pessoas que estariam a ser desafiadas é superior à população da freguesia de Pinhal Novo?
- Em que dia se prevê que o número de pessoas que já realizaram o desafio seja superior à população da freguesia de Pinhal Novo?

Explica como pensaste e mostra como chegaste às tuas respostas.

Não foi feita qualquer referência prévia por parte da professora sobre os recursos a utilizar, mas de forma geral e autónoma, os alunos decidiram utilizar a folha de cálculo do *GoogleSheets*, demonstrando valorizar a utilização da tecnologia na resolução de problemas. Em alguns pares foi interessante verificar a forma cuidada, como procuraram percorrer as várias etapas da resolução de problemas discutidas anteriormente, como que de uma listagem se tratasse.

Da tarefa faziam parte duas questões. A primeira teve sucesso pleno. Todos os pares de alunos conseguiram identificar os dados, definir e executar uma estratégia que os conduziu a uma resposta correta, a ser validada para o contexto do problema. Na segunda, dois pares de alunos não conseguiram definir uma estratégia por não conseguir interpretar o que era solicitado e outro par, apesar de ter definido e executado uma estratégia, não deu a resposta correta (com a diferença de um dia). Este último par de alunos, na segunda questão, optou por utilizar a calculadora, por não conseguir definir um algoritmo na folha de cálculo que lhe permitisse chegar aos valores pretendidos. No entanto, mostraram espírito crítico quando, em diálogo com a professora, referiram que o abandono do trabalho com a folha de cálculo se devia ao facto de terem utilizado diferentes fórmulas e que nenhuma lhes permitia chegar aos resultados que eles sabiam que tinham que obter.

Tarefa — Função afim em movimento

Enunciado da tarefa

Função afim em movimento

Considera a família de funções do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. Como classificas a família de funções dada?
2. Recorre à tarefa do GeoGebra com o código VYRU X8UD, explora-a e responde às questões apresentadas:

   2.1 Faz variar os parâmetros a e b que te são dados na apliqueta e obtém a representação gráfica da função $g(x) = 2x - 3$.

   2.2 No gráfico seguinte, faz variar os parâmetros, de modo a obteres a representação gráfica de uma função linear. Escreve a expressão da função obtida e explica como pensaste para obter a sua representação gráfica.

   2.3 A função que escreveste anteriormente será a única função linear que é possível obter? Como podes obter outras funções lineares diferentes da anterior? Explica a tua resposta.

   2.4 Fixa um valor para o parâmetro a à tua escolha e faz variar o parâmetro b.

   Qual a influência do sinal do parâmetro b na representação gráfica da função? Explica a tua resposta.

   2.5 Fixa um valor para o parâmetro b à tua escolha e faz variar o parâmetro a.

   a) Qual a influência do sinal do parâmetro a na representação gráfica da função?

   b) Apresenta uma conjetura que relacione o valor absoluto do parâmetro

   a com a representação gráfica da função.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 8.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	**Tópico**	**Subtópico**
Conteúdos matemáticos	Funções	Funções afins
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar Generalizar
	Comunicação matemática	Expressar ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas Conexões entre representações Linguagem simbólica matemática
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia/iniciativa Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Reconhecer o efeito da variação de cada parâmetro numa função afim;
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos;
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial usando a linguagem simbólica;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com os outros;
- Ser autónomos, tomando as suas decisões, sem procurar de imediato a validação do professor:
- Não desistir à primeira dificuldade, desenvolvendo a sua perseverança;
- Desenvolver o pensamento crítico.

Recursos

Apliquetas do Geogebra.

Computadores ou *smartphone*s dos alunos .

Enunciado escrito da tarefa.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

Esta questão pretende levar os alunos a recordarem o que tinham trabalhado recentemente, esperando-se que respondam: Funções afins.

Questão 2

2.1.

Esta questão tem por principal propósito familiarizar os alunos com a apliqueta fornecida. Em particular, perceberem como podem variar os parâmetros *a* e *b* que inicialmente têm o valor 1. Deste modo, os alunos devem movimentar os parâmetros de modo a obterem respetivamente a=2 e b=-3. O GeoGebra desenhará o gráfico desta função.

2.2.

Os alunos terão de lembrar-se que uma função linear passa pela origem do referencial, pelo que o valor do parâmetro *b* terá de ser zero. Usando a 2.ª tarefa disponível na apliqueta, os alunos, movendo o cursor de *b*, deverão atribuir-lhe o valor zero.

2.3.

Esta não será a única função linear. Qualquer outra poderá ser obtida mantendo b = 0 e variando o valor de *a*.

2.4.

Os alunos terão de escolher um valor para o parâmetro *a* e fazer variar o valor de *b*, observando o que vai acontecendo às diversas retas que se vão obtendo. Após a observação das diversas representações gráficas, espera-se que concluam que as retas são paralelas entre si, intersetando o eixo dos y no ponto cuja ordenada é o valor de *b*.

2.5.

a) Atribuindo um valor ao parâmetro b, os alunos deverão fazer a sua exploração, variando o valor de a. É expetável que comecem de forma não organizada, mas numa segunda fase façam variar o valor do parâmetro a com diferentes valores positivos e de seguida com diferentes valores negativos. A variação do valor de a implica mudança no declive das retas que vão sendo obtidas, todas elas tendo um ponto comum, o da interceção com o eixo dos y. Se a tomar valores positivos, a função será crescente, ou seja quando as abcissas aumentam as suas imagens aumentam também. Se a tomar valores negativos, a função será decrescente, ou seja quando as abcissas aumentam as suas imagens diminuem.

b) Quanto maior for o valor absoluto de a, a reta aproxima-se do eixo do y, isto é, vai-se aproximando de uma reta vertical.

Apresentação da tarefa

Esta etapa deve ser breve, mas incluir uma questão sobre as diferentes representações das funções afins, com o objetivo de relembrar os alunos do que já estudaram anteriormente. O enunciado da tarefa será distribuído numa folha de papel a cada par de alunos. O professor não prevê fazer uma explicação oral da situação traduzida no enunciado do problema, mas avisará os alunos do tempo previsto para a realização da tarefa em trabalho autónomo. Tempo previsto 5min.

Trabalho Autónomo

Os alunos deverão trabalhar em pares. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que vai sendo efetuado e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 25min.

É de fazer notar que ao longo de todo o 8.º ano de escolaridade, muito embora se esteja a trabalhar no conjunto dos números racionais, considerar-se-á a reta como representação gráfica de uma função afim, bem como de uma função linear. Esta questão será retomada e discutida no ano letivo seguinte, no 9.º ano, após os alunos conhecerem o conjunto dos números reais.

Discussão com toda a turma

O professor solicitará a explicação de como os alunos pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes opiniões, incentivando-os a fundamentarem as suas ideias. Serão foco desta discussão coletiva essencialmente as alíneas 2.4. e 2.5. Através do questionamento, o professor procurará que os alunos formulem conjeturas que relacionem as variações respetivamente dos parâmetros a e b com as representações gráficas das funções. Tempo previsto 20min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Compreender como funciona a apliqueta.	Que valor tem o parâmetro a antes de começares a mexer? Move o cursor de a. O que acontece?
Relacionar o valor do seletor com a representação gráfica.	Movimenta o seletor mais devagar para conseguires observar a sua influência no gráfico.
O que é uma função afim.	Consulta o teu caderno e lê o que então escreveste.
O que é uma função linear.	Consulta o teu caderno e lê o que então escreveste.
Condições para que uma reta passe pela origem do referencial.	Algum dos parâmetros deve ser fixo? Qual? A que terá de ser igual?
Compreender a variação do gráfico das sucessivas funções que se vão obtendo fixando um dos parâmetros e variando o outro.	Fixaste o valor do parâmetro … e estás a variar o parâmetro … . Aponta para a reta que corresponde ao valor … E se o valor for… ? E … ? O que podes dizer sobre estas três retas quando comparadas entre si?
Expressar o conceito de monotonia de uma função (crescente/decrescente).	Se percorreres a reta, vais da direita para a esquerda, ou no sentido contrário? Qual é o movimento que fazes? Sobes ou desces?

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A professora relembrou o tema da função afim, tema trabalhado nas últimas aulas, questionando os alunos quanto ao tipo de expressão algébrica e gráfico que representam a família destas funções e deu uma ideia muito geral do pretendido na tarefa a ser trabalhada nesta aula:

> *Prof.ª – Quem me consegue dar a expressão algébrica da família das funções afins? O que temos estado a trabalhar?*

A – f(x) = ax + b

Prof.ª – Ora bem nós já vimos que a e b podem ser quaisquer valores. Vimos até funções que tinham valores muito diferentes. O que eu vos proponho hoje é que trabalhem com valores diferentes de a e de b e percebam que características eles trazem para o gráfico da função. Já agora, o gráfico de uma função afim é? Alguém me sabe dizer?

Vários alunos: Uma reta.

Prof.ª – Uma linha reta. OK, o que eu quero saber é que tipo de influência que o valor de a e de b tem no comportamento dessa reta. Entendido?

Enquanto distribuiu o enunciado da tarefa, a professora informou ainda os alunos de como pretendia que se organizassem e o tempo de que dispunham para realizar a tarefa que pretendia que fosse ainda discutida nesta mesma aula de 50min:

Prof.ª – Agora o que eu vou querer? Formam pares de alunos, telemóvel ou computador, eu vou-vos dar a atividade e vamo-nos focar na questão n.º 1, até porque toda a tarefa está prevista para 90min pelo que não teremos tempo para concluir. Quero concluir mesmo a 1 e discuti-la. É esse o nosso objetivo. Vou passar a distribuir o enunciado da tarefa.

Trabalho autónomo dos alunos

Como habitualmente aconteceu, durante a fase do trabalho autónomo, a professora foi-se movimentando entre os pares de alunos, começando por verificar se tinham o material necessário ou para clarificar se estavam a seguir a sequência proposta, como foi o caso do par questionado pela professora:

Prof.ª – Vocês já estão na 2. mas já responderam à 1. ou sou eu que estou enganada? Veem um código do GeoGebra e não pensam em mais nada! O que pergunta na 1.1.?

A – Como classificas a família de funções dada?

Prof.ª – O que respondem?

A – Funções afim.

Prof.ª – Sim, senhora. Já agora que gráfico vocês esperam que vão obter?

A – O gráfico de uma reta.

Esclareceu igualmente questões de natureza mais técnica que se levantaram para uma melhor compreensão da apliqueta do GeoGebra criada por si para esta tarefa, como no caso da resolução da alínea 2.1. (figura 44):

Prof.ª – Qual é a função que querem obter?

A – g(x) = 2x - 3

Prof.ª – Mas eu olhando para essa função sei identificar os valores de a e de b. Quanto vocês me diriam que seria o a?

A – 2

Prof.ª – E o b?

A – -3

Prof.ª – Os valores de a e b à partida são 1. Então vou ter de fazer variar … Já estou a ver que esse dedinho está no sítio certo! Não precisas estar a clicar, podes arrastar carregando aí na bolinha.

(A aluna arrasta para o lado contrário)

Prof.ª – Então isto tem uma lógica. Arrastando para esse lado o a vai tomando valores cada vez mais negativos, tu queres obter para a o valor 2, como deves fazer?

Figura 44. Realizaçao da questão 1.2.1.

Quando percebeu que existia uma dúvida por parte da maioria dos pares de alunos, deu uma instrução para toda a turma:

Prof.ª – Atenção, a questão 2. tem várias coisas para fazer. À medida que vão respondendo a cada alínea vão passando para tarefas diferentes. Vocês vão perceber isto à medida que vão sendo encaminhados na ficha.

O apoio que, em geral, a professora deu passou por questionar os alunos de forma a reorientá-los, nunca lhes dando as respostas às questões colocadas na tarefa. A título de exemplo, apresentam-se algumas interações observadas durante esta aula, enquanto os pares de alunos procuravam responder a algumas das alíneas da questão 2.

Prof.ª – No gráfico seguinte, faz variar os parâmetros, de modo a obteres a representação gráfica de uma função linear. Como deve ser a representação gráfica de uma função para que ela seja linear?

A –Tem de ser uma reta que passa na origem.

Prof.ª – Então vamos lá.

Prof.ª – O que fizeram para ter o gráfico a passar na origem? Tiveram de mexer num parâmetro em especial ou não?

A – O zero tem de ficar sempre igual.

Prof.ª – O zero no a ou no b?

A – No b.

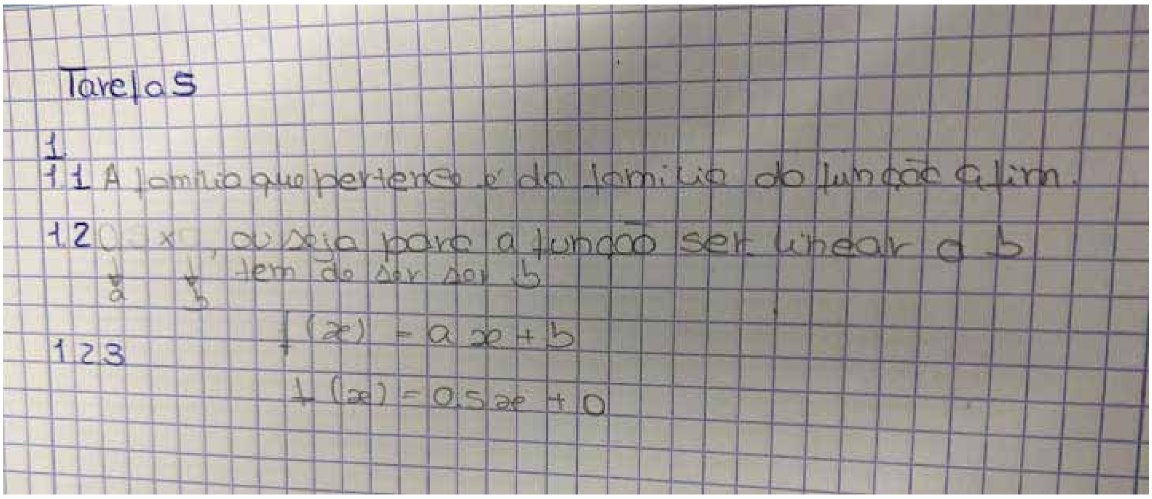
Prof.ª – Então foi isso que vocês fizeram para garantir que a reta passe pela origem, que se trata de uma função linear.

A – O a pode ser qualquer, temos é de garantir que o b é zero para que a função seja linear.

Prof.ª – Muito bem. Onde diz explica é para explicar.

Alguns pares de alunos foram fazendo registos no caderno a acompanhar as suas resoluções (figura 45):

Figura 45. Registos no caderno realizados por um par de alunos



Prof.ª – O que já fizeram?

A – Estamos no 2.3.

Prof.ª – Então vamos explicar. Vocês já me explicaram, agora quero com palavrinhas.

A – Para obter uma função linear temos de ter b = 0.

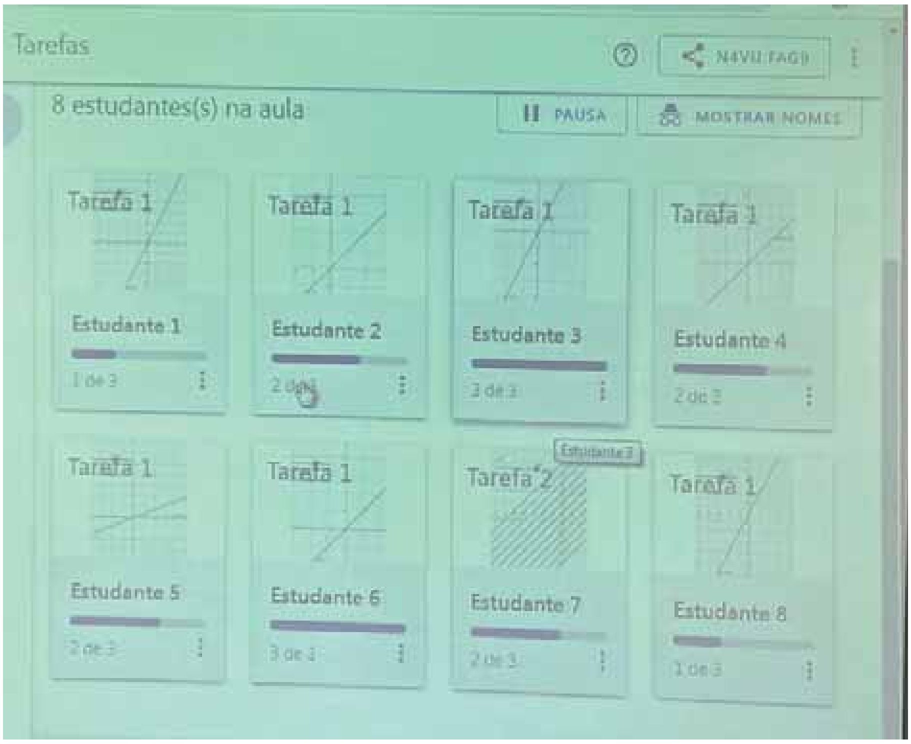
Prof.ª – E o a?

A – O a pode ser um número qualquer.

Prof.ª – Muito bem.

Como habitualmente, a professora foi também acompanhando o desenvolvimento do trabalho da turma através do *Classroom*, onde se percebe que os estudantes trabalharam com diferentes funções (figura 46):

Figura 46. Exemplos de produções de diferentes pares de alunos da turma



O objetivo principal da tarefa é que os alunos generalizem a variação das diversas funções de acordo com a variação respetivamente dos parâmetros *a* e *b*. Percebe-se que, nesta etapa, o principal objetivo da professora era que os alunos fossem capazes de compreender essa variação sem ainda enunciarem as generalizações com grande rigor, como é percetível na interação que a seguir se apresenta:

Prof.ª – vocês estão a variar o valor de um parâmetro mas não estão a ver que tipo de mexida está a acontecer na reta, não estão a ver como se comportam no gráfico. Olhem aí, estão a fazer b = -1, b = -2, b = -3, o que está a acontecer com as retas?

A – Estão a ir para aquele lado, para os valores negativos.

Prof.ª – Quando o b está a ir para -3 o que identificam aqui?

A – Toca no -2, no -3.

Prof.ª – Toca em que eixo?

A – No das ordenadas.

Prof.ª – Isso mesmo.

Prof.ª – Se eu pusesse o b no 100, o que aconteceria à reta? Para já iria ser paralela a estas ou não?

A – Sim, mas iria cruzar no 100.

Prof.ª – A reta iria intercetar o eixo das ordenadas no 100.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias-chave

Ao contrário do inicialmente esperado pela professora, a fase da discussão coletiva acabou por acontecer apenas no início da aula seguinte. Para apoiar a discussão, a professora projetou a apliqueta reproduzindo o que os alunos tinham feito. Passou rapidamente pelas primeiras alíneas da tarefa que tinham sido realizadas com correção por todos os pares de alunos, para se centrar naquilo que era de facto novo e era o propósito principal da tarefa. Assim, as questões orientadas pela professora começaram realmente na alínea 2.4. que pedia para se fixar um valor para o parâmetro *a* à escolha dos alunos e fazer variar o parâmetro *b*:

> *Prof.ª – A seguir pediam-vos para fixar um determinado parâmetro. Qual?*
>
> *A – O a.*
>
> *Prof.ª – Vou escolher o valor do grupo do P. Eles consideraram a = 5. Ficaram com uma expressão 5x + uma dada quantidade. Quando eu começo a variar o b o que verificam? O que vos surgiu no gráfico?*
>
> *A – O valor do b vai mudando.*
>
> *Prof.ª – E o que acontece à reta, como se movimenta?*
>
> *A – As retas vão ficando paralelas entre si.*
>
> *Prof.ª – O a está fixo, logo não está a mudar a posição da reta, mas à medida que o b varia a reta desloca-se. Aqui tenho valor de b = 2. A reta cruza o quê?*
>
> *A – Cruza no 2.*
>
> *Prof.ª – E se eu mexer agora para o 4?*
>
> *A – Vai subir para 4.*
>
> *Prof.ª – O que é que eu vou obter como representação gráfica? Que posição esta reta ocupa em relação à anterior?*
>
> *A – São paralelas.*
>
> *Prof.ª – Se o b for -1 o que é que iriamos obter?*
>
> *A – A reta ia tocar no -1.*
>
> *Prof.ª – Eu iria obter uma linha quê?*
>
> *A – Uma reta*
>
> *Prof.ª – Se eu mantiver o valor de a e alterar o de b vou obter uma reta paralela à anterior.*
>
> *A – Vamos obtendo retas paralelas que vão cortar o eixo dos y no valor de b.*

Pode afirmar-se que a discussão foi ocorrendo de forma pouco animada e participada. Tal facto levou a professora a afirmar para a turma: "Vocês hoje estão um bocadinho apáticos… Vamos ao próximo [2.5.]". A discussão continuou muito centrada na professora, à imagem da discussão anterior. A formulação das generalizações pretendidas também não foi fácil, como se pode verificar no diálogo seguinte:

> *Prof.ª – E à medida que eu vou mexendo no a, dando-lhe valores negativos: -1, -2, … o que estamos a ver com as funções?*
>
> *Silêncio*
>
> *Prof.ª – Então para a =-3. Está a aproximar-se ou a afastar-se do y?*
>
> *A – A aproximar.*
>
> *Prof.ª – E agora a = -4?*
>
> *A – A aproximar.*
>
> *Prof.ª – E agora a = -5?*
>
> *A – A aproximar.*
>
> *Prof.ª – Agora o que eu pretendia era se conseguissem estabelecer uma relação, primeiro em relação ao crescimento e aos valores de a. Quais os valores de a que fizeram com que as funções fossem sempre crescentes?*
>
> *A – Valores positivos.*
>
> *Prof.ª – Muito bem. Se a>0 ela vai ser sempre crescente. Se o a for negativo a função já vai ser o quê?*
>
> *A – Decrescente.*
>
> *Prof.ª – Agora em relação à aproximação ao eixo do y? O que me conseguem dizer?*
>
> *A – Quanto maior for o a mais próximo fica do y.*
>
> *Prof.ª – OK, da parte do a positivo. Também funciona assim nos negativos?*
>
> *A – Sim.*
>
> *Prof.ª – Sim? Então vamos lá ver. Onde está para a = -1?*
>
> *A – Sim.*
>
> *Prof.ª – Para a = -2 é a que vem a seguir. Para a =--3 é a seguinte. A= -4 seguinte… Ela começa a aproximar-se do eixo do y, mas -4 é maior do que -1?*
>
> *A – Não.*
>
> *Prof.ª – Então o que posso dizer?*
>
> *A – À medida que o a vai ter valores negativos mais pequenos, a reta vai-se aproximando do eixo do y.*
>
> *Prof.ª – Uhm, uhm, e quando estivermos nos positivos?*
>
> *A – Quando o a vai tomando valores maiores positivos, vai-se aproximando do eixo do y.*

Nesta fase da discussão, foi relembrado o significado de valor absoluto, conceito trabalhado no ano anterior, e de valores simétricos para no final ser tirada pela professora a conclusão: "Pode-se resumir dizendo que quanto maior for o valor absoluto de *a* ela aproxima-se do eixo do y".

Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "Função afim em movimento" numa turma do 8.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

As primeiras alíneas da questão em análise foram sendo resolvidas com sucesso pelos alunos. Estes evidenciaram ter aprendido os conceitos de função afim e função linear, bem como as suas representações gráficas e expressões analíticas. Para além disso, estes alunos não só identificaram e distinguiram os parâmetros a e b, como foram capazes de explicar por palavras suas o que foram observando no que diz respeito ao comportamento das funções com a variação do parâmetro b. No que respeita à variação do parâmetro a, os alunos evidenciaram muitas dificuldades em descrever as variações que estavam a observar, isto é, a formular uma conjetura.

A apliqueta apresentada não corresponde exatamente à que foi usada com os alunos, porque após a reflexão posterior à aula, foi considerado que a visualização simultânea de todas as retas dificultou a associação entre o valor de cada um dos parâmetros e a representação gráfica da função correspondente.

A representação das retas sem a ativação do "rasto" permite reduzir o número de retas visualizadas para que a influência do valor do parâmetro possa ser mais facilmente associada à representação gráfica.

Capacidades matemáticas transversais

A formulação de generalizações levantou muitas dificuldades aos alunos, acabando por ser a professora a enunciá-las. O uso de linguagem matemática adequada e em particular linguagem simbólica nem sempre foi devidamente usada pelos alunos. Para comunicar, os alunos usaram sobretudo uma linguagem recorrendo a palavras mais habituais no seu discurso e formulando frases incompletas. Os alunos evidenciaram saber usar representações múltiplas passando da representação gráfica de uma função para a sua expressão analítica e vice-versa.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Esta tarefa exigia que os alunos experimentassem para vários valores, tantos quanto os necessários, de modo a compreender uma regularidade no comportamento das várias funções em ordem à variação de um dos parâmetros. Depois de os alunos compreenderem que era necessário realizar essas explorações, revelaram ter a perseverança adequada para o fazerem. Foi igualmente interessante verificar que esses diversos valores não foram necessariamente os mesmos entre os pares de alunos. Essa diversidade também revela uma certa autonomia/ iniciativa por parte dos alunos.

Tarefa — Vela a arder

Enunciado da tarefa

Vela a arder

Pretende-se estudar a forma como uma vela arde.

Para tal observa o vídeo disponível no seguinte endereço:

http://www.youtube.com/watch?v=OF1HB-yv4fY

Para fazer medições (em pixeis) usa o programa "Pixel Ruler" (já instalado no computador, e disponível para download em https://pixel-ruler.en.softonic.com/?ex=DINS-635.0).

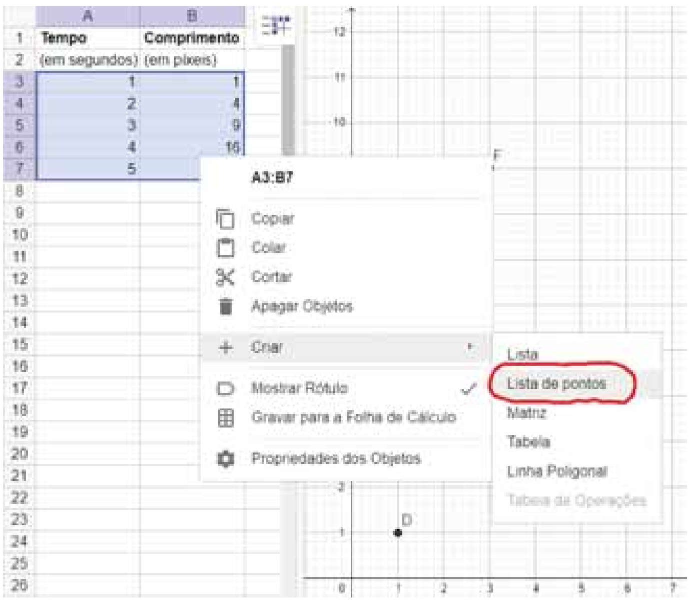
1. Quantos píxeis mede a vela, antes de começar a arder?

   Acede à tarefa do GeoGebra com o código **BUMG VM7J** e regista, na folha de cálculo, o valor determinado anteriormente.

   Atenção: Regista, na folha de cálculo, o tempo decorrido, expresso em segundos, e o comprimento da vela expresso em píxeis.

2. No vídeo, desloca o cursor do tempo, escolhe oito momentos (em segundos) diferentes. Mede a altura da vela (em píxeis) e procede aos respetivos registos na folha de cálculo do GeoGebra.

3. Representa os pontos que recolheste, no referencial cartesiano, à direita na tarefa do GeoGebra. Para tal utiliza o botão do lado direito do rato, seleciona as duas colunas e, em seguida, escolhe a opção "Criar" e depois "Lista de pontos".



4. Os pontos que marcaste sugerem-te alguma representação gráfica familiar? Qual?

5. Movimenta os pontos A e B, disponibilizados na janela gráfica da Tarefa do GeoGebra, e arrasta-os para que a reta por eles definida se ajuste, o melhor possível, com os restantes pontos.
   - 5.1. A reta que definiste é o gráfico de uma função. Qual a grandeza representada em cada um dos eixos?
   - 5.2. Qual a sua expressão algébrica?
   - 5.3. Tendo por modelo a expressão algébrica anterior, indica:
     - 5.3.1. o tamanho da vela (píxeis) ao fim de 11 minutos.
     - 5.3.2. o tempo (em segundos) que demorará a vela a ficar reduzida a metade.
     - 5.3.3. o tempo (em segundos) que a vela permanecerá acesa.

Uma possível extensão da tarefa

6. Recorrendo de novo ao vídeo, faz medições que permitam descobrir:

   6.1. Quantos centímetros media a vela antes de começar a arder? Explica o teu raciocínio.

   6.2. Quanto tempo (em segundos) passou para que fosse queimado 1 cm da vela? Explica como chegaste à resposta.

   6.3. Escreve a expressão algébrica da função que te permite obter a altura da vela (em centímetros) em função do tempo (em segundos) decorrido.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 8.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópico
Conteúdos matemáticos	Funções	Funções afins
Capacidades matemáticas transversais	Representações matemáticas	Representações múltiplas Conversões entre representações Linguagem simbólica matemática
	Conexões matemáticas	Modelos matemáticos
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da Matemática

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Modelar situações da realidade através de funções afins;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos, em particular recorrendo à linguagem simbólica matemática;
- Interpretar matematicamente situações do mundo real e construir modelos matemáticos adequados;
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com os outros;
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em situações da realidade.

Recursos

Link do vídeo da "Vela a arder" disponível no *Youtube*.
Tarefa do Geogebra.
Programa Pixel Ruler" (disponível através de link de instalação a enviar aos alunos uns dias antes da aula para que possam instalá-lo nos seus computadores).
Computadores dos alunos.
Enunciado escrito da tarefa.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

O valor observado por cada aluno varia de acordo com a resolução do monitor que estiver definido e com a dimensão da janela em que estiver a ser reproduzido o vídeo (por exemplo 279px). A questão tem o objetivo de assegurar que os alunos conseguem fazer a medição em ambiente digital controlando o seletor do tempo, no vídeo, e a manipulação adequada da régua.

Questão 2

Os alunos devem obter 8 medições (do tempo e do comprimento correspondente da vela), e escrever os 8 pares de dados na folha de cálculo do GeoGebra disponibilizada, com o cuidado de registar os valores relativos ao tempo em segundos. Os valores obtidos por cada grupo serão diferentes, como é exemplificado na figura 47.

Figura 47. Exemplo do registo esperado

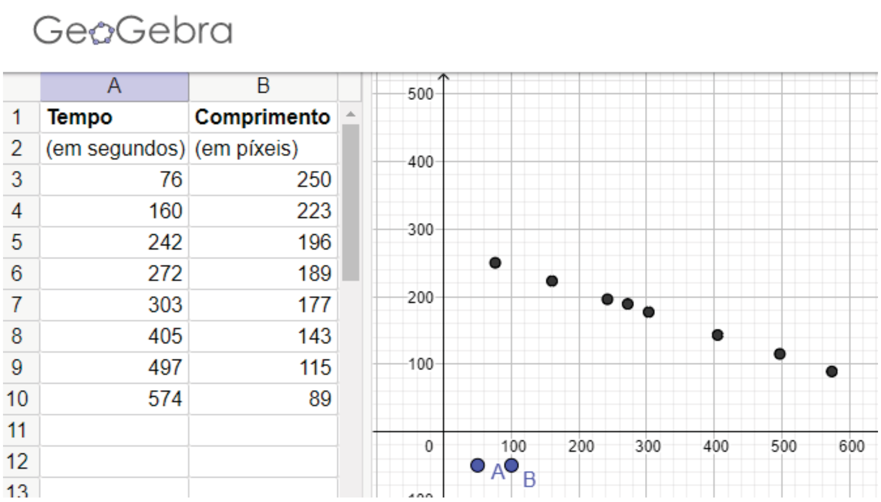
GeoGebra

	A	B
1	**Tempo**	**Comprimento**
2	(em segundos)	(em píxeis)
3	76	250
4	160	223
5	242	196
6	272	189
7	303	177
8	405	143
9	497	115
10	574	89
11		

Questão 3

Usando a função do GeoGebra que permite a representação dos pontos, a partir de duas colunas da folha de cálculo, os alunos devem obter a representação gráfica dos pontos definidos pelas suas coordenadas na folha de cálculo, como é exemplificado na figura 48.

Figura 48. Exemplo esperado da representação dos pontos



Questão 4

É esperado que, independentemente das medições de cada grupo, os pontos estejam aproximadamente alinhados sobre uma reta de declive negativo, e que os alunos consigam identificar esse modelo matemático.

Note-se que a situação real descrita não é representada por uma reta, mas sim por um dos seus segmentos de reta, cujos pontos extremos são respetivamente (0, 279) e (840, 0).

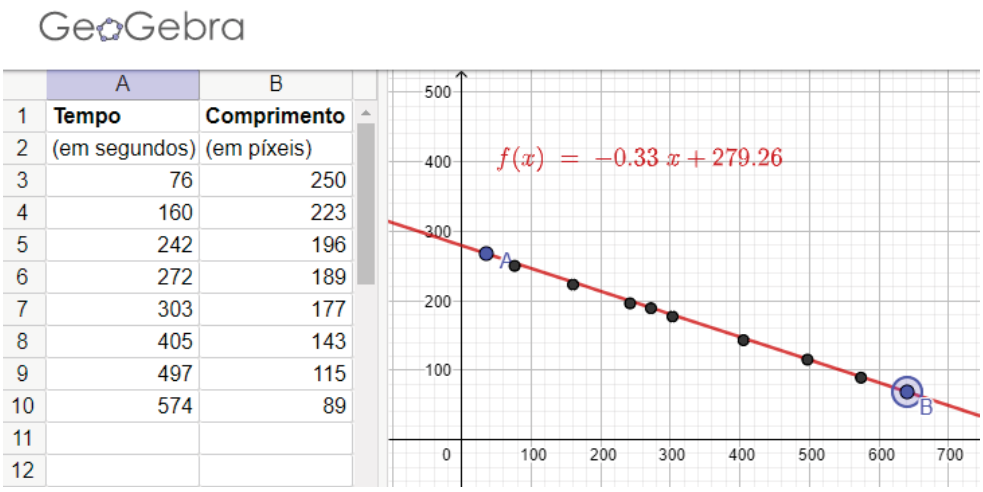
Questão 5.1

Os alunos devem associar os valores correspondentes ao eixo das abscissas como o tempo (medido em segundos) e os valores correspondentes ao eixo das ordenadas como o comprimento da vela (medido em pixels).

Questão 5.2

A expressão algébrica deve ser lida no gráfico depois de selecionar um ajuste considerado razoável com a manipulação dos pontos A e B, como é exemplificado na figura 49, em que a expressão algébrica obtida é $f(x) =- 0,33x + 279,26$.

Figura 49. Exemplo esperado do modelo resultante do ajuste da reta



Questão 5.3.1

Como este valor não pode ser obtido pela observação do vídeo, a resposta deve ser o cálculo da imagem do objeto 660 (o valor em segundos correspondente a 11 minutos: $11 \times 60 = 660$), ou seja, no caso exemplificado:

$$f(660) =- 0,33(660) + 279,26 = 61,46 \text{ px}$$

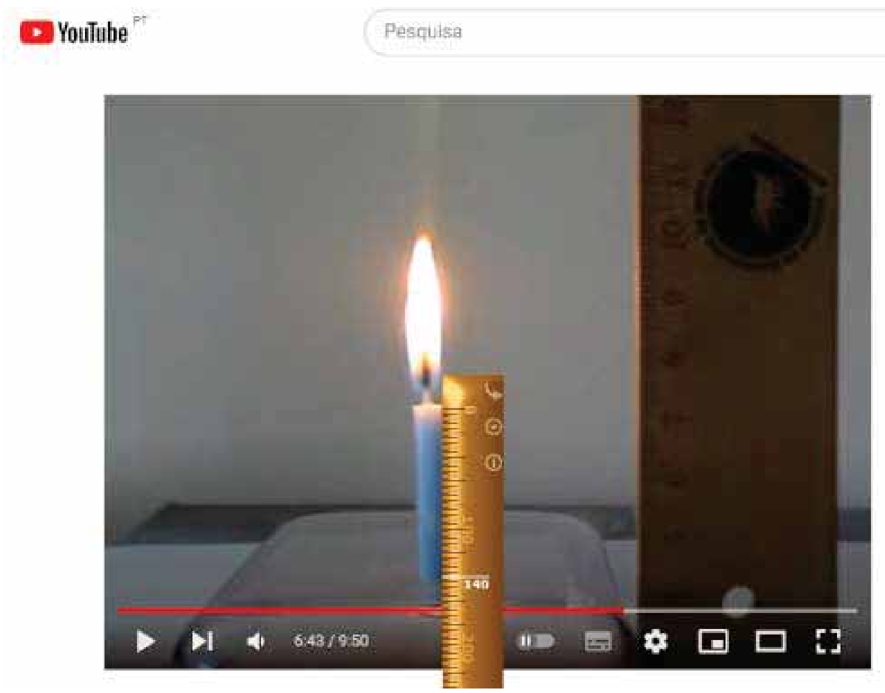
Questão 5.3.2

Os alunos poderão considerar dois valores que provavelmente serão diferentes para o valor inicial da vela: o que foi identificado na questão 1, ou, em alternativa, a ordenada da origem da equação da reta ajustada ao conjunto de pontos. No exemplo apresentado, respetivamente 279 ou $279,26$. Depois devem calcular metade deste valor, e o objeto que lhe corresponde com recurso ao modelo:

$$\frac{279}{2} = 139,5 \text{ e } 139,5 = -\ 0,33x + 279,26 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \simeq 423,5 \text{ segundos}$$

Os alunos podem alternativamente calcular o comprimento correspondente a metade do valor inicial, identificá-lo na régua e ajustar o tempo para obter o valor correspondente, como exemplificado na figura 50, obtendo uma resposta de 7min e 4s, mas assim não estarão a usar a expressão algébrica como é solicitado no enunciado.

Figura 50. Obtenção do tempo correspondente a metade do comprimento inicial



Questão 5.3.3

Como este valor não pode ser obtido pela observação do vídeo, a resposta deve ser o cálculo do zero da função, ou seja os alunos devem identificar o momento em que a vela se apaga como correspondente a um comprimento de 0 (zero) pixéis, e depois resolver a equação. No caso exemplificado:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,33x + 279,26 = 0 \Leftrightarrow 279,26 = 0,33x \Leftrightarrow \frac{279,26}{0,33} = x,$$ isto é, aproximadamente 846s ou 14,1min.

Questão 6.1 (extensão)

Os alunos devem compreender que a régua observável no vídeo permite estabelecer uma escala que relaciona as medições realizadas em pixeis com o comprimento real da vela, em centímetros. Para tal, devem medir (em pixeis o comprimento de 1 cm na régua) e estabelecer a relação de proporcionalidade direta para obter o comprimento (em centímetros).

Para o exemplo apresentado, $1\ cm = 51\ px$, pelo que:

$$\frac{x\ cm}{1\ cm} = \frac{279\ px}{51\ px} \Rightarrow x \approx 5,5 \text{ cm}$$

Questão 6.2 (extensão)

Os alunos devem proceder como na questão 5.3.2 e depois utilizar a relação de proporcionalidade estabelecida na questão 6.1. Por exemplo, poderiam verificar que como $1cm = 51px$, o tempo que deve passar para que seja queimado 1 cm, corresponde a uma diminuição de 51px, ou seja é o tempo correspondente a um comprimento de $279 - 51 = 228\ px$, pelo que usando o modelo, temos:

$$f(x) = 228 \Leftrightarrow -0,33x + 279,26 = 228 \Leftrightarrow 279,26 - 228 = 0,33x \Leftrightarrow \frac{51,26}{0,33} = x,$$ ou seja, aproximadamente 155,3 segundos.

Em alternativa podemos considerar que como são necessários 846 segundos para queimar toda a vela e ela tem um comprimento de aproximadamente 5,5 cm, então para queimar 1 cm são necessários $\frac{846}{5,5} \approx 154$ segundos.

É importante discutir a razão da diferença entre estes os dois valores, referindo os arredondamentos e as aproximações que foram sendo realizadas na resolução do problema.

Questão 6.3 (extensão)

A partir da proporção estabelecida na questão 6.1, podemos fazer a conversão do modelo da questão 5.2 ($f(x) =- 0,33x + 279,26$) que relaciona a altura da vela, em pixels, em função do tempo, para um modelo que estabeleça a mesma relação, mas com a altura da vela em centímetros.

Assim, se 51 px correspondem a 1 cm, temos que 0,33 px correspondem a $\frac{1}{51} \times 0,33 \approx 0,0065$ cm, a que corresponde o valor do declive da reta sobre a qual está o gráfico do modelo.

Relativamente à ordenada na origem da mesma reta, sabemos que a vela inicialmente media 279 px (no exemplo considerado) a que correspondem $\frac{1}{51} \times 279 \approx 5,47$ cm.

Ou seja, o modelo ajustado para a variação do comprimento da vela em centímetros é:

$$f(x) =- 0,0065x + 5,47$$

Será interessante discutir com os alunos que este modelo deve ser o mesmo, independentemente da resolução do monitor que estiver definido e da dimensão da janela em que estiver a ser reproduzido o vídeo, não considerando erros de medição ou arredondamentos.

Apresentação da tarefa.

O enunciado será distribuído numa folha de papel a todos os alunos. O professor fará uma breve explicação de quais as ferramentas a utilizar e a sua finalidade na consecução da tarefa. Tempo previsto 5min.

Trabalho autónomo

Os alunos trabalharão em grupos de quatro elementos. Na aula anterior foi-lhes pedido que trouxessem o computador para esta aula, e que instalassem as ferramentas necessárias para a execução da tarefa. O professor irá circular pelos grupos verificando o que vão fazendo e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 70min.

Discussão com toda a turma

o professor solicitará aos alunos que expliquem como pensaram, proporcionando o confronto entre diferentes opiniões, incentivando-os a fundamentarem as suas ideias. Um aspeto relevante a ter em conta nesta discussão é o facto de os grupos não terem os mesmos valores, de trabalharem com expressões algébricas, provavelmente, distintas mas que conduzem a respostas finais semelhantes.

Deverá ser discutida a relevância do contexto para estabelecer o domínio da função. O processo de modelação deve valorizar que o modelo matemático não tem sentido para valores negativos do tempo, nem para valores negativos do comprimento da vela. Tempo previsto 25min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Manusear a régua digital	o que queres medir? Em que posição está o objeto a medir? A régua e o objeto a medir estão na mesma posição?
Converter o tempo (minutos e segundos para segundos)	Qual o tempo registado no vídeo? Quantos segundos tem um minuto?
Identificar as variáveis em estudo	Que informação recolheste com a régua? Que outra informação recolheste com o vídeo?
Identificar as variáveis representadas em cada um dos eixos	Que variáveis estão em estudo? Escolhe qualquer ponto do gráfico e com as suas coordenadas vê a que corresponde ao eixo horizontal e ao eixo vertical, relacionando com as variáveis representadas na tabela ao lado.
Relacionar as variáveis em estudo com a expressão algébrica	Quais são os valores que estão representados no eixo do x? E no eixo do y?
Reconhecer a importância de trabalhar com o modelo encontrado	Quais os valores que são pedidos? Que relação está presente na função encontrada?

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

Tendo presente que a tarefa que iria ser proposta aos alunos tinha características distintas do habitual, a professora sentiu a necessidade de chamar a atenção dos alunos para esta situação:

> *Prof.ª – Hoje, tal como vos tinha dito para trazerem o computador, vamos desenvolver uma tarefa um pouco diferente do que estão habituados. Vamos ter que cruzar algumas plataformas. Nós temos de utilizar o vídeo que está no Youtube, uma coisa que o G. já está a utilizar, que é uma régua que mede os píxeis do computador, e uma folha de cálculo do Geogebra, com a parte gráfica. Vamos trabalhar uma atividade de modelação, ou seja, trabalharemos com uma situação da realidade que terá um modelo semelhante a um modelo matemático gerado por nós. Vamos tentar ver que modelo matemático é esse que vamos encontrar. É esse o objetivo. Logo que vos distribua a tarefa leiam-na com atenção de forma a perceberem os passos que têm de passar para o seu desenvolvimento. Está bem, entendido?*

Surgiu, no entanto, alguma perturbação entre a maioria dos alunos. A professora rapidamente se apercebeu que estes não instalaram no seu computador o programa "*Pixel Ruler*", muito embora o tenha enviado aos alunos com bastante antecedência:

Prof.ª – Instalou?

A – Está a instalar.

Prof.ª – OK, então instalem lá. E aí atrás está instalado?

A – Está a instalar.

Prof.ª – Está a instalar agora! Ainda bem que a professora teve o cuidado de na semana passada ter enviado o link, via whatsApp, enviei para o Classroom e é possível chegar ao dia em que se vai realizar a tarefa e não ter o material. É fantástico! Apenas um computador tinha o programa, todos os outros não o têm instalado. Vamos lá instalar a régua.

Depois de instalado o programa, que demorou cerca de 10min, a professora chamou a atenção para o que deviam fazer:

Prof.ª – Ora o que nós vamos fazer é a simulação de uma vela a arder. É natural que eu não trouxesse uma vela e a pusesse a arder e ficasse à espera que ela ardesse do princípio ao fim. Vocês têm um vídeo que demora cerca de 10 m. Não vamos ficar a ver a vela a arder durante este tempo. Vamos dar saltos no vídeo, fazendo com a barra da progressão do vídeo, saltando de pontos em pontos e depois com a régua de medição vamos tentar medir os píxeis que correspondem à altura da vela e vamos retirando essas informações, quer em segundos, quer em altura de píxeis. Temos de meter a régua na vertical. Estou a disponibilizar o vídeo na Classroom. Diz "Vídeo para a tarefa de modelação".

Finalmente, os alunos estão em condições de começar a trabalhar a tarefa.

Trabalho autónomo dos alunos

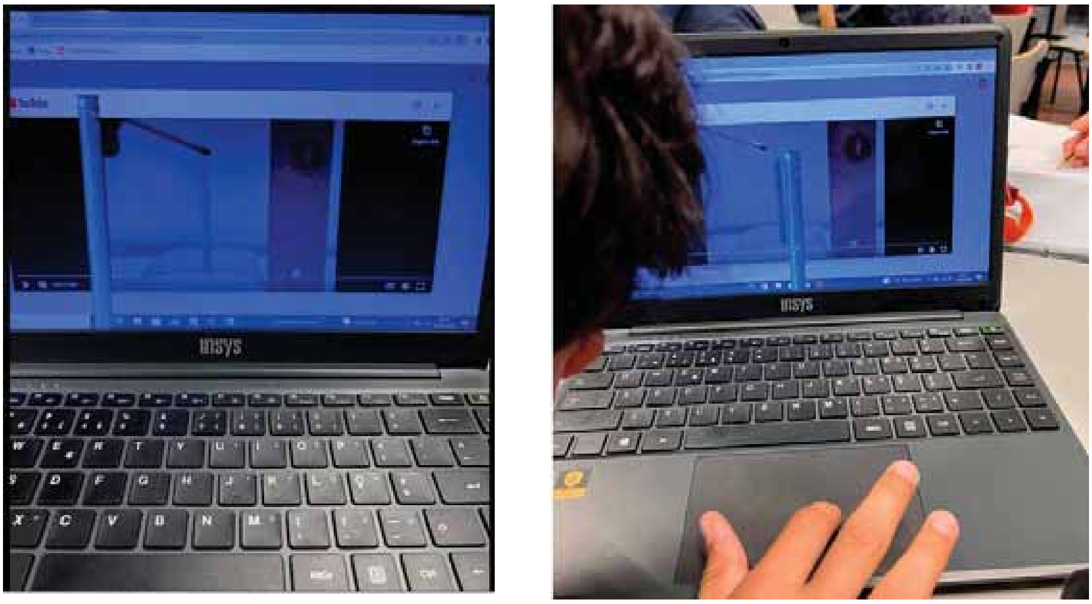
Ao iniciar-se o trabalho autónomo, a professora voltou a chamar a atenção para os cuidados que os alunos deveriam ter para a recolha dos valores necessários para responder a algumas das questões:

Prof.ª – Atenção vocês podem ter de movimentar a régua de acordo com a medição. Têm que ajustar a régua de acordo com as vossas necessidades. Eu vou entregar a ficha. Leiam primeiro o que se pede, o que é solicitado, para saberem o que têm de fazer. O vídeo está na classroom.

A professora foi circulando pelo grupo de alunos, interagindo com eles de acordo com a situação com que se deparava, como seja: "Já leste o enunciado da tarefa?"; "Não sei se colocados desta forma são capazes de ver o que se passa no vosso computador"; "Vais buscar a régua e ajustas de acordo com as tuas necessidades"; "Está no zero? Não me parece que esteja. Já está nos treze segundos, o que é que eles nos pedem?".

Para responderem à questão 1., os alunos deveriam parar a imagem do vídeo antes da vela ser acesa e usar a régua dos pixéis, colocada na vertical, para medir o comprimento da altura da vela. A figura 51 ilustra as medições feitas por dois grupos de alunos, seguindo os procedimentos adequados.

Figura 51. Medições da altura da vela antes de ser acesa



Para responder à questão 2, os alunos procederam de forma análoga à anterior, mas agora considerando diversos momentos da vela acesa. Um ou outro grupo de alunos foi lendo os valores mas não os registou de imediato, levando a professora a chamar-lhes a atenção: "Convém irem registando, não convém confiar apenas na memória…". No geral, no entanto, esta etapa da resolução da tarefa foi realizada sem problemas. Os alunos registaram, na folha de cálculo do GeoGebra, os segundos e as respectivas medidas das alturas da vela.

Embora de forma não geral, uma dificuldade que surgiu nesta fase do trabalho foi os alunos terem de converter os minutos em segundos para registar na folha de cálculo do Geogebra para posterior marcação dos pontos no referencial. Tal situação é ilustrada no seguinte extrato de interação entre a professora e um grupo de alunos:

Prof.ª – O que estão a fazer?

A – Estamos a medir os oito pontos e a registar.

Prof.ª – Já viram em que unidade devem registar os pontos?

A – Em segundos.

Prof.ª – Em segundos. Como vão fazer? Está lá 1m e 21s. Quantos segundos são?

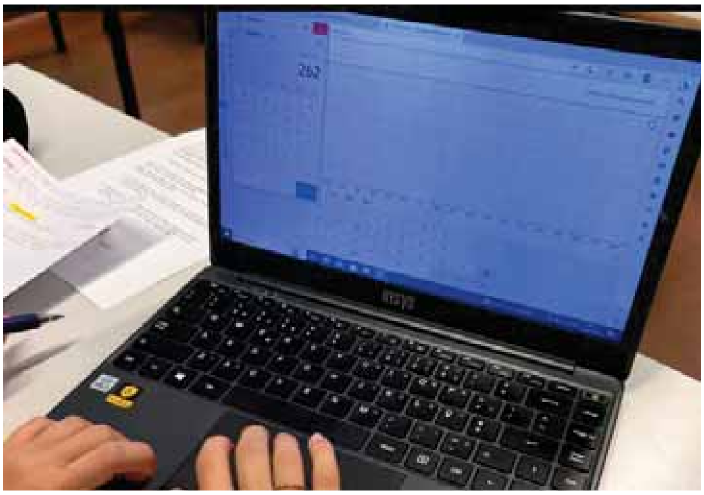
A – 21s.

Prof.ª – Ah é? Chego aqui e ignoro o 1m?

A – Ah não. Vai ser 60s + 21s = 81s

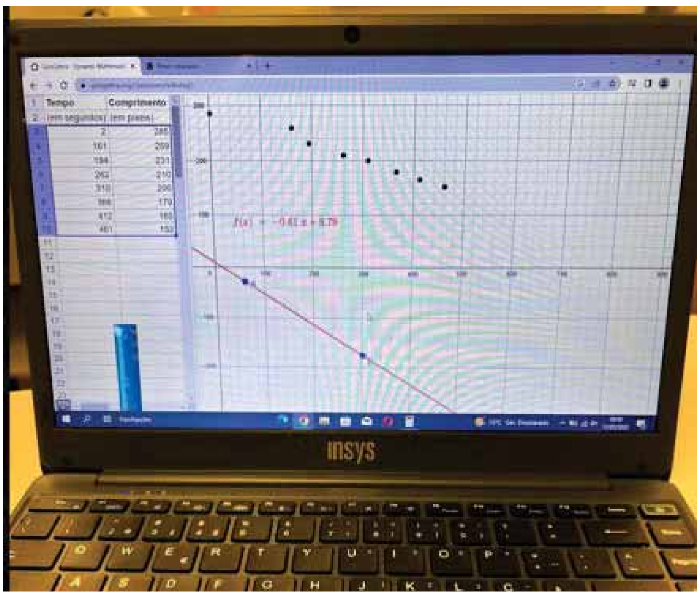
De seguida, passou-se ao registo dos pares de pontos, no referencial cartesiano que dispunham (figura 52).

Figura 52. Resposta à questão 3.



Depois de marcados os pontos no referencial, os alunos facilmente avançaram com a possibilidade dos pontos que tinham marcado estarem sobre uma mesma reta (figura 53).

Figura 53. Resposta à questão 4.



A resposta a esta questão não pareceu ter levantado grandes dificuldades aos alunos, para além do recurso a uma linguagem matemática adequada:

Prof.ª – Se olharem para os pontos que marcaram no referencial, o que vos parece?

A – Estão alinhados

Prof.ª – E isso o que vos sugere? Qual será a representação gráfica?

A – Linear

Prof.ª – Linear? Eu sei o que vocês estão a pensar. Estão a associar o linear à linha, é isso? Mas a função linear é representada graficamente por uma reta que passa onde?

A – Na origem.

Prof.ª – E acham que essa passa? Se eu unir aqueles pontos obtenho uma reta que passa na origem?

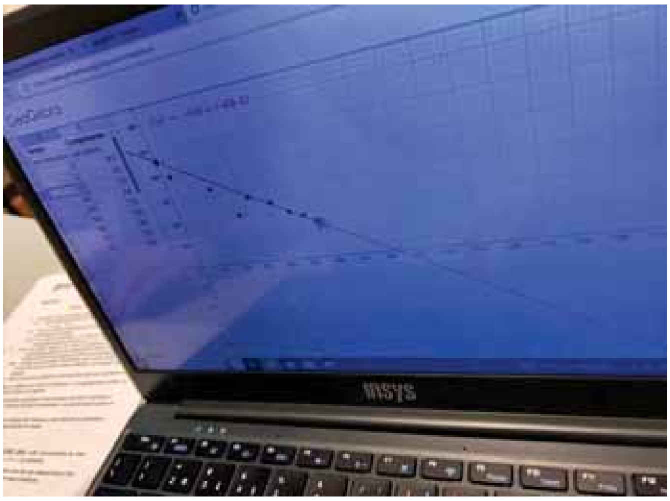
A – Não

Prof.ª – Ela não é linear, é afim.

A – É isso.

Por tentativa e erro, e movimentando os pontos A e B, disponibilizados na janela gráfica, como indicado no enunciado da tarefa, os alunos conseguiram desenhar uma reta que melhor se ajustava aos pontos marcados (figura 54).

Figura 54. Produção de um grupo de alunos



A expressão algébrica da função que modela a situação de onde partiram não é naturalmente a mesma obtida em cada grupo como se pode verificar nas figuras 55 e 56.

Por último, tendo a expressão algébrica da função que melhor se ajustava aos valores determinados, os alunos tiveram de calcular valores, quer de objetos, quer de imagens, da função determinada. Contudo, poder-se-á afirmar que a questão 5.3 exigiu que os alunos revisitassem toda a resolução anterior da tarefa uma vez que era necessário ter bem presente o que estava representado no eixo das abscissas e no das ordenadas. Em diversos grupos, houve a necessidade da professora os ajudar a pensar sobre o que tinham feito, em particular sugerindo-lhes que voltassem aos registos feitos na folha de cálculo do GeoGebra:

A – O y é o tempo e o x é o comprimento. Não é?

Prof.ª – Não sei, há bocadinho tinham-me dito ao contrário.

A – Ah é ao contrário…

Prof.ª – Não sei, decidam entre vocês. Vão tentar perceber com aquilo que ali têm. Este primeiro ponto? 442 é o primeiro ponto que tens ali marcado, não é?

A – Uhm, uhm.

Prof.ª – Então vê lá onde está (1, 442). O horizontal é?

A – O tempo

Prof.ª – E o vertical?

A – O comprimento

Prof.ª – Percebeste? Faz a relação com os pontos que tens ali marcados.

Depois de clarificada esta questão, a resposta à questão passou pela resolução de uma equação (figuras 55 e 56).

Figura 55. Resposta de um grupo de alunos à questão 5.3.3

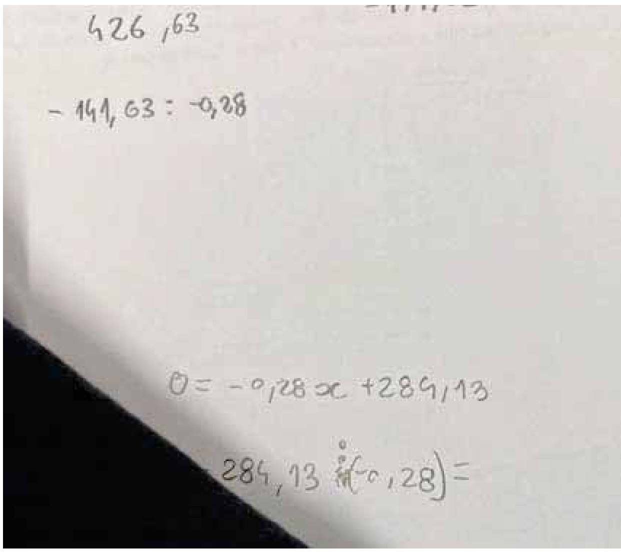
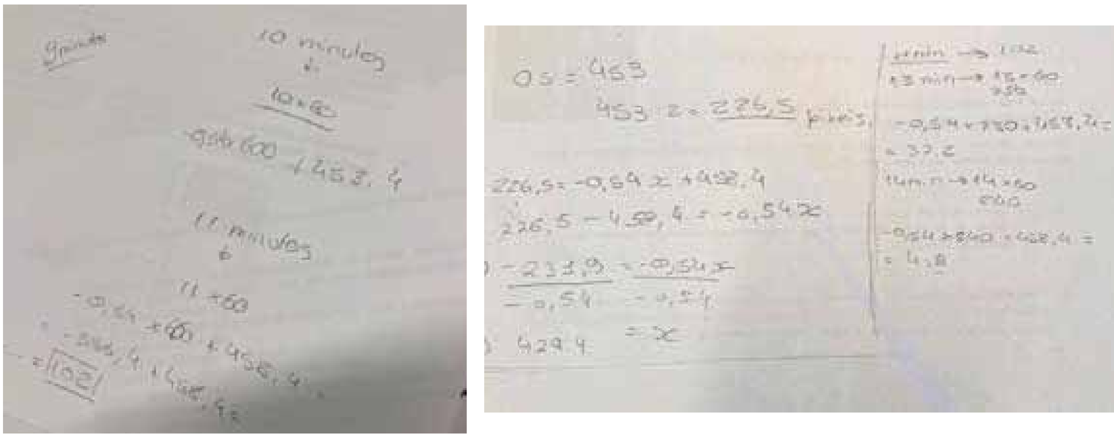


Figura 56. Cálculos para responder às questões 5.3.



Um grupo procurou resolver esta questão recorrendo novamente às medições usando o vídeo, mas esta estratégia não foi permitida pela professora: "Eu percebo o que estão a fazer, mas no enunciado diz: A partir da expressão algébrica anterior.… Conseguem achar esse valor a partir da expressão algébrica a que chegaram?"

É ainda de assinalar que um grupo de alunos resolveu indevidamente uma das equações. A professora aproveitou o erro para lhes chamar a atenção de como olhando de forma crítica para o resultado, os alunos poderiam de imediato perceber que tinham feito algo errado, dada a impossibilidade do resultado obtido:

Prof.ª – Olhem lá para a vossa expressão.

A – 0,33 x

Prof.ª – O que representa o x?

A – O tempo

Prof.ª – Medido em quê?

A – Segundos

Prof.ª – E quantos são?

A – 660

Prof.ª – Vocês somaram os 660 com os 439, mas os 660 estão a depender desse valor (-0,33). Quando chegarem a um valor vejam se faz sentido. Sejam críticos! Eu aqui não precisei de ver os cálculos que fizeram para saber desde logo que o resultado não era possível. Se o comprimento inicial era 400 não pode dar 1000 depois de arder!

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

Numa primeira fase foi feito um balanço dos procedimentos efetuados por cada grupo para chegarem aos valores com que trabalharam. Muitos referiram a visualização, a medição e a conversão como etapas essenciais na resolução do que lhes era proposto. Um grupo referiu que tiveram uma estratégia ao recolher os momentos do vídeo, que lhes pareceu ser facilitadora, tendo escolhido o tempo do vídeo correspondente aos múltiplos de 60 segundos, ou seja, 1min (60s), 2min (120s), 3min (180s),...

A docente procurou que os alunos estabelecessem a comparação entre os valores recolhidos pelos grupos, para cada uma das variáveis, na fase inicial do vídeo, do modelo obtido e do tempo que a vela terá permanecido acesa. Prontamente se apercebeu que os valores relativos ao momento inicial eram muito diferentes. Questionados sobre as razões que conduziram a essa diferença, alguns alunos referiram que tinham trabalhado com uma janela de visualização do *youtube* maximizada e outros não, relacionando-a com este facto. Este factor foi ainda apontado como uma causa para os diferentes modelos apresentados pelos grupos. Um aluno referiu que no grupo dele houve uma discussão séria sobre o ajuste mais correto da reta aos pontos, e que para cada movimento feito pelos elementos do grupo a expressão algébrica variava, reconhecendo que o facto de a reta estar a ser ajustada por eles isso teria implicações no modelo obtido. A turma, sem que soubessem das respostas dos grupos sobre o tempo que levou a vela a arder, foi questionada sobre o que era expectável que acontecesse com os resultados (muito diferentes ou semelhantes?). Alguns consideraram que tinham que ser muito distintos, mas a maioria considerou que tinham que obter o mesmo resultado, dando como explicação o facto de todos os grupos terem estado a trabalhar com o mesmo vídeo, logo a vela teria que levar o mesmo tempo a arder para todos os grupos. Revelados os valores, foi possível perceber que estavam muito próximos uns dos outros, sustentando os argumentos anteriormente apresentados.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "Vela a arder" numa turma do 8.º ano de escolaridade no ano letivo de 2022/23, poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A tarefa em análise apela à modelação de situações da realidade que envolvam funções afins. Os alunos ao compreenderem a situação apresentada teriam de manipular um vídeo e recolher dados, para chegar a um modelo matemático representado por uma função afim. Todos os alunos, revelaram interpretar corretamente a situação proposta, sem grandes dificuldades. No entanto, a maioria dos alunos teve dificuldade em trabalhar com a função afim para obter as respostas às questões apresentadas. A professora procurou ultrapassar essa dificuldade, estabelecendo uma conexão entre as variáveis "x" e "y" presentes no modelo, com as que foram recolhidas através do vídeo, pela contextualização da situação. Ao perceberem o que representava cada uma das variáveis, os alunos de uma forma geral, conseguiram compreender que por vezes teriam de trabalhar equações por forma a obter imagens e objetos de uma função afim. No entanto, no trabalho com as equações foi possível identificar algumas incorreções que prontamente foram corrigidas.

Capacidades matemáticas transversais

Pelas características da tarefa podemos considerá-la uma situação de modelação matemática aplicada a um contexto real. Os alunos ao compreenderem a situação apresentada teriam de obter alguns dados relativos ao tempo (minutos e segundos) e ao comprimento (pixéis) da vela a arder, converter os valores da variável tempo em segundos, representar os pares obtidos numa tabela na folha de cálculo do *GeoGebra*, obter a sua representação gráfica e manipular uma reta que se ajustasse ao conjunto de pontos, para que finalmente obtivessem um modelo que teriam de trabalhar. Todos os alunos, revelaram interpretar corretamente a situação proposta, sem grandes dificuldades. No entanto, a maioria dos alunos teve dificuldade em reconhecer a importância de trabalhar com o modelo obtido, procurando encontrar as respostas às questões apresentadas através da manipulação do vídeo. A professora procurou ultrapassar essa dificuldade, fazendo-lhes ver que o vídeo estaria incompleto e que todos os dados que lhes permitiram chegar ao modelo apresentado, foram recolhidos através desse vídeo e que o modelo sintetizaria as relações entre os pontos utilizados por cada grupo.

Capacidades e atitudes gerais transversais

O pensamento crítico é desenvolvido neste problema, nomeadamente quando os alunos se apercebem que para trabalhar os valores, estes têm de ser convertidos para segundos. Numa situação em concreto, um grupo de alunos recolheu um par de valores, após o momento inicial da vela a arder, verificando que o registo que tinham do comprimento da vela era superior ao que registaram no momento inicial, sentindo a necessidade de retirar esse par e recolher outro.

Dado que o trabalho em grupo é usual na sala de aula de Matemática, os alunos revelaram ser capazes de trabalhar com outros. Também no momento da discussão coletiva, ouvem os outros, aceitam diferentes pontos de vista e confrontam-se.

Por último, a valorização da Matemática ganha expressão com este problema, uma vez que a Matemática permitiu aos alunos, perante a incompletude de um vídeo por eles manuseado, obter respostas sobre o comportamento da vela em momentos não registados pelo vídeo.

Comentários finais

O balanço final da exploração da tarefa "**Vela a arder**" é bastante positivo. Esta tarefa apresenta características diferentes do que até ao momento havia sido proposto aos alunos, por ser uma tarefa com modelação aplicada a um contexto real.

Os alunos reagiram bem à tarefa proposta. Estiveram ao longo dos 100min de aula envolvidos na sua resolução, não havendo qualquer chamada de atenção, por parte da professora, para a necessidade de estarem concentrados no trabalho. A única observação por si realizada deu-se no princípio da tarefa por a maioria dos alunos não terem instalado previamente o programa "*Pixel Ruler 3*" no computador, tal como lhes tinha sido pedido.

As suas principais dificuldades registaram-se no estabelecimento de relações entre as diferentes representações (tabela, gráfico e expressão algébrica) e no reconhecimento da validade do modelo para dar respostas a situações não observáveis no vídeo.

Tarefa — Calcular ou medir diretamente?

Enunciado da tarefa

Calcular ou medir diretamente?

O teu grupo deve proceder à determinação da medida da altura da pirâmide por dois processos diferentes.

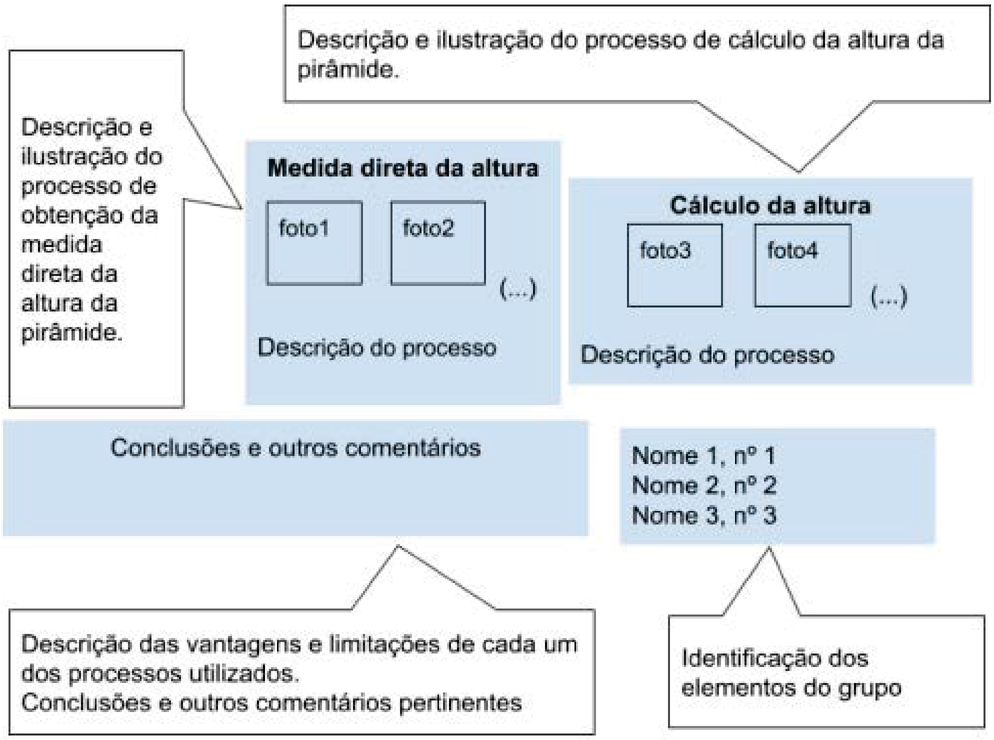
- Medição direta (com uso exclusivo de instrumentos de medição)
- Cálculo da medida da altura

Devem procurar entender quais as vantagens e limitações da utilização de cada um dos processos, ilustrando o trabalho realizado e registando as conclusões, sob a *f*orma de um póster.

Fornecemos um esquema que pode ser usado como base de trabalho, disponível em:

ou na página do *classroom* da turma..

O esquema fornecido aos alunos foi o seguinte:



Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 8.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Figuras planas	Teorema de Pitágoras
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégias
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Conexões matemáticas	Conexões externas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Criatividade
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autorregulação Autoconfiança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Interpretar situações com o Teorema de Pitágoras e resolver problemas que requeiram o seu uso;
- Reconhecer e aplicar etapas do processo de resolução de problemas;
- Comunicar, apresentar e explicar ideias, ouvindo os outros, questionando e discutindo de forma fundamentada;
- Reconhecer e estabelecer conexões matemáticas com outras áreas do saber;
- Apresentar novas ideias individualmente ou resultante da interação com outros;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos;
- Desenvolver a capacidade de analisar as resoluções por si realizadas e melhorá-las.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.
Preparação da estrutura do póster a elaborar pelos alunos e a colocar à sua disposição, ou na página do classroom da turma, ou através do QR-Code colocado no enunciado da tarefa.
Computador ou tablet dos alunos.
Instrumentos de medição (régua e/ou esquadro).
Diversas pirâmides para distribuir, uma por cada grupo de alunos.

Resoluções esperadas dos alunos

Processo 1 (medição direta)

Para a determinação direta da medida do comprimento da altura da pirâmide, os alunos deverão usar os instrumentos de medição (régua ou esquadro) que lhes foi pedido para trazerem, na aula anterior. Um cuidado importante a ter é o de os alunos colocarem o instrumento de medição usado na posição vertical em relação ao plano da base da pirâmide. Também é importante que ao fazerem a leitura, coloquem os olhos à altura da medida que querem ler e alinhem o início da escala da régua com a base da pirâmide.

Os alunos deverão acompanhar o desenvolvimento da sua estratégia tirando fotografias para poderem ilustrá-la no póster.

Processo 2 (cálculo)

Para determinarem a medida de comprimento da altura da pirâmide, os alunos deverão começar por imaginar o triângulo retângulo que tem por um dos catetos a altura cuja medida de comprimento querem calcular e, de seguida, identificar a que correspondem os outros dois lados desse mesmo triângulo.

De seguida, deverão medir com a régua ou o esquadro a base desse triângulo, por exemplo, calculando metade da medida do comprimento do segmento de reta que une dois vértices opostos do polígono regular que constitui a base da pirâmide, se for o caso, e a medida de comprimento da aresta lateral. Por último, aplicando o Teorema de Pitágoras, os alunos devem calcular a medida do comprimento da altura da pirâmide.

Os alunos deverão acompanhar o desenvolvimento da sua estratégia tirando fotografias para poderem ilustrá-la no póster.

Relações entre os processos

Após a comparação dos valores obtidos através de cada um dos processos, que se espera que não sejam demasiado distintos, os alunos deverão analisar as vantagens e as limitações de cada um dos processos.

Para a elaboração do póster deverão descrever, na forma escrita, os processos desenvolvidos, devidamente ilustrados pelos registos fotográficos, e as conclusões a que chegaram .

Exploração da tarefa

Na aula anterior à que os alunos irão realizar esta tarefa, o professor deverá pedir-lhes para trazerem computador ou *tablet* para esta aula, de modo a poderem realizar o póster solicitado, bem como instrumentos de medição (régua e/ou esquadro).

Apresentação da tarefa

O trabalho será iniciado com a distribuição do enunciado da tarefa numa folha de papel a cada par de alunos. Deverá ser verificado se todos os grupos de alunos dispõem do material necessário. Embora o enunciado não seja longo, é bastante distinto do trabalho habitual que é solicitado aos alunos, pelo que provavelmente necessitará de alguma discussão em torno do que é pedido fazer-se. Tempo previsto 10min.

Trabalho autónomo

Os alunos trabalharão em grupos de cerca de quatro. O professor irá circulando pelos grupos verificando o que fazem e apoiando o trabalho que está a ser desenvolvido. Tempo previsto 90min.

Na aula seguinte está previsto fazer-se um balanço global da tarefa e confrontarem-se as diversas conclusões estabelecidas pelos alunos.

Existe a expetativa de que os alunos consigam concluir a tarefa nos 100min de aula. Contudo, está prevista a possibilidade de, se necessário, algum grupo terminar o póster fora da aula.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Compreender a diferença entre os dois processos pedidos	Leiam novamente o enunciado. O que diz o processo 1? Como medem habitualmente? Como costumam fazer?
Ter o cuidado de colocar a régua ou o esquadro na posição correta para fazer a medição do comprimento da altura da pirâmide	Como devem colocar a régua (ou o esquadro)? É indiferente? Porquê? Experimentem em diversas posições. O que verificam?
Atender ao facto da graduação não começar no início do instrumento	Como irão contabilizar esse bocado? O valor obtido vai ser maior ou menor do que aquele que obtiveram? Expliquem-me porquê.
Dificuldade em definir o triângulo	Quais os lados desse triângulo? São capazes de desenhar no caderno esse triângulo? A cada lado do triângulo que desenharam indiquem-me o lado correspondente na pirâmide.
Garantir que o triângulo é retângulo	Como me podem convencer que esse triângulo é retângulo? Qual o seu ângulo reto? Como tenho a certeza de que é reto?
Reconhecer que deve ser aplicado o Teorema de Pitágoras	O que querem calcular? O que podem medir diretamente? Aprenderam alguma coisa na aula de Matemática que vos pode ajudar?
Descrever os procedimentos realizados	Está suficientemente completo? Se alguém que não tivesse assistido à aula saberia tudo o que fizeram? Descreveram todos os passos? Que cuidados tiveram?
Aplicar de forma correta o Teorema de Pitágoras	No triângulo que desenhaste, qual é a hipotenusa? Quais são os catetos? Verifica nos teus registos de aulas anteriores a relação que existe entre os lados de um triângulo retângulo.

Concretização da tarefa na prática

A aula iniciou-se, como habitualmente, com a escrita do sumário: Realização de um trabalho de grupo sobre a tarefa: Calcular ou medir diretamente?

Enquanto ditou o sumário, a professora informou que a tarefa seria feita em grupos de cerca de quatro alunos e questionou-os sobre o que lhes pediu para trazerem:

> *Prof.ª – Já estou a ver alguns computadores, ok. Eu vou distribuir a tarefa a cada um de vós. Já sabem que eu queria que se juntassem em grupos de mais ou menos quatro elementos. Depois vamos acertar. Tínhamos pedido que trouxessem o quê, lembram-se?*
>
> *A – Régua, esquadro e computador.*
>
> *Prof.ª – Régua, esquadro e computador. Há pelo menos um computador por grupo para podermos organizar as coisas? Sim? Pronto. Eu vou-vos entregar a tarefa e depois de vocês a lerem, gostava de falarmos um bocadinho sobre ela, está bem?*

Apresentação da tarefa

A professora deu algum tempo para os alunos lerem o enunciado, acabado de ser distribuído e, de seguida, colocou-lhes algumas questões para se certificar de que compreenderam o enunciado da tarefa:

> *Prof.ª – Então vamos lá ler. Já perceberam qual é o objetivo? Sim? Quem me é capaz de dizer mais ou menos o que vão fazer? D?*
>
> *D – É a determinação da altura da pirâmide.*
>
> *Prof.ª – Que vocês ainda não têm, não é? Eu vou dar a cada grupo uma determinada pirâmide. E o que é que vão ter de fazer?*
>
> *D – Calcular a altura por medição direta e por cálculos.*
>
> *Prof.ª – Têm de usar dois processos. Primeiro têm de medir a altura da pirâmide e depois têm de arranjar uma estratégia que vos conduza através de cálculos a obter a altura. Depois numa segunda fase pretende-se que construam um póster. Abram a fichinha e vejam lá que indicações têm para o póster. Para o póster vão receber na classroom daqui a aproximadamente 10min um esquema para a organização do póster. É apenas uma sugestão. Podem utilizá-la como lá está ou então, se não a quiserem utilizar, usem outra, mas do mesmo estilo, que contenha todas as informações que estão aqui à volta. [Usar o esquema que foi incluído na 2.ª parte da ficha] Reparem que em ambos os processos, existem uns espaços para fotografias. Pretende-se que tirem fotografias quando estão a fazer a medição direta da altura e escrevam um textinho que descreva o que fizeram. A seguir, quando estão a desenvolver o segundo processo, fazem a mesma coisa. Neste retângulo aqui vamos querer as observações e as conclusões e a vossa identificação. Para isso era necessário um computador para poderem escrever no póster, e um telemóvel para tirar fotografias. Material, réguas, se algum grupo não tiver vamos gerindo sem confusões e vamos passando de uns para os outros. Se houver dúvidas nós vamos circulando e ajudando o necessário. E agora queria que se reunissem em grupo para trabalhar. Certo?*

A professora distribuiu as pirâmides pelos diversos grupos. Os alunos estavam, em geral, ainda a olhar para o esquema do póster, o que era novidade para eles, levando a professora a intervir de modo que se focassem no que, no momento, era essencial:

> *Prof.ª – Já estão muito preocupados com o póster. Isso é numa segunda fase. O que é importante agora é o processo. Vamos lá focar. Já estão na parte final do trabalho. Ainda não passaram pela parte inicial do desenvolvimento. Vão começar a pensar como vão chegar aos valores.*

Trabalho autónomo dos alunos

Como era esperado pela professora, alguns alunos, para realizarem o processo 1, tiveram pouco cuidado ao colocar a régua para medir o comprimento da altura da pirâmide (figura 57). A professora recorreu a uma situação fora da Matemática, mas familiar para os alunos, uma vez que todos eles já a viveram. Este exemplo levou-os rapidamente a perceber o cuidado que deveriam ter ao colocar a régua:

> *Prof.ª – Então o que é a altura?*
>
> *A – Mas não podem encostar.*
>
> *Prof.ª – Quando vão tirar o cartão de cidadão e vão medir a altura vocês colocam-se de qualquer maneira?*
>
> *A – Não.*
>
> *Prof.ª – Então como é medida a altura?*
>
> *A – Então tem de ser assim (e faz o gesto de colocar a régua na vertical).*

Figura 57. Medindo com pouco rigor

Num outro grupo surgiu a dúvida do que seria a altura da pirâmide, o que levou a professora a intervir:

> *Prof.ª – A altura da pirâmide, o que é para vocês?*
>
> *A – É a altura.*
>
> *Prof.ª – A altura é a altura, boa B. Vai lá com o teu dedinho e diz-me lá de onde vai até aonde? Daqui até aqui.*
>
> *A aluna indica bem que a altura vai do vértice da pirâmide ao ponto médio da base.*

Prof.ª – Muito bem. Vamos lá medir isto e registar com o telemóvel o que tu estás a dizer. Já identificaram o que é a altura e como a vão medir. Agora olhem bem para a régua e vejam o que têm aí que vos pode complicar a medição que estão a fazer.

A – O tracinho está mais acima.

A professora aproveitou para chamar a atenção para que a escala não parte imediatamente da ponta da régua. O que fazer com esta diferença foi um verdadeiro problema para diversos grupos. A maioria começou por subtrair, como se pode ver neste extrato de sala de aula:

Prof.ª – O que está aí que está a atrapalhar essa medição? É esse bocadinho aí, não é?

A – Mede o espaço que separa o início da régua do zero. Dá-lhe aproximadamente 0,5cm. Sem contar com este espaço tinham lido 19cm.

Os alunos concluem: Dava 19cm, logo menos 0,5 dá 18,5.

Prof.ª – É? Então tirem fotografias do que estão a fazer.

Os alunos continuam a discutir esta questão, insistindo que têm que subtrair.

Contudo, ao fim de algum tempo os alunos foram capazes de compreender que tinham de adicionar a medida do comprimento desse espaço, explicando: "Adiciono porque este espaço aqui (aponta para o espaço que não tem escala) não está a contar nada, portanto adiciono".

Para seguir o processo 2, o primeiro passo era de visualizar um triângulo retângulo em que um dos catetos é a altura da pirâmide. A sugestão dada pela professora para ajudar alguns alunos foi o de lhes sugerir que desenhassem esse triângulo no caderno: "Façam um esquema do triângulo no caderno que pode ajudar". A figura mais comum foi a representada na figura 58. Houve, no entanto, um grupo de alunos que visualizou o triângulo de forma diferente, representando-o de seguida no caderno (figura 59).

É de fazer notar que como a turma usava com frequência o Geogebra, houve um grupo que decidiu desenhar o triângulo retângulo recorrendo a este recurso tecnológico.

Figura 58. Triângulo desenhado no caderno

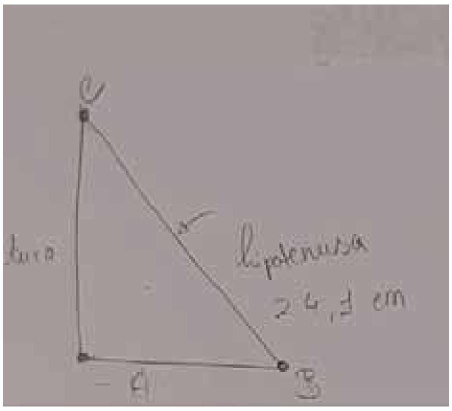
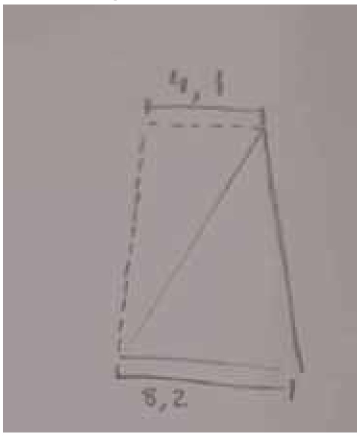


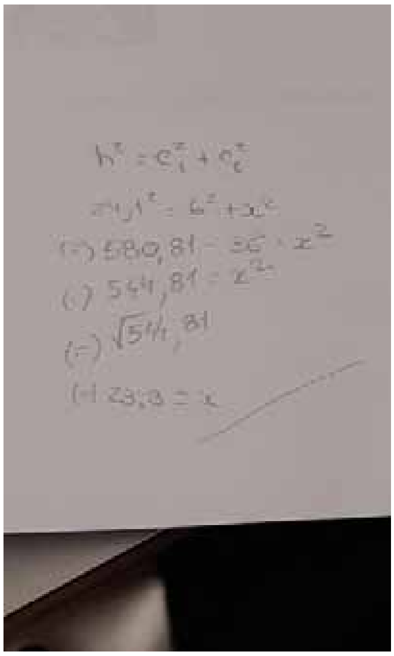
Figura 59. Triângulo desenhado no caderno



Mas, em qualquer dos casos, houve que proceder a medições e no final aplicar o Teorema de Pitágoras (figuras 60 e 61).

Figura 60. Medindo o comprimento da aresta lateral

Figura 61. Procedendo aos cálculos



Para tirarem as conclusões a colocar no póster, tarefa desafiante para os alunos e menos habitual, a professora colocou-lhes algumas questões para os ajudar, tais como:

> *Prof.ª – Vocês utilizaram dois processos. Obtiveram o mesmo ou não? O que estavam à espera? Gostava que estabelecessem uma relação entre eles. Qual dos processos vos poderá dar um valor mais exato? É este tipo de coisas que deverão colocar nas conclusões.*

A maioria dos grupos terminou o póster. Aos grupos que não concluíram a tarefa foi-lhes pedido que o fizessem fora da aula e enviassem o seu póster à professora.

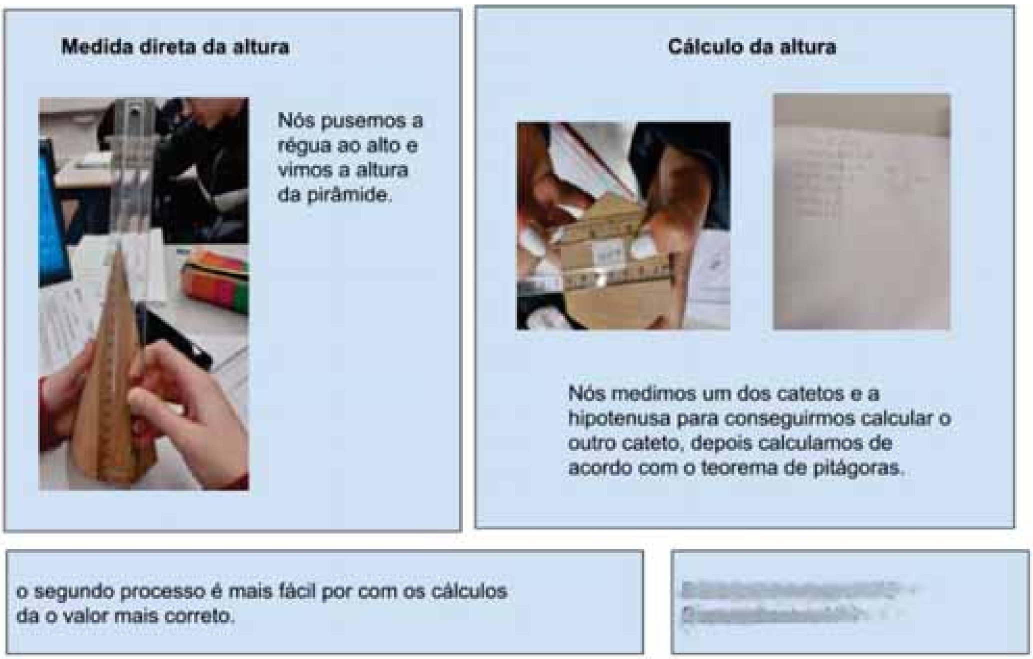
Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Com base na descrição da exploração da tarefa "**Calcular ou medir diretamente**?" poder-se-á tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

A tarefa em análise apela à aplicação do Teorema de Pitágoras. Os alunos reconheceram com facilidade que, para usar o processo 2, tinham de recorrer a este teorema para calcular a medida do comprimento do cateto que representava a altura da pirâmide (figura 62).

Figura 62. póster realizado por um grupo de alunos

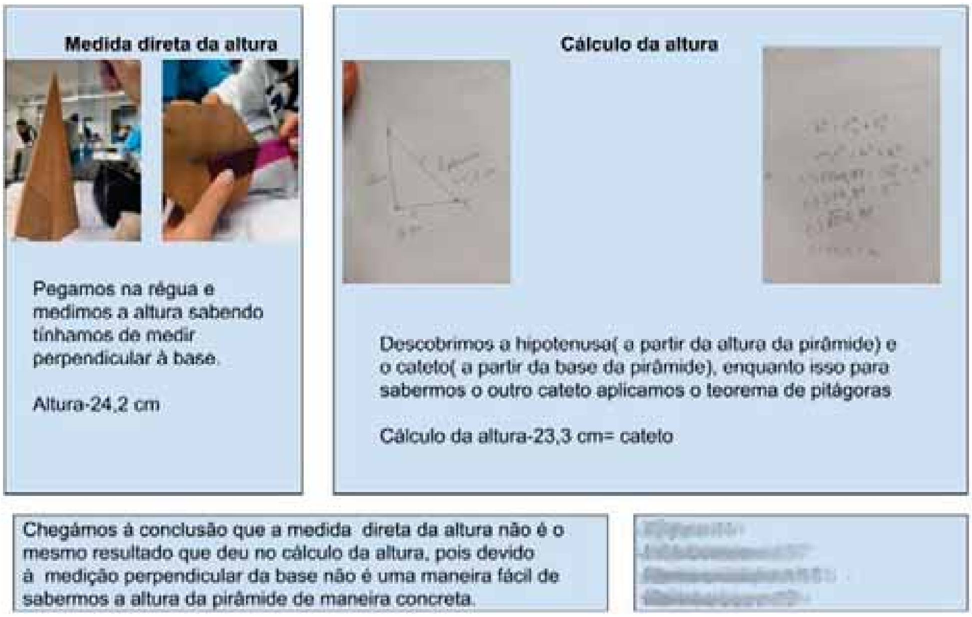


Capacidades matemáticas transversais

Pelas características da tarefa podemos considerá-la um problema. Para a sua resolução, os alunos foram solicitados a interpretá-lo e a escolher uma estratégia que lhes permitisse resolvê-lo. Podemos afirmar que, na sua grande maioria, os alunos conseguiram fazê-lo.

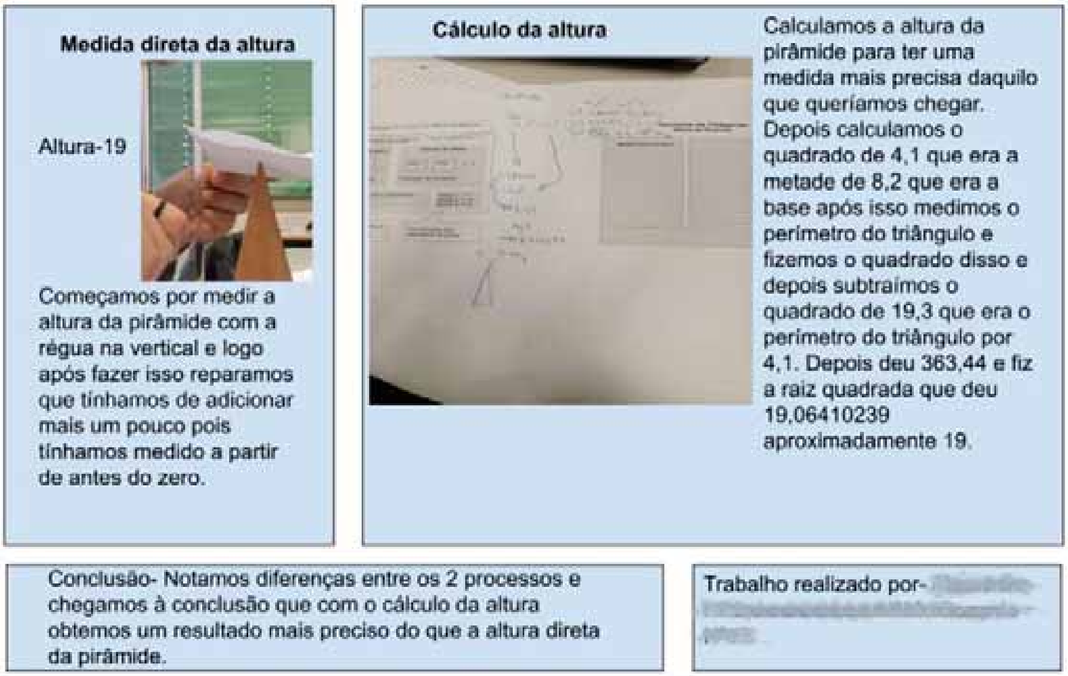
A elaboração do póster requeria que os alunos comunicassem matematicamente por escrito. A clareza e completude da descrição dos processos desenvolvidos, bem como a correção da linguagem matemática usada, nem sempre foi a melhor. Existiram diversos níveis de qualidade dessa comunicação. Por exemplo, no póster apresentado na figura 63, os alunos não usam a nomenclatura usada relativa aos lados de um triângulo retângulo de forma clara. Já a discussão de ideias foi uma constante ao longo de todo o trabalho de grupo.

Figura 63. Póster realizado por um grupo de alunos



As dificuldades que tiveram de enfrentar ligaram-se com a forma como deveriam usar os instrumentos de medida e como compensar o facto de a escala não surgir logo no início do instrumento. Por outras palavras, exigia que os alunos pusessem em uso aprendizagens da Física, estabelecendo conexões entre a Matemática e a Física. Contudo, o feedback que a professora lhes foi dando, sem nunca lhes dizer como deveriam fazer, permitiu-lhes ultrapassar as suas dificuldades. A compreensão dos processos corretos é bem visível nas fotografias que incluíram nos seus pósteres (figura 64). Este grupo teve inclusivamente o cuidado de tirar uma fotografia em que usa uma folha na parte de cima para indicar a altura em que devem estar os seus olhos para fazer a leitura da escala.

Figura 64. Póster de um outro grupo



Capacidades e atitudes gerais transversais

A opção pelo trabalho em grupo foi adequada face ao tipo de tarefa a realizar, não só porque a tarefa levantou diversas questões que obrigaram os alunos a discutir as suas ideias e opiniões, como também, pela natureza da tarefa, que requereu a realização de atividades distintas (segurar no instrumento de medição, segurar na pirâmide, tirar fotografias, …). Os alunos organizaram-se, distribuindo-as entre si. Em geral, os alunos trabalharam em equipa.

A dificuldade generalizada de como resolver o facto da escala não começar no início do instrumento de medição exigiu a capacidade dos alunos serem perseverantes e se autorregularem. Houve mesmo quem tivesse dado tanta importância a esta questão que a colocou no seu póster (figura 64), traduzindo o desenvolvimento da autoconfiança que foram ganhando.

Muitas das etapas da resolução desta tarefa apelam para o sentido de autorregulação dos alunos. Em particular, os alunos foram questionando o que estavam a escrever no póster de forma a tornar o seu discurso mais claro e fiel ao que tinham feito. Para além disso, a necessidade de escrever uma conclusão levou-os a revisitar tudo o que tinham feito e a relacionar os dois processos seguidos, identificando possíveis vantagens e limitações de cada um.

Comentários finais

O balanço final da exploração da tarefa "**Calcular ou medir diretamente?**" é bastante positivo. Esta tarefa apresenta características diferentes do que habitualmente é pedido aos alunos para fazerem na sala de aula de Matemática: realizar dois processos diferentes para calcular a medida de comprimento de um mesmo segmento de reta, utilizar materiais de medição, comunicar por escrito o que fizeram, tirar conclusões, construir um póster. A tarefa adequava-se igualmente a que alunos do mesmo grupo tivessem responsabilidades distintas, o que valoriza o trabalho de cada um deles.

Os alunos reagiram muito bem à tarefa proposta. Estiveram ao longo dos 100min de aula envolvidos na sua resolução, não havendo qualquer chamada de atenção, por parte da professora, para a necessidade de trabalharem.

As suas principais dificuldades registaram-se no domínio de conhecimentos elementares que podemos afirmar, face às evidências recolhidas, foram resolvidos com compreensão.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-35.

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). As representações: Escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, *166*, 19-24.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Casa, T. M., Firmender, J. M., Cahill, J., Cardetti, F., Choppin, J. M., Cohen, J., et al. (2016). *Types of and purposes for elementary mathematical writing: Task force recommendations.* http://mathwriting.education.uconn.edu

Coordenação do Projeto REASON (2022). Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 100-108). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Delgado, C., Mendes, F., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Números.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Espadeiro, R. G. (2021). O Pensamento Computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Goldin, G. A. (2018). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer.

Hardin, J. S., & Horton, N. J. (2017). Ensuring that mathematics is relevant in a world of data science. *Notices of the American Mathematical Society,* 64(9), 986-990. https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p986.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). *Revisiting programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium* (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Estratégias de resolução de problemas de matemática: que lugar no desenvolvimento do currículo? In T. Estrela et al (2012). *Revisitar os Estudos Curriculares. Onde Estamos e Para Onde Vamos?* EDUCA/Secção Portuguesa da AFIRSE.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes modos de utilização do GeoGebra na resolução de problemas de Matemática para além da sala de aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 266-288.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!": Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática, 149-150*, 76-80.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 96, 1-16.

https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Machado, A. (2022). *Resolver e formular problemas na aprendizagem dos números e operações no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Minho.

Martins, O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, V., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. ME-DGE.

Mendes, F., Delgado, C., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Geometria*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Menezes, L., Tomás Ferreira, R. A., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135–164). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Miranda, P. (2019). *Estratégias de resolução de problemas e formulação de problemas: Um estudo nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Minho.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education,* 53(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

OECD (2018). *PISA 2021 Mathematics framework* (Draft) https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Oliveira, H., & Henriques, A. (2022). Aprofundar o conhecimento sobre o raciocínio matemático na formação inicial de professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 86-101). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38*(3), 214-225.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 419–430.

Ponte, J. P. (2022). Introdução. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 6-8). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7-11.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. MEC-DGIDC.

Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: An experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments, 28*(3), 316–327. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1612448

Sáez-López, J. M., Sevillano-García, M. L., & Vazquez-Cano, E. (2019). The effect of programming on primary school students' mathematical and scientific understanding: Educational use of mBot. *Educational Technology Research and Development, 67*(6), 1405–1425. https://doi.org/10.1007/ s11423-019-09648-5.

Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., & Serra, S. (2022). *Coletânea de tarefas – 5.º ano de escolaridade.* https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_5ano.pdf

Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., & Serra, S. (2023). *Coletânea de tarefas – 6.º ano de escolaridade.* https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_6ano.pdf

Santos, E., Martins, C., Martins, I., Serra, S. (2022). Representações no estudo das frações no 5.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática*, 166, 67-70.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de matemática? In C. Lopes, & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11-34). Mercado Letras.

Seehorn, D., Carey, S., Fuschetto, B., Lee, I., Moix, D., O'Grady-Cunniff, D., Owens, B., Stephenson, C., & Verno, A. (2011). *CSTA K--12 Computer Science Standards: Revised 2011*. ACM.

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática, 149–150*, 13–16.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16. http://www.jstor.org/stable/40248592

Stein, M. K., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 165*, 22-28.

Tavares, D., Pinto, H., Menino, H., Rocha, I., Rodrigues, M., Rainho, N., Rodrigues, M., Cadima, R., & Costa, R. (2019). *Desafios matemáticos: 20 anos de problemas para os primeiros anos.* Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico *de Leiria.*

Tomás Ferreira, R. A. (2018). Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem. *Educação e Matemática, 149-150*, 1.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438–445.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). O contributo de uma *gallery walk* para promover a comunicação matemática. *Educação e Matemática, 149-150*, 2-8.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39-60.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35.

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L., & Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: A systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education, 10*(3). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w