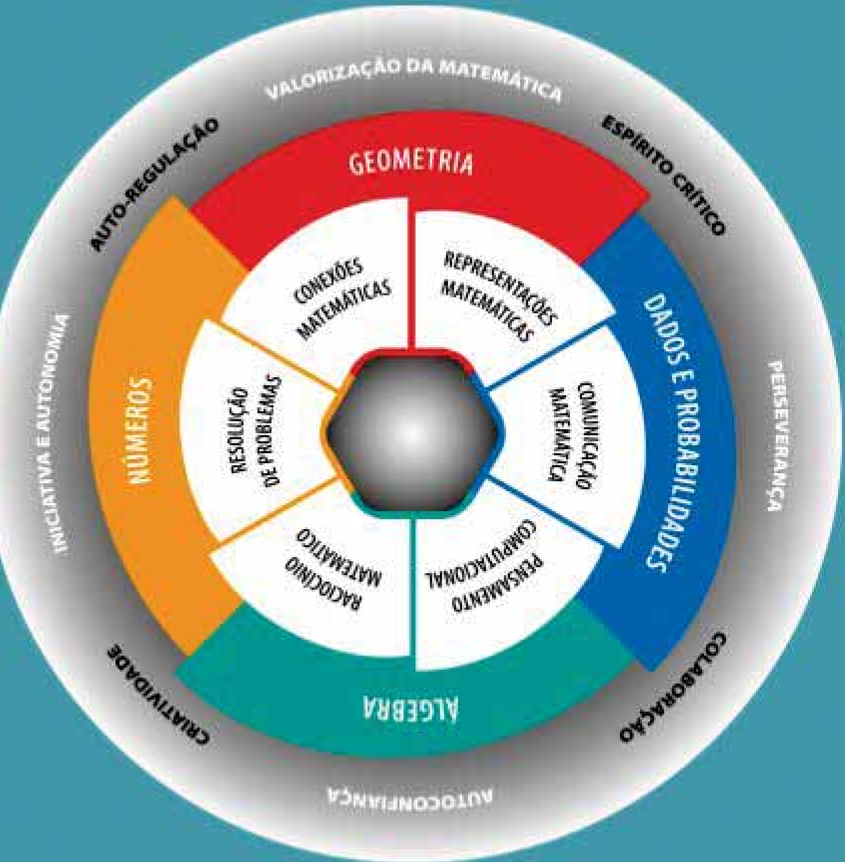
Capacidades matemáticas transversais

no 1.º Ciclo do Ensino Básico – 3.º e 4.º anos



Neusa Branco, Helena Gil Guerreiro, Lina Brunheira, Ana Paula Canavarro,

Manuela Vicente, Susana Brito, Célia Mestre, Elvira Santos, Hélia Jacinto,

João Almiro, Leonor Santos, Rosa Ferreira, Rui Gonçalo Espadeiro

2025

direção-geral da educação | PESSOAS 2030 | PORTUGAL 2030 | Cofinanciado pela União Europeia

Ficha técnica

Título
Capacidades matemáticas transversais no 1.º Ciclo do Ensino Básico - 3.º e 4.º anos

Autores
Neusa Branco, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém
Helena Gil Guerreiro, Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
Lina Brunheira, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora
Manuela Vicente, Escola EB da Comenda do Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira
Susana Brito, Escola EB Quinta da Condessa do Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire
Célia Mestre, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Elvira Santos, Escola Superior de Educação da Lusofonia, Instituto Politécnico da Lusofonia
Hélia Jacinto, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
João Almiro, Escola Secundária de Tondela
Leonor Santos, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Rosa Tomás Ferreira, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo

Edição
Direção-Geral da Educação

Diretor-Geral da Direção-Geral da Educação
David Sousa

ISBN
978-972-742-598-3

Data
2025

À *Leonor,*

com quem sempre aprendemos

Índice

Introdução **4**

Capacidades matemáticas transversais **10**

Resolução de problemas 11

Raciocínio matemático 16

Pensamento computacional 21

Comunicação matemática 26

Representações matemáticas 33

Conexões matemáticas 38

Tarefas em sala de aula **45**

Tarefa — Despesas imprevistas 46

Tarefa — Lançar dados: O que sai? 59

Tarefa — Azulejos nas ruas do Porto 78

Tarefa — Batimentos do coração 93

Tarefa — Classificação de quadriláteros 115

Tarefa — Criar sequências 130

Tarefa — Construindo retângulos no Scratch 148

Referências **168**

Introdução

Apresentação e contextualização

Apresentação

Esta publicação faz parte de um conjunto de brochuras publicadas pela Direção Geral de Educação (DGE), no quadro do desenvolvimento das medidas de apoio à operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Inicialmente concebidas pelo Grupo de Trabalho em Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM)[1], deram origem a cinco publicações distintas que se constituem como recursos vocacionados para apoiar a generalização das novas orientações curriculares de Matemática nos diferentes ciclos do Ensino Básico. Cada brochura foi redigida por uma equipa de autores que inclui elementos do GTDCPM, tendo a sua maioria participado na escrita das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB), e os professores dos diferentes ciclos de escolaridade que, desde 2021/22, anteciparam a generalização das AEMEB em algumas escolas, em colaboração com o GTDCPM.

Importa sublinhar que estas Aprendizagens Essenciais se constituem como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, com diferenças assinaláveis relativamente a anteriores programas de Matemática para os ciclos de escolaridade correspondentes. Assim, destacamos:

1. Assunção de **três princípios essenciais** que moldam as opções curriculares tomadas: o princípio da Matemática para todos, o princípio da Matemática para o século XXI, e o princípio da Matemática é única, mas não é a única.
2. Privilégio do desenvolvimento da **literacia matemática,** entendendo-a como "a capacidade de raciocinar matematicamente e interpretar e usar a Matemática na resolução de problemas de contextos diversos do mundo real" (Canavarro et al., 2021, p. 2), de modo a "que cada pessoa possa viver e atuar socialmente de modo informado, contributivo, autónomo e responsável" (idem, p. 2). A ideia de literacia matemática constitui a finalidade última para a qual as aprendizagens dos diversos conteúdos devem ser orientadas.
3. Consideração de **conteúdos de natureza diversa na aprendizagem em Matemática:** conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Estes conteúdos de aprendizagem são de natureza

[1] O GTDCPM é constituído por Leonor Santos (Coordenadora), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Gonçalo Espadeiro, Helena Gil Guerreiro, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Neusa Branco, Paulo Correia e Rosa Tomás Ferreira.

diversa, e a sua abordagem deve ser feita de forma articulada e continuada, em todos os ciclos de escolaridade;

4. Valorização de uma **abordagem integrada e continuada de conhecimentos matemáticos** respeitantes a quatro temas clássicos — Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, e Geometria e Medida (apenas Geometria no 3.º Ciclo) — prevendo-se que todos os temas sejam abordados ao longo de todos os anos de escolaridade de cada ciclo, através de tarefas que envolvam conceitos associados a quantidade, relações, dados e incerteza, e espaço e forma.
5. Valorização do desenvolvimento de um conjunto alargado de seis **capacidades matemáticas transversais**, incluindo capacidades há muito reconhecidas como centrais — a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática — e ampliando o leque a outras que são agora igualmente contempladas — as representações matemáticas, as conexões matemáticas, e o pensamento computacional.
6. Valorização do desenvolvimento de **capacidades e atitudes gerais transversais** que passam a estar explicitamente previstas, nomeadamente as que decorrem da seleção das capacidades e atitudes das áreas de competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Martins et al., 2017) que mais diretamente se relacionam com o trabalho em Matemática. São elas as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel do conhecimento, neste caso da Matemática. Esta seleção não pressupõe que as outras competências enunciadas no PASEO sejam excluídas da aula de Matemática, devendo ser consideradas sempre que surgirem como relevantes ao longo do trabalho com os alunos.
7. Assunção da importância da adoção de **métodos de ensino de natureza exploratória**, centrados na atividade dos alunos/as, apoiados por recursos poderosos que ampliem e enriqueçam a experiência matemática dos alunos, como é o caso de recursos digitais.

Temos consciência que a operacionalização das novas orientações curriculares poderá colocar desafios e levantar dificuldades aos professores, nomeadamente no que diz respeito à consideração de uma diversidade de conteúdos de aprendizagem a serem abordados de forma integrada na sala de aula, envolvendo conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Assim, neste conjunto de brochuras, optamos por colocar o foco no trabalho a desenvolver em sala de aula para levar a cabo esta orientação fundamental, dando particular relevo ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

Das cinco brochuras, uma é especialmente focada no pensamento computacional, o que se justifica pelo caráter de novidade que esta capacidade representa. As outras quatro brochuras dedicam-se ao conjunto das seis capacidades matemáticas transversais, com explorações nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º Ciclo — 1.º e 2.º anos, 1.º Ciclo — 3.º e 4.º anos, 2.º Ciclo, 3.º Ciclo).

Cada uma destas quatro brochuras segue uma estrutura comum, organizada em três partes. Após esta introdução, que apresenta as brochuras e caracteriza os contextos em que se antecipou a operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais, no ciclo de escolaridade a que a brochura diz respeito, a segunda parte discute, com apontamentos teóricos e exemplos, o significado atribuído a cada uma das capacidades matemáticas transversais, e a terceira parte apresenta exemplos de tarefas que foram efetivamente explorados com as turmas e discute a respetiva exploração. Para cada tarefa, inclui-se 1) o enunciado, 2) uma planificação detalhada da(s) aula(s) visando a exploração da tarefa, onde se inclui elementos diversos como uma antecipação de eventuais resoluções esperadas por parte dos alunos, 3) descrição da concretização da tarefa na prática, com atenção às diferentes fases da aula, episódios da exploração com os alunos, e conclui-se com 4) a análise das aprendizagens evidenciadas pelos alunos.

Esperamos que este documento possa ajudar os professores na operacionalização das novas orientações curriculares de Matemática para o Ensino Básico, constituindo-se como um recurso quer para o trabalho individual de preparação do professor, quer para o trabalho colaborativo que poderá desenvolver com os seus pares na escola e agrupamento. Se é verdade que materiais com a natureza destas brochuras, que proporcionam conhecimento da prática com alunos reais, em contextos reais, podem ser muito inspiradores de cada um dos professores, o seu efeito será muito mais potenciado se forem entendidos como recursos para apoiar o trabalho nas escolas, entre pares, contribuindo para a concretização do desenvolvimento curricular que importa fazer, tendo em vista a qualificação e adequação das práticas de ensino visando a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos em Portugal.

Contextualização

De seguida apresenta-se uma caracterização das escolas e das turmas do 1.º ciclo do Ensino Básico, 3.º e 4.º anos de escolaridade, que anteciparam a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática, desde 2021/22, e nas quais se desenrolaram as atividades que relatamos nesta brochura.

Importa salientar que as turmas que anteciparam a generalização das AEMEB não se constituíram como turmas com características especiais. A sua seleção seguiu estritamente os critérios habituais de cada Agrupamento de escolas/Escolas não agrupadas para a sua distribuição pelos docentes. Não foram indicados previamente quaisquer critérios de constituição das turmas que de alguma forma trouxessem excecionalidade ao processo habitualmente usado. Assim, as turmas onde se concretizou a antecipação das AEMEB foram as turmas normais atribuídas aos professores que se disponibilizaram para colaborar com o GTDCPM.

Assim, no 1.º Ciclo, 3.º e 4.º anos, as professoras que iniciaram o trabalho com as AEMEB nas respectivas turmas foram Manuela Vicente, da EB1 da Comenda (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira, em Évora), e Susana Brito, da EB Quinta da Condessa (Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, na Área Metropolitana de Lisboa), ambas professoras profissionalizadas de 1.º Ciclo, com vasta experiência de ensino. Passamos a caracterizar as escolas e as turmas envolvidas neste processo.

O **Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira** é constituído por dez estruturas escolares (Jardins de Infância, Escolas do 1.º CEB, Escola do 2.º e 3.º CEB e uma Escola do Ensino Secundário) sendo a escola sede a Escola Secundária Gabriel Pereira, localizada na União das Freguesias de Bacelo e Senhora da Saúde. No ano letivo 2021/2022 tinha inscritos 2363 alunos, 506 dos quais no 1.º Ciclo do Ensino Básico, divididos por seis escolas, cinco na cidade de Évora e uma no meio rural. A escola EB1 da Comenda, do Plano dos Centenários, tinha apenas quatro turmas, uma de cada ano de escolaridade, num total de 90 alunos. A escola dispõe de uma boa rede de Internet e de um leque variado de materiais manipuláveis para trabalhar a Matemática.

A turma do 3.º ano da EB do Bairro da Comenda que iniciou em 2021/2022 a sua participação na antecipação das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 1.º CEB, era constituída por 21 crianças, sete meninas e catorze meninos. Era um grupo bastante heterogéneo, que incluía sete crianças com medidas seletivas, todas elas com poucos hábitos de trabalho e com necessidade de apoio em uma ou mais áreas curriculares. Na generalidade o ritmo de aprendizagem era lento e o aproveitamento satisfatório. Todos transitaram para o 4.º ano e continuaram a experiência em 2022/2023. No final do biénio, todos transitaram para o 5.º ano de escolaridade.

O **Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire**, localizado na União de Freguesias Pontinha e Famões, concelho de Odivelas, integra a Área Metropolitana de Lisboa. Este Agrupamento, constituído por dez unidades escolares (Jardins de Infância, Escolas do 1.º CEB, uma Escola do 2.º e 3.º CEB e uma Escola do Ensino Secundário), acolhe alunos de 34 nacionalidades, procurando dar resposta a famílias com características muito divergentes. Por um lado, verifica-se a existência de várias áreas urbanas de génese ilegal, com habitação de baixa qualidade, sem infraestruturas de apoio cultural e social, direcionada para o arrendamento a famílias de baixo rendimento e de países estrangeiros. Por outro, existem áreas onde predomina uma classe média-alta, com estruturas familiares securizantes, que asseguram atividades privadas extracurriculares e de apoio escolar. No ano letivo 2021/2022 tinha inscritos 2917 alunos, 895 dos quais no 1.º ciclo do ensino básico, divididos por sete escolas. A EB Quinta da Condessa do referido Agrupamento tem sete turmas de 1.º CEB e duas de Pré-escolar, num total de 196 alunos. A escola possui grande variedade de recursos digitais e materiais manipuláveis para trabalhar a Matemática.

A turma, maioritariamente, do 3.º ano da EB Quinta da Condessa, que iniciou em 2021/2022 a sua participação na antecipação das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 1.º CEB, era constituída, nesse ano, por vinte e uma crianças, nove meninas e doze meninos, dos quais três pertenciam ao 4.º ano. Era um grupo bastante heterogéneo, que incluía três crianças com medidas seletivas e duas com medidas adicionais de suporte à aprendizagem e à inclusão nas diferentes áreas curriculares. A turma trabalhava em cooperação e era participativa, apresentando ritmos de trabalho bastante diferentes. De um modo geral, o aproveitamento era satisfatório e todos os alunos do 3.º ano transitaram ao 4.º ano e os três alunos do 4.º ano foram aprovados ao 5.º ano, tendo os alunos do 4.º ano continuado a experiência em 2022/2023. No final do biénio, quatro alunos não foram aprovados ao 5.º ano de escolaridade. Cerca de 75% dos alunos ainda dispunham dos equipamentos da escola digital em funcionamento e com ligação à Internet.

Capacidades matemáticas transversais

Breve caracterização

Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática. Aprender a resolver problemas capacita os alunos para enfrentar desafios e aplicar conceitos matemáticos em novas situações, pelo que todos os alunos devem ter oportunidade de poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes na resolução de problemas (Canavarro et al., 2021). Esta atividade complexa vai além da mera aplicação de factos e procedimentos matemáticos previamente aprendidos, envolvendo a adaptação ou o desenvolvimento de estratégias adequadas à obtenção de uma solução válida. A resolução de problemas tem o potencial de proporcionar desafios intelectuais aos alunos que, para além de contribuírem para o desenvolvimento de capacidades como a perseverança, a autoconfiança, o pensamento crítico e criativo, reforçam a compreensão de conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Problema como tarefa

Um *problema* é uma situação desafiadora para a qual se pretende obter uma solução sem que, à partida, se saiba como resolvê-la ou se conheça um caminho imediato que garanta a resposta (Abrantes, 1988; Vale et al., 2015). Em particular, o que distingue um problema de um exercício é precisamente o facto de não se conhecer qual o procedimento matemático ou o algoritmo que permita, com algum grau de certeza, alcançar a solução. É importante destacar que um problema pressupõe um nível adequado de desafio e interesse de forma a envolver o aluno na procura da solução, mobilizando conhecimentos matemáticos e adaptando ou desenvolvendo as suas próprias estratégias de resolução. É importante que os alunos contactem com problemas que admitem vários processos de resolução, várias soluções ou até sem solução.

A resolução de problemas é um tipo de tarefa que, por ser desafiante, tem o potencial para envolver os alunos em trabalho exploratório na aula de Matemática. Apesar de a resolução de problemas ter passado a ser cada vez mais associada a tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2007), enquanto as tarefas de exploração podem apresentar informações sobre a estratégia que o aluno deverá seguir, uma tarefa que desencadeie atividade de resolução de problemas deverá permitir o desenvolvimento de estratégias próprias em que o aluno mobiliza os seus conhecimentos matemáticos e, eventualmente, extra-matemáticos. Cabe ao professor acolher a diversidade de estratégias, valorizando a criatividade dos alunos, a autonomia e perseverança, mobilizando-as para orquestrar discussões coletivas que analisem essas estratégias e as representações usadas, e comparem a sua eficácia na obtenção da solução (Canavarro et al., 2021).

Etapas e estratégias de resolução de problemas

Existem vários modelos que visam explicar como se resolve um problema de Matemática. Pólya (1978), destacando a importância de examinar um dado problema de diferentes perspetivas, propôs um modelo que compreende quatro etapas: (i) *compreensão do problema*, na qual é necessário prestar atenção ao enunciado para interpretá-lo e identificar os aspetos relevantes; (ii) *elaboração de um plano*, etapa que envolve planear a estratégia a ser seguida, considerando que o caminho pode ser longo e desafiador; (iii) *implementação do plano*, na qual se segue o roteiro geral delineado na fase anterior, sem perder de vista o problema em si; e (iv) *análise retrospetiva*, na qual o aluno reconsidera e examina novamente o caminho percorrido e verifica a solução obtida.

A cada uma destas etapas, Pólya associou um conjunto de estratégias gerais que pretendem ajudar os alunos a tornarem-se mais eficazes na resolução de problemas, e que são designadas por *heurísticas*. Assim, na primeira etapa o aluno pode procurar identificar: que dados são fornecidos, se são suficientes, se existem condições e quais, ou o que é pedido como resposta ao problema. Na elaboração do plano pode ser útil pensar se se conhece um problema semelhante, mais geral ou até mais acessível e se é possível usar um método de resolução semelhante, ou analisar se todos os dados serão necessários ou se é possível resolver apenas uma parte do problema. Durante a execução do plano, o aluno deve confirmar se realizou corretamente todos os procedimentos e verificar se consegue justificar matematicamente cada passo. Na etapa final, poderá analisar se é possível verificar o resultado, se está de acordo com os dados e as condições dadas e, eventualmente, poderá procurar outra estratégia de resolução.

Ao longo do Ensino Básico, os alunos devem enriquecer progressivamente o seu leque de estratégias de resolução de problemas. Assim, no 1.º Ciclo será adequado desenvolver estratégias baseadas na utilização de esquemas, diagramas, tabelas ou gráficos, ou ainda o desenvolvimento de um modelo que pode compreender uma ou mais operações matemáticas.

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB) (Canavarro et al., 2021) reconhece-se a relevância das ferramentas tecnológicas como recursos incontornáveis e poderosos na aprendizagem da Matemática, possibilitando a ampliação de contextos e perspetivas sobre objetos matemáticos e permitindo análises e explorações que estariam inacessíveis aos alunos sem acesso a estes recursos. É, pois, nesta linha que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas se pode também fazer mediante o uso de tecnologias digitais. Resolver um problema de matemática com recurso à tecnologia envolve ser-se capaz de identificar os recursos tecnológicos adequados e conjugá-los de forma eficiente com conhecimentos e procedimentos matemáticos, tanto para desenvolver uma estratégia como para explicar, justificar e comunicar o pensamento matemático desenvolvido (Jacinto & Carreira, 2017).

Papel da resolução de problemas na aula de Matemática

A resolução de problemas surge nas AEMEB como um dos oito objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática, como uma capacidade matemática transversal e como um tópico de aprendizagem. Mas qual o seu papel na sala de aula?

Várias perspetivas coexistem sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática. Uma dessas visões, mais tradicional, concebe a resolução de problemas como *aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos*, pelo que o foco deste trabalho reside na aquisição de recursos matemáticos e na sua aplicação mediante a resolução de problemas que surgem, tipicamente, no final da lecionação de um tópico (ensino *para* a resolução de problemas). Numa outra linha concebe-se que os alunos devem tornar-se proficientes na resolução de problemas de matemática, ou seja, aprender a resolver problemas é um *objetivo per si.* Assim, a resolução de problemas é encarada como um conteúdo, o que leva a que ocorra o ensino explícito de heurísticas e estratégias (ensino *sobre* resolução de problemas). Uma terceira via entende a resolução de problemas como *oportunidade para construção de novo conhecimento*, pelo que o foco reside na aprendizagem de um conceito ou procedimento e resulta da atividade de resolução de um problema (ensino *através* da resolução de problemas). Todavia, estas perspetivas não devem ser encaradas como alternativas, tal como sugerem Vale et al. (2015) ao propor uma visão que denominaram 'ensino da matemática *com* resolução de problemas', ou seja, a resolução de problemas deve acompanhar o currículo e a prática da sala de aula, deve permitir desenvolver compreensão de conceitos e da estrutura matemática inerente, bem como levar os alunos a adquirir progressivamente um rol de estratégias que sejam produtivas e úteis noutras situações.

Um exemplo em sala de aula

A figura 1 apresenta um exemplo de um problema que pode ser colocado a alunos de 3.º ou 4.º ano de escolaridade.

Figura 1. Enunciado do problema "Caixas de bombons" (Canavarro & Vicente, 2009)

Caixas de bombons

A professora Paula recebeu uma caixa de bombons igual a esta. Sabendo que a caixa tem 24 bombons, descobre outras disposições que permitam arrumar estes bombons.

O problema "Caixas de bombons" pode ser proposto a alunos do 3.º ou 4.º anos, convocando conhecimentos no tema Álgebra, no tópico "Expressões e relações", com o objetivo de levar os alunos a "Reconhecer expressões numéricas equivalentes, envolvendo a multiplicação" (Canavarro et al., 2021). Este problema pode ser resolvido com papel e lápis, mas aconselha-se o uso de materiais manipuláveis, como os cubos de encaixe.

A figura 2 e a figura 3 apresentam as soluções desenvolvidas por dois grupos de alunos do 3.º ano. Na resolução A os alunos optaram por associar as diferentes representações de disposições possíveis dos bombons com a correspondente expressão cujo produto é 24 (figura 2). Na resolução B os alunos recorreram a uma representação tabular na qual associam o número de bombons em cada camada com o número de camadas e representam uma vista de cada camada (figura 3).

Figura 2. Resolução A do problema "Caixas de bombons" (Canavarro & Vicente, 2009)

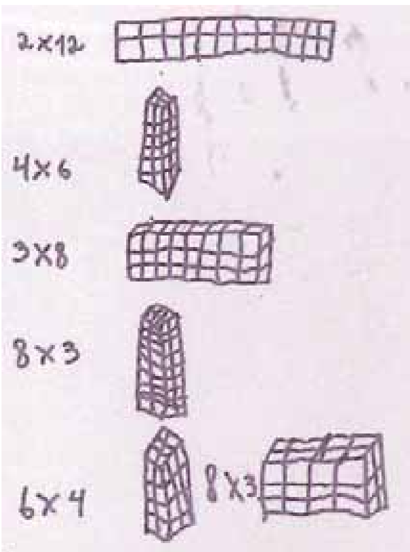
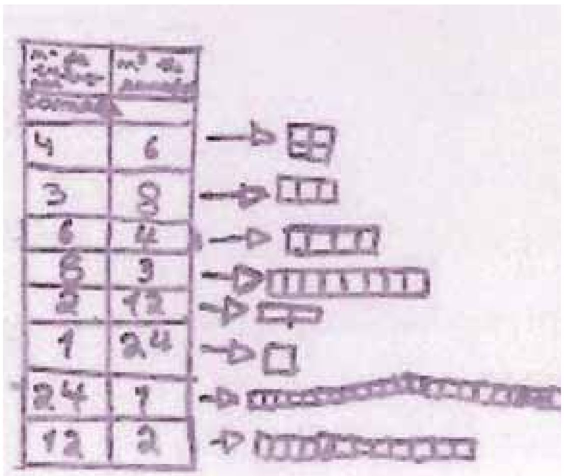


Figura 3. Resolução B do problema "Caixas de bombons" (Canavarro & Vicente, 2009)



É de sublinhar que os alunos tinham à disposição cubos de encaixe (figura 4), pelo que representaram os bombons por cubos ou quadrados (no caso das camadas).

Figura 4. Alunos exploraram o problema "Caixas de bombons" usando cubos de encaixe (Canavarro & Vicente, 2009)

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, em articulação com outros temas matemáticos, envolve proporcionar oportunidades aos alunos para contactar com uma diversidade de situações problemáticas que possam ser abordadas através de múltiplas estratégias, permitindo-lhes também tirar partido de diversas ferramentas tecnológicas, não só mobilizando conhecimentos prévios como promovendo a compreensão de novos conhecimentos.

Raciocínio matemático

Em linha com as orientações curriculares internacionais em Matemática (OECD, 2018), não é de estranhar que seja dado particular destaque ao raciocínio matemático nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), agora explicitamente considerada como um conteúdo de aprendizagem, à semelhança do que tinha sido expresso no Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007). O raciocínio, desde sempre, esteve relacionado com a Matemática e o seu ensino. Tradicionalmente, era habitual justificar-se a necessidade da Matemática fazer parte do currículo, afirmando-se ser a disciplina que, por excelência, promove o desenvolvimento do raciocínio (muito embora se possa falar de raciocínio em outros domínios). Mas do que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Raciocinar é um termo usado na linguagem corrente, mas isso não indica que o seu significado seja consensual. Neste texto entendemos que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (Ponte et al., 2020, p. 7). Seguir uma forma fundamentada implica que o raciocínio é uma atividade consciente e intencional, diferenciando-se, deste modo, de outras formas de pensar. Assim, raciocinar é pensar, mas nem toda a atividade de pensar é raciocinar.

No passado, o raciocínio matemático esteve muito associado à ideia de demonstração, seguindo uma lógica dedutiva, levando mesmo à convicção de alguns que se não houver este processo matemático, não se está a desenvolver nos alunos o raciocínio matemático (Oliveira & Henriques, 2022). Na verdade, embora esta vertente seja fundamental na matemática, tem vindo a emergir uma outra perspetiva que sublinha igualmente o lugar do raciocínio indutivo e abdutivo (Jeannotte & Kieran, 2017). De facto, podemos falar em três tipos de raciocínio: o *raciocínio indutivo*, o *raciocínio abdutivo*, e o *raciocínio dedutivo* (Quadro 1).

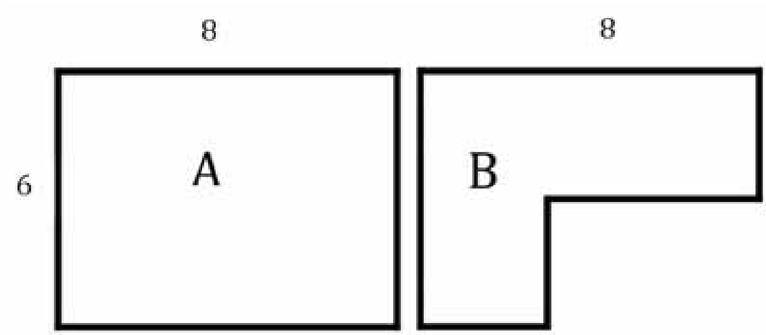
Quadro 1. Tipos de raciocínio

<table>
<tr><th></th><th>Indutivo</th><th>Abdutivo</th><th>Dedutivo</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Características e propósitos</td><td colspan="2">Pensamento divergente</td><td>Pensamento convergente</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lógica de descoberta</td><td>Lógica de prova</td></tr>
<tr><td>Verificar</td><td>Explicar</td><td>Demonstrar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plausibilidade</td><td>Certeza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intuição</td><td>Lógica</td></tr>
</table>

De seguida, apresentamos alguns episódios que pretendem ilustrar o raciocínio de alunos do

1.º e 2.º ciclo a partir da tarefa *Comparar perímetros* (Mendes et al., 2022), apresentada na figura 5.

Figura 5. Tarefa *Comparar perímetros* (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 37)



1. Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?

2. Desenha duas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B. (Podes usar papel quadriculado).

3. A Maria diz que existem muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Justifica porquê.

Numa turma de 5.º ano, a professora começou por questionar os alunos sobre a sua expectativa inicial: qual das figuras terá maior perímetro? Esta questão incentivou os alunos a raciocinar indutivamente, avançando com uma primeira conjetura baseada na visualização e algumas justificações iniciais, ainda que pouco fundamentadas (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 39):

Conjeturas e justificações iniciais dos alunos sobre a comparação do perímetro das figuras A e B

Ana: Que a B é mais pequena do que a A (...) falta um bocado.

António: Eu não acho, porque eu acho que as duas [linhas] têm o mesmo comprimento.

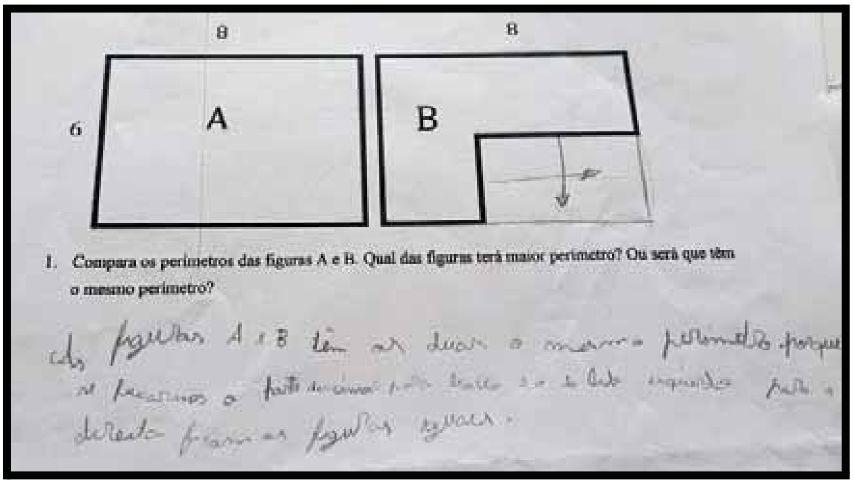
Bruna: Eu acho que a A é mais pequena que a B, que a B é maior (...) porque pode parecer maior, mas se nós tirarmos todas as linhas vai ficar maior.

Conjeturar é o processo de formular afirmações não arbitrárias "sobre relações matemáticas gerais baseadas em evidência incompleta" (Stylianides, 2008, p. 11). Assim, as conjeturas, através da observação, da construção, da transformação de conhecimento prévio ou de combinações entre estes, podem tomar a forma do reconhecimento de padrões ou de propriedades comuns a um conjunto de objetos.

Como vemos no diálogo anterior, as conjeturas poderão posteriormente revelar-se verdadeiras – é o caso da conjetura de António que afirma que as figuras A e B têm o mesmo perímetro – ou falsas, como as conjeturas das raparigas que afirmam o contrário. É natural que os alunos não estejam de acordo e até é possível que o mesmo aluno mude de resposta. Estamos numa fase de descoberta, em que o pensamento pode ser divergente, muitas vezes guiado pela intuição: é o que acontece frequentemente com alunos que, como Ana, associa a uma menor área um menor perímetro. Já António parece intuir corretamente a igualdade dos perímetros e Bruna tem um discurso ainda confuso, próprio de uma primeira etapa de apropriação da situação.

A análise mais atenta do problema levou os alunos a avançar com respostas mais certeiras e, nalguns casos, com uma justificação mais sustentada. É o caso do par de alunos do 3.º ano que justifica que as figuras A e B são isoperimétricas porque "… se puxarmos a parte de cima para baixo e a do lado esquerdo para a direita ficam as figuras iguais" (figura 6), desenhando ainda duas setas junto à figura B que auxiliam a sua explicação. Estamos, assim, perante raciocínio dedutivo que pretende demonstrar a validade da sua conjetura, apresentando argumentos que estabelecem essa certeza.

Figura 6. Resposta de um par de alunos do 3.º ano à questão 1 (Mendes et al., 2022, p. 40)



"As figuras A e B têm as duas o mesmo perímetro porque se puxarmos a parte de cima para baixo e a do lado esquerdo para a direita ficam as figuras iguais"

Voltando ao Quadro 1, pode afirmar-se que os raciocínios indutivo e abdutivo têm diversos aspetos em comum, embora sejam distintos. Através de ambos formulam-se conjeturas que podem ser generalizações quando disserem respeito a um conjunto de objetos matemáticos, ou relações entre objetos desse conjunto, a partir de um dos seus subconjuntos (Jeannotte & Kieran, 2017). Assim, podemos afirmar que todas as generalizações são conjeturas, mas nem todas as conjeturas são generalizações, como foi a afirmação de que as figuras A e B são isoperimétricas. Vejamos um outro episódio que exemplifica a produção de uma conjetura que é uma generalização e que surge no decurso de raciocínio abdutivo, um tipo de raciocínio menos conhecido. Ele surge quando somos confrontados com algo que não estávamos à espera e formulamos uma hipótese explicativa para tal ocorrência, daí a função de explicação que lhe está associada, como referido no Quadro 1.

O episódio aconteceu no decurso da última questão que, implicitamente, convoca os alunos a pensar quantas figuras de 6 lados existirão com o mesmo perímetro de B. No momento de discussão coletiva, numa turma de 5.º ano, depois de terem realizado várias experiências de construção de hexágonos com o mesmo perímetro que B, uma aluna afirma (adaptado de Mendes et al., 2022, p. 46):

Os alunos começam por identificar a existência de hexágonos nas condições do problema, cujas medidas dos lados podem não ser números inteiros, caminhando para a generalização e para a justificação da sua veracidade

Beatriz: Professora, os números são infinitos então porque é que também não pode ser infinito? Porque é que…

Professora: Se calhar pode.

Raquel: Pode.

Professora: Se calhar, podemos construir infinitas figuras.

Raquel: Sim. Ó professora mesmo uma migalhinha assim. Uma migalhinha é uma figura diferente, nunca vai ficar igual.

Beatriz G.: Ó professora, isso do infinito é verdade porque nós reparámos que tanto ao tirar… imagine, estamos a tirar do canto de cá, não é? Por exemplo, um quarto e tiramos de um canto um qualquer, um que não tem nada a ver e mesmo assim continua com o mesmo perímetro, continua com os mesmos lados e continua… está tudo certo, só que são figuras diferentes.

Estamos de novo na presença de uma conjetura – existem infinitos hexágonos com o mesmo perímetro – que, neste caso, é também uma generalização. O raciocínio abdutivo surge com a formulação da conjetura, algo inesperada, e da sua explicação, também ela influenciada pela intuição – a ideia de "migalhinha" de Raquel, que emerge de experiências físicas e pessoais, e traduz a noção de uma parte infinitamente pequena que pode ser alterada de modo a ter um novo hexágono com o mesmo perímetro.

Alertamos para que existe uma tendência bastante comum de pedir aos alunos para explicarem, quando o que se pretende é que justifiquem. Explicar é descrever como se pensou, logo apela para a comunicação matemática, já o ato de justificar solicita a apresentação de um argumento que permita aferir da verdade ou falsidade de uma afirmação.

Para além dos processos de conjeturar, generalizar e justificar, outros são ainda possíveis de ser indicados, sendo vistos sobretudo como processos auxiliares de raciocínio. São eles: *comparar* e *classificar* que, através da identificação de semelhanças e de diferenças entre objetos, procuram, respetivamente, fazer inferências e agrupar em classes, e ainda o de *exemplificar* "que analisa exemplos que podem apoiar a procura de semelhanças e diferenças e a procura de uma validação" (Ponte, 2022, p. 8).

Para que o professor possa criar contextos favoráveis à promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio nos seus alunos é necessário não só ter um entendimento aprofundado sobre os tipos de raciocínio e seus processos e formas de os concretizar, como propor tarefas adequadas e explorá-las na sala de aula de forma a tirar partido das suas potencialidades.

Nota: Como fontes possíveis que poderão ajudar os professores a selecionar/adequar/criar tarefas promotoras do raciocínio matemático sugerimos o texto *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos* (Coordenação do Projeto REASON, 2022). Pistas para a exploração de tarefas na sala de aula de Matemática para promover o raciocínio matemático dos alunos poderão ser consultadas em Mendes e colegas (2022) e Delgado e colegas (2022).

Pensamento computacional

O pensamento computacional é uma das capacidades matemáticas expressa nas Aprendizagens Essenciais de Matemática, a ser desenvolvida e mobilizada em articulação com os diversos temas matemáticos e a par de outras capacidades matemáticas. Wing (2006, 2008) fez emergir o pensamento computacional como uma abordagem que nos permite fazer uso de computadores para resolver problemas. Contudo, seja num contexto digital ou não, o pensamento computacional visa capacitar os alunos para selecionarem e aplicarem estratégias e ferramentas adequadas para resolverem problemas. Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional visa contribuir para que todos os alunos sejam capazes de "melhor conceptualizar, analisar e resolver problemas complexos" (Seehorn et al., 2011, p. 9).

Hoyles e Noss (2015) apresentam diversas práticas que são implicadas no pensamento computacional: abstração (ver um problema em diferentes níveis de detalhe), pensamento algorítmico (predisposição para ver tarefas como passos mais pequenos interligados), decomposição (resolver um problema envolve resolver um conjunto de problemas mais pequenos) e reconhecimento de padrões (ver um problema como estando relacionado com problemas anteriormente encontrados). O teste e a depuração são também aspetos essenciais. Essas práticas visam garantir que a solução encontrada responde com sucesso à tarefa dada. Começa-se pela testagem para verificar o funcionamento. Caso a solução não funcione, o processo de depuração tem início (Ng & Cui, 2021) para localizar erros ou enganos e os corrigir. Nesse sentido, nas Aprendizagens Essenciais, a capacidade matemática transversal pensamento computacional "pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos" (Canavarro el al., 2021, p. 3).

Vários estudos têm evidenciado a articulação entre a Matemática e o pensamento computacional, reconhecendo o seu potencial contributo para alcançar a aprendizagem matemática pretendida (Ye et al., 2023). O contexto matemático pode ser usado para valorizar o pensamento computacional, bem como situações relativas ao pensamento computacional podem valorizar a matemática, melhorando a compreensão de conceitos, desenvolvendo de modo integrado capacidades matemáticas diversas (Hardin & Horton, 2017; Ng & Cui, 2021), dando sentido e colocando em prática ideias matemáticas (Sáez-López et al., 2019). A valorização do pensamento computacional oferece aos alunos "oportunidades para explorar uma variedade de conteúdos matemáticos através da reflexão sobre os processos e produtos de construção do pensamento computacional" (Ye et al., 2023, p. 22).

O desenvolvimento desta capacidade é essencial desde os primeiros anos de escolaridade e ao longo de todo o ensino básico, dando um contributo relevante para a Matemática para o séc. XXI. Contudo, o pensamento computacional não vai emergir de modo espontâneo, pelo que o desenvolvimento de conceitos relativos a essa capacidade requer um ensino explícito e específico (Rodríguez-Martínez et al., 2020).

Tal como expressam as Aprendizagens Essenciais, o pensamento computacional deve também surgir em articulação com o uso da tecnologia, nomeadamente para a resolução de problemas, em especial os relacionados com a programação. Nos últimos anos têm surgido diversas ferramentas digitais adequadas ao trabalho com os alunos desde os primeiros anos de escolaridade, tais como ambientes de programação visual. Por exemplo, os alunos podem, numa fase de iniciação, reutilizar e remisturar projetos, construir e ampliar alguns códigos e estruturas existentes para criar novos projetos ou projetos mais complexos (Ng & Cui, 2021). Também os contextos de robótica e programação, em que os alunos estão ativamente envolvidos, podem contribuir para os objetivos do pensamento computacional e trabalho em torno de ideias matemáticas específicas (Sáez-López et al., 2019). Ng e Cui (2021) envolveram os alunos na utilização de objetos tangíveis e na sua programação por meio de um ambiente de programação por blocos para executarem ações físicas, promovendo a modelação e o pensamento algorítmico dos alunos, a prática de depuração e a abstração, com utilização de variáveis.

A utilização da tecnologia e a articulação entre ideias matemáticas e práticas do pensamento computacional podem também potenciar conexões internas e externas, a articulação com outras capacidades matemáticas transversais e o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais.

Um exemplo

Apresentamos em seguida um exemplo expresso nas Aprendizagens essenciais do 1.º ciclo do ensino básico, envolvendo o pensamento computacional e o tema Geometria e Medida, no que respeita a Figuras planas, Operações com figuras e Área.

A figura 7 apresenta uma tarefa que pode ser proposta aos alunos do 3.º ano.

Figura 7. Enunciado da tarefa Pentaminós

Pentaminós

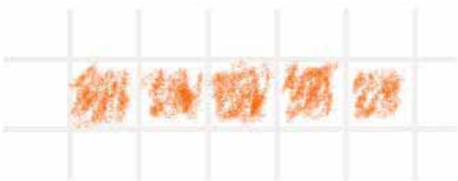
Vamos construir figuras com cinco quadrados congruentes, juntando-os lado a lado, tendo cada um pelo menos um lado adjacente a outro. Essas figuras são pentaminós.

1. Quantas figuras planas diferentes é possível construir?
2. Faz o desenho das figuras diferentes que conseguiste obter.

A tarefa consiste na construção dos 12 pentaminós possíveis. Consideram-se apenas as figuras que não são obtidas a partir de outras por translação, rotação ou reflexão. Trata-se de uma construção com papel e lápis que pode envolver também materiais manipuláveis concretos ou digitais que suportem a exploração durante a construção. Os alunos devem sempre fazer o registo com papel e lápis dos vários pentaminós.

Ao longo da construção, os alunos têm de se focar no que é essencial, extraindo a informação essencial do problema geométrico, fazendo assim emergir a prática de abstração de modo a cumprir a condição de construção da figura plana para ser um pentaminó. Por exemplo, podem começar por representar os quadrados todos alinhados como exemplifica a figura 8.

Figura 8. Representação de pentaminó com cinco quadrados alinhados (I)



8A. Construção com papel quadriculado e lápis

8B. Construção com quadrados manipuláveis (Exemplos: quadrados de encaixe; blocos padrão concretos ou virtuais como disponível em https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/)

É importante incentivar os alunos a definirem uma estratégia de construção, que os pode ajudar a verificar se estão a contemplar todas as possibilidades. As duas figuras abaixo (figura 9 e figura 10) evidenciam uma estratégia em que se mantém quatro quadrados fixos e apenas um assume posições diferentes:

Figura 9. Representação de pentaminó com quatro quadrados numa linha (L)

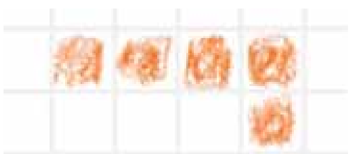
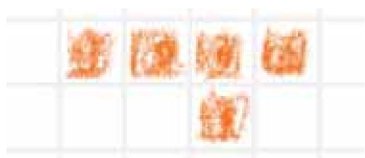


Figura 10. Representação de pentaminó com quatro quadrados numa linha (Y)



Seguindo esta estratégia, podem agora encontrar outros pentaminós colocando três quadrados em linha e identificando diferentes posições para os outros dois quadrados, obtendo diferentes figuras (figura 11):

Figura 11. Representação de pentaminós com três quadrados em linha (P, U, N, V, T, F, Z, X)

Com esta estratégia quase todas as possibilidades foram contempladas, ficando a faltar apenas uma em que se tem no máximo dois quadrados em cada linha ou coluna. Esta tarefa visa também as capacidades transversais de perseverança no trabalho em Matemática, de autoconfiança e de iniciativa e autonomia.

É importante nesta tarefa promover a prática de depuração, que lhe permite verificar se cumprem as condições e não têm figuras repetidas, ou seja, que se obtêm de outras por meio de uma isometria. Essa análise que devem fazer do seu trabalho deve permitir identificar erros e melhorar os seus processos de construção. De modo a irem regulando o seu trabalho, os alunos podem sobrepor as figuras para confirmarem se obtiveram novas figuras ou se eventualmente construíram uma figura congruente a outra já existente e assim eliminarem as repetidas, evitando duplicações.

A concluir

A integração do pensamento computacional nas Aprendizagens essenciais de Matemática visa promover uma abordagem à resolução de problemas numa perspetiva diferente e, tanto quanto possível, numa lógica de recorrer a ambientes computacionais no processo de resolução. Com esta abordagem não se pretende restringir as estratégias de resolução à programação. Consoante as propostas apresentadas, as práticas do pensamento computacional poderão ser desenvolvidas sem o recurso ao computador. Por outro lado, não basta acrescentar ferramentas digitais ao processo de resolução para se garantir que se está a desenvolver o pensamento computacional.

A plena integração do pensamento computacional passa por criar (ou adaptar) tarefas exploratórias e desafiantes que permitam trabalhar um conteúdo matemático e, simultaneamente, possam desenvolver as suas práticas (Espadeiro, 2021).

O papel do professor, na organização e condução dos momentos de aplicação das tarefas, reside na intencionalidade com que promove o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos. Esta intencionalidade, no acompanhamento que faz durante o processo de resolução, poderá passar por questionar os alunos, não com o intuito dar uma resposta mas, para permitir que estes ultrapassem um qualquer bloqueio no seu trabalho e possam, deste modo, desenvolver as práticas de pensamento computacional pretendidas.

Comunicação matemática

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática é um objetivo de aprendizagem transversal a todos os tópicos matemáticos curriculares, em estreita ligação com outras capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Ser capaz de comunicar matematicamente significa conseguir "partilhar e discutir ideias matemáticas, formulando e respondendo a questões diferenciadas, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, negociando a construção de ideias coletivas em colaboração" (p. 3). Ecoando a perspetiva do NCTM (2007), Santos (2018) esclarece que a capacidade de comunicação matemática "inclui conseguir, por um lado, transmitir ideias de forma clara e coerente aos outros, usando uma linguagem matemática correta e precisa, e, por outro, analisar e avaliar ideias e estratégias matemáticas de outros" (p. 11).

A comunicação matemática é indissociável do próprio processo de ensino-aprendizagem (Menezes et al., 2014). À semelhança de outros documentos curriculares (e.g., NCTM, 2007, 2014; Ponte et al., 2007), as atuais recomendações para o ensino da Matemática em Portugal perspetivam a comunicação matemática como uma orientação metodológica, além de um objetivo de aprendizagem (Canavarro et al., 2021). Em particular, "a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório" (Serrazina, 2018, p. 13), uma abordagem fortemente enfatizada nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. De facto, olhando a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem, ela "potencia e é potenciada pelos momentos típicos de (…) trabalho autónomo dos alunos sobre tarefas desafiantes, usualmente em pequenos grupos" (Tomás Ferreira, 2018, p. 1) e de discussão coletiva, tanto na vertente oral, como na vertente escrita. E estas duas fases – trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva – são aspetos distintivos e determinantes nas aulas pautadas por uma abordagem exploratória.

Os alunos têm diferentes estilos de aprendizagem, assim como diversas formas de comunicação preferenciais. Por isso, a comunicação nas aulas de Matemática deve "ser veiculada de diferentes formas, entre elas verbal, visual, gestual, icónica, com objetos ou escrita" (Vale & Barbosa, 2018, p. 2). O recurso a estas formas diferentes de comunicar deve ser ponderado em função do nível de escolaridade dos alunos e, sobretudo, dos objetivos de aprendizagem visados, tendo sempre em vista aquilo que facilita e promove "a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos" (Canavarro et al., 2021, p. 3) para que a comunicação dessas ideias e processos aos outros possa ser clara e, progressivamente, “a linguagem matemática [seja usada] como estratégia de comunicar com maior precisão” (p. 3).

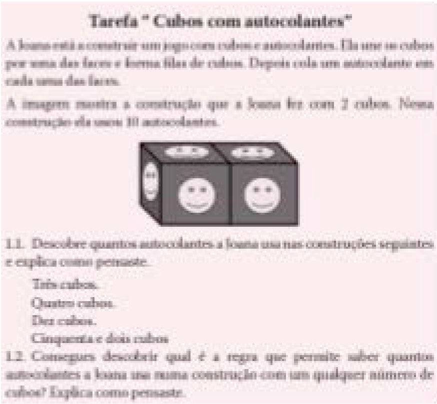
Segundo o NCTM (2007), “os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática [com compreensão] e aprendem a comunicar matematicamente” (p. 66). As experiências de aprendizagem que são proporcionadas aos alunos determinam a qualidade das suas aprendizagens, em particular as tarefas e a sua exploração em aula (e.g., Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009). As tarefas que se focam na prática de procedimentos mais ou menos rotineiros (como o cálculo ou a manipulação algébrica) não se prestam a fomentar a capacidade de comunicação matemática dos alunos. Pelo contrário, as tarefas de natureza mais desafiante, como os problemas, as investigações e as explorações, já podem constituir bom solo para o desenvolvimento da comunicação matemática (NCTM, 2007).

Comunicação oral

As oportunidades para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos, na sua vertente oral, dependem, de uma forma bastante significativa, da condução do discurso da aula feita pelo professor (Menezes et al., 2014). Por exemplo, quando o professor solicita aos alunos que expliquem como resolveram uma dada tarefa, ou os questiona sobre uma decisão tomada no percurso realizado com vista à resolução de um problema, ou lhes pede que comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros, a comunicação matemática está a ser fortemente estimulada.

Na figura 12 (à esquerda), encontramos um problema colocado aos alunos de uma turma do 4.º ano (Mestre, 2018). Após a leitura da tarefa e a modelação da situação colando autocolantes em dois cubos, os alunos resolveram a tarefa em pares ou grupos de três. Chegado o momento da discussão coletiva, a professora conduziu-a “no sentido de os alunos identificarem explicitamente o significado concreto das relações matemáticas encontradas” (p. 25). Tal como se observa na figura 12 (à direita), o questionamento insistente da professora “permite que todos os alunos acompanhem a discussão, especialmente aqueles que ainda possam estar com dificuldades em compreender o modo mais abstrato de como as ideias estão a ser discutidas” (p. 25).

Figura 12. Exemplo de diálogo em grupo turma (à direita), a propósito de uma tarefa (à esquerda), em que a comunicação oral é estimulada através das perguntas da professora (adaptado de Mestre, 2018, p. 25)



Tarefa " Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.

1.1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

Três cubos.
Quatro cubos.
Dez cubos.
Cinquenta e dois cubos

1.2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

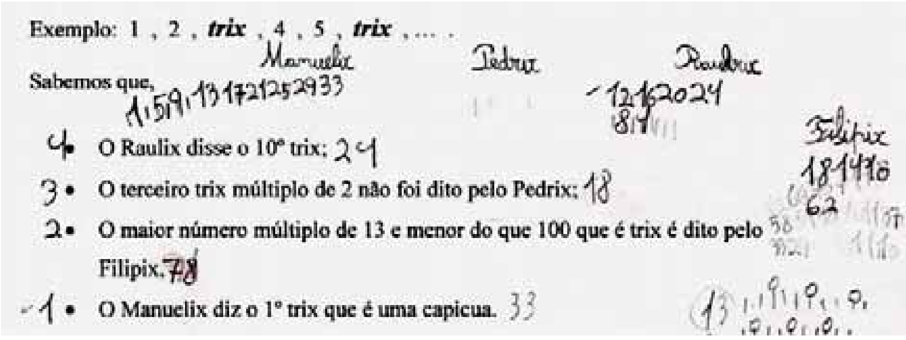
Prof. -	Porque é que é sempre mais 4?
Fábio -	Porque se faz sempre vezes 4…
Prof. -	Mas porquê?
Carol -	Porque 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38; 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto…
(…)	
Prof. -	Mas porquê?
Rita -	Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4… porque é sempre o mesmo número. Prof. - Mas eles fizeram e fizeram corretamente… A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação…
Rita -	Porque há 4 lados nos cubos.
(…)	
João -	Porque tem 4 lados. Sim, 4 faces.
Prof. -	Mas o cubo tem 4 faces?
Vários	Não, tem 6.
João -	Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do lado que também fica tapada.

Segundo o NCTM, "para apoiar eficazmente o discurso da aula, os professores deverão criar uma comunidade na qual os alunos se sintam livres de expressar as suas ideias" (2007, p. 67). Ora, uma outra forma de estimular o desenvolvimento da comunicação matemática consiste em solicitar aos alunos que emitam uma opinião, comentem ou justifiquem uma resolução ou uma afirmação feita por terceiros. Mas, enquanto os alunos dos primeiros anos têm dificuldades em se colocar no lugar dos outros e em ver as coisas segundo uma perspetiva que não é a sua, os seus colegas dos 2.º e 3.º ciclos são, muito frequentemente, relutantes em se expor perante os seus pares. Isto coloca desafios ao professor, que deve ter em conta que "questões bem planeadas e cuidadosamente colocadas poderão ajudar a esclarecer as expectativas para o trabalho dos alunos, relativamente a cada faixa etária" (p. 68).

Comunicação escrita

"A comunicação escrita é trabalhada quando se promove a realização de registos escritos relativos à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos" (Serrazina, 2018, p. 13). Estes são, de facto, os contextos mais frequentes em que a vertente escrita da capacidade de comunicação matemática pode ser promovida (Casa et al., 2016). Mas este estímulo pode trabalhar outros propósitos. Por exemplo, a escrita matemática pode ser usada com o propósito de fazer sentido de um problema, de uma situação ou das próprias ideias; deste modo, o destinatário da produção escrita é o próprio aluno. Na figura 13 encontramos um exemplo de escrita com este propósito exploratório, feita por um aluno do 4.º ano de escolaridade.

Figura 13. Exemplo de escrita matemática com propósito de fazer sentido de um problema (Reis, 2011, p. 95)



O aluno regista algumas notas que o ajudam a fazer sentido da situação apresentada antes de responder ao desafio que tem em mãos: descobrir qual a ordem pela qual quatro amigos (Pedrix, Manuelix, Raulix e Filipix) começaram a jogar o jogo Matrix (Reis, 2011). Este jogo está baseado no elencar dos números naturais, a partir do 1, por ordem crescente, com exceção dos múltiplos de 3 e dos números terminados em 3. Quando esses números ocorrem, o jogador deve dizer (ou registar) "trix". No caso de se enganar, é eliminado e os restantes jogadores recomeçam o jogo. No enunciado do desafio, é apresentado um exemplo, assim como um conjunto de "quatro condições que, conjugadas, permitem descobrir o lugar em que cada um dos amigos iniciou o jogo" (p. 89) (figura 13).

Outro propósito da escrita matemática, talvez aquele a que mais frequentemente se associa a comunicação matemática escrita, é descritivo ou explicativo. Os alunos podem ser chamados a descrever, por escrito, um conceito matemático ou a explicar a estratégia que usaram para resolver um problema, por exemplo (Casa et al., 2016). Uma escrita com este propósito apoia a necessidade de exprimir ideias com clareza e de usar palavras ou outras formas de representação (símbolos, desenhos, etc.) com precisão, para que os destinatários – usualmente o professor e os pares – possam compreender bem o que se pretende comunicar. A figura 14 mostra um exemplo da escrita matemática de um aluno do 3.º ano de escolaridade (à direita), com o propósito de descrever a sua interpretação acerca da informação veiculada por um gráfico de barras fornecido (Pereira, 2021).

Figura 14. Exemplo de escrita matemática com propósito explicativo (adaptado de Pereira, 2021, p. 95)

Num pequeno texto, escreve aquilo que tu interpretas no gráfico abaixo. Podes dizer do que trata o gráfico, quais são as frequências absolutas das classes representadas, qual é a moda e tudo aquilo que achares que é importante ser dito.

Na escola há 170 alunos 45 alunos têm mochila verde, 25 pretas, 10 azuis, 35 vermelhas e 25 amarelas. A mochila com menor cor é a amarela. A cor verde é a moda porque é a que tem em maior quantidade.

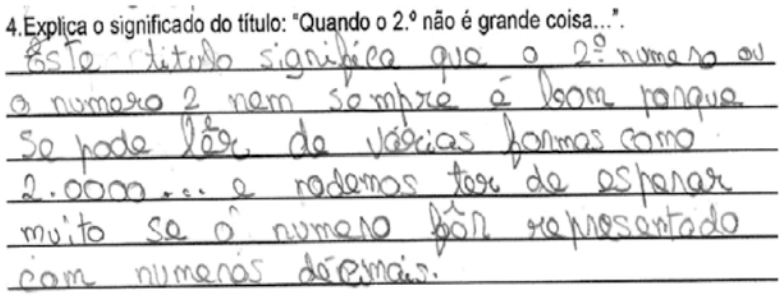
Um outro propósito da escrita matemática é de natureza criativa, com vista a registar ideias originais, a evidenciar fluência e flexibilidade de pensamento (isto é, a gerar múltiplas soluções a um problema ou a olhá-lo sob diferentes perspetivas, por exemplo), ou a desenvolver ideias (Casa et al., 2016). Naturalmente que não se espera que os alunos escrevam sobre ideias matemáticas inovadoras – as descobertas que sejam novas para os alunos ou para a turma podem ser consideradas originais: “escrever matematicamente sobre ideias originais poderá englobar alunos a formular problemas ou a questionar [outros], a gerar resoluções originais [considerando o universo em causa] de situações problemáticas, e a escrever sobre estruturas matemáticas ou padrões que tenham descoberto” (p. 17). O destinatário deste tipo de escrita matemática é, muitas vezes, um público autêntico e alargado, além das paredes da sala de aula, o que leva a que os alunos possam recorrer a modos formais ou informais para se exprimirem melhor.

Figura 15. Exemplo de escrita matemática com propósito de elaboração (adaptado de Menezes e Ferreira, 2018, pp. 55, 58)

1. Descreve a situação apresentada na tira. Consideras a situação engraçada?
2. Admitindo que neste dia a numeração iniciou em 0, quantas pessoas podem já ter sido atendidas?
3. Se esta numeração continuar na forma como é sugerida na imagem, quantas pessoas ainda devem ser atendidas até chegar ao 1? E ao 2?

A figura 15 apresenta uma tarefa proposta a uma turma do 4.º ano, a partir de uma situação humorística (Menezes & Ferreira, 2018). Na figura 16 encontramos a resposta de um aluno a uma quarta questão colocada a propósito daquela tarefa e que solicitava uma explicação do significado do título da própria tarefa.

Figura 16. Exemplo de escrita matemática com propósito criativo (adaptado de Menezes e Ferreira, 2018, p. 58)



4. Explica o significado do título: "Quando o 2.º não é grande coisa…".

Este título significa que o 2.º numero ou o numero 2 nem sempre é bom porque se pode lêr de várias formas como 2.000... e podemos ter de esperar muito se ô numero fôr representado com numeros demais.

Quando os alunos iniciam o seu percurso escolar, as suas capacidades de escrita são reduzidas, mas o recurso a desenhos ou outras representações visuais permite-lhes comunicar matematicamente, na forma escrita. As palavras ou os símbolos matemáticos não são, obviamente, os únicos recursos para apoiar a comunicação matemática escrita dos alunos. No entanto, em função dos destinatários e dos propósitos da escrita matemática, esta deve tornar-se progressivamente mais elaborada, como refere o NCTM (2007, p. 68):

> Em alguns casos, os alunos poderão considerar mais apropriado descrever as suas ideias informalmente através da linguagem comum e de esboços, mas, apesar disso, no final do ensino básico (…), deverão, também, aprender a comunicar matematicamente de forma mais formal, usando terminologia matemática convencional. (NCTM, 2007, p. 68)

São várias as formas a que o professor pode recorrer para promover o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita com os diferentes propósitos que foram mencionados anteriormente: elaboração de mapas de conceitos ou posters, escrita de jornais diários ou de textos informativos, *posts* nas redes sociais, criação de vídeos ou outras produções multimédia, formulação de problemas, etc. As audiências podem também ser diversas, desde o próprio aluno, a turma ou um grupo de pares, o próprio professor ou outros professores (da turma ou não), colegas de outras turmas (incluindo de outros anos de escolaridade), e pais ou a comunidade mais alargada (Casa et al., 2016). Os materiais manipuláveis, assim como as ferramentas tecnológicas, constituem-se em apoios essenciais ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto na vertente escrita, como na vertente oral (NCTM, 2007, 2014).

Por último, é importante notar que a ideia de *resolver-e-exprimir problemas* de matemática (Jacinto et al., 2018) resume a ligação estreita que existe entre a comunicação matemática e a resolução de problemas: um problema está bem resolvido quando o processo de resolução está comunicado de forma clara e completa, ou seja, não basta obter uma resposta matematicamente correta ao problema, é preciso também explicar de modo claro e completo como foi essa resposta obtida, tornar visível como se pensou para se chegar à resposta. A possibilidade de recorrer a diversas representações, com ou sem o apoio da tecnologia, facilita a comunicação de ideias e, ao mesmo tempo, potencia também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Representações matemáticas

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) são definidos oito objetivos para a aprendizagem desta disciplina que todos os alunos devem atingir. Num destes objetivos é explicitada a necessidade de os alunos desenvolverem a capacidade de usar representações matemáticas como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática. Salienta-se, ainda, que as ideias matemáticas são clarificadas quando se conjugam diferentes tipos de representação, sendo a familiaridade e a fluência que os alunos possuem com as várias formas de representação essenciais para a compreensão dessas ideias.

É realçado também neste documento que as capacidades matemáticas transversais são entendidas enquanto conteúdos de aprendizagem na área curricular de Matemática com a mesma importância que os conhecimentos matemáticos. Entre as seis capacidades matemáticas, aprofundadas nos quadros de operacionalização das Aprendizagens Essenciais, surgem as Representações matemáticas.

Significados e tipos de representações

São vários os significados e interpretações que são atribuídos à ideia de representações matemáticas. Para o NCTM (2007), o termo "representação" refere-se "tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Já para Tripathi (2008), uma representação matemática é "uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre esse conceito e outras ideias" (p. 348). O autor explica, ainda, que uma representação pode ser entendida como "a forma de uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outras pessoas" (p.348). Goldin (2018) afirma que as representações matemáticas são produções visíveis ou tangíveis, tais como diagramas, retas numéricas, gráficos, composições com objetos ou materiais manipuláveis, modelos físicos, textos escritos, expressões matemáticas, fórmulas e equações, ou mesmo imagens exibidas em ecrãs de um computador ou calculadora, que codificam, apoiam ou incorporam ideias matemáticas ou relações entre elas.

Para além dos significados e interpretações que lhes são atribuídas, as representações matemáticas têm sido caraterizadas e classificadas de várias maneiras, de acordo com a sua natureza e conforme os autores. Por exemplo, o NCTM (2017) defende um modelo em que as representações, associadas à aprendizagem matemática e à resolução de problemas, poderão ser de cinco tipos: física (materiais manipuláveis, objetos), contextual (situações da vida real), visual (pictórica, diagramas, tabelas, gráficos), verbal (linguagem escrita ou oral) ou simbólica (notação simbólica, uso de variáveis, de parâmetros, numerais,…), ilustrando, nesse modelo, as conexões importantes que se verificam entre as várias formas. Também as Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) adotam esta classificação, salientando a necessidade de promover a análise de diferentes representações sobre a mesma situação, evidenciando o papel das conexões entre representações para fortalecer a compreensão matemática.

Funções das representações

A Matemática é constituída por conceitos que estão interligados através de variadíssimas relações. Aprender um conceito usualmente implica não só conhecer o seu significado, mas também compreender as múltiplas relações entre esse conceito e outras ideias ou conceitos. Por isso, ao utilizar múltiplas representações de um conceito realçam-se vários aspetos da sua estrutura. Tripathi (2008) salienta esta ideia, afirmando que usar diferentes representações é como examinar um conceito através de uma variedade de lentes, em que cada uma delas proporciona uma perspetiva diferente, possibilitando um conhecimento mais rico e aprofundado desse conceito.

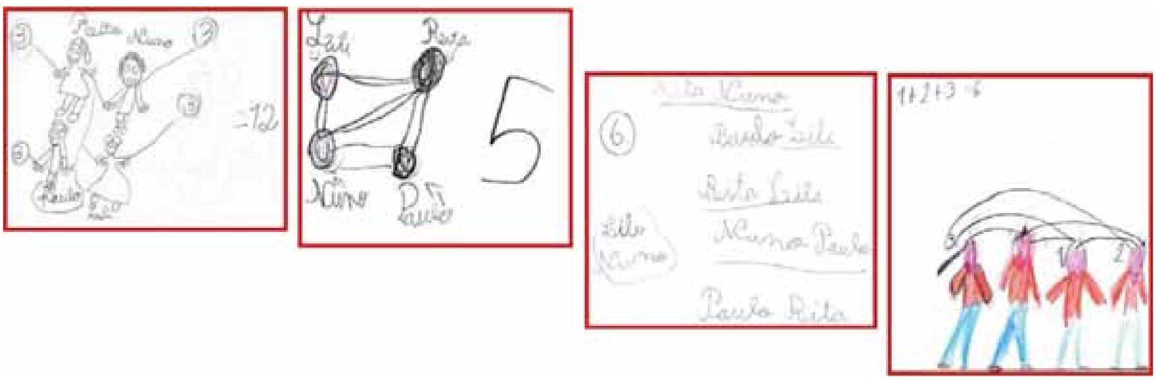
Entre os vários tipos de representação, as representações visuais têm atualmente um papel muito relevante, por estarem muito mais acessíveis aos alunos, em especial devido à evolução tecnológica, com as calculadoras gráficas, as folhas de cálculo, os programas de geometria dinâmica e outros, permitindo estabelecer facilmente conexões entre as várias representações. A tecnologia possibilita a obtenção de representações visuais variadas, nomeadamente tabelas, gráficos, construções geométricas estáticas e dinâmicas. Permite ainda que os alunos rodem, invertam, estiquem e ampliem figuras geométricas ou gráficos, bem como manipulem expressões, variando parâmetros, investiguem conjuntos complexos de dados ou façam simulações que podem ser usadas na investigação de fenómenos, facilitando a formulação de conjeturas.

São vários os investigadores que realçam a importância das representações, especialmente as visuais, para a resolução de problemas. Por exemplo, Barbosa e Vale (2022) apresentam no seu artigo vários exemplos que ilustram e evidenciam o potencial das representações visuais como veículos para chegar à solução de um problema. Estas investigadoras argumentam que, apesar das representações visuais não serem novas na literatura, usualmente são preteridas pelos professores que preferem utilizar as representações analíticas e simbólicas.

As abordagens visuais podem ser um excelente complemento às resoluções analíticas, podendo fazer emergir resoluções muito mais simples e com mais significado para os alunos. Estas investigadoras afirmam, ainda, que a abordagem visual de um problema complementada com múltiplas representações e resoluções contribui para uma melhor compreensão da Matemática e para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, alterando a sua visão de uma matemática composta por um conjunto de fórmulas e de procedimentos que devem memorizar e dominar.

O uso de diversos tipos de representações pelos alunos contribui para que os mesmos possam resolver problemas, nomeadamente quando recorrem a representações visuais que lhes permitem exprimir e organizar o raciocínio sobre uma dada situação. Ilustramos esta possibilidade com o problema dos abraços, e as resoluções que quatro crianças realizaram (Pinto, 2009). O problema é o seguinte: A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se todos com um abraço. Quantos abraços deram ao todo?

Figura 17. Resolução do problema (Pinto, 2009)



A análise das diferentes resoluções (figura 17) permite observar como diferentes crianças se socorrem de diferentes representações, de acordo com as suas preferências e formas de pensar. Todas as crianças adotaram a estratégia de representar os diferentes abraços, e contar quantos obtiveram. Uma das crianças regista os nomes dos pares de crianças que se abraçaram entre si, conseguindo obter todas as combinações possíveis. As outras três crianças adotam representações visuais, mas bastante distintas. Na resolução mais à esquerda, são desenhados os quatro amigos, e interligados entre si, representando essas interligações os abraços. A autora desta resolução, após analisar o que se passa com um amigo, regista que este deu 3 abraços, e repete esta ideia para cada um, revelando não lhe ocorrer descontar os abraços repetidos. A segunda resolução (a contar da esquerda) apresenta um diagrama, que o aluno faz sem precisar de desenhos, adotando símbolos idiossincráticos que representam os amigos (bolinhas) e os abraços (traços). Regista traços duplos mas apenas conta um abraço por cada par de traços, não tendo obtido a resposta correta de 6 apenas porque se esqueceu de ligar dois amigos. Na última resposta são combinados desenhos dos amigos com setas dos abraços, as quais são contadas, como se pode observar pelos números registados junto às setas. É muito curioso notar que ao registar os números no topo da folha de papel, o aluno opta por escrever o registo de forma ordenada: 1+2+3 = 6. Este registo é o caminho para a generalização do problema, pois se se acrescentasse um amigo, a resposta seria 1+2+3+4 =10, e assim sucessivamente. Note-se ainda que o uso de representações visuais que explicitam o pensamento permite também ao professor entender melhor como os alunos pensam e analisar a correção das estratégias que usam e a origem de eventuais erros, como acontece neste exemplo no caso de duas crianças.

A resolução de tarefas em que são exploradas múltiplas representações contribui para que os alunos melhorem a sua proficiência na resolução de problemas. As representações visuais, mais utilizadas nas primeiras etapas da compreensão de um conceito, estabelecem pontes para as representações simbólicas que virão a ser utilizadas mais tarde, quando se referirem ao mesmo conceito.

É importante a introdução da linguagem simbólica matemática, bem como levar os alunos a apreciar e a valorizar a simplicidade e eficiência desse tipo de representação para comunicar ideias sinteticamente e com precisão. E mesmo as representações estritamente simbólicas podem ser usadas de modo a evidenciar diversas ideias, pois cada representação simbólica está associada a um determinado contexto, e adquire significado nesse contexto. Tal é o caso, por exemplo, da ideia de metade, que tanto pode estar associada a 0,5, como a ½ ou 50%. Importa apresentar a notação de percentagem associada a valores de referência de decimais/frações, tendo em conta que esta surge em múltiplas situações do dia a dia com que os alunos contactam. Isto não envolve o cálculo de percentagens mas apenas o uso da representação, como se indica nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do 4.º ano (figura 18).

Figura 18. Excerto de Canavarro et al. (2021, p. 24)

> **Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%, 0,01, $\frac{1}{100}$ e 1%.**

Os significados que vão sendo atribuídos às representações simbólicas desenvolvem-se gradualmente nos estudantes ao estabelecer relações com outras representações, especialmente as visuais. Compete aos professores sugerir aos alunos a utilização da diversidade de representações possíveis, apresentando-lhes as que eles não dominem, questionando-os sobre as relações e conversões entre as diferentes representações e discutindo as escolhas mais adequadas. Através do questionamento e da interpretação das representações utilizadas pelos seus alunos, os professores poderão compreender melhor os seus raciocínios e perceber se aprenderam os conceitos matemáticos em estudo. Assim, cabe aos professores propor aos alunos tarefas em que seja possível o recurso a diferentes representações, onde a tecnologia poderá ter um papel decisivo como suporte visual e como facilitador do reconhecimento de conexões entre as várias representações.

As representações matemáticas têm um papel fundamental no modo como os alunos desenvolvem e aprofundam os seus conhecimentos. Quando criam, utilizam e comparam representações diversas os alunos organizam, registam e comunicam ideias matemáticas. As representações devem ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação das abordagens e dos argumentos, na identificação de conexões entre conceitos, na resolução de problemas e na modelação e interpretação de fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007).

Conexões matemáticas

A ideia de "conexões", no contexto da educação matemática, ganhou visibilidade quando o NCTM, em 2000, elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2007). A assunção de um termo específico e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de Matemática.

O NCTM refere quatro diferentes tipos de conexões (NCTM, 2007): entre conceitos matemáticos, entre diferentes temas matemáticos, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e a vida quotidiana. Os dois primeiros situam-se dentro da Matemática, enquanto os dois últimos a relacionam com o que lhe é externo, favorecendo a perceção da utilidade dos conhecimentos matemáticos e a apreciação do seu valor (Pierce & Stacey, 2006). Desta forma, em geral, distinguem-se as conexões internas da Matemática e as conexões externas, que a colocam em diálogo com os outros domínios, sendo a modelação matemática uma forma por excelência de concretizar conexões com o mundo em redor. É esta a opção das Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) na abordagem curricular às conexões como uma capacidade matemática transversal.

De qualquer modo, sejam internas ou externas, as conexões têm um potencial imenso para as aprendizagens dos alunos, como tem vindo a ser revelado pela investigação em educação matemática. "O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa" (Canavarro, 2017, p. 38).

Conexões internas

A exploração das conexões internas da Matemática permite evidenciar as relações que existem entre os diversos temas da Matemática, tão frequentemente tratados de forma isolada, correspondendo, nos manuais escolares, a diferentes capítulos que nunca se intersetam. Embora existam claramente conceitos e procedimentos específicos de cada tema da Matemática, existem também múltiplas associações que podem ser feitas, contribuindo para ampliar a compreensão dos conceitos e procedimentos e dar a conhecer a Matemática como uma ciência coerente.

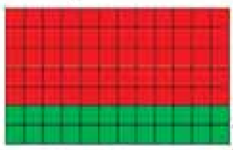
Uma estratégia poderosa para o estabelecimento de conexões internas é o uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2014).

A exploração de conexões matemáticas para potenciar a aprendizagem dos alunos requer uma ação estratégica por parte do professor, da qual faz parte o uso, em sala de aula, de tarefas que recorram a conhecimentos matemáticos de diferentes temas, quer surjam de forma explícita nas questões colocadas aos alunos, quer surjam no desenvolvimento da resolução e discussão das tarefas com a turma, na qual deve intencionalmente ser feita a explicitação das conexões em causa de modo a que os alunos as reconheçam.

Um exemplo de conexões internas que pode ser explorado no contexto dos primeiros anos relaciona um conceito do domínio dos Números, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com outro da Geometria, o conceito de área do retângulo, em particular através da representação visual. A propriedade distributiva da multiplicação pode ser apresentada como uma regra que se decora e aplica, mas nesse caso a criança poderá nunca chegar a compreender porque é que funciona. O estabelecimento de relação entre a expressão da propriedade distributiva e a(s) área(s) do(s) retângulo(s), a que se pode associar a escrita da expressão, permite que as crianças compreendam o significado da propriedade e entendem melhor as situações da sua utilização. Como o exemplo da figura 19 mostra, a área do retângulo grande (composto pelo verde e vermelho), é igual à soma das áreas dos dois retângulos quando tomados individualmente. A análise de diversas situações com números distintos permitirá que sejam inclusive as crianças a tirar as suas próprias conclusões sobre as relações que se podem estabelecer e a concluir a propriedade distributiva da multiplicação.

Figura 19. Excerto das Aprendizagens Essenciais de 3.º ano (Canavarro et al, 2021)

Recorrer à disposição retangular, a partir da exploração de diversos casos particulares [Exemplo: 12 x 7 = 12 x (5+2) = 12 x 5 + 12 x 2



].

Conexões externas

As conexões externas podem estar associadas a situações muito diversas, pois associam a Matemática a outras disciplinas ou domínios científicos, profissionais, culturais ou da vida do dia-a-dia, na multitude de atividades e de práticas concretas, incluindo lavar os dentes, fazer desporto ou ir ao supermercado.

Uma vantagem inequívoca da exploração de conexões externas é contribuir para eliminar as barreiras entre a Matemática e outros domínios, permitindo aos alunos conhecer e apreciar a aplicabilidade da Matemática, "enquanto forma de observação, representação e interpretação mais clara do mundo que os rodeia" (NCTM, 2007, p. 154). Naturalmente que as conexões matemáticas permitem aprender sobre o assunto com que a Matemática se conecta, constituindo-se como um enriquecimento curricular e uma forma de dar lugar ao desenvolvimento de uma visão mais integrada sobre os saberes.

Existem formas diversas de estabelecer conexões externas e explorá-las de forma relevante com os alunos. Uma possibilidade é a exploração de situações nas quais se possam aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões). Importa que as situações sejam de facto reais, de modo que os alunos possam reconhecer a Matemática como uma ferramenta efetivamente útil, que contribui para dar respostas verdadeiras, e com isso conhecer melhor o que é objeto de estudo. As situações escolares fabricadas para aplicação da Matemática pelos alunos não têm, a nível do reconhecimento do valor da Matemática, o mesmo potencial que as situações autênticas, nomeadamente das que podem ser vividas pelos alunos. A investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). E o mundo ao nosso redor está repleto de situações que permitem desocultar a presença da Matemática — não se diz que ela está em todo o lado?

Um exemplo de uma situação real bastante interessante que conecta a matemática com a vida do dia-a-dia, e a relaciona com áreas das Ciências Sociais e do Ambiente, incluindo a sustentabilidade, tem a ver com as máquinas para a recolha de vasilhame de plástico que se podem encontrar instaladas em locais públicos de grande acesso, como são os supermercados. Estas máquinas recebem os diferentes vasilhames que lhes são introduzidos e trituram-nos, com o objetivo de os reduzir e reciclar. As máquinas atribuem diferentes valores a cada tipologia de vasilhame que é feito (garrafas e garrafões com diversas capacidades), sendo possível que uma família de três pessoas consiga perfazer o valor de 5 euros com o depósito semanal do vasilhame usado para água. O valor obtido não reverte a favor da família — é doado a instituições de solidariedade social ou sem fins lucrativos, ficando assim a família envolvida em causas sociais.

Esta situação oferece múltiplas oportunidades de trabalho com alunos de diferentes ciclos. Importa começar por colocar questões adequadas com vista a obter respostas relevantes neste contexto. Um exemplo poderá ser calcular o montante que cada família da turma consegue totalizar em uma semana com o vasilhame respetivo, tendo em conta os valores reais que a máquina atribui a garrafas e garrafões com diferentes capacidades. Outra será calcular a quantidade de garrafas e garrafões necessários para perfazer um dado montante que se deseja doar. Outra ainda será conceber estratégias para sensibilizar a escola e a comunidade a aderir a esta forma de reciclagem e de solidariedade social. Qualquer um destes exemplos de trabalho envolve diversos conceitos (organização de dados, cálculos diversos, que podem ir da produção de estimativas à obtenção de valores exatos) e diversas capacidades matemáticas (formulação e resolução de problemas, comunicação de resultados, representação de resultados...). Seja qual for a questão (e muitas outras se podem colocar), no final do estudo realizado importa destacar como a Matemática contribuiu para conhecer e compreender melhor a situação.

Outra possibilidade bastante acessível de trabalho com os alunos no âmbito das conexões externas é a identificação da presença da Matemática em contextos diversos reais e a procura de compreensão do seu papel na criação e construção da realidade observada. Esta modalidade pode acontecer no âmbito de visitas de estudo, in loco ou virtuais, que possibilitam o contacto com o mundo fora da escola, mas também pode acontecer por observação das práticas e artefactos da escola, a começar pelo próprio edifício da escola, sendo a Arquitetura uma enorme fonte de conexões externas com a Matemática. Convidar os alunos a observar fachadas de edifícios comuns e a identificar como a Matemática foi usada nessa construção, questionando como terão pensado os seus autores para produzir a obra, constitui uma excelente estratégia para os alunos convocarem ideias matemáticas já aprendidas e lhes darem utilidade e sentido em contexto real. Mas o convite pode ser estendido, com o desafio para que proponham novas fachadas renovadas, apelando à sua criatividade e espírito crítico, tendo em conta os requisitos identificados anteriormente, que certamente envolvem múltiplos conceitos da geometria e da medida. Este trabalho constitui um exemplo de conexão externa com enorme potencial para as aprendizagens, que pode ser usado em qualquer ano de escolaridade do 1.º Ciclo. Os alunos mais novos poderão fazer propostas com recurso a desenho com lápis em papel, os mais velhos poderão usar *software* de geometria dinâmica para replicar as fachadas e fazer novas propostas de sua autoria. Da mesma forma se pode trabalhar na observação de monumentos diversos como, por exemplo, o Cromeleque dos Almendres, de equipamentos modernos para uso comum como, por exemplo, os estádios de futebol, ou ainda de estruturas artísticas, como os painéis de azulejos das estações de comboios espalhadas por todo o país.

Modelação matemática

A modelação matemática consiste essencialmente em matematizar, através de objeto(s) matemático(s) que compõem o chamado "modelo matemático", uma dada situação de um contexto extra-matemático, constituindo o trabalho matemático realizado uma fonte de conhecimento, de capacidade de controlo e de tomada de decisões sobre essa situação matematizada. É isto que distingue a modelação matemática do estabelecimento de conexões externas que referimos na secção anterior: as conexões externas não implicam a existência de um modelo matemático que represente uma situação sobre a qual se fica apto a intervir, sendo este aspeto fulcral na modelação matemática.

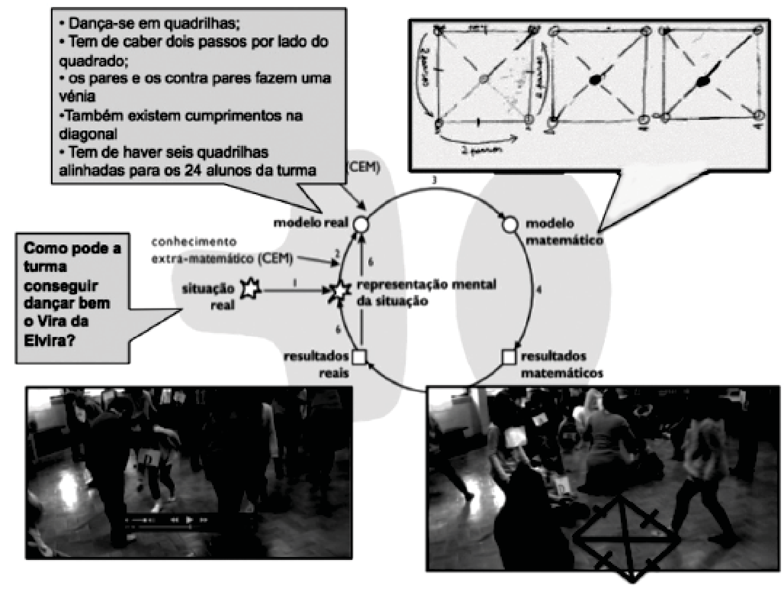
A modelação matemática concretiza-se através de um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático, muitas vezes representado por um ciclo (Ferri, 2010). A primeira fase do ciclo de modelação consiste na apreensão da situação real a modelar, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar acessível e matematicamente tratável. De seguida, através da aplicação de ideias matemáticas, constrói-se o modelo matemático que vai permitir produzir resultados, que nos permitem agir sobre a situação real.

Assim, a modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

Os modelos matemáticos encontram frequentemente expressão em fórmulas ou funções matemáticas, mas também existem modelos matemáticos representados por outros objetos matemáticos, como, por exemplo, tabelas ou esquemas que traduzem a situação. Estes últimos podem ser mais adequados ao trabalho com crianças e podem, inclusivé, estabelecer pontes para representações mais formais.

Um exemplo de uma abordagem à modelação com crianças de 1º ciclo pode encontrar-se no contexto do projeto MatDance (Canavarro, 2017). Com o objetivo de melhorar a execução da coreografia de uma nova dança em quadrilhas (grupos de 4 dançarinos) que estavam a aprender, surgiu a ideia de se marcar o chão com pontos chave que permitissem a cada dançarino posicionar-se no(s) sítio(s) certo(s). Revistos em conjunto os conhecimentos extra-matemáticos relativos às condicionantes da dança, cada grupo de crianças apresentou uma proposta e foi eleito pela turma o esquema que se observa na figura 20, correspondendo o modelo matemático aos quadrados sucessivos que representam as posições de cada quadrilha. Cada quadrado é simultaneamente estático (refere-se a posições de dançarinos), mas também dinâmico (incorpora o percurso realizado pelos dançarinos quando "percorrem" o quadrado). Com esta experiência, os alunos têm a oportunidade de estabelecer diversas conexões, aprofundando a compreensão sobre o que é um quadrado, os elementos que o compõem, as relações entre eles e até as funções que podem ter, como representar a realidade da dança e permitir intervir sobre ela, dando oportunidade de dançar melhor.

Figura 20. Modelo da dança em quadrilhas, em forma de diagrama (Canavarro, 2017)



A concluir, sistematizamos três ideias que importa reter sobre a importância da exploração curricular das conexões matemáticas com os alunos de todos os níveis: 1. Constituem-se como oportunidade de trabalhar de forma interrelacionada, e com ênfase na compreensão, conceitos e procedimentos matemáticos de diversos temas; 2. Proporcionam contextos onde o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais surge com naturalidade; 3. Oferecem a possibilidade de reconhecimento da relevância da matemática. Insistimos na ideia de que não é suficiente que o professor apresente nas aulas exemplos curiosos de conexões matemáticas aos alunos. É necessário que os alunos tenham oportunidade de eles próprios terem experiências que lhes permitam efetivamente conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula (Canavarro, 2017).

Tarefas em sala de aula

Apresentação e discussão

Tarefa — Despesas imprevistas

Enunciado da tarefa

Despesas imprevistas

Os telemóveis da mãe e do pai do Guilherme avariaram e não tinham arranjo. Tiveram de comprar dois telemóveis novos. Na loja encontraram os seguintes modelos:

1. Fizeram uma estimativa de quanto iriam gastar se optassem pelos telemóveis mais caros. Regista a estimativa que eles terão feito.
2. A mãe optou pelo telemóvel que custava 325€ e o pai escolheu um que custava 544€. Calcula quantos euros é que a família gastou em telemóveis.
3. Se tivessem optado por comprar 2 telemóveis dos mais baratos, quanto teriam gasto?

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 3.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com esta tarefa pretende-se trabalhar os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números naturais	Usos do número natural
	Sistema de numeração decimal	Valor posicional
	Relações numéricas	Composição e decomposição
	Cálculo mental	Estimativas
	Operações	Significado e uso das operações Algoritmo da adição
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégias
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações	Representações múltiplas
	Pensamento computacional	Algoritmia
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia Persistência

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos sejam capazes de:

- Comparar e ordenar números naturais, pelo menos, até 10 000, em contextos variados, usando uma diversidade de representações.
- Arredondar números naturais à dezena, centena ou unidade de milhar mais próxima, de acordo com a adequação da situação.
- Produzir estimativas através do cálculo mental, adequadas à situação em contexto.
- Compor e decompor números naturais até ao 10 000 de diversas formas, usando diversos recursos e representações.
- Interpretar e modelar situações com a adição/subtração e multiplicação/divisão e problemas associados.
- Compreender e usar o algoritmo da adição com números naturais até quatro algarismos, relacionando-o com processos de cálculo mental formal que recorrem à decomposição decimal.
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas.
- Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias de resolução de um problema.
- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos.

- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Um enunciado escrito da tarefa para distribuir a cada um dos alunos, MAB, telemóvel com câmara fotográfica, computador; projetor.

Resoluções esperadas

Questão 1

Os alunos optam por uma das seguintes opções:

a) Compra de dois telemóveis iguais com o preço mais alto (544€), arredondando o valor para 500€ e apresentam a solução 500+500=1000

b) Compra de dois telemóveis diferentes (544€ e 325€), selecionando os dois mais caros, arredondando os valores para 500€ e 300€ e apresentam a solução 500+300=800

Como os valores envolvidos nos cálculos são centenas exatas, os alunos obtêm o total por cálculo mental.

Questão 2

Os alunos adicionam os valores correspondentes ao preço dos dois telemóveis e calculam o total recorrendo à representação horizontal do cálculo, registando os raciocínios efetuados, nomeadamente:

a) Decompor uma das parcelas
544+325=
544+5=549
549+20=569
569+300=869

b) Decompor ambas as parcelas
544+325=

500+300=800
40+20=60
4+5=9
800+60+9=869

Os alunos podem usar estratégias de cálculo mental diferentes das apresentadas, com as quais se sintam mais à vontade. No momento da discussão das diferentes resoluções com toda a turma, os alunos devem ter oportunidade para explicitar as suas estratégias e deve proceder-se à comparação e apreciação da eficácia das diferentes estratégias usadas.

Questão 3

Os alunos podem recorrer a duas resoluções diferentes:

a) Compra de dois telemóveis iguais com o preço mais baixo (132€), indicando 132+132= , e de forma automática indicarem o total 264€, por se tratar de um dobro e o cálculo de dobros fazer parte das rotinas de cálculo previstas nas Aprendizagens Essenciais.

b) Compra de dois telemóveis diferentes (132€ e 241€), indicando 132+241=, sendo expectável que recorram à estratégia de decomposição decimal para obter o total

100+200=300
30+40=70
2+1=3
300+70+3=373

Exploração da tarefa

A resolução desta tarefa pressupõe que os alunos tenham vindo a trabalhar, ao longo da sua escolaridade, diversas estratégias de cálculo mental, sendo capazes de selecionar aquela que em cada situação considerem mais eficaz em função dos números envolvidos. O trabalho será mais facilitado se a maioria dos alunos se encontrar já num nível de cálculo formal, tendo-se já libertado do uso da linha numérica vazia enquanto modelo de suporte à realização do cálculo mental, sendo capazes de recorrer à representação horizontal dos cálculos intermédios efetuados.

Prevê-se que a exploração da tarefa decorra em três momentos distintos:

Apresentação da tarefa. Após um breve diálogo sobre "despesas imprevistas" para uma família, espera-se que os alunos usem exemplos para ajudar a clarificar o conceito. Seguidamente, o professor distribui a folha da tarefa e solicita que descubram o que se pretende na primeira questão. Pode ser necessário ajudar alunos que manifestem dificuldades de leitura, nomeadamente propondo trabalho a pares com um colega mais autónomo nesta competência. Após a leitura do enunciado, o professor deve solicitar aos alunos que explicitem o que se pretende em cada questão, para que haja um entendimento comum do contexto e do que se pretende. A leitura e interpretação das questões 2 e 3 devem ser realizadas em cada grupo, abrindo assim a possibilidade de surgir mais do que uma resposta na questão 1. O professor informa os alunos que vão trabalhar em pequenos grupos e o tempo que terão para desenvolver esse trabalho. Tempo previsto: 5 minutos.

Trabalho autónomo. O professor deve acompanhar de perto o trabalho dos grupos, nomeadamente os que integram alunos com maior dificuldade e, antes de terminar o tempo previsto para conclusão da tarefa, circular por todos os grupos para se inteirar do decorrer dos trabalhos e ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades que possam ter surgido. Este acompanhamento informa o professor também para que selecione as diferentes resoluções dos grupos que importa discutir, seja pela originalidade ou pela eficácia das representações usadas. As resoluções selecionadas são fotografadas para projetar no quadro, possibilitando que todos tenham acesso ao trabalho que os colegas realizaram e possam participar na discussão. Tempo previsto: 30 minutos.

Discussão com toda a turma. Em cada questão, de acordo com a ordem que o professor estabelece, tendo em conta o nível de estruturação crescente das representações e estratégias usadas, cada grupo ou porta-voz explica à turma a forma como o grupo pensou, apoiando o seu discurso na resolução que será projetada no quadro, e responde a questões colocadas pelos colegas ou pelo professor de forma a clarificar as resoluções apresentadas. Após a apresentação e discussão das diferentes resoluções para cada questão, deve ser reconhecida a estratégia/representação mais eficaz, que pode ser registada, pelos alunos, no seu caderno diário. Depois de discutidas as resoluções dos alunos, o professor apresenta as estratégias de cálculo (cálculo algorítmico compreensivo) que pretende introduzir com esta tarefa. Tempo previsto: 55 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As possíveis dificuldades desta tarefa poderão estar relacionadas com a memorização dos factos básicos da adição e com o efetuar a decomposição decimal dos números envolvidos. O professor poderá incentivar os alunos a recorrer ao Material Multibásico (MAB) para a representação dos números e realização dos cálculos envolvidos.

Concretização da tarefa na prática

Apresentação da tarefa

A professora informou os alunos que este mês tinha tido umas despesas imprevistas e questionou a turma sobre o que entendiam por esta expressão:

A1 – É quando a minha mãe tem que pagar muito de luz.

Prof. – Sim, uma grande conta na fatura da luz é sempre uma surpresa. E que outras situações podem ser despesas imprevistas lá em casa?

A2 – Quando o frigorífico fica avariado.

Prof. – Então o que são despesas imprevistas?

A1 – São contas que os pais não estão à espera.

Clarificada a questão do significado da expressão que deu nome à tarefa, a professora distribuiu um enunciado a cada aluno e pediu que lessem a parte inicial e a questão 1, assegurando que todos tinham ajuda para o fazer. Quando a generalidade dos alunos tinha concluído a leitura, questionou:

Prof. – Então o que aconteceu?

A3 – O telemóvel da mãe e do pai do Guilherme avariaram.

Prof. – Então, quando algum equipamento avaria, devemos sempre mandar arranjar. É uma forma de poupar recursos do Planeta.

A3 – Não tinham arranjo!

Prof. – Contem-me tudo…

Os alunos recontaram a situação apresentada, bem como o que se pretendia na primeira questão.

A professora informou que teriam 30 minutos para resolver as 3 questões em grupo e que, passado esse tempo, passariam à apresentação e discussão do trabalho realizado pelos grupos.

Trabalho autónomo

Com exceção de um dos grupos, todos resolveram as questões da tarefa de forma colaborativa e autónoma, sem precisarem de apoio da professora. Durante o tempo de realização da tarefa, a professora apoiou um grupo de alunos com mais dificuldade, procurando assegurar que cumpriam o trabalho no tempo estabelecido. Fotografadas as diferentes resoluções, deu-se então início à última fase da aula, a discussão com toda a turma.

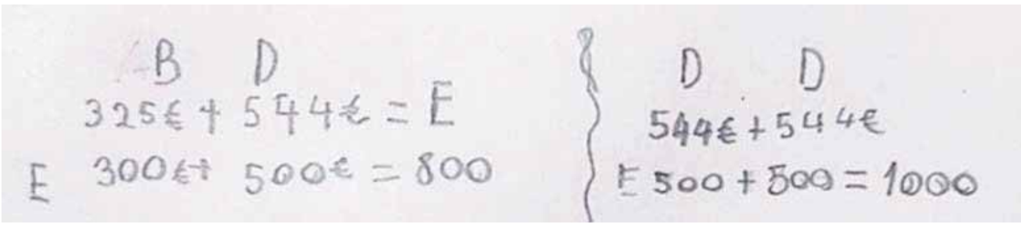
Discussão com toda a turma e síntese das ideias chave

A apresentação das resoluções decorreu questão a questão, isto é, foram apresentadas as diferentes resoluções para a questão 1, depois repetiu-se o processo relativamente à questão 2 e à questão 3. Deu-se início à discussão da questão 1 com a apresentação de uma resolução em que o grupo tinha feito uma estimativa partindo do princípio que os compradores tinham optado por dois telemóveis diferentes, tendo selecionado os mais caros (figura 1):

Figura 1. Resolução da questão 1 de um dos grupos

Quatro grupos tinham realizado uma resolução muito idêntica à apresentada. Um grupo apresentou duas possibilidades de resposta (figura 2):

Figura 2. Resolução da questão 1 de um dos grupos



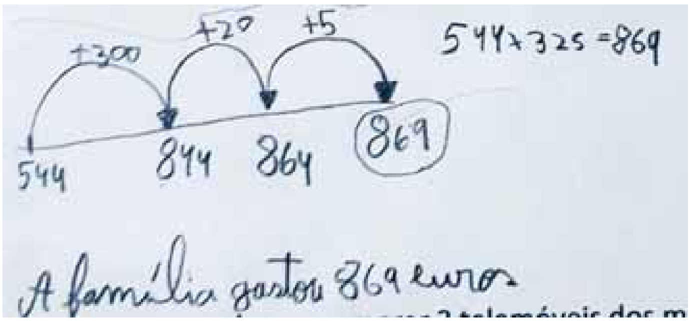
Ao ir ao quadro, a professora questionou o porta-voz do grupo:

> *Prof. – O que é que a vossa resolução tem de diferente da anterior?*
>
> *A4 – É que nós também pensámos que eles poderiam querer os dois um telemóvel igual.*
>
> *Prof. – Nesse caso, qual foi a vossa estimativa de custos?*

A aluna apresentou apenas a parte da resolução que era diferente da do grupo anterior. A turma validou as duas respostas apresentadas e os alunos registaram as duas possibilidades de resolução para a questão 1. Evitando tornar a partilha de resoluções algo repetitivo e monótono, a professora colocou o foco da apresentação deste grupo no que era diferente relativamente ao grupo anterior.

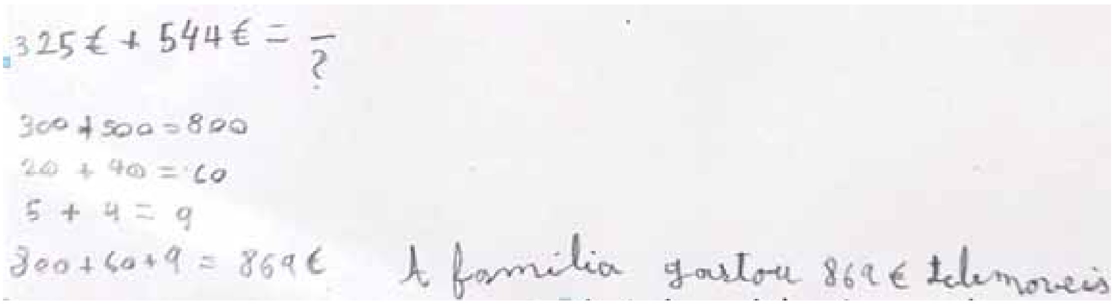
Passou-se à apresentação e discussão das resoluções da questão 2. O primeiro grupo a apresentar explicitou a sua estratégia de cálculo (decomposição da parcela de menor valor) apoiando-se ainda na linha numérica vazia (figura 3). A maioria dos alunos deste grupo ainda se encontrava num nível de cálculo por estruturação.

Figura 3. Resolução da questão 2 de um dos grupos



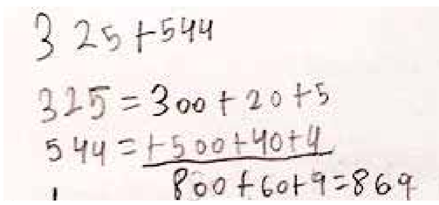
O grupo seguinte apresentou uma resolução que teve por base a decomposição decimal de ambas as parcelas (figura 4) e pode considerar-se mais evoluída do que a anterior, uma vez que os alunos já são capazes de calcular de forma flexível sem recorrer a representações físicas, como materiais estruturados, ou representações visuais.

Figura 4. Resolução da questão 2 de um dos grupos



A turma reconheceu como mais eficaz a última representação apresentada e foi essa que foi copiada por todos. A professora também apresentou a sua estratégia, introduzindo o algoritmo da adição de forma compreensiva e registou no quadro:

Figura 5. Registo de um aluno do algoritmo apresentado pela professora



Prof. – Reparem como eu calculei. A minha forma de cálculo tem alguma semelhança com a vossa?

A3 – É como a nossa, só que está arrumada de outra forma.

Prof. – Como é que eu fiz?

A3 – A professora partiu os números e escreveu as centenas debaixo das centenas, as dezenas debaixo das dezenas e as unidades debaixo das unidades.

Prof. – E depois?

A10 – Juntou tudo.

Prof. – Tudo, como?

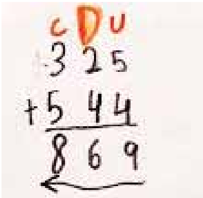
A10 – Juntou as centenas com as centenas, as dezenas com as dezenas e as unidades com as unidades. Depois fez 800+60+9.

A5 – Essa forma é parecida com uma que o meu pai me ensinou!

Prof. – Vem cá A5 explicar como é que o teu pai te ensinou.

O aluno veio ao quadro e fez o seguinte registo (figura 6):

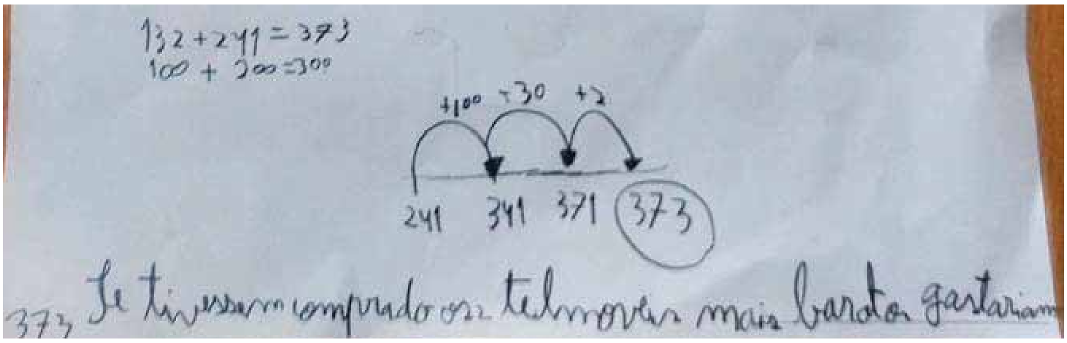
Figura 6. Registo de um aluno do algoritmo apresentado pelo colega



Explicou aos colegas a forma de cálculo que conhecia e analisaram em coletivo as semelhanças e diferenças entre as duas, tendo os alunos concluído que os dois algoritmos eram muito fáceis, mas que, no do colega, tinham de escrever menos. Estava aberto o caminho para a utilização dos algoritmos, de forma compreensiva, na resolução de problemas.

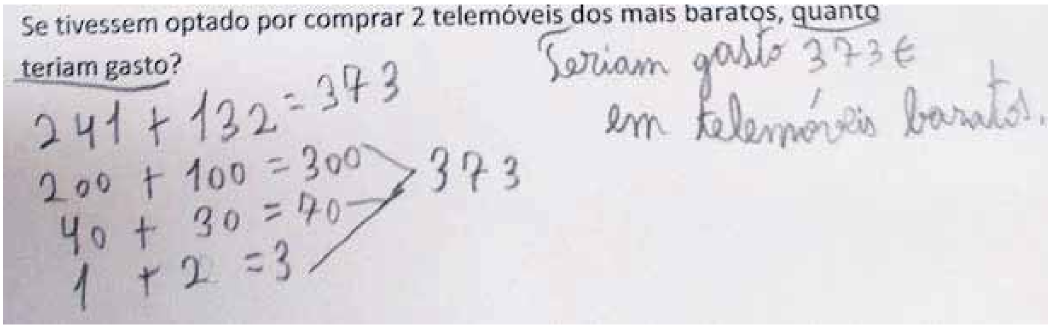
Relativamente à questão 3, após recordar o que se pretendia descobrir, veio primeiro ao quadro o representante de um dos grupos que apresentaram apenas uma possibilidade de resposta (figura 7), admitindo que seriam comprados dois telemóveis diferentes, com os preços mais baixos:

Figura 7. Resolução da questão 3 de um dos grupos



Foi interessante verificar que os alunos, após a indicação do cálculo que teriam de realizar, registaram uma estimativa do seu valor, arredondando cada uma das parcelas à centena mais próxima, talvez por influência da questão anterior. A estratégia usada, à semelhança do que haviam feito anteriormente, foi decompor uma das parcelas em centenas, dezenas e unidades e ir adicionando esses valores à parcela de maior valor. O grupo socorreu-se da linha numérica vazia para registar os cálculos intermédios que realizou. A resolução apresentada foi validada, mas houve colegas que disseram que os cálculos poderiam ser registados sem a linha numérica. Seguiu-se então a apresentação de um dos grupos que procedeu dessa forma (figura 8).

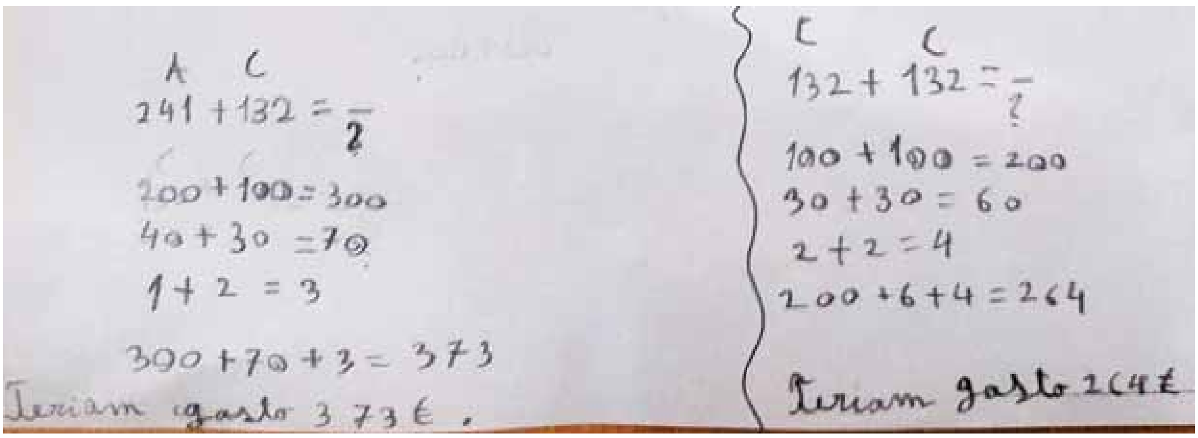
Figura 8. Resolução da questão 3 de um dos grupos



Neste caso, houve uma representação horizontal do cálculo e a estratégia usada foi a decomposição decimal de ambas as parcelas.

Um dos grupos resolveu a questão 3 apresentando duas possibilidades de resposta (figura 9), dado que admitiram a possibilidade de comprar, de entre os telemóveis mais baratos, dois telemóveis diferentes ou dois telemóveis iguais:

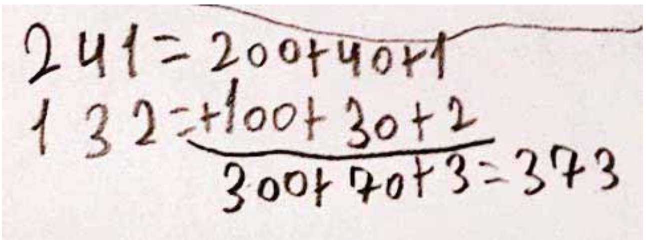
Figura 9. Resolução da questão 3 de um dos grupos



Dado que a primeira solução (A+C) era semelhante à do grupo que tinha apresentado anteriormente, o porta-voz do grupo apenas apresentou aos colegas a segunda solução (C+C).

Feito o registo das duas soluções no caderno diário, a professora desafiou os alunos a resolverem o cálculo 241+132 usando o algoritmo que ela havia apresentado. Houve necessidade de apoiar alguns alunos, mas um número significativo conseguiu corresponder de forma autónoma. Uma aluna veio ao quadro explicar como tinha feito e os colegas confirmaram o algoritmo que tinham realizado.

Figura 10. Resolução da aluna que veio ao quadro

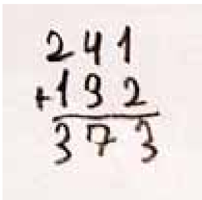


A professora não esperava que os alunos também quisessem resolver o cálculo usando o algoritmo convencional que o A5 tinha apresentado na resolução da questão 2, mas aconteceu:

> *A12 – Professora, posso tentar fazer à maneira do A5?*
>
> *Prof. – Vem cá então tentar e explicar como devemos fazer.*

A aluna foi ao quadro e, apesar de algumas hesitações, conseguiu realizar o algoritmo convencional.

Figura 11. Resolução da aluna que veio ao quadro



À medida que a aluna ia realizando o algoritmo, a professora ia apontando os cálculos que eram feitos e que não eram visíveis naquela representação mas sim no algoritmo compreensivo que tinham realizado anteriormente e que ainda estava registado no quadro.

> *Prof. – É normal que ainda tenham algumas dificuldades em calcular desta forma, precisamos de mais treino.*

Já com alguns minutos de atraso relativamente à hora do intervalo, deu-se assim a aula por terminada.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Despesas imprevistas*, importa tecer alguns comentários, a título de síntese, das aprendizagens relativamente a conteúdos e capacidades matemáticas transversais, bem como a capacidades e atitudes gerais transversais realizadas pelos alunos.

Conteúdos matemáticos

A tarefa constituiu uma nova oportunidade para os alunos desenvolverem a sua capacidade de cálculo, quer tirando partido de estratégias que já conheciam, quer analisando criticamente as suas estratégias e as dos colegas, favorecendo a transição progressiva para um nível de cálculo formal. Contudo, nesta reflexão queremos focar particularmente a aprendizagem do algoritmo da adição com compreensão e que antecede a aprendizagem do algoritmo convencional. Efetivamente, e como referiu um aluno, o algoritmo surge naturalmente não como uma forma nova de calcular, mas como uma nova forma de "arrumar" os números, favorecendo o estabelecimento de pontes entre o que já faziam antes e o procedimento que é agora apresentado. Apesar de a professora não ter previsto a introdução do algoritmo convencional, uma vez que será ainda cedo para uma nova transição, ele surgiu por sugestão de um dos alunos. Como acontece frequentemente, há famílias que ensinam os algoritmos aos alunos antes mesmo de serem lecionados na sala de aula, o que pode constituir um obstáculo ou uma dificuldade a ter em conta. Neste caso, a professora encarou a situação como uma oportunidade para relacionar com o algoritmo compreensivo, acabado de apresentar, ao mesmo tempo que valorizou o contributo que o aluno quis oferecer. Não obstante o interesse da turma em usar o algoritmo apresentado pelo colega, é papel do professor não precipitar a sua utilização exclusiva e prematura que, com alguma probabilidade, poderá acabar por prejudicar a compreensão do algoritmo.

Capacidades matemáticas transversais

Do exposto anteriormente sobressai a importância das representações matemáticas e da atenção que o professor precisa de dar à transição entre representações. Esse trabalho implica contemplar um espaço na aula para a apresentação e comparação das diferentes estratégias que os alunos usam, tendo em vista a sua evolução para níveis mais formais mas, ainda assim, respeitando diferentes ritmos de aprendizagem. Esta valorização não acontece sem dar espaço à comunicação, quer através dos registos escritos, quer através da oralidade que é especialmente favorecida no seio do grupo de trabalho e nos momentos de discussão coletiva, tal como ilustrámos através dos diálogos dos alunos.

Outra capacidade matemática em desenvolvimento que queremos destacar diz respeito ao pensamento computacional. Muitas vezes associado à programação e à tecnologia, esta é uma situação que não implica uma ou outra mas que, ainda assim, envolve pensamento computacional, nomeadamente na prática de algoritmia - desenvolver um procedimento passo a passo para solucionar um problema. Apesar de este ter sido muito suportado na proposta da professora, os alunos tiveram um papel ativo na sua desconstrução, o que é muito diferente da reprodução de uma rotina à qual não se dá sentido.

Capacidade e atitudes gerais transversais

A comparação de estratégias e a identificação de processos mais eficazes tem subjacente a valorização da matemática como uma ferramenta potente para resolver problemas. Neste caso, partiu-se de uma situação do quotidiano, com a qual os alunos se conseguem relacionar, para dar significado ao cálculo. O pedido para efetuar estimativas tem dois propósitos: por um lado, é essa a estratégia que usamos espontaneamente em situações em que precisamos de ter uma noção de um gasto financeiro significativo e, nesse sentido, a matemática surge como uma aliada natural e útil, por outro lado, as estimativas continuarão a ser um recurso importante no cálculo algorítmico, favorecendo o sentido crítico face aos resultados obtidos. Finalmente, vale a pena referir também a importância da persistência necessária no cálculo algorítmico. Os alunos têm reações muito divergentes relativamente a estes procedimentos: os que os dominam podem apreciar a confiança que lhes dá, já os que revelam mais dificuldades, poderão debater-se para conseguir dar sentido e terem sucesso. Para estes, será necessário acalentar a sua perseverança.

Tarefa — Lançar dados: O que sai?

Enunciado da tarefa

Lançar dados: O que sai?

1) Lança um dado diversas vezes e observa os números de pintas que vão saindo.
   a) Dá um exemplo de um número de pintas que é **impossível** sair. Justifica.
   b) Dá um exemplo de um número de pintas que é **possível** sair.
   c) Regista todos os números de pintas **possíveis** de sair.
   d) Constrói uma frase sobre os números que podem sair quando se lança um dado e que inclua a palavra "certeza".
2) Lança agora **dois** dados e calcula a soma dos números de pintas dos dois dados.
   a) Dá um exemplo de uma soma **impossível** de obter. Justifica.
   b) Dá exemplo de um número de pintas que é **possível** obter na soma e explica como.
   c) Regista todos os números de pintas **possíveis** de obter na soma.
   d) Constrói uma frase sobre os números que se podem obter na soma quando se lançam dois dados e que inclua a palavra "certeza".
3) Lança agora **três** dados e calcula a soma das pintas dos três dados.
   a) Dá exemplo de uma soma **impossível** de obter. Justifica.
   b) Dá exemplo de um número de pintas que é **possível** obter na soma e explica como.
   c) Regista todos os números de pintas **possíveis** de obter na soma.
   d) Constrói uma frase sobre os números que se podem obter na soma quando se lançam três dados e que inclua a palavra "certeza".
4) Completa a tabela seguinte com base nas descobertas que fizeste antes

	N.º mínimo possível de pintas da soma	N.º máximo possível de pintas da soma
1 dado		
2 dados		
3 dados		

   a) Consegues encontrar alguma regularidade na tabela? Se sim, qual?
   b) O que aconteceria se lançássemos 4 dados? Qual seria o mínimo e o máximo da soma do número de pintas? (Regista na tabela).
   c) E se lançássemos 5 dados? (Regista na tabela).
   d) Consegues encontrar uma regra que permita calcular o mínimo e o máximo da soma do número de pintas possível de obter quando se lançam um número qualquer de dados? Explica como pensaste!

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 3.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem nas crianças dos conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Regularidades em sequências	Sequências de crescimento
	Relações numéricas	Composição e decomposição
		Factos básicos da multiplicação [e sua relação com a divisão]
	Probabilidades	Probabilidades
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar
	Conexões matemáticas	Conexões internas
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autonomia

Objetivos de aprendizagem

Com o desenvolvimento desta tarefa pretende-se que as crianças sejam capazes de:

- Compor e decompor números naturais até ao 10 000 de diversas formas, usando diversos recursos e representações.
- Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 8, 6, 9, e 7) e a sua relação com a divisão.
- Identificar e descrever regularidades em sequências de crescimento, explicando as suas ideias.
- Continuar uma sequência de crescimento respeitando uma regra de formação dada ou regularidades identificadas.
- Estabelecer a correspondência entre a ordem do termo de uma sequência e o termo.
- Prever um termo não visível de uma sequência de crescimento, e justificar a previsão.
- Formular e testar conjeturas relativas a regularidades nas sequências de múltiplos de números.

- Exprimir a maior ou menor convicção sobre a ocorrência de acontecimentos que resultam de fenómenos aleatórios (que envolvam o acaso), usando as ideias de "impossível", "possível" e "certo".
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.

Recursos

Um enunciado escrito da tarefa para distribuir a cada um dos alunos; dados com pintas, telemóvel com câmara fotográfica, cabo USB, computador, projetor.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1 (a),b),c), d))

É natural que os alunos tenham tido contacto com dados com pintas, pelo que se espera que não surjam dificuldades. Podem no entanto aparecer dificuldades que se prendem com a comunicação escrita na alínea d). Relativamente a esta alínea, depois da realização de diversas experiências com o dado, são expectáveis respostas como:

- Temos a certeza que quando lançamos um dado pode sair 1 pinta.

- Temos a certeza que ao lançar um dado pode sair um número de pintas de 1 a 6.

- Temos a certeza que quando lançamos um dado nunca vão sair 7 pintas.

Questão 2 (a),b),c), d))

Espera-se que os alunos registem as somas resultantes dos lançamentos e que, a partir da análise dos registos efetuados, possam responder às alíneas. Caso não façam um número considerável de lançamentos, e não tenham presente o que acontece quando lançamos um dado, podem ser induzidos em erro, isto é, caso não surjam todas as possibilidades de somas possíveis e se baseiem só nos registos efetuados para responder como no exemplo seguinte.

Exemplo:

1+2=3

4+3=7

5+6=11

Com um número muito restrito de lançamentos e registos, os alunos podem dar respostas erradas como as seguintes, nas alíneas:

a) É impossível sair 4 pintas.

c) 3, 7, 11

d) Temos a certeza que quando se lançam dois dados a soma das pintas é sempre um número ímpar.

Caso os alunos façam um lançamento, registem a soma e a partir desse momento fixem um dos dados e só lancem o outro, fazendo sempre os registos, a possibilidade de haver respostas erradas é muito reduzida.

Ex.

2+1=3	3+1=4	….
2+2=4	3+2=5	
2+3=5	3+3=6	
2+4=6	3+4=7	
2+5=7	3+5=8	
2+6=8	3+6=9	

Ao observarem a variabilidade das somas obtidas com facilidade percebem que:

a) É impossível obter somas menores que 2 e maiores que 12.

b) Qualquer valor de 2 a 12 está correto. Para justificar basta apresentar a indicação da soma do número de pintas correspondente à composição do número escolhido, indicando duas parcelas.

c) É possível obter somas cujo valor sejam números inteiros de 2 a 12, inclusive.

d) Podem surgir frases como:

- De certeza que ao lançarmos dois dados a soma das suas pintas pode ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

- De certeza que ao lançarmos dois dados a soma das suas pintas pode ser par ou ímpar.

- De certeza que ao lançarmos dois dados a soma das suas pintas é impossível ser mais do que 12 pintas.

Questão 3 (a),b),c), d))

Espera-se que após a repetição do lançamento de três dados e respetivos registos os alunos consigam perceber que:

a) É impossível obter uma soma inferior a 3 ou superior a 18. Porque o mínimo de pintas que um dado pode ter é 1, e 1+1+1=3. O máximo de pintas que um dado pode ter é 6, e 6+6+6=18.

b) Qualquer valor de 3 a 18 estará correto. Para justificar basta apresentar a indicação da soma do número de pintas correspondente à composição do número escolhido, indicando três parcelas.

c) É possível obter somas cujo valor sejam números inteiros de 3 a 18, inclusive.

d) Podem surgir frase como:

   - De certeza que ao lançarmos três dados a soma das suas pintas pode ser 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ou 18.

   - De certeza que ao lançarmos três dados a soma das suas pintas pode ser par ou ímpar.

   - De certeza que ao lançarmos três dados a soma das suas pintas é impossível obter mais do que 18 pintas e menos que 3.

Questão 4 (a),b),c), d))

Após o preenchimento coletivo da tabela, em que o professor orienta os registos em cada uma das colunas de forma a evidenciar relações entre o total de pintas (mínimo e máximo) e o número de dados, espera-se que as crianças sejam capazes de:

a) Explicitar relações como:

   - tanto o número mínimo como o número máximo de pintas da soma vai sempre aumentando;

   - quando aumenta um dado, o número mínimo de pintas aumenta 1 e o número máximo aumenta 6;

- o número mínimo de pintas da soma é igual ao número de dados e o número máximo é igual número de dados vezes 6.

b) Pela observação dos registos da tabela e após a descoberta de algumas regularidades não haverá dificuldade em dizer que ao lançarem 4 dados, o número mínimo de pintas da soma é 4 e o número máximo é 24, registando os valores nas respetivas colunas.

c) Seguindo a linha de pensamento usada na alínea anterior, registam 5 na coluna do número mínimo de pintas da soma e 30 no número máximo.

d) Relativamente a esta questão espera-se que os alunos generalizem por:

- recorrência (a partir do termo anterior) – Ao aumentarmos um dado, o número mínimo da soma das pintas será mais 1 e o número máximo será mais 6, que o do caso anterior;

- pelo termo geral (encontrando uma regra que se aplique a qualquer número de dados) – para qualquer número de dados, o número mínimo da soma das pintas dos dados lançados é igual ao número de dados lançados e o número máximo será igual ao número de dados vezes 6.

Exploração da tarefa

A concretização desta tarefa em sala de aula beneficiará do facto das crianças, ao longo da sua escolaridade, terem já tido alguma experiência no trabalho com sequências. Importa que estejam despertas para a importância dos registos organizados, pois eles permitem a descoberta de relações e a realização de conjeturas e generalizações, que de outra forma ficam ocultos. A exploração da tarefa está preparada para decorrer em três momentos diferentes:

Apresentação da tarefa, em que o professor distribui o enunciado da tarefa a cada aluno e um dado a cada par de alunos, pedindo-lhes que lancem o dado várias vezes e que observem o que acontece. Após algumas experiências deve realizar-se o primeiro grupo de questões (1 a), b), c), e d)) coletivamente. O professor pode pedir a uma criança para ler uma alínea, solicitando então a resposta ao coletivo. Uma das crianças vai ao quadro e faz o registo da resposta após a turma ter chegado a um consenso. Todos copiam a resposta para a folha da tarefa. Este procedimento deve ser repetido para todas as alíneas da questão 1. O professor deve ficar com a convicção de que os alunos perceberam o significado das palavras "impossível", "possível" e "certeza"(certo). Feitos os grupos de trabalho, deve ser atribuída a cada grupo a questão sobre a qual deve trabalhar na fase que se segue. Tempo previsto: 25 minutos.

Trabalho autónomo, em que alguns grupos trabalham nas questões da pergunta 2 e outros grupos trabalham nas questões da pergunta 3. As questões da pergunta 2 exigem menor grau de dificuldade, o que pode ser considerado aquando da distribuição pelos grupos.

Deixando em cada grupo apenas o número de dados necessário para a concretização da pergunta que lhe foi atribuída, o professor solicita às crianças que leiam as questões, realizarem as experiências solicitadas e registem as respostas contando com o contributo de todos os elementos do grupo. Durante esta fase, o professor deve apoiar o trabalho, circulando entre os grupos, alertando para a necessidade de realizarem registos referentes aos lançamentos dos dados que efetuam e reforçando a ideia de que esses registos devem ser organizados. Terminado o tempo previsto, o professor deverá fotografar o trabalho dos grupos para ser projetado durante a discussão coletiva. Tempo previsto: 35 minutos.

Discussão com toda a turma. O professor projeta no quadro, uma a uma, para as diferentes resoluções de cada uma das questões, pede a uma criança de cada grupo que apresente aos colegas o trabalho realizado e, em discussão com toda a turma, fica registada no quadro uma resposta coletiva. Esta deve integrar o contributo do trabalho dos grupos que responderam a essa questão ou ser escolhida a melhor das propostas apresentadas para ser registada por quem não realizou essa questão ou por aqueles que eventualmente tenham uma resposta errada ou incompleta. Este procedimento deve ser seguido para todas as questões. Tempo previsto: 60 minutos.

Dificuldades previstas e ações do professor

As dificuldades desta tarefa poderão advir do facto dos alunos não representarem as somas correspondentes aos lançamentos efetuados, não realizarem registos organizados ou não os analisarem de modo a encontrarem as regularidades evidenciadas. Durante o tempo de trabalho autónomo o professor deverá circular por entre os grupos assegurando-se que estes aspetos estão a ser tidos em conta.

Concretização da tarefa na prática

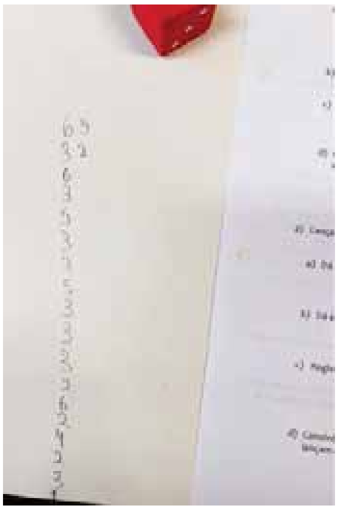
Apresentação da tarefa

A professora começou dizendo que na aula iriam lançar dados e procurou perceber se os alunos tinham alguma prática na utilização de dados:

> *Prof. – Quando lançamos um dado quantas pintas podem sair?*
>
> *A2 – 6.*
>
> *Prof. – Saem sempre 6?*
>
> *A15 – Não, podem sair 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.*
>
> *Prof. – Vocês percebem disto! Vamos lá então dar início ao trabalho de hoje.*

Distribuída a folha da tarefa, a professora solicitou a leitura da questão 1, pediu a um aluno que explicitasse o que se pretendia, distribuiu um dado em cada mesa e pediu que os alunos executassem o que era pedido. Esta fase foi apenas para que todos se certificassem do que o colega tinha dito relativamente aos valores que podiam sair quando lançamos um dado, e ganhassem confiança para responder às alíneas da questão 1. A professora ficou surpreendida quando percebeu que um par de alunos estava a registar na mesa os resultados do lançamento do dado, pois este facto seria certamente importante para apoiar as respostas às perguntas que se seguiam.

Figura 1. Registo, de um par de alunos, do número de pintas obtidas em vários lançamentos do dado



Uma a uma, foram lidas as alíneas da questão 1 e coletivamente, foram registadas no quadro as respostas. Todos os alunos copiaram os registos feitos no quadro para a folha da tarefa sem que durante a resolução houvesse dúvidas relativamente à utilização dos termos "impossível", "possível" ou "certeza".

Era hora de passar ao trabalho de grupo. A professora deu indicações para a formação dos grupos, atribuiu a questão 2 e a 3 a diferentes grupos, relembrando o tempo que tinham para concretizar a parte do trabalho que lhes foi atribuída. Foi necessário recolher os dados que estavam a mais, de forma a que em cada grupo ficassem apenas os dados necessários, evitando elementos de distração.

Trabalho autónomo

A professora começou por apoiar os grupos de alunos com mais dificuldade, na leitura e entendimento do que se pedia na questão 2 a). Dando-lhe depois espaço para que respondessem de forma autónoma, enquanto foi circulando entre os restantes grupos, sempre vigilante do modo como os trabalhos estavam a decorrer. Relativamente ao grupo referido, foi repetido o procedimento relativamente às alíneas b) e c), procurando responsabilizar os elementos do grupo. Na questão d) foi necessário a permanência da professora junto do grupo enquanto respondiam, não porque tivessem dificuldade relativamente à resposta que devia ser dada, mas pelas dificuldades ao nível da escrita. Ao circular pelos diferentes grupos, foi com agrado que foi observando os registos que os alunos efetuavam e a assertividade com que respondiam às questões colocadas.

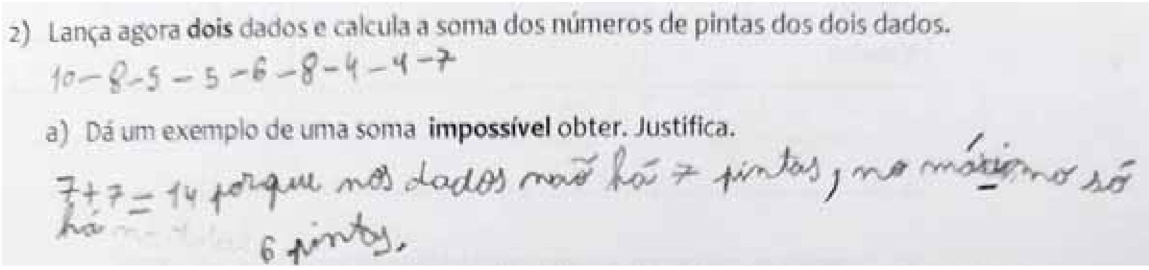
Terminado o tempo estabelecido, todos retomaram o seu lugar habitual e passou-se à fase de apresentação e discussão do trabalho realizado, com a convicção geral de que tudo tinha sido fácil e tinha corrido sem problemas.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

No início desta fase da aula, a professora começou por relembrar que era muito importante estar com atenção às apresentações dos colegas, para poderem detetar erros ou fazer sugestões para os colegas melhorarem. Alertou também para a necessidade de, no final de cada apresentação, os alunos copiarem para os cadernos a resolução que a turma entendesse como mais válida de entre as apresentadas pelos colegas.

Relativamente aos grupos a quem tinham sido atribuída a questão 2 e respetivas alíneas, a professora começou por projetar no quadro a seguinte resolução, que havia fotografado, pedindo a uma criança que explicasse aos colegas o trabalho realizado pelo grupo.

Figura 2. Registo da resposta à questão 2a) de um dos grupos


2) Lança agora **dois** dados e calcula a soma dos números de pintas dos dois dados.

10 – 8 – 5 – 5 – 6 – 8 – 4 – 4 – 7

a) Dá um exemplo de uma soma **impossível** obter. Justifica.

7+7 = 14 porque nos dados não há 7 pintas, no máximo só há 6 pintas.

Todos os grupos haviam registado como possibilidade de resposta as 14 pintas, sabendo que o máximo de pintas que um dado pode ter é 6, usaram o valor mínimo de pintas que torna a soma das pintas de dois dados impossível de obter. A particularidade deste registo prende-se com o facto dos alunos terem registado alguns valores correspondentes ao total das pintas dos dois dados.

A 6 – Nós começamos a escrever aqui quantas pintas tinham os dois dados.

Prof. – Mas quando lançamos dois dados é impossível obter esses valores?

A6 – Não, estes foram os que nos saíram.

Prof. – E só é possível saírem esses totais de pintas?

A11 – Não, mas nós percebemos logo que 14 nunca podia dar.

Prof. – Mas porquê?

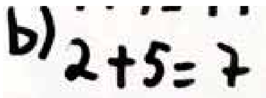
A11 – Porque 14 é um dobro, é o dobro de 7 e como os dados não têm 7 pintas esse dobro nunca iria aparecer.

Embora o registo efetuado não esteja ordenado e não contemple todos os totais de pintas possíveis, parece ter sido importante para este grupo obter e justificar a sua resposta.

Houve inevitavelmente uma aceitação da resposta apresentada e quem não trabalhou nesta questão copiou a resposta. Quem trabalhou nesta questão, não copiou a resposta apresentada, dado que os grupos envolvidos tinham respondido algo semelhante.

Relativamente à alínea b), a representação usada pelos diferentes grupos, assumindo valores diferentes, foi do mesmo tipo. Os alunos representaram a adição correspondente ao número de pintas dos dois dados, que obtiveram numa das jogadas.

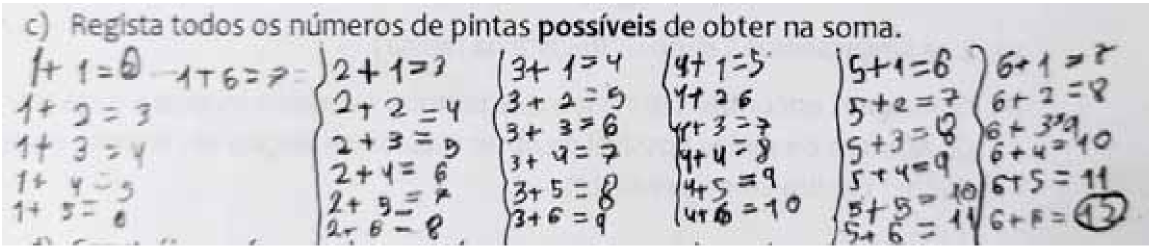
Figura 3. Exemplo de registo da questão 2b) de um dos grupos



Cada grupo explicitou a sua resposta tendo sido aceite pelo coletivo e mais uma vez não houve lugar a um registo coletivo.

Chegado o momento de apresentar as resoluções da alínea c), havia dois tipos de registo diferentes. A professora começou por pedir a apresentação do trabalho da figura 4.

Figura 4. Registo da questão 2c) de um dos grupos

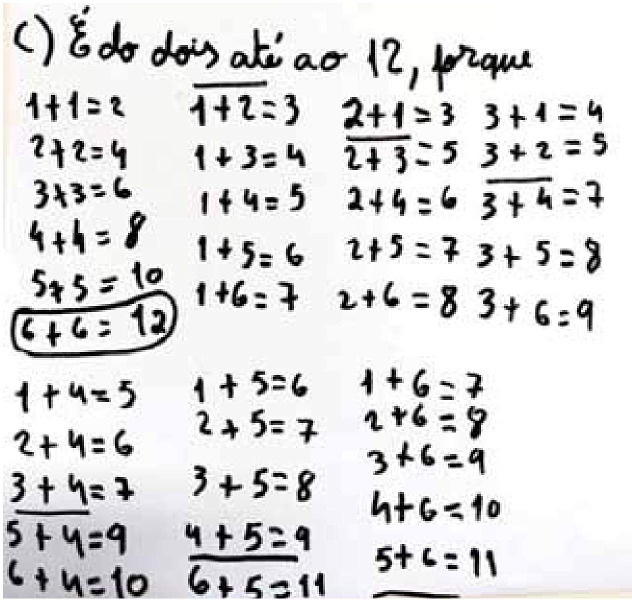


A criança que veio ao quadro apresentar o trabalho do grupo, foi sendo questionada pela professora de modo a que todos compreendessem o que tinham feito:

> *A17 – Nós começamos com o número de pintas mais baixo nos dois dados e escrevemos 1+1, depois pensámos que se num dos dados saísse sempre 1, no outro podia sair 2, 3, 4, 5 ou 6.*
>
> *Prof. – E a seguir?*
>
> *A2 – Como queríamos fazer por ordem, repetimos o mesmo mas com duas pintas num dos dados.*
>
> *…*
>
> *Prof. – Então e qual foi o mínimo de pintas que obtiveram?*
>
> *A17 – 2.*
>
> *Prof. – E o máximo?*
>
> *A17 – 12.*
>
> *Prof. – E que outros valores obtiveram?*
>
> *A1 – Saíram todos entre 2 e 12.*
>
> *Prof. – Mas só é possível obter os que estão entre o 2 e o 12, ou o 2 e o 12 também contam?*
>
> *A5 – Não, o 2 e o 12 também podem sair.*
>
> *Prof. – Gostei muito do vosso registo organizado!*

Seguiu-se a apresentação do registo de outro grupo (figura 5) que, embora tendo chegado aos mesmos resultados, parece ter pensado de forma diferente:

Figura 5. Registo da questão 2c) de um dos grupos



A3 – Nós aqui já não lançámos os dados. Primeiro só tínhamos pensado que havia 6 possibilidades, os dobros.

Prof. – Explica lá isso aos colegas.

A4 – Quando nos dois dados sai o mesmo número de pintas temos um dobro.

Prof. – Muito bem, e depois? Vejo aí tantos registos!

A7 – Depois a professora passou pelo nosso grupo e perguntou – Se num dos dados sair 1, no outro só pode sair 1? – e nós percebemos que faltavam ainda muitas contas.

Neste caso, as crianças começaram por registar as situações correspondentes a dobros, ou seja as possibilidades em que o número de pintas saído era igual nos dois dados e após o questionamento da professora perceberam que ainda havia mais possibilidades. O seu registo continuou organizado e tiveram sempre a preocupação de assinalar um traço em cada coluna onde deveria constar a adição correspondente ao dobro que já tinham registado inicialmente.

A19 – Professora, eles não foram muito arrumadinhos.

Prof. – Não!? Porquê!?

A19 – Depois da coluna dos dobros, nas outras colunas eles escreveram sempre a primeira parcela igual e a segunda é que vai mudando e depois por baixo fizeram ao contrário.

Prof. – A colega tem razão. Por que é que mudaram?

A3 – Porque nos distraímos e olhámos para a primeira coluna, mas isso dá o mesmo.

Prof. – Concordas, Clara?

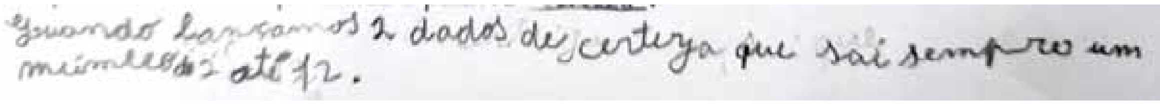
A18 – Sim, mas ficava melhor se tivessem feito da mesma maneira.

Pelo diálogo estabelecido parece evidente a forma como os alunos já valorizam a realização de registos organizados e neste caso como reconhecem as propriedades das operações, nomeadamente a propriedade comutativa.

Os alunos ao apresentarem as suas produções sabem que existe a possibilidade de questionamento por parte da professora ou dos colegas e procuram justificar-se e defender as suas resoluções com naturalidade. Ambas as apresentações foram validadas pela turma.

Na alínea d) a professora projetou a seguinte resposta:

Figura 6. Registo da questão 2d) de um dos grupos



Quando lançamos 2 dados de certeza que sai sempre um número até 12.

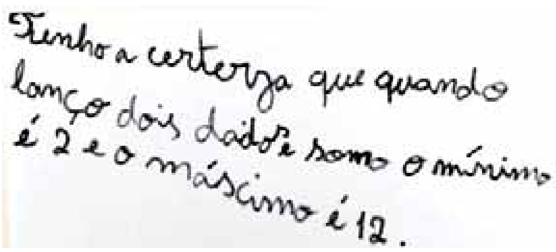
Depois da apresentação da resposta por parte de um elemento do grupo a professora levantou a seguinte questão:

Prof. – Vocês dizem até 12, mas o 12 também aparece ou não?

A8 – Sim, 6+6 são 12.

Clarificado o preciosismo do intervalo [2, 12[que a frase apresentada pode ter implícito, seguiu-se outra resposta:

Figura 7. Registo da questão 2d) de um dos grupos



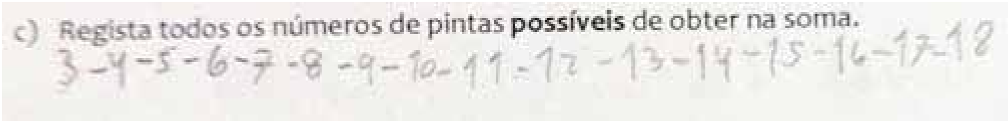
Tenho a certeza que quando lanço dois dados soma o mínimo é 2 e o máscimo é 12.

Esta foi considerada como uma resposta mais rigorosa e não levantou dúvidas, pelo que as crianças dos grupos que não tinham realizado a questão 2 copiaram a frase apresentada para a folha da tarefa.

A aula prosseguiu com a discussão da resolução das alíneas da questão 3, diferentes das alíneas da questão 2 apenas no número de dados lançados, agora com 3 dados.

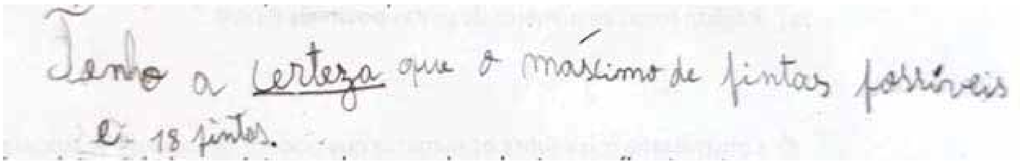
Nas alíneas a) e b) da questão 3 as representações e justificações apresentadas pelos grupos são semelhantes às dadas pelos grupos que trabalharam nas alíneas a) e b) da questão 2. De salientar apenas que os dois grupos que trabalharam nas alíneas da questão 3, na alínea c), não necessitaram de fazer qualquer indicação dos totais de pintas possíveis de obter, apresentaram esses totais de forma ordenada sem esquecer nenhum dos valores.

Figura 8. Registo da questão 3c) de um dos grupos


c) Regista todos os números de pintas **possíveis** de obter na soma.
3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18

Relativamente à alínea d) surgiu uma forma diferente de usar o conceito de "certo", com a qual todos concordaram:

Figura 9. Registo da questão 3d) de um dos grupos


Tenho a certeza que o máximo de pintas possíveis é 18 pintas.

Chegou então o momento de sintetizar numa tabela algumas das descobertas realizadas pelos grupos e coletivamente fazer novas descobertas, identificando regularidades evidenciadas. A professora projetou no quadro a questão 4 e pediu a três crianças que à vez virem ao quadro preencher as linhas referentes ao lançamento de 1, 2 e 3 dados:

Prof. – Quando lançamos 1 dado, qual é o número mínimo de pintas que pode sair?

A4 – 1.

Prof. – Então regista. E o número máximo?

A4– 6.

Prof. – Ok. Rita, vem cá registar o que pode acontecer ao total de pintas se lançarmos dois dados.

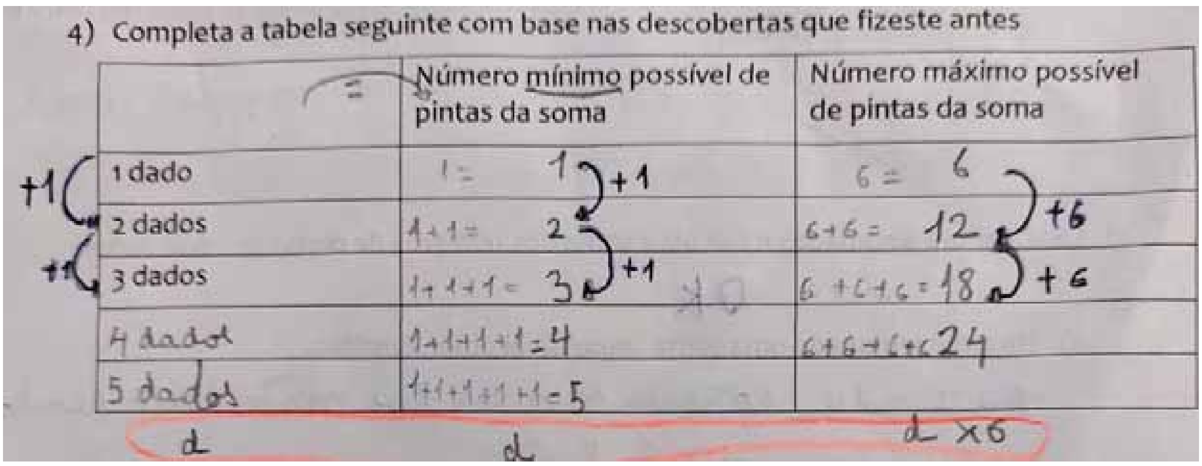
A12 – No mínimo conseguimos 2 pintas.

Prof. – Gostava que registasses também como é que se obtêm essas 2 pintas.

A12 – É 1+1.

Prof. – Escreve aí ao lado.

Figura 10. Registo da tabela da questão 4


4) Completa a tabela seguinte com base nas descobertas que fizeste antes

	Número mínimo possível de pintas da soma	Número máximo possível de pintas da soma
1 dado	1 = 1	6 = 6
2 dados	1+1 = 2	6+6 = 12
3 dados	1+1+1 = 3	6+6+6 = 18
4 dados	1+1+1+1=4	6+6+6+6 24
5 dados	1+1+1+1+1=5	
d	d	d x6

A professora teve a preocupação de orientar os alunos para que o registo efetuado mostrasse a estrutura matemática implícita, ou seja, quando os alunos registaram 1+1 ou 6+6 ficou explícito que eram valores de dois dados, quando registaram 1+1+1 ou 6+6+6 ficou explícito que eram valores referentes a três dados, contribuindo para que os alunos entendessem. As linhas da tabela foram logo todas preenchidas, dado que os alunos foram adiantando as soluções. Após o preenchimento da tabela o questionamento prosseguiu:

Prof. – Reparem no que aconteceu na coluna do número de dados.

A20 – É sempre mais 1 dado.

Prof. – Concordam?

A(s) – Sim.

Prof. – Vem cá registar essa regularidade.

Então e na segunda coluna?

A5 – Também é sempre mais uma pinta.

Prof. – Porquê?

A5 – Porque, em cada linha tem mais um dado e o mínimo que ele pode juntar é 1 pinta.

A12 – Eu sei outra! O número de dados é sempre igual ao número mínimo de pintas dos dois dados.

Prof. – Muito bem! Então como é que poderíamos abreviar a palavra dados?

A16 – Podemos pôr um d.

Prof. – Então se os valores da segunda coluna são iguais aos da primeira, podemos dizer que são …

A20 – Também d.

Prof. – Espetacular! Regista lá isso aí por baixo da tabela. Se tivermos 10 dados, o mínimo de pintas da soma dos dados será quanto?

A5 – É 10!

A turma além de identificar regularidades na tabela, conseguiu com facilidade chegar à primeira generalização que se pretendia.

A análise da tabela prosseguiu:

Prof. – O que acontece na terceira coluna?

A17 – É sempre mais 6.

Prof. – Na primeira linha quantas vezes temos o 6?

A5 – 1 vez.

Prof. – E na segunda linha?

A5 – Temos duas vezes o 6.

Prof. – E na terceira linha?

A6 – Três vezes o 6.

Prof. – Então quando temos 1x6, 2x6, 3x6 o que é isso?

A5 – Já sei, é a tabuada do 6!

Prof. – Agora gostava de conseguir era escrever o número máximo da soma das pintas caso lançasse 10 dados.

A1 – Era 60!

Prof. – Como sabes?

A1 – Fiz o número de dados vezes o 6 que é o número máximo de pintas que um dado pode ter.

Prof. – Então e se eu quisesse escrever isso usando letras, para dar para qualquer número de dados como seria?

[silêncio]

Prof. – Vocês há pouco disseram-me que podíamos representar o número de dados pela letra d, então podemos escrever d vezes o quê?

A1 – É vezes 6.

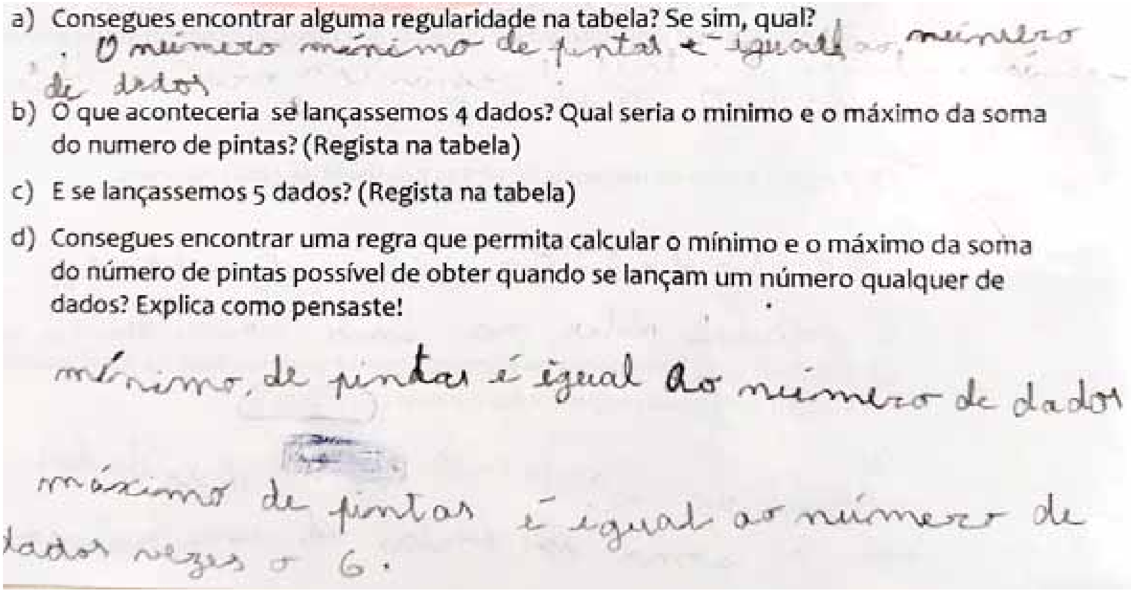
Prof. – Vem cá registar.

Uma aluna foi ao quadro e registou dx6 como sendo a expressão que nos daria sempre o número máximo de pintas da soma dos dados lançados, qualquer que fosse o número de dados usados.

Estava feito o trabalho para que fosse fácil responder às alíneas da questão 4. A alínea b) e a d) já estavam mesmo feitas sem que as tivessem lido, pois com o entusiasmo tinham sido logo preenchidas as linhas 4 e 5 da tabela!

À vez, a professora foi pedindo a uma criança para ler a questão e logo surgiram braços no ar para dar a resposta e ir ao quadro registar o que ainda não tinha sido registado, nomeadamente as respostas das alíneas a) e d).

Figura 11. Registo da resolução coletiva das alíneas da questão 4



a) Consegues encontrar alguma regularidade na tabela? Se sim, qual?

O número mínimo de pintas é igual ao número de dados

b) O que aconteceria se lançassemos 4 dados? Qual seria o minimo e o máximo da soma do numero de pintas? (Regista na tabela)

c) E se lançassemos 5 dados? (Regista na tabela)

d) Consegues encontrar uma regra que permita calcular o mínimo e o máximo da soma do número de pintas possível de obter quando se lançam um número qualquer de dados? Explica como pensaste!

mínimo de pintas é igual ao número de dados

máximo de pintas é igual ao número de dados vezes o 6.

Deu-se por encerrada a aula.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Lançar dados: O que sai?* importa tecer alguns comentários, a título de síntese, das aprendizagens relativamente a conteúdos e capacidades matemáticas transversais, bem como a capacidades e atitudes gerais transversais evidenciadas pelos alunos.

Conteúdos matemáticos

A tarefa constituiu uma oportunidade de os alunos explorarem conceitos da área das Probabilidades e sequências de crescimento, recorrendo à representação física que os dados oferecem. À medida que estes vão sendo lançados, os alunos efetuam registos e procuram, descrevendo, regularidades nos seus registos. Deste modo, cedo se apercebem que a identificação de regularidades é determinada pela organização dos seus registos, pelo que a valorizam. Esta identificação de regularidades surge apoiada no estabelecimento de relações numéricas, relações de decomposição e, sobretudo, relações de composição de números. Progressivamente, os alunos vão-se apercebendo da estrutura matemática, identificando as relações e descobrindo propriedades, como a propriedade comutativa, quando compreendem, por exemplo, que 1+2 e 2+1 representam a mesma situação através da adição do número de pintas nos dados. A observação da variabilidade das somas obtidas, e a sua discussão em coletivo, permite ter certeza em relação à ocorrência de acontecimentos, exprimindo com convicção de que estão identificadas todas as situações possíveis ou de que seria impossível obter uma dada soma de pintas. A partir daqui é criada uma oportunidade para a análise de sequências. A discussão dos registos em tabela evidencia as relações de correspondência entre o número de dados — a ordem do termo — e duas sequências de números, uma relativa ao número mínimo possível de pintas da soma, e uma outra relativa ao número máximo possível de pintas da soma. Enquanto a primeira se relaciona com o número de grupos com uma pinta, a segunda diz respeito ao número de grupos de 6 pintas em cada termo. A continuação desta última sequência, com base na regularidade identificada, e mobilizando factos básicos da multiplicação, conduz à descoberta da generalização associada à tabuada do 6 e ao registo da lei de formação. Neste processo, a utilização de letras para representar uma ordem do termo desconhecida ganha sentido e é usada de forma natural.

Capacidades matemáticas transversais

Uma das capacidades matemáticas transversais desenvolvidas com esta tarefa é o raciocínio matemático. Os alunos são desafiados a conjeturar e justificar o número total de pintas obtido no lançamento de 1, 2, 3, 4 e 5 dados e a generalizar o número de pintas mínimo e máximo para um qualquer número de dados. Com base na observação dos seus registos, começam por identificar um número mínimo e máximo de pintas para 2 dados e todos os valores intermédios possíveis. Usam o mesmo raciocínio para 3, 4, 5 e também 10 dados, através do questionamento da professora, e constroem em coletivo a generalização para um número qualquer de dados. Outra capacidade que esta tarefa permite mobilizar é o estabelecimento de conexões matemáticas. Por um lado, destaca-se a ligação familiar que os alunos têm com os dados, dada a sua ligação ao jogo. Por outro, quando os alunos explicitam a relação entre o número de dados e a tabuada do 6, associada à adição repetida do número máximo de pintas do dado, amplia-se a ligação entre temas matemáticos. As oportunidades que esta tarefa proporciona para os alunos apresentarem as suas produções, discutirem as suas ideias, esclarecerem os colegas, evidenciam também a importância que uma outra capacidade assume, a comunicação matemática. Os alunos, na interação com os colegas e a professora, são incentivados a explicitar e justificar as relações encontradas e estas acabam validadas ou reformuladas, podendo ter de negociar um entendimento comum relativamente a alguma ideia, como no caso da ideia de "certo" no estudo de acontecimentos em fenómenos aleatórios.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Ao trabalharem uns com os outros e interagirem, questionando e esclarecendo, os alunos vão progressivamente melhorando a confiança em si próprios, a autorregulação e a motivação para aprender, reconhecendo o valor das suas ideias e das dos outros. A colaboração reforça a persistência. As ideias são apresentadas por uns e retomadas por outros, que as estendem, numa construção de caminhos personalizados de aprendizagem, de autonomia crescente.

Tarefa — Azulejos nas ruas do Porto

Enunciado da tarefa

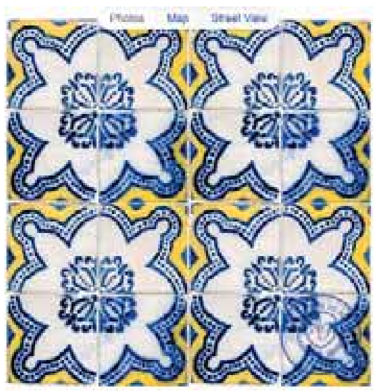
Os azulejos nas ruas do Porto

1. Entra no *site* https://azulejosporto.pt/. Nele encontras muitos azulejos que se encontram em fachadas de prédios na cidade do Porto. Ao escolher um azulejo podes ver o painel que é feito a partir dele, uma imagem do prédio onde se encontra e uma vista da rua onde fica, além de várias outras informações.

   Explora o *site* e vê como são bonitos os padrões que podemos encontrar.

2. No *site*, seleciona o azulejo apresentado em baixo e observa as imagens relativas ao painel construído.

   Usa a imagem (do azulejo) aqui apresentada para explicar como foi usada a rotação para formar o painel.



3. Procura no *site* outros exemplos em que a rotação foi usada para criar os painéis e regista o seu número.

4. A Joana criou um azulejo para fazer um painel usando a mesma técnica. Desenha como ficarão os conjuntos de quatro azulejos que ela vai usar para formar o painel.

5. Observa o painel formado pelo azulejo branco e azul (AP 20160622_08). Neste painel não foi usada a rotação. Com o mesmo azulejo, constrói agora um painel em que uses a rotação. Regista-o na grelha quadriculada.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

3.º ano de escolaridade

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos conteúdos apresentados no quadro seguinte:

Conteúdo de aprendizagem	Tópico	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Operações com figuras	Rotação
Capacidades matemáticas transversais	Conexões matemáticas	Conexões externas
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração, perseverança
	Desenvolvimento pessoal	Autorregulação
	Sensibilidade estética e artística	Criatividade
	Saber científico, técnico e tecnológico	Uso da tecnologia

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que, progressivamente, os alunos sejam capazes de:

- Obter a imagem de uma figura plana simples por rotação, com centro num ponto exterior à figura, com amplitude de rotação de quartos de volta (90°) ou de meias voltas (180°), no sentido horário ou anti-horário.
- Compreender o conceito de ângulo e identificar ângulos retos, rasos e giros.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.
- Trabalhar com os outros.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Enunciado da tarefa, um computador por cada dois alunos, papel vegetal e quatro imagens dos azulejos da questão 5 em papel.

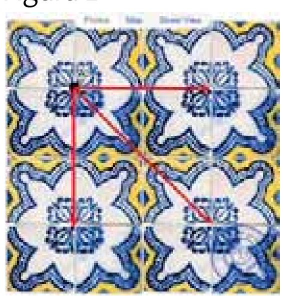
Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

Esta questão não requer uma resolução por escrito, sendo as respostas obtidas através da exploração do *site* e da manipulação das figuras que ele permite. Os alunos poderão observar os azulejos, reparar na tipologia de edifícios onde estão presentes, o seu estado de conservação e ainda ler algumas informações sobre os painéis, nomeadamente a época em que foram produzidos.

Questão 2

É expectável que alguns alunos rodem o azulejo no sentido horário e outros no sentido anti-horário para explicarem a formação do motivo do painel. Poderão apresentar explicações como:

O azulejo original fez uma rotação de um quarto de volta, com centro no ponto A, no sentido horário. Repetiu essa rotação mais duas vezes e ficou criado o motivo do painel. Depois o motivo formado por 4 azulejos repetiu 3 vezes uma rotação de um quarto de volta com centro no ponto C, no sentido horário, e formou-se um painel com 16 azulejos.	Figura 1 
O azulejo original fez um quarto de volta, com centro no ponto A, no sentido anti-horário. Repetiu essa rotação mais 2 vezes e ficou criado o motivo do painel. Depois o motivo formado por 4 azulejos “deslizou” na horizontal (como exemplificado na figura 2 com vetores nossos), na vertical e na “diagonal” e formou-se um painel com 16 azulejos.	Figura 2 

Questão 3

Os alunos poderão identificar painéis em que:

Apenas se identifique a rotação na construção do motivo. Ex: AP_20210408_1739 (figura 3)	Figura 3 
Se identifique a rotação no desenho do próprio azulejo e apenas um azulejo constitui o motivo do painel. Ex: AP_20210408_1760 (figura 4)	Figura 4 
Não seja identificada a rotação. Ex: AP_20170708_229 (figura 5)	Figura 5 

Questão 4

Além da resolução correta em que se efetuam rotações de um quarto de volta do azulejo dado, no sentido horário ou anti-horário (figura 6), é expectável que os alunos sintam dificuldades no reconhecimento da posição do coração e da lua quando o azulejo sofre a rotação, muito embora possam reconhecer em que canto do azulejo devam estar (figura 7). Os alunos que tiverem mais dificuldades poderão ainda apresentar resoluções erradas em que repetem o azulejo 4 vezes, mas sempre na mesma posição (figura 8):

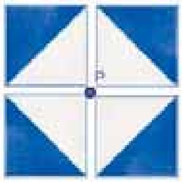
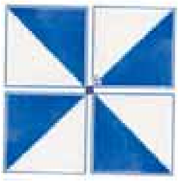
Figura 6	Figura 7	Figura 8
		

Questão 5

Seguem-se exemplos de algumas composições possíveis, formadas com 4 azulejos que, de acordo com o modo como forem dispostas num painel, podem ou não gerar padrões.

Os alunos poderão dar asas à sua criatividade e apresentar propostas em que:

- O centro de rotação seja um dos vértices do azulejo modelo e sejam feitas rotações de um quarto de volta, sentido horário ou anti-horário (figuras 9-12)

Figura 9	Figura 10	Figura 11	Figura 12
			

- O centro de rotação se localize no ponto médio de um dos lados do azulejo e sejam feitas rotações de 180° (figuras 13 e 14).

Figura 13	Figura 14
	

Exploração da tarefa

Propõe-se que esta tarefa decorra em duas aulas. A primeira com a duração de duas horas e a segunda com a duração de uma hora. Para todas as questões, deverão registar-se diferentes momentos: leitura e compreensão do que é pedido na tarefa, trabalho autónomo realizado a pares e discussão coletiva. No caso do item 2, dependendo do trabalho que já tiver sido realizado sobre a rotação, poderá haver necessidade de o professor realizar, em conjunto com a turma e usando a projeção do azulejo, a sua resolução. No final da resolução e discussão de todas as questões é essencial realizar a síntese das aprendizagens salientando os três elementos que definem uma rotação.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	**Exemplos de possíveis ações do professor**
Questão 1 Aceder ao *site* https://azulejosporto.pt/ Compreender o enunciado, em particular o significado da palavra "fachada" e da palavra "painel".	Colocar o enunciado da tarefa no ambiente de trabalho de cada um dos computadores com que os alunos vão trabalhar. Exemplificar como aceder ao *site* e às possibilidades de exploração no separador "AZULEJOS" (Fotos, mapa e vista de rua), selecionando um azulejo. Mostrar imagem da fachada de uma casa revestida de azulejos e de um painel, disponíveis no *site*.
Questão 2 Explicar como foi usada a rotação para criar o motivo do painel apresentado.	Qual o motivo do painel? Projetar a imagem e, num *software* de texto ou imagem, duplicar o azulejo e rodá-lo por forma a obter as várias partes que constituem o motivo. Outra possibilidade é copiar a imagem do azulejo para o GeoGebra e efetuar a sua rotação as vezes necessárias para obter o motivo.
Questão 3 Registar de forma rigorosa a designação dos painéis escolhidos. Distinguir painéis em que a rotação é usada no desenho do próprio azulejo e painéis em que o azulejo sofre rotação para se construir o motivo.	Designar cada painel apenas pelos algarismos finais após o *underscore*. Copiar a imagem do azulejo para o GeoGebra e produzir o motivo do painel e o painel.
Questão 4 Visualizar e desenhar a imagem do azulejo após rotação, em particular a da lua e do coração com a posição correta.	Usar papel vegetal, copiar o azulejo, fixar o papel no centro de rotação e girar o papel até encaixar na quadrícula seguinte.
Questão 5 Fazer corretamente a rotação do azulejo para criar o motivo.	Distribuir 4 imagens dos azulejos em papel, para que os alunos manipulem os quadrados e consigam construir o motivo por rotação.

Concretização da tarefa na prática

A descrição que apresentamos tem por base os acontecimentos numa das turmas que anteciparam a operacionalização das Aprendizagens Essenciais. Como sugerido na planificação, o trabalho autónomo foi intercalado com a apresentação de cada questão coletivamente. O trabalho ocupou três horas, distribuídas por dois dias. Note-se ainda que, nesta turma, os alunos já sabiam que um ângulo reto mede 90°, um raso 180° e um giro 360°, apesar de não ser um conteúdo de 1.° ciclo.

Apresentação da tarefa

Após a distribuição do enunciado da tarefa procedeu-se à leitura em coletivo da questão 1. A professora começou por exemplificar a exploração do *site* https://azulejosporto.pt/ para que os alunos se familiarizassem com as diferentes vertentes disponíveis (azulejo, painel, edifícios, ruas...) .

Trabalho autónomo

Foram marcados cerca de 10 minutos para que, a pares, os alunos pudessem explorar livremente o *site* no computador de que dispunham. A turma aderiu muito bem a esta proposta, tendo-se registado momentos de grande entusiasmo.

> *A – Professora, uau! Este é tão lindo!*
>
> *A14 – Olha este… gosto mais!*

Apresentação da tarefa

A professora solicitou a leitura da questão 2 e, face ao silêncio que se seguiu, resolveu adiantar algumas explicações na tentativa de clarificar o que se pretendia e tendo a esperança que as crianças recordassem outra tarefa já realizada envolvendo o conceito de rotação:

> *Prof. – Usando este azulejo foi criado um motivo que depois se repete para fazer o painel. Qual é o motivo que se repete neste painel?*
>
> *A5 – São estes 4 azulejos.*
>
> *Prof. – Quais?*

Um aluno veio ao quadro rodear os quatro azulejos.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

Usando a projeção, a professora colocou o azulejo sobre um dos azulejos do painel que estava na mesma posição e questionou:

Prof. – E como será que se pode formar este motivo a partir deste azulejo? O que poderemos fazer com este azulejo para ele ficar na posição deste? *A2 – Podemos rodá-lo.* *P– Como?* *A2 – No sentido anti-horário.* *Prof. – Isso. Mas quanto é que tenho que rodar?* *A2 – 90 graus.* *Prof. – São quantos quartos de volta?* *A2 – Um.* *Prof. – Muito bem. E agora para ele passar para a posição deste?* *A2 – Temos que fazer o mesmo.* *Prof. – Para construir este motivo ainda tenho que repetir a rotação mais alguma vez?* *A2 – Mais uma.*	Figura 15 

A professora, no computador, fez mais três cópias do azulejo e foi procedendo à rotação do mesmo de acordo com as indicações dadas pelos alunos. A imagem do que ia sendo construído foi projetada no quadro branco da sala para que todos pudessem acompanhar.

Os alunos assinalaram com setas coloridas o sentido da rotação na sua folha de registo (figura 16). Coletivamente, procedeu-se à descrição da rotação efetuada com o azulejo para se conseguir construir o motivo do painel, sem no entanto terem ficado registados todos os elementos que caracterizavam as rotações efetuadas. No registo escrito não foi explicitado o centro de rotação dos azulejos, embora parecesse claro que o conseguiam identificar.

Figur 16. Registo de um aluno com o sentido da rotação assinalado

Apresentação da tarefa

A professora disponibilizou mais 15 minutos para que, a pares, os alunos lessem e realizassem a proposta da questão 3. Por uma questão de facilidade de registo, foi estabelecido que, para designar cada painel, bastaria registar os últimos algarismos a seguir ao último *underscore*.

Trabalho autónomo

Foi com muita facilidade que alguns pares encontraram diversos painéis em que os seus motivos tinham sido construídos por rotação de um azulejo. Houve também pares que escolheram alguns casos em que a transformação geométrica presente poderia ser identificada apenas como uma translação.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

No momento de discussão coletiva cada par apresentou um dos painéis que tinha registado, caracterizou as rotações que tinham sido feitas para obter o motivo. Todos os pares apresentaram painéis que obedeciam ao que tinha sido pedido na questão 3. Cada aluno acrescentou na sua folha de registo da tarefa as propostas diferentes das suas que tinham sido apresentadas pelos seus colegas.

Os painéis que constavam da folha de registo de alguns pares e que se podiam formar a partir de outra transformação geométrica (por exemplo, figura 17) não foram escolhidos pelos pares para apresentar aos colegas, mas foram questionados pela professora:

> *Prof. – Uns meninos escolheram este painel (AP_20170712_53), vejam lá se o motivo foi formado por rotação de um azulejo.*

Figura 17

A20 – Não.

Prof. – Então aqui qual é o motivo do painel?

A20 – O motivo é só um azulejo.

Prof. – Que figuras temos no azulejo?

A4 – Dois losangos.

Prof. – Então e como se formou o painel?

A4 – Foram deslizando o azulejo, não o rodaram.

Prof. – Pronto, já percebi.

Como a discussão da questão 3 foi um pouco mais longa que o previsto, dado que houve necessidade de estender um pouco mais a discussão para os alunos que ainda não tinham entendido, os alunos que se sentiram mais confiantes avançaram para a questão 4.

Apresentação da tarefa

Prof. – Vejo que alguns já avançaram para a questão 4, então expliquem lá aos colegas o que é que temos de fazer.

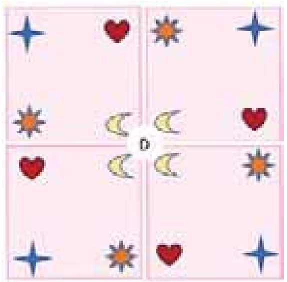
A5 – Temos de usar este azulejo para construir um painel, rodando o azulejo.

Prof. – Certo. Então temos de desenhar o azulejo num dos quadrados e depois imaginar a sua rotação em torno do centro. Penso que 10 minutos serão suficientes. Vamos lá!

Trabalho autónomo

A professora deixou os alunos que estava a apoiar e circulou entre os restantes pares, identificando alguns erros na representação da lua e do coração. Alguns alunos desenhavam a rotação do azulejo, com centro no ponto D, mas desenhavam a lua e o coração com a mesma posição (figura 18) que se encontrava no azulejo que servia de modelo:

Figura 18



Prof. – Observem com atenção para verificar se todos os desenhos do azulejo estão desenhados corretamente. Vou dar-vos um pouco de papel vegetal para copiarem o primeiro azulejo que desenharam, fixarem o papel no ponto de rotação e verificarem como ficam as figuras.

Iniciadas as experiências de rotação usando o papel vegetal, os alunos perceberam onde estavam os erros e conseguiram corrigi-los.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

Recorrendo ao uso do GeoGebra e com a imagem projetada, a professora questionou uma aluna que veio junto ao computador da sala:

Prof. – Queremos fazer a rotação desse azulejo para construir um painel formado por 4 azulejos, como temos de fazer?

A3 – Escolhemos rotação e depois temos de dizer qual é o ponto onde roda, quantos graus roda e para que sentido é que roda.

Prof. – Muito bem. Então faz lá.

A aluna repetiu a mesma operação três vezes e produziu o painel. Todos puderam confirmar o seu registo, corrigir alguns erros que persistiam pelo facto de alguns alunos não terem recorrido ao papel vegetal, apesar da indicação da professora.

Apresentação da tarefa

A aula já ia longa, mas ainda havia que terminar a questão 5. Lida a questão, recorreu-se novamente ao *site* para observar o painel, que havia sido construído com o azulejo que era apresentado (figura 19).

Figura 19

Mais uma vez, os alunos fizeram referência ao facto de, neste caso, o azulejo inicial ter sempre deslizado, referindo-se assim de modo informal à translação.

Prof. – Neste painel, não foi usada a rotação para construir o motivo, então o que aconteceu?

A6 – O primeiro azulejo foi deslizando.

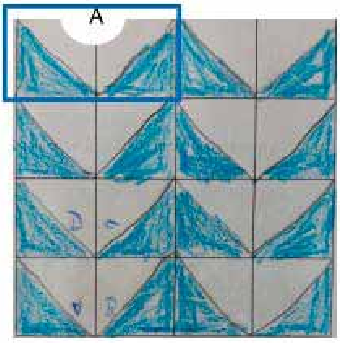
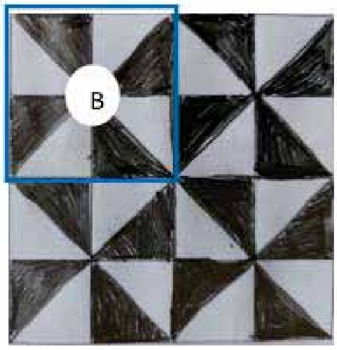
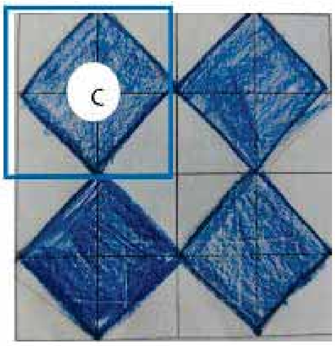
Prof. – Exatamente. Foi deslizando em várias direções. Então agora o que é que a tarefa pede?

A18 – Temos que construir um motivo rodando o azulejo e depois completar o painel.

Prof. – É isso mesmo. Vamos lá que já temos pouco tempo.

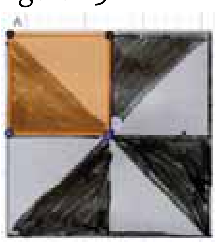
Trabalho autónomo

Continuando o trabalho a pares, nos últimos 20 minutos de aula, os alunos concretizaram a tarefa no computador usando um editor de texto e depois desenharam as suas produções na folha de registo. Na turma construíram-se diferentes painéis, todos eles com motivos formados por rotações do azulejo inicial, como mostram as figuras 20 a 22:

Figura 20	Figura 21	Figura 22
		
Motivo formado por 2 azulejos. Rotação 270°, centro no ponto A, sentido horário.	Motivo formado por 4 azulejos. 3 rotações de 90°, centro no ponto B, sentido horário (ou anti-horário).	3 rotações de 90°, centro no ponto C, sentido horário (ou anti-horário).

À medida que iam terminando os seus registos a professora pediu-lhes que descrevessem como tinham construído o seu motivo. Esgotadas as duas horas de aula, a professora recolheu todas as folhas de registo. Já não houve tempo para apresentar as diferentes construções produzidas pelos pares, nem fazer uma síntese das aprendizagens.

Uma análise posterior dos registos efetuados na questão 5 evidenciou que havia necessidade de fazer uma síntese do trabalho e clarificar os três elementos necessários para caracterizar uma rotação: o centro, a amplitude do ângulo e o sentido. Para tal, a professora selecionou 4 dos motivos construídos pelos alunos na questão 5 e nomeou alguns pontos de modo a facilitar a comunicação e acrescentar rigor à mesma. Distribuiu ainda a cada aluno um conjunto de azulejos em papel para que reproduzissem na mesa cada motivo que surgia projetado no quadro. Partiu-se então para a discussão coletiva em que os alunos indicaram o centro, a amplitude do ângulo e o sentido da rotação que o azulejo sofreu para construir o motivo, ainda que, nalguns casos o sentido possa ser o oposto (como o caso da figura 23). A informação foi organizada numa tabela, como a seguinte:

Figura 23 	Rotação de ¼ de volta do azulejo A
	Rotação em torno do ponto D
	Rotação no sentido horário
	Repetição dos passos 1, 2 e 3 por mais duas vezes

O quarto motivo selecionado pela professora implicava uma descrição um pouco mais complexa, dado que o centro de rotação do primeiro azulejo não era num dos vértices do quadrado, mas sim o ponto médio de um dos lados do quadrado (figura 24).

Figura 24

Veio ao quadro a aluna que tinha construído esse motivo e explicou aos colegas as rotações que era necessário efetuar para o construir.

Prof. – Maria João, como construíram este?

A2 – Pegámos no azulejo e rodámos.

Prof. – Mas como?

A2 – Se puser o dedo aqui e rodar no sentido anti-horário ele fica como este. (Sem hesitar a aluna colocou o dedo no ponto médio do lado do quadrado e efetuou a rotação).

Prof. – Quanto rodaste?

A2 – 180 graus.

Prof. – Reparem que a Maria João não rodou a partir de um dos vértices do quadrado como aconteceu nos outros motivos, ela fixou um ponto no meio do lado do quadrado.

E agora, para passar para o terceiro azulejo como fazes?

A2 – Preciso de mais um ponto, para fazer a rotação.

Prof. – Onde queres que assinale o ponto?

A2 – Aqui na união dos 4 quadrados.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

Terminadas todas as explicações por parte das crianças foi feita a síntese de quais eram os três aspetos que eram necessários para caracterizar uma rotação e parece ter ficado claro:

Prof. –Então quando queremos falar da rotação de uma figura temos sempre que nos referir a quê?

A5 – Quanto é que a figura se desloca.

Prof. –Não percebi bem.

A2 – Se é 90 graus, 180.

Prof. –Estás a falar da medida do ângulo. E mais?

A2 – Também temos de dizer onde é o ponto de rotação e o sentido em que giramos.

Prof. – Muito bem.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Os azulejos nas ruas do Porto* em duas turmas do 3.º ano de escolaridade no ano letivo de 2021/22, poder-se-ão tecer alguns comentários a propósito das aprendizagens realizadas.

Conteúdos matemáticos

Com esta tarefa, os alunos puderam aprofundar o seu conhecimento sobre a rotação. Apesar de a ideia de rodar algo ser bastante intuitiva, na verdade, esta é uma isometria com uma complexidade significativa, sobretudo quando o centro de rotação não é o centro da figura, como aconteceu na tarefa. Note-se que, mesmo sem ter consciência de tal, no dia-a-dia, quando imaginamos um objeto a rodar existe um centro de rotação (muitas vezes o centro da figura) que não é tornado explícito. Igualmente, a tendência natural é para usarmos o sentido horário sem se considerar outra hipótese. Estes aspetos constituem desafios importantes que os alunos enfrentaram. Mais do que o conhecimento dos três elementos que definem uma rotação, foi necessário mobilizar - e assim desenvolver - o seu raciocínio espacial. São naturais as dificuldades em imaginar a posição de objetos que sofrem rotações de quartos de volta, pelo que é fundamental apoiar essa construção de imagens mentais com ferramentas adequadas - no caso, o papel vegetal e o GeoGebra. É esta prática que possibilita que, no futuro, os alunos o possam fazer de forma mais fluente sem qualquer apoio.

Capacidades matemáticas transversais

Além dos conhecimentos matemáticos relativos à rotação, esta tarefa implicou particularmente o desenvolvimento da comunicação matemática, oral e escrita. Por um lado, a tentativa de comunicar as suas ideias aos outros permite, nesta situação, valorizar o rigor e a correção da comunicação. Por outro lado, a existência de diferentes possibilidades de resposta favorece ainda a discussão de ideias. Outra capacidade muito implicada nesta tarefa é o estabelecimento de conexões matemáticas. A ligação da matemática à realidade tão presente na azulejaria portuguesa permite compreender as várias possibilidades de criação artística que são favorecidas pela utilização da rotação (e de outras isometrias) e, noutra perspetiva, compreender a complexidade e a beleza desta arte.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Neste ponto salientam-se alguns aspetos mais relevantes destas capacidades e atitudes gerais. Ao longo da tarefa, os alunos evidenciam o seu gosto por trabalhar a matemática a partir de algo com que se relacionam, que envolve um sentido estético e favorece a criatividade. Um episódio que evidenciou este gosto ocorreu numa visita de estudo ao Castelo de S. Jorge, em Lisboa, que apesar de ter outros objetivos foi muito marcada pelas reações entusiastas dos alunos que sistematicamente paravam no trajeto e chamavam a professora para que esta reparasse nos azulejos e na construção de painéis. Noutra turma, a produção de motivos e respetivos padrões foi também aproveitada para o embelezamento de cartões do dia da mãe, num trabalho que a turma decidiu apelidar de "Matemática artística". Contudo, é ainda de notar que as dificuldades expectáveis de alguns alunos na construção de imagens de figuras por rotação implicou persistência e trabalho colaborativo, especialmente observado quando os alunos se apoiavam mutuamente. Desta forma, consideramos que a tarefa teve um impacto particular na dimensão das atitudes de uma forma raramente alcançada por outras tarefas.

Tarefa — Batimentos do coração

Enunciado da tarefa

Batimentos do coração

Certamente já reparaste que quando corres o teu coração fica mais acelerado. Porque será? Vamos fazer um estudo que permita conhecer melhor como funciona o coração …

1. Quais serão as causas das alterações dos batimentos do coração? Discute possíveis causas com os teus colegas e regista-as numa folha.

2. Se consultares a Internet, podes encontrar muita informação relevante sobre este tema. Por exemplo, podes aprender que se se dá o nome de **frequência cardíaca** ao número de vezes que o coração bate num minuto.

Observa a figura 1, que se pode encontrar no *site* indicado, e descreve as principais conclusões que retiras das informações constantes na figura.

Figura 1

(Adaptado de corahealth, https://www.cora.health/guide/resting-heart-rate/)

3. Vamos agora fazer o **estudo do batimento do coração das crianças da turma** — se o professor ou a professora de Educação Física estiver por perto, também pode ajudar!

Para medir a frequência cardíaca vamos adotar dois processos alternativos, para podermos confirmar as medições: 1. com os dedos, pressionando uma artéria (figura 2), e 2. usando um dispositivo digital (figura 3).

Figura 2

Figura 3

Importa recolher dados da frequência cardíaca em duas situações diferentes: em repouso e em atividade, para podermos comparar!

Assim, prepara-te para fazer as medições e regista os resultados na tabela seguinte, para cada uma das crianças da turma.

3.1. **Medição em repouso.** Todas as crianças da turma devem permanecer em repouso, garantindo que ninguém praticou exercício físico nos 30 minutos anteriores a fazer a medição. De seguida, cada um mede a respetiva frequência cardíaca e regista-a no seu caderno. Além disso, fornece o valor da tua frequência cardíaca para completar a tabela com os dados relativos a todas as crianças da turma.

	Medido na artéria		Medido com dispositivo digital
Nomes	Número de batimentos contados em 15 segundos	Número de batimentos num minuto	Número de batimentos indicado

(acrescentar linha de acordo com o número de alunos da turma)

3.2. Organiza, por ordem crescente, os valores da frequência cardíaca em repouso obtidos com o dispositivo digital.

3.3. Analisa como se distribuem os dados da frequência cardíaca em repouso (indica o mínimo, o máximo, a moda e explica como os valores variam).

3.4. **Medição após atividade.** Combinem na turma, com o/a professor/a, uma atividade física que possam realizar e expliquem-na no quadro seguinte.

Descrição da atividade física	Duração

3.5. Imediatamente após a atividade física, cada criança mede novamente a sua frequência cardíaca e regista o seu valor no caderno, fornecendo-o para completar a tabela com os dados relativos à frequência cardíaca após a atividade física de todos os alunos da turma:

Nomes	Medido na artéria		Medido com dispositivo digital
	Número de batimentos contados em 15 segundos	Número de batimentos num minuto	Número de batimentos indicado

(acrescentar linha de acordo com o número de alunos da turma)

3.6.Organiza por ordem crescente os valores obtidos com o dispositivo digital.

3.7.Analisa como se distribuem os dados da frequência cardíaca após a atividade física (indica o mínimo, o máximo, a moda e explica como os valores variam).

4.Para ajudar na leitura, vais organizar os dados da frequência cardíaca registada pelo dispositivo digital em repouso e após a atividade física, num diagrama de caule e folhas duplo. Segue os passos para a construção do diagrama:

- Identifica o menor e o maior valor da frequência cardíaca da turma no conjunto de todos os registos das duas situações, em repouso e após a atividade física;
- Na coluna central do diagrama coloca os valores do caule. Vamos usar o mesmo caule para os valores da frequência cardíaca em repouso e para os valores da frequência cardíaca após a atividade física. Coloca na vertical os algarismos correspondentes às dezenas dos números, começando nas dezenas do menor valor e até às dezenas do maior valor;
- Coloca as folhas da frequência cardíaca em repouso. Para tal, coloca do lado esquerdo os algarismos das unidades nas dezenas respectivas, de modo que todos os valores da turma fiquem indicados. Os algarismos devem começar a ser colocados junto ao caule, do menor (junto à linha vertical), para o maior (mais afastado do caule);
- Coloca as folhas da frequência cardíaca após a atividade. Para tal, coloca do lado direito os algarismos das unidades nas dezenas respetivas, de modo que todos os

valores da turma fiquem indicados. Os algarismos devem começar a ser colocados junto ao caule, do menor (junto à linha vertical), para o maior (mais afastado do caule);

- Por fim, atribui um título ao teu diagrama de caule e folhas.

Frequência cardíaca em repouso | Frequência cardíaca após atividade física

5. Analisa o diagrama de caule e folhas duplo relativos aos batimentos do coração em repouso e após a atividade física dos alunos da turma e discute com os teus colegas o que podem concluir sobre a frequência cardíaca da turma e sobre o modo como a atividade física afeta a frequência cardíaca.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 4.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Dados	Questões estatísticas, recolha e organização de dados	Recolha de dados (fontes e métodos)
	Representações gráficas	Diagramas de caule-e-folhas (duplos)
	Análise de dados	Interpretação e conclusão
Capacidades matemáticas transversais	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas
	Conexões matemáticas	Conexões externas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da Matemática

Objetivos de aprendizagem

A exploração desta tarefa procura contribuir para o desenvolvimento dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Selecionar criticamente um método de recolha de dados adequado a um estudo, reconhecendo que diferentes métodos têm implicações para as conclusões do estudo.
- Recolher dados através de um dado método de recolha, recorrendo a fontes primárias ou sítios credíveis na internet.
- Representar conjuntos de dados quantitativos sobre a mesma característica através de diagramas de caule-e-folhas (duplos), incluindo fonte, título e legenda.
- Ler, interpretar e discutir a distribuição dos dados, salientando criticamente os aspetos mais relevantes, ouvindo os outros e discutindo de forma fundamentada.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Identificar a presença da Matemática em contextos externos e compreender o seu papel na criação e construção da realidade.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.

- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Um dispositivo digital para medir a frequência cardíaca, enunciado da tarefa, com um número de linhas em cada tabela igual ao número de alunos da turma. Um cronómetro, que pode ser de um telemóvel.

Resoluções esperadas dos alunos

Questão 1

Os alunos devem ter presente que as alterações aos batimentos são uma resposta normal do coração e identificar como possíveis causas dessas alterações movimentos físicos intensos ou emoções fortes.

Questão 2

É expectável que os alunos identifiquem ideias a partir da leitura do infográfico (por exemplo: a frequência cardíaca é o número de batimentos do coração por minuto, varia entre 60 e 140 batimentos por minuto, os valores normais variam consoante a faixa etária, quanto mais novas são as pessoas, mais rápida é a sua frequência cardíaca, a das crianças varia entre 100 e 120 batimentos por minuto).

Questão 3.1

Em repouso, cada aluno conta o número de batimentos em 15 segundos (no pulso), sendo relevante discutir-se coletivamente que este processo de medir durante apenas 15 segundos é usualmente adotado por ser mais prático medir durante um período de tempo mais reduzido e concluir, com os alunos, que para obter a frequência cardíaca basta multiplicar por 4, pois 60 = 4 x 15. Cada aluno regista o respetivo valor na primeira coluna. Multiplica por quatro o número de batimentos num minuto e regista o resultado na segunda coluna. Na terceira coluna, regista o número de batimentos indicado pelo dispositivo digital.

Questão 3.2

Cada um regista a sequência ordenada, de forma crescente, de todos os valores de todos os alunos da turma.

Questão 3.3

Os alunos devem identificar o mínimo (o valor mais baixo de batimentos cardíacos), o máximo (o valor mais alto) e a moda (o valor com maior frequência, ou seja, o que se repete mais vezes) do conjunto de dados (frequência cardíaca em repouso). Analisam se a maioria da turma apresenta valores de frequência acima ou abaixo da moda, bem como alguma tendência da distribuição (pode acontecer ser bimodal, pode acontecer ter uma distribuição assimétrica ou simétrica, …).

Questão 3.4

Descrevem a atividade física que decidiram realizar de modo a criar condições para recolher os dados da frequência cardíaca após atividade (por exemplo, corrida, jogo de futebol, saltar ao eixo, …) e a sua duração.

Questão 3.5

Cada aluno conta o número de batimentos em 15 segundos (no pulso) após a atividade física. Regista na primeira coluna. Multiplica por quatro o número de batimentos num minuto. Regista na segunda coluna. Na terceira coluna regista o número de batimentos indicado pelo dispositivo digital.

Questão 3.6

Cada aluno regista os valores de todos os alunos da turma de forma crescente.

Questão 3.7

Os alunos devem identificar o mínimo, máximo e moda do conjunto de dados (frequência cardíaca após a atividade). Identificam se a maioria da turma apresenta valores de frequência acima ou abaixo da moda, , bem como alguma tendência da distribuição (pode acontecer ser bimodal, pode acontecer ter uma distribuição assimétrica ou simétrica, …).

Questão 4

Os alunos seguem os passos indicados e organizam os dados num diagrama de caule e folhas duplo.

Questão 5

Os alunos analisam a distribuição dos dados, comparando, por exemplo, os dados dos dois grupos (dados recolhidos em repouso e os dados recolhidos após a atividade física); comparando os máximos e mínimos dos dois grupos. Tiram conclusões sobre a frequência cardíaca da turma por comparação com os valores apresentados no infográfico. De acordo com a distribuição dos dados, os alunos podem equacionar se a idade correspondente a alunos do 4.º ano se enquadra na categoria das crianças ou na dos jovens.

Exploração da tarefa

A propósito desta tarefa, poderá despertar-se na própria turma a curiosidade por realizar um estudo sobre a frequência cardíaca, com uma abordagem multidisciplinar, articulando as Aprendizagens Essenciais de Matemática com as das disciplinas de Estudo do Meio e de Educação Física. A exploração desta tarefa prevê momentos de trabalho autónomo, realizado a pares, intercalados com momentos de discussão em coletivo.

Apresentação da tarefa. O professor começa com a apresentação da tarefa, distribuindo o seu enunciado numa folha de papel a todos os alunos e familiarizando a turma com o contexto da tarefa. Prossegue com a discussão em coletivo acerca dos batimentos do coração e do conceito de frequência cardíaca, incentivando os alunos para análise do infográfico, relacionado a idade com os intervalos de variação dos batimentos cardíacos e o levantamento de possíveis causas das alterações aos batimentos do coração. Esta parte da tarefa pode ser previamente desenvolvida no contexto do Estudo do Meio.

O professor conduz o trabalho em coletivo com toda a turma no sentido de investigar a frequência cardíaca em duas situações: em repouso e após uma atividade física, pois sabe que é interessante e produtiva a discussão e conhecimento que se irá gerar. Os alunos vão fazer a medição dos batimentos do seu coração em repouso e após a atividade física. Os batimentos cardíacos devem ser percepcionados como a variável em estudo, que vai ser medida. Este levantamento também pode ser planificado para acontecer no contexto da educação física. Os alunos fazem o levantamento de dados da frequência cardíaca recorrendo a dois métodos, primeiro manualmente e, depois, com um dispositivo digital. A medição dos batimentos cardíacos, manualmente, pode ser feito na artéria do pulso ou na carótida. Os alunos colocam os dedos indicador e médio na parte lateral interior do pulso, junto à base do polegar com uma leve pressão e contam o número de batimentos durante 15 segundos. Logo a seguir, cada aluno mede com o dispositivo digital e regista.

Ainda em coletivo, na sala de aula, o trabalho continua com a partilha dos dados de cada aluno, de modo a que todos possam preencher as tabelas (Questão 3.1. e Questão 3.5.).

Trabalho autónomo. Logo a seguir, os alunos prosseguem em trabalho autónomo e calculam a frequência cardíaca (o número de batimentos do coração por minuto) multiplicando o número de batimentos registado em cada uma das situações por 4 e descrevem a atividade física que decidiram realizar com o professor. Como explicado anteriormente, importa que esta opção procedimental seja acompanhada com a discussão do porquê de assim se fazer, com ênfase na compreensão da vantagem e da aritmética subjacente.

Após o registo, e em trabalho autónomo, os alunos avançam para a organização dos dados num diagrama de caule e folhas duplo, de acordo com as indicações no enunciado da tarefa. Para a construção deste diagrama, importa discutir que valores considerar como caules e folhas, sendo adequado considerar como caules o número de dezenas incluídas nos valores (em repouso e após a atividade física) e, como folhas, as unidades associadas aos respetivos valores, repetindo algarismos se necessário, se for caso disso. A representação que se obtém poderá ser como a seguinte:

Figura 1. Representação de um diagrama de caule e folhas duplo

Frequência cardíaca em repouso		Frequência cardíaca após atividade física
9, 8, 7, 5, 3, 0	08	
7, 6, 6, 5, 3, 2, 0, 0	09	3
7, 6, 3, 1	10	4, 5, 5, 8
5, 1	11	2, 3, 3, 6, 7, 8, 8, 9
	12	2, 5, 5, 7, 8, 9
	13	
	14	4

O trabalho autónomo prossegue com os alunos a ler o diagrama, comparando os dados obtidos nas duas situações e registo de conclusões sobre a frequência cardíaca da turma.

Após a construção dos diagramas em trabalho autónomo, o professor poderá fotografar os diagramas construídos por alunos e projetá-los para que possa haver uma comparação coletiva dos diagramas obtidos centrada nas características do próprio diagrama e nos aspetos a melhorar. Por exemplo, pode acontecer que alguns alunos não coloquem no diagrama os valores dos caules intermédios, que não têm registo de frequência.

Discussão com toda a turma. A discussão em coletivo prossegue com a apresentação da leitura do diagrama realizada pelos alunos em trabalho autónomo e discussão das conclusões sobre a frequência cardíaca da turma.

Da leitura do diagrama podem surgir ideias como:

- as frequências cardíacas após a atividade física com valor superior a 110 batimentos por minuto e inferior a 120 são as que aparecem no diagrama com caule 11. Assim, há 4 alunos com esse valor de batimentos do coração;
- as frequências cardíacas dos alunos, em cada um dos estados, têm poucas variações;
- as frequências cardíacas aumentam bastante após a atividade física;
- após a atividade física não há nenhum aluno com uma frequência cardíaca inferior a 80 batimentos por minuto;
- …

E conclusões sobre a frequência cardíaca da turma quando comparada com o infográfico, como por exemplo:

- a maioria dos alunos da turma apresenta uma frequência cardíaca (em repouso e após o exercício) como descrita no infográfico, pois varia entre … e … batimentos por minuto;
- …

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos, como as que se apresentam no quadro seguinte:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Questão 2 Analisar o infográfico e retirar conclusões.	Colocar questões: O que é a frequência cardíaca? Como pode variar? Entre que valores varia o valor normal para cada faixa etária?
Questão 3.1. e Questão 3.5. Medir a frequência cardíaca.	Ajudar os alunos a posicionar os dedos para contar os batimentos cardíacos no pulso, durante 15 segundos.
Questão 3.1. 1. Dificuldade em sentir os batimentos cardíacos. 2. Calcular o número de batimentos num minuto	1. Ajudar os alunos a posicionar os dedos com alguma pressão. 2. Relembrar que uma hora tem 60 segundos e que por isso multiplicamos o número de batimentos registados em 15 segundos por quatro.
Questão 3.3. e 3.7. Dificuldade em identificar o mínimo e o máximo. Dificuldade em identificar a moda. Dificuldade em discernir sobre a distribuição dos dados.	1. Colocar questões como: Qual o número mínimo de batimentos cardíacos registado? Qual o número máximo de batimentos cardíacos registado? Qual o número de batimentos comum a mais alunos? 2. Relembrar que a moda é o número de batimentos comum a mais alunos, destacando que pode haver números que se repitam, mas que não correspondem à moda.

Questão 4. 1. Dificuldade em decidir quais os números para o registo dos caules 2. Identificar os algarismos que devem colocar nos caules. 3. Saltar caules (quando não têm dados). 4. Colocar por ordem crescente as folhas.	1. Relembrar que devem iniciar o registo dos caules com o menor dos valores das dezenas dos dois conjuntos de dados e terminar no maior dos dois conjuntos de dados. 2. Como pode haver valores com dois algarismos e outros com três, os alunos podem ter dificuldade em identificar os algarismos que devem colocar nos caules, devendo o professor sugerir que deixem apenas o algarismo das unidades para as folhas. 3. Relembrar que mesmo quando não há dados, os caules têm de aparecer na coluna vertical. 4. Deixar os alunos pendurar as folhas nos caules respetivos e só depois as ordenarem de forma crescente, em cada caule.
Questão 5. 1. Tirar conclusões para analisar a frequência cardíaca da turma 2. Estabelecer relações com o infográfico da tarefa	1. Colocar questões e dar pistas: Entre que valores varia a frequência cardíaca da turma em repouso? E após a atividade física? Como se comparam? 2. Os valores dos batimentos cardíacos da turma correspondem aos valores apresentados no infográfico? Relembrar que as idades dos alunos no 4.º ano podem estar entre a categoria crianças e jovens.

Concretização da tarefa na prática

A descrição que apresentamos tem por base os acontecimentos numa das turmas do projeto de operacionalização das AE. Esta tarefa prolongou-se por duas semanas, utilizando quatro aulas de Matemática, que corresponderam a 120 minutos e uma aula de Educação Física, de 60 minutos. O trabalho autónomo foi intercalado com a apresentação e discussão de cada questão em coletivo.

Apresentação da tarefa

Antes da professora entregar a tarefa em papel foi discutido na turma, em coletivo, o que entendiam por batimentos cardíacos e como poderiam medir esses batimentos.

Embora ainda não tivessem trabalhado o sistema circulatório, a maioria tinha consciência de que sentiam os batimentos do coração e que quanto maior o esforço, mais rápido este batia. Estas constatações conduziram a turma para questões como: "Por que razão isso acontece?"; "Qual o papel do coração no corpo humano?", entre outras, que desencadearam a necessidade de se fazer um projeto sobre o sistema circulatório e com ele o estudo, a partir de questões, que permitiram o esclarecimento de dúvidas, mas que não poderiam ser, naquele momento, esclarecidas.

Em seguida, a professora questionou os alunos sobre como poderiam medir os batimentos cardíacos. Os alunos referiram um medidor da tensão arterial digital e a medição direta "na garganta" ou no peito, sobretudo após o esforço físico. Concordaram então que poderiam utilizar métodos diferentes para fazer a medição dos batimentos, manual e digitalmente.

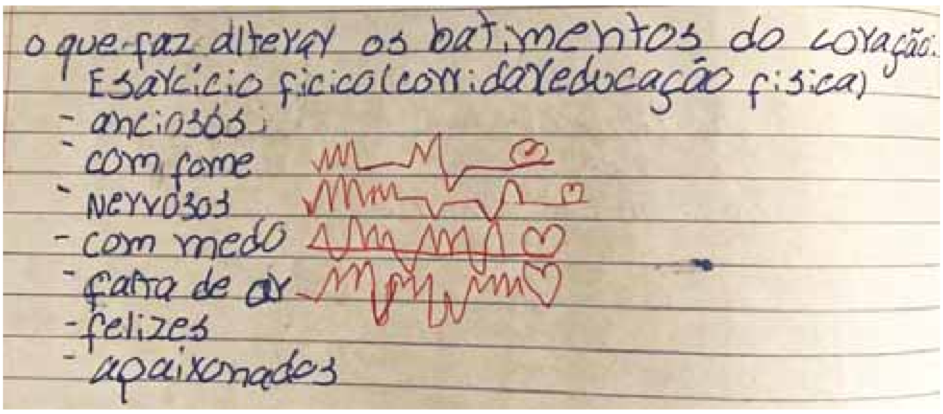
Neste momento, os alunos também referiram que podiam usar os *smartwatches*, de que alguns dispunham, ou o oxímetro, dispositivo usado durante a pandemia para medir o nível de oxigénio no sangue e mostrar o número de batimentos cardíacos. Ambos dispositivos da realidade, do quotidiano dos alunos.

Com o entusiasmo crescente, a partir da motivação pelo tema, combinaram passar à questão 3, uma vez que estavam em condições de recolher a frequência cardíaca em repouso, já que, em seguida, iriam para o intervalo e no regresso teriam de esperar até estarem reunidas as condições para a medição.

Assim, em conjunto, cada um/a, descontraído/a no seu lugar, contou, pressionando uma artéria, o número de batimentos cardíacos em repouso durante 15 segundos e registou no seu caderno. Em seguida, usaram o oxímetro para fazer o mesmo levantamento, mas durante um minuto, o que levou à discussão da razão pela qual, manualmente, tinham contado os batimentos durante 15 segundos. Chegaram à conclusão de que facilmente se perderiam, se fizessem a contagem durante um minuto.

Após o intervalo, foi distribuída e colada a tarefa no caderno diário e iniciada a sua leitura e realização em coletivo. A professora retomou o que tinham falado anteriormente e questionou o grupo sobre as razões que levam o batimento cardíaco de cada um a alterar-se, registando as respostas no quadro e os alunos no seu caderno (figura 2).

Figura 2. Registo de um aluno das razões que podem fazer alterar os batimentos cardíacos



Em coletivo, continuaram a exploração da tarefa, analisando o infográfico. Por forma a enquadrar, a professora questionou a turma sobre qual a faixa etária a que pertenciam. Os alunos consideraram pertencer ao grupo das crianças, contudo ao analisarem a recolha de dados que fizeram constataram que o número de batimentos cardíacos estava mais próximo do intervalo correspondente aos jovens do que ao das crianças. A análise do infográfico detetou a inexistência de informação mais precisa, pelo que perceberam que era difícil saber com exatidão os valores do intervalo de idades de cada faixa etária. Argumentaram, porém, que sendo crianças, estariam numa faixa etária mais próxima do intervalo de idades dos jovens do que da dos bebés e, talvez por isso, tivessem valores mais próximos destes.

Na questão 3 preencheram em conjunto a tabela com os dados da frequência cardíaca em repouso (figura 3). Foi em discussão coletiva que encontraram uma estratégia eficaz, que depois cada um usou e calculou o seu batimento cardíaco num minuto, explicando:

Prof. – Como vamos calcular a frequência em repouso para um minuto, uma vez que só contámos a pulsação na artéria durante 15 segundos? A1?

A1 – Um minuto são 60 segundos, para termos 60 segundos precisamos de 4 vezes os 15 segundos.

A2 – 15 segundos é um quarto de 60 segundos.

Prof. – E então o que temos de fazer aos dados que temos para 15 segundos?

A1 – Temos de os multiplicar por quatro.

A2 – Ou repeti-los 4 vezes .

Prof. – Todos perceberam a estratégia?

Turma – Sim…

Prof. – Então vamos começar. A3 tens 19 batimentos em 15 segundos, como vais fazer para saber num minuto?

A3 – Vou multiplicar 19 por 4.

Prof. – Ok, então como podes fazer o cálculo mental? Qual a estratégia mais eficaz para escolher?

A3 – Vou repetir o 19, repetir 4 vezes.

Prof. – Sim, mas haverá algo que possas fazer para facilitar o cálculo?

. . .

A2 – Se substituirmos por 20 e repetirmos quatro vezes, dá 80. Depois tiramos 4.

Prof. – Porquê?

A1 – Porque acrescentamos um ao número e repetimos quatro vezes, por isso, temos de tirar quatro.

Prof. – A4, quanto é que contaste?

A4 – 24 em 15 segundos

Prof. – Como vais fazer? Vais usar o 24?

A4 – Não, o 25, 4 vezes dá 100.

Prof. – Sim, e depois?

A4 – Tiro 4 e fica 96.

. . .

Prof. – A1, e tu?

A1 – 23 em 15 segundos

Prof. – Quantos a menos que o A4?

A1 – Menos 1.

Prof. – E quanto dá?

A2 – Menos quatro.

Prof. – Perceberam como o A2 pensou?

A5 – Sim, 23 é menos um do que 24, 4 vezes é menos quatro.

A1 – 96 menos quatro, 92.

. . .

Figura 3. Tabela de registo no número de batimentos do coração em repouso

	Medido na artéria		Medido com o dispositivo digital
Nomes	Número de batimentos contados em 15 segundos	Número de batimentos num minuto	Número de batimentos indicados
Aliena	19	76	63
Aliu	19	76	78
Artur	19	76	76
Claúdio	24	96	99
Dinis	23	92	76
Gabriel	45	180	78
Gonçalo	26	104	76
Gustavo	22	88	85
Joana	18	72	78
João	19	76	80
Letícia	21	84	96
Margarida	20	80	99
Mariana	18	72	88
Martim	30	120	75
Mayara	20	80	77
Miguel	30	120	86
Sofia	24	96	85
Tiago	18	72	88
Tomás	39	156	97
Ghulam	22	88	82

Após o preenchimento da coluna da tabela que faltava, observaram os resultados da recolha manual e digital formulando algumas conjeturas, como:

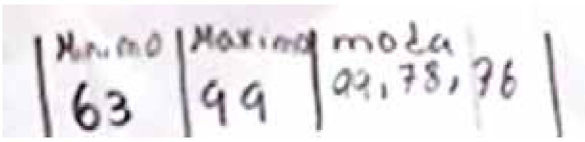
- alguns dados são muito diferentes entre as duas formas de medir, porque os alunos erraram nas contagens;
- os resultados obtidos com o dispositivo digital são mais corretos, porque não existe uma dispersão tão grande entre eles, ao contrário do que acontece na medição manual, feita na artéria.

Trabalho autónomo dos alunos

Após esta discussão, também coletiva, formaram-se pares heterogéneos para que, em parceria, pudessem apoiar-se na continuação da elaboração da tarefa, trabalhando autonomamente.

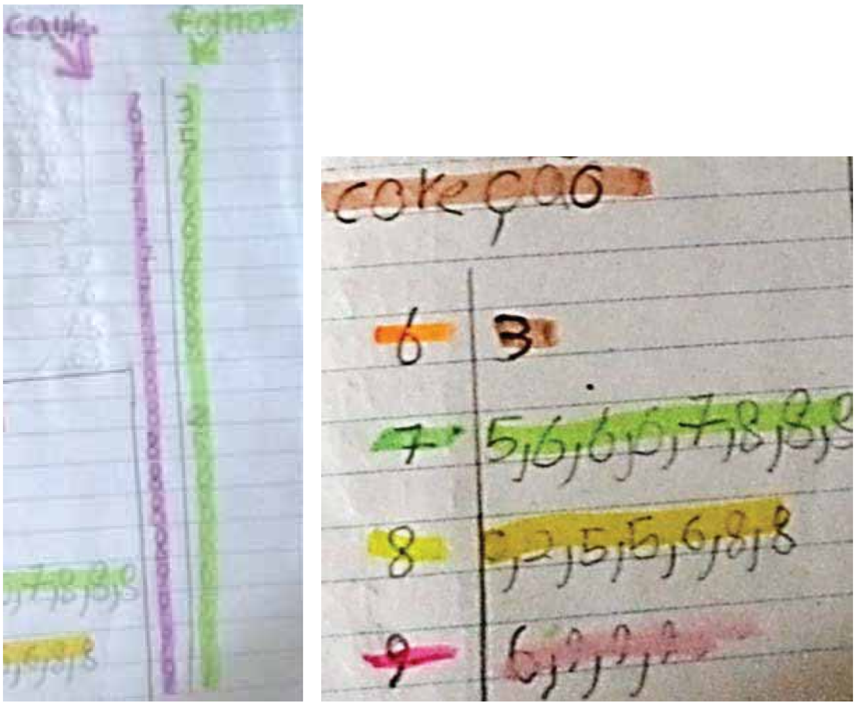
Organizaram sem dificuldade os dados da tabela por ordem crescente, repetindo os iguais, e nenhum par teve dificuldade em encontrar o máximo e o mínimo, contudo, a moda gerou algumas dúvidas por existirem dados que se repetiam o mesmo número de vezes. A questão passava pelo fato de não terem a certeza se poderia existir mais que uma moda. Estas dúvidas foram sendo esclarecidas à medida que surgiam nos pares (figura 4).

Figura 4. Registo da resolução do caderno de um aluno, questão 3.7



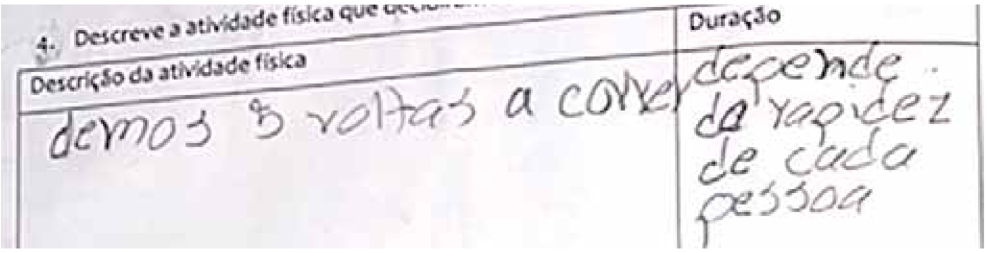
Embora a tarefa não pedisse, a professora solicitou que fizessem um diagrama de caule e folhas com os dados organizados. Nesta situação já mostraram alguma dificuldade na sua elaboração. Alguns pares distribuíram corretamente os dados no caule e penduraram as folhas, mas colocaram apenas uma vez os valores que repetiam. Outros, colocaram todos os valores num diagrama disposto verticalmente, pelo que de forma incorreta. Após a discussão em coletivo, procederam à sua correção (figura 5).

Figura 5. Registo da construção do diagrama no caderno de um aluno e respetiva correção



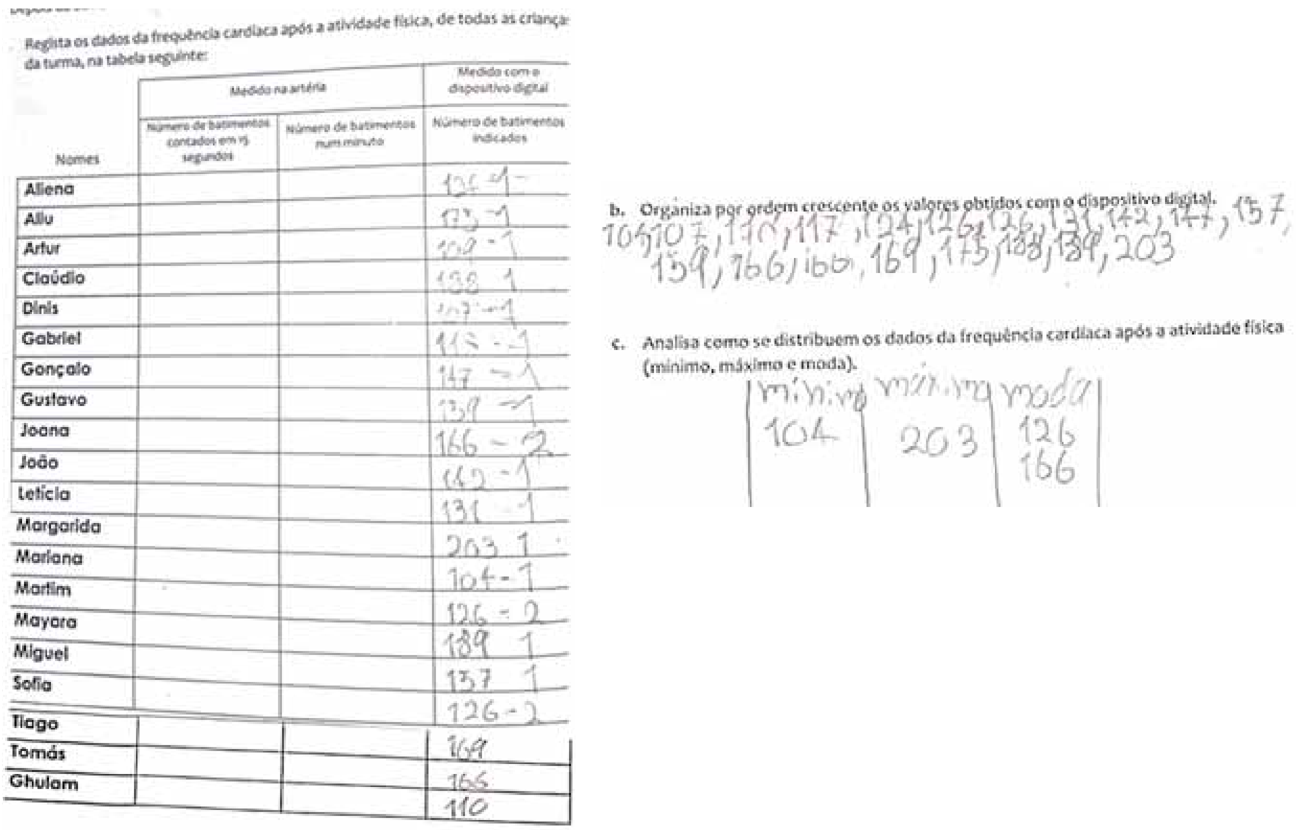
Na aula de Educação Física, e com a ajuda do professor coadjuvante, após a atividade física combinada (figura 6), recolheram os dados, mas desta vez só com o dispositivo digital, pois consideraram que se fizessem das duas formas, a segunda recolha de dados poderia não corresponder ao máximo de batimentos após o esforço físico.

Figura 6. Descrição da atividade física realizada na resposta à questão 3.4.



Na terceira sessão de Matemática, cada par organizou os dados e respondeu, cooperando entre si, às questões relativas ao trabalho direto de leitura dos dados, não revelando qualquer dúvida.

Figura 7. Registos de um alunos às questões



Regista os dados da frequência cardíaca após a atividade física, de todas as crianças da turma, na tabela seguinte:

Nomes	Medido na artéria: Número de batimentos contados em 15 segundos	Medido na artéria: Número de batimentos num minuto	Medido com o dispositivo digital: Número de batimentos indicados
Aliena			126 - 1
Aliu			173 - 1
Artur			109 - 1
Claúdio			138 1
Dinis			107 - 1
Gabriel			117 - 1
Gonçalo			147 - 1
Gustavo			139 - 1
Joana			166 - 2
João			142 - 1
Letícia			131 - 1
Margarida			203 1
Mariana			104 - 1
Martim			126 - 2
Mayara			189 1
Miguel			137 1
Sofia			126 - 2
Tiago			169
Tomás			166
Ghulam			110

b. Organiza por ordem crescente os valores obtidos com o dispositivo digital.

104, 107, 110, 117, 124, 126, 126, 131, 138, 142, 147, 157, 159, 166, 166, 169, 173, 188, 189, 203

c. Analisa como se distribuem os dados da frequência cardíaca após a atividade física (mínimo, máximo e moda).

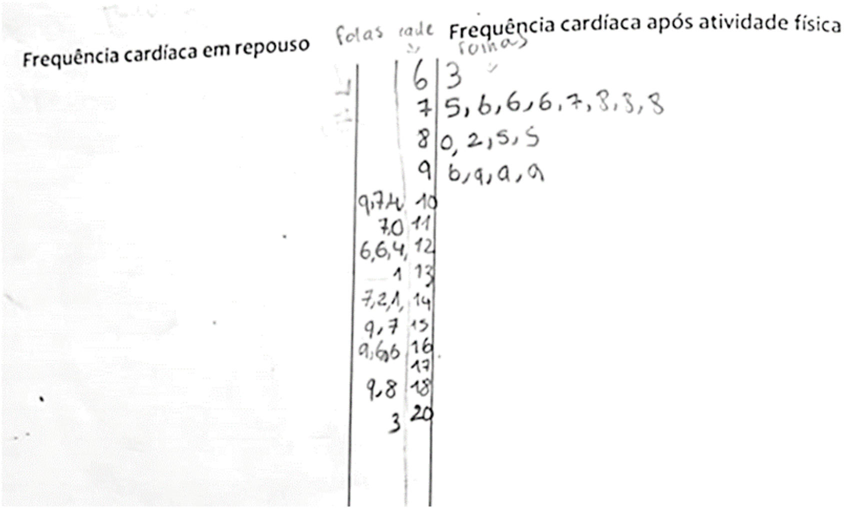
mínimo	máximo	moda
104	203	126 166

Já na questão 4, seria muito difícil organizar o diagrama sem as instruções fornecidas no enunciado, que seguiram passo a passo, uma vez que nunca tinham elaborado um caule e folhas duplo para representar dados.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias-chave

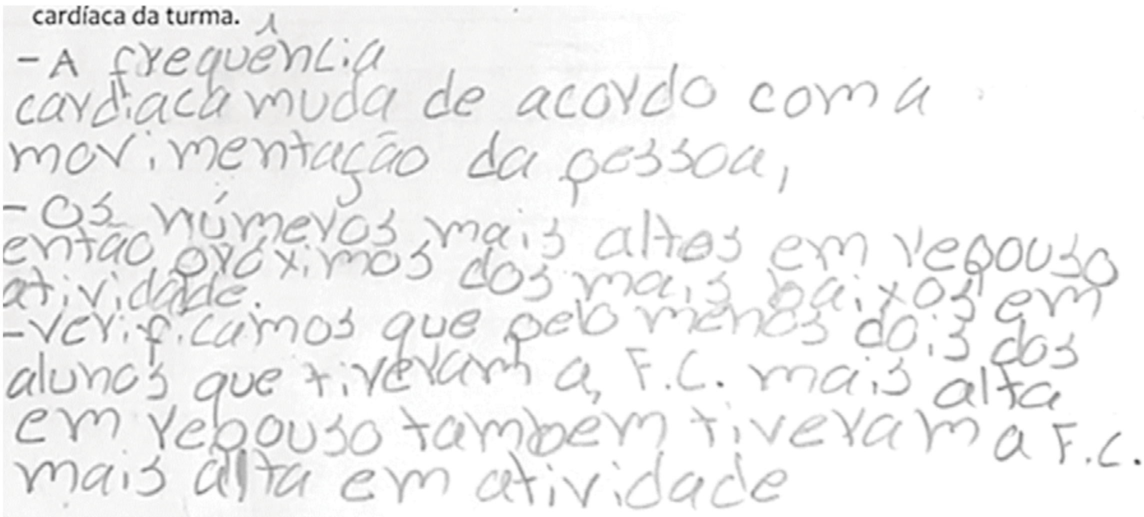
Após a realização do trabalho, as respostas dadas pelos pares foram fotografadas e projetadas para todos. Só um grupo teve de reajustar o seu diagrama (figura 8), por dificuldade na organização do espaço, não por erro de colocação dos dados.

Figura 8. Diagrama de um dos pares (registo no caderno diário) que sofreu correções



Em coletivo, analisaram o diagrama e tiraram algumas conclusões (figura 9).

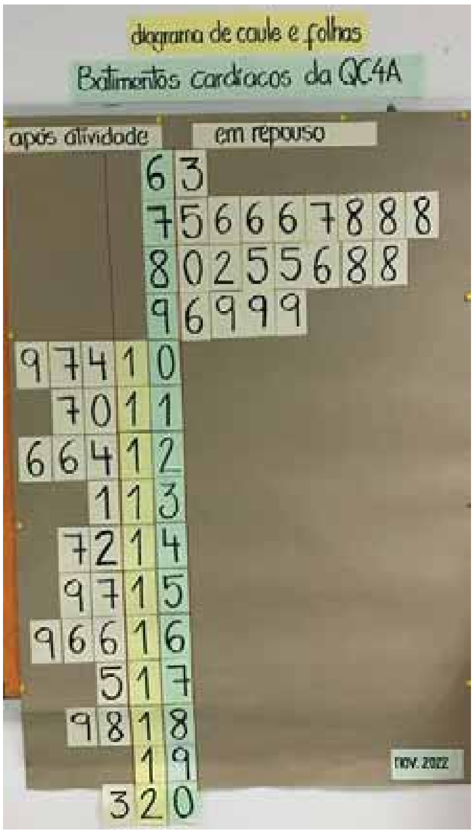
Figura 9. Registo de conclusões a partir da análise do diagrama de caule e folhas duplo


cardíaca da turma.

- A frequência cardíaca muda de acordo com a movimentação da pessoa,
- Os números mais altos em repouso então próximos dos mais baixos em atividade.
- Verificamos que pelo menos dois dos alunos que tiveram a F.C. mais alta em repouso também tiveram a F.C. mais alta em atividade

Ainda no momento de discussão coletiva, os alunos consideraram que seria importante divulgar o estudo à escola, como forma de suscitar a curiosidade pelo tema a outras turmas e despertar o interesse pela leitura do diagrama. Assim, em conjunto, foi elaborado um cartaz com o diagrama de caule e folhas duplo (figura 10) que ficou afixado num placard exterior, junto à porta da sala.

Figura 10. Cartaz com o diagrama de caule e folhas afixado à porta da sala de aula da turma



Reflexão final: Síntese das aprendizagens evidenciadas

Com base na descrição da exploração da tarefa Batimentos Cardíacos importa tecer alguns comentários, a título de síntese, das aprendizagens relativamente a conteúdos e capacidades matemáticas transversais, bem como a capacidades e atitudes gerais transversais realizadas pelos alunos.

Conteúdos matemáticos

Com esta tarefa, os alunos puderam envolver-se na recolha de dados para um estudo com significado para si, discutindo a eficácia dos métodos de recolha. A variável em estudo é o número de batimentos do coração por minuto, que foram recolhidos por medição através de dois métodos. O método de exercer pressão na artéria, por exemplo, revelou-se demorado e menos preciso, pelo que os alunos chegaram à conclusão de que os resultados recolhidos posteriormente, com o dispositivo digital, seriam mais fiáveis e objetivos, não dependentes de quem mede. A representação gráfica proporcionou a análise dos dois conjuntos de dados de uma mesma variável quantitativa. O diagrama de caule e folhas duplo permitiu uma leitura dos dados ordenados e a interpretação da forma como os dados estavam distribuídos, nomeadamente com os picos que se destacavam, relacionando com a moda. O cálculo da frequência cardíaca revelou-se um contexto para os alunos aplicarem, com sentido, estratégias de cálculo mental e mobilizarem factos básicos sobretudo da multiplicação e da divisão.

Capacidades matemáticas transversais

Ao longo desta tarefa, os alunos discutiram as ideias, formulando e respondendo a questões, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, argumentando em diálogo a pares ou nos momentos de discussão em coletivo. Na comunicação matemática valorizou-se a expressão verbal das ideias, mas também a expressão escrita, com o propósito de partilha e interação sobre as aprendizagens que os alunos iam passando a escrito. Esta tarefa apelou também a que os alunos recorressem a representações múltiplas. Trata-se de um estudo com significado para os alunos, uma situação realística, que envolve monitorizar dados vitais, constituindo-se como uma representação contextual. Além disso, a apropriação da estrutura do diagrama de caule e folhas duplo, permitiu que fosse usado como uma representação visual potente, que permite ordenar os dados, o que facilita a sua interpretação. O desenvolvimento desta tarefa proporciona o estabelecimento de conexões matemáticas, na medida que procura dar resposta a uma situação da realidade dos alunos, aplicando ideias matemáticas para compreender melhor o funcionamento do seu corpo, na sua relação com o mundo. Além disso, envolve a integração da tecnologia com um carácter instrumental. O recurso ao Excel no apoio à realização dos cálculos propostos, contribuiu para o desenvolvimento de uma literacia digital para responder às exigências de uma cidadania crítica e interveniente.

Capacidade e atitudes gerais transversais

Trata-se de uma tarefa que promove o pensamento crítico, através da análise de informação, começando pela leitura das informações verbais e visuais do infográfico. A sua discussão conduz os alunos a fazer inferências sobre as possíveis razões do aumento dos batimentos cardíacos e a recolher dados situados no contexto da tarefa. O tratamento da representação dos dados no diagrama e a sua interpretação envolve a construção de argumentos, com vista a uma tomada de posição fundamentada sobre a frequência cardíaca da turma. A construção de ideias em colaboração perpassa a resolução de toda a tarefa. Os alunos interagem a pares e em coletivo, com tolerância e responsabilidade, aprendendo a considerar diferentes perspectivas e a construir consensos, no registo de ideias conjuntas. A construção do diagrama permite organizar e analisar os dados, fazendo ressaltar as semelhanças e diferenças na turma e, assim, aprofundar o conhecimento uns dos outros, o que faz parte da vida em sociedade. Trata-se de valorizar o papel da Matemática como ferramenta facilitadora deste aprofundamento do conhecimento uns dos outros.

Tarefa — Classificação de quadriláteros

Enunciado da tarefa

Classificação de quadriláteros

Hoje vais fazer uma investigação sobre quadriláteros!

1. Em conjunto com os colegas do teu grupo, observa bem os diversos quadriláteros que recebeste e verifica se são iguais ou diferentes.
2. Discute com os teus colegas como podem separar os quadriláteros recebidos em dois conjuntos distintos e indiquem o critério utilizado para fazer essa organização.
3. Separa agora os quadriláteros que recebeste adotando, à vez, os seguintes critérios:
   - Têm todos os lados iguais;
   - Têm lados opostos iguais;
   - Têm todos os ângulos retos;
   - Têm pelo menos dois lados paralelos;
   - Têm todos os lados iguais e os quatro ângulos retos.
4. Escreve algumas conclusões sobre as relações que encontraste entre os diferentes grupos de quadriláteros.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 4.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Geometria e Medida	Figuras planas	Quadriláteros
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio Matemático	Conjeturar e generalizar Classificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Iniciativa e autonomia

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Classificar hierarquicamente quadriláteros (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo) com base nas suas propriedades (igualdade de lados, tipo de ângulos, paralelismo dos lados).
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Classificar objetos atendendo às suas características.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Conjuntos iguais (tantos quantos os grupos de alunos formados) de 10 quadriláteros manipuláveis e com as mesmas cores entre conjuntos. Devem constar quadriláteros ricos do ponto de vista da discussão do paralelismo, enquanto conceito relativo, isto é, que permitam aos alunos perceber que um lado é, ou não, paralelo relativamente a outro. Os quadriláteros podem ser construídos em folhas de musgami (ou outro material adequado, como cartolina).

Figura 1. Exemplo de um conjunto de quadriláteros adequado feito em cartolina

O professor deve ter um conjunto igual (ou ampliado) que possa ser exposto. Pode ser usado um íman por trás para poder ser utilizado em quadro magnético ou massa adesiva para outras superfícies.

Resoluções esperadas

A resolução de cada grupo de alunos depende do critério escolhido para classificar os quadriláteros. Antecipa-se que os alunos organizem os quadriláteros em dois grupos, considerando uma dada propriedade: os que têm a propriedade e os que não têm. Por vezes, as imagens prototípicas podem condicionar o processo de classificação, pelo que se prevê que, no desenrolar desta tarefa, os alunos desenvolvam experiência matemática no sentido de um processo de classificação progressivamente mais analítico, que relacione as figuras.

Os alunos podem classificar os quadriláteros considerando algumas das suas propriedades:

- lados iguais

  formando o grupo dos *losangos* (C, E, I), quadriláteros com todos os lados iguais e o grupo dos quadriláteros que não possuem todos os lados iguais (A, B, D, F, G, H, J);

- lados opostos iguais

  formando o grupo dos *paralelogramos* (B, C, E, F, H, I, J), com os lados opostos iguais e o grupo dos quadriláteros que não possuem lados opostos iguais (A, G) ou possuem exatamente um par de lados opostos iguais (D);

- ângulos retos

  formando o grupo dos *trapézios retângulos* (A, B, C, E, H, J), com pelo menos um ângulo reto, e o grupo dos quadriláteros sem ângulos retos (D, F, G, I);

  formando o grupo dos *retângulos* com todos os ângulos retos (B, C, E, H, J) e o grupo dos quadriláteros sem todos ângulos retos (A, D, F, G, I);

- existência lados paralelos

  formando o grupo dos *trapézios* (A, B, C, D, E, F, H, I, J), que possuem pelo menos dois lados paralelos, e o grupo dos não trapézios, que não possuem lados paralelos (G);

  formando o grupo dos *paralelogramos* (B, C, E, F, H, I, J), que possuem todos os lados paralelos, dois a dois, e o grupo dos não paralelogramos que não possuem todos os lados opostos paralelos (A, D, G).

O facto de os quadriláteros não terem a mesma cor contribui para que a cor não seja considerada como um critério de classificação, uma vez que não seria um atributo relevante numa perspetiva de classificação. De qualquer forma, se os alunos sugerirem esse critério, o professor poderá dizer que é possível usar muitos critérios, por exemplo, o tipo de material, mas que nem todos serão propriedades geométricas das figuras.

Exploração da tarefa

Apresentação da tarefa. Os alunos podem ser organizados em grupos de 4 elementos e a cada é dado um conjunto de 10 quadriláteros[2]. O professor convida os alunos a formar dois conjuntos com os 10 quadriláteros de acordo com um dado critério, sem influenciar a escolha, mas convocando os alunos a um levantamento das propriedades que se podem considerar num quadrilátero. Tempo previsto: 10 min.

Trabalho Autónomo. No trabalho autónomo, cada grupo manipula os quadriláteros até encontrar uma forma de os agrupar que traduza um critério negociado no grupo. Após várias experiências, o grupo deve optar por um critério. Espera-se que os alunos escolham um critério que remeta para a análise de propriedades geométricas das figuras. Nesta etapa da tarefa, é fundamental que o professor monitorize o trabalho dos grupos para pedir a explicitação do critério escolhido e a justificação da sua forma de agrupar. Este circular pela sala de aula é essencial para selecionar as resoluções, evitando a repetição de critérios e assegurando a inclusão de classificações que envolvam a análise de propriedades, bem como para sequenciar as resoluções a serem partilhadas e discutidas no momento seguinte da aula. Tempo previsto: 40 min.

Discussão com toda a turma. Depois dos grupos concluírem a resolução da tarefa, o professor inicia o momento de discussão coletiva pedindo aos grupos que apresentem à turma a sua classificação, afixando no quadro os quadriláteros, de modo a que a turma descubra o critério pensado. Sugere-se que o professor sequencie as apresentações de acordo com o grau de complexidade do critério utilizado. Por exemplo, começar com lados iguais, seguindo com ângulos retos e depois paralelismo. À medida que cada grupo vai apresentando, o professor incentiva a análise e a justificação das resoluções,

---

[2] Na aula aqui descrita, foram usados apenas 9 quadriláteros (não foi usado o quadrilátero J). Nas turmas da operacionalização optou-se por incluir o trapézio neste conjunto, mas este quadrilátero pode ser excluído uma vez que será estudado no 3.º ciclo em conjunto com o papagaio.

confrontando-as, de modo a que os alunos possam relacionar os quadriláteros entre si, alargando o conhecimento das relações hierárquicas, de acordo com a propriedade em discussão.

Nesta parte da discussão, pode acontecer que se esgotam as respostas para a questão 3, conforme as ideias que os alunos apresentarem, caso as suas propostas tenham sido variadas e aprofundadas. Nesse caso, o professor decidirá não repetir as respostas à questão 3.

Caso se justifique, o professor poderá ir pedindo a diferentes grupos que apresentem uma solução para os diferentes critérios, aproveitando igualmente para referir os nomes dos quadriláteros que verificam dadas propriedades, como as que se exemplificam:

- Têm todos os lados iguais (C, E, I) - losangos;
- Têm lados opostos iguais (B, C, E, F, H, I, J) - paralelogramos;
- Têm todos os ângulos retos (B, C, E, H, J) - retângulos;
- Têm pelo menos dois lados paralelos (A, B, C, D, E, F, H, I, J) - trapézios;
- Têm todos os lados iguais e os quatro ângulos retos (C, E) - quadrados.

No fim deste momento de discussão coletiva deve ser feito, com os contributos de todos, o registo de um esquema que traduza uma classificação dos quadriláteros, apoiada nas relações estabelecidas e das propriedades envolvidas. Tempo previsto: 40 min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos. As dificuldades que se anteveem estão relacionadas com a pouca experiência de aprendizagem no processo de classificação hierárquica de figuras, levando-os a restringir-se a casos particulares. Concretamente, é natural a resistência em aceitar que um quadrado também seja um retângulo e que este também seja um paralelogramo, pelo que é importante destacar as propriedades que nos levam a considerar uma figura como pertencente a uma dada classe, em vez de se focarem apenas na configuração global da figura.

Esperam-se também dificuldades relativas à linguagem e ao raciocínio lógico. Por exemplo, se os alunos organizarem os quadriláteros analisando a existência de ângulos retos, poderão separar os 10 quadriláteros em retângulos e não retângulos. No primeiro grupo estão os que têm todos os ângulos retos, mas o segundo grupo são os que "não têm todos os ângulos retos (podendo ter alguns)". A tendência é dizer, sobre estes, que "não têm ângulos retos".

Será possível estabelecer uma organização que tenha em conta esta propriedade, contudo faremos três grupos.

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Não reconhecer ângulos retos	Disponibilizar "detetores de ângulos retos".
Não reconhecer o paralelismo de lados	Sugerir traçar as retas de suporte dos lados.
Não considerar os quadrados C e E como losangos.	Discutir a diferença, solicitando a análise no sentido de identificarem o que têm os quadrados e as figuras que identificam como losangos em comum. Promover a participação dos alunos de modo a que fique claro que os losangos são figuras que possuem todos os lados com o mesmo comprimento e que os quadrados possuem, além disso, os 4 ângulos retos.
Não considerar o losango I como paralelogramo.	Incentivar a análise, perguntando o que entendem por paralelogramo e conduzindo a discussão para o paralelismo dos lados; incentivar o questionamento, reforçando a ideia que os paralelogramos são figuras com os lados paralelos dois a dois e apelando à comparação com os losangos, que têm ainda os lados com o mesmo comprimento.
Não considerar os quadrados C e E como retângulos	Incentivar à análise da situação a partir da formação morfológica da palavra "retângulo", destacando a ideia dos "ângulos retos". Observar os quadrados C e E e questionar se as figuras têm essa propriedade. Finalmente, sublinhar que os quadrados são retângulos cujos lados são iguais.

Concretização da tarefa na prática

A descrição que apresentamos tem por base os acontecimentos numa das turmas do projeto de operacionalização das AE. Para a concretização desta tarefa foram necessárias duas aulas de Matemática de 60 minutos.

Apresentação da tarefa

Antecipadamente, a professora construiu o número necessário de conjuntos de quadriláteros, iguais aos da figura da tarefa, para distribuir pelos grupos da turma. Formou nove grupos, oito pares e um com três alunos. Contudo, mais tarde, já em trabalho autónomo, houve a necessidade de reorganizar os grupos de trabalho, tendo passado a oito.

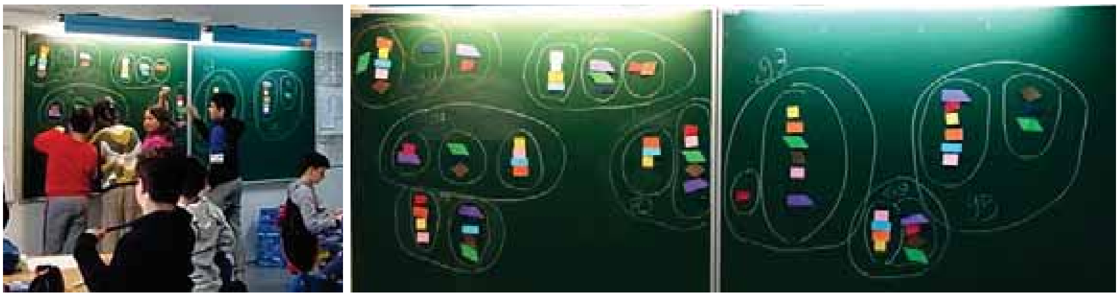
Trabalho autónomo dos alunos

A cada grupo de alunos foi pedido que observasse muito bem cada um dos quadriláteros e que pensasse num critério para os organizar em dois grupos, tendo por base uma propriedade das figuras que tinham na mão. A necessidade de clarificar a existência de ângulos retos levou os alunos a recorrer a detetores de ângulos retos, disponíveis nos materiais de matemática existentes na sala de aula. Esta indicação condicionou grande parte dos grupos na escolha do critério. Para ultrapassar essa situação a professora pediu, a quem terminou mais depressa, que descobrisse um outro critério sem ser relacionado com os ângulos, o que contribuiu para uma maior diversidade de critérios.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias-chave

Após todos os alunos terem terminado, a professora pediu que cada grupo levasse os seus quadriláteros e reproduzisse a forma como os agrupou no quadro (figura 2).

Figura 2. Disposição no quadro da forma como cada grupo agrupou os seus quadriláteros



Posteriormente, a professora sugeriu aos alunos que, observando a disposição de cada grupo, sem considerar a sua, tentassem descobrir e explicar o critério escolhido.

Prof. – Sim, A1!

A1 – Posso ir ao quadro explicar, é sobre o grupo 8 (figura 2). Eles puseram num lado os que são retos e, no outro, os que não.

Figura 3. A forma como o grupo 8 agrupou os quadriláteros, com registos da discussão

Prof. – O que queres dizer com reto? Quando falamos de reto estamos a falar de quê? Diz A2?

A2 – É quando os ângulos têm 90º.

Prof. – Então estamos a falar de ângulos, é isso?

Turma – Sim.

Prof. – Então acham que esse foi o critério usado no grupo 8, ou têm outra ideia? Diz A3.

A3 – O critério é os que têm quatro ângulos retos e os que têm menos de quatro ângulos retos.

Prof. – Grupo 8, foi este o critério que vocês usaram?

A4 – Não foi esse, mas podia ser.

Prof. – Então qual foi?

A5 – [elemento do grupo 8] No grupo da esquerda, os lados das figuras são paralelos dois a dois, no da direita não.

A2 – Mas não pode ser, o [quadrilátero] verde também tem os lados paralelos dois a dois.

Prof. – A4 e A5, concordam?

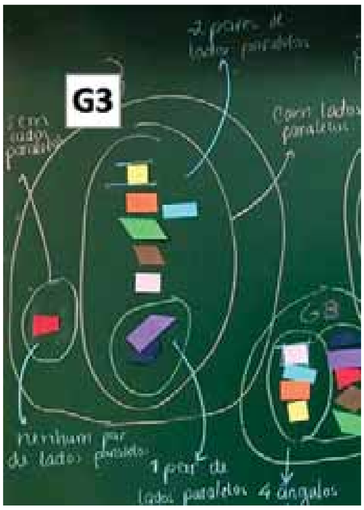
Grupo 8 – Pois é, assim o nosso critério não está bem, mas pode ficar o do A3.

Prof. – Pode, mas ainda podíamos colocar outro critério, mas, vamos avançar, pode surgir noutro grupo.

Os alunos do grupo 8 consideram o paralelismo dos lados como critério, mas agrupam considerando de um lado os quadriláteros que têm todos os lados paralelos e do outro os que não têm todos os lados paralelos. Contudo, na discussão, apresentam a sua organização como a existência ou não de lados paralelos, sem referir que seriam todos. Assim, quando uma colega questiona a existência de quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos no grupo da direita, os elementos do grupo 8 hesitam, reconsiderando o critério considerado, com base na argumentação apresentada pela colega.

A professora verifica que no grupo 3 o critério subjacente à classificação pode ajudar a resolver o conflito que o grupo 8 vive e remete a discussão para a organização desse grupo. Entretanto, após a discussão anterior, o grupo 3 (figura 4) decide ir rodear dois quadriláteros dentro de um dos conjuntos, criando um subconjunto no que tinha mais elementos, o dos quadriláteros que possuem apenas um par de lados paralelos.

Figura 4. A forma como o grupo 3 agrupou os quadriláteros, com registos da discussão



Prof. – Vamos olhar para o grupo 3. Qual o critério utilizado?

A6 – Eu acho que o grupo da direita tem lados paralelos.

Prof. – Então no grupo da direita estamos a dizer que todos os lados opostos são paralelos. É isso? OK. A3, tens alguma coisa a dizer?

A3 – O quadrilátero da esquerda, se continuarmos as retas dos lados elas vão-se cruzar.

Prof. – Grupo 3, verificaram se isso acontecia?

A7 – Sim, usámos o detetor de ângulos retos e não havia nenhum, não havia retas paralelas.

A3 – Os lados dos da direita não se cruzam.

Prof. – Não estou a perceber. Quando falas dos lados que não se cruzam estás a falar de quê?

A3 – [aponta] De lados paralelos. Estes seis têm dois lados paralelos e estes dois têm um lado paralelo.

Prof. – Dois lados paralelos e um paralelo?!

A3 – [corrige] Os seis têm dois pares de lados paralelos e os outros dois só têm um, o da esquerda não tem nenhum.

Prof. – Então qual foi o critério que usaram primeiro? E o que viram para dividir o grupo da direita em dois?

A8 – Primeiro dividimos em quadriláteros com lados paralelos e sem lados paralelos e depois, quando estávamos no lugar vimos que ainda podíamos dividir mais e dividimos o grupo da direita em quadriláteros com 2 pares de lados paralelos e quadriláteros com um par de lados paralelos.

A professora dirige então a discussão para a disposição do grupo dois (figura 5).

Figura 5. A forma como o grupo 2 agrupou os quadriláteros, com registos da discussão

Prof. – Vamos agora olhar para o grupo dois. Qual o critério que utilizaram?

A2 – Acho que de um lado colocaram retângulos e do outro os que não são retângulos.

Prof. – Grupo 2, foi isso?

A1 – Sim, como os quadrados são retângulos, colocámos todos juntos.

Prof. – Este grupo não é semelhante a outro que já estivemos a analisar? Qual foi?

A4 – É o grupo 8.

Prof. – E qual foi o critério?

A9 – Quadriláteros com quatro ângulos retos e com menos de quatro ângulos retos.

Prof. – Então juntando os dois critérios, o que podemos dizer?

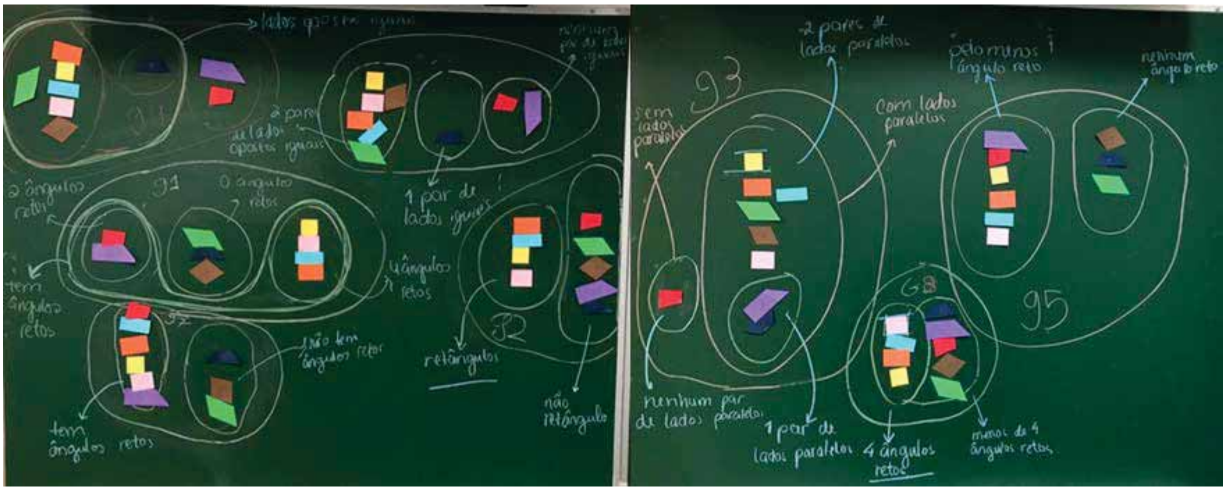
A4 – Que os retângulos têm quatro ângulos retos.

A2 – E que os que não têm quatro ângulos retos não são retângulos.

Os alunos identificam os quadrados como retângulos. Consideram os retângulos como uma categoria mais abrangente e assumem que as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados, o que traduz uma forma hierárquica de classificar que envolve analisar as figuras. Prosseguem, analisando os retângulos em função do tipo de ângulos que possuem e concluem que para ser retângulo é necessário que tenha os quatro ângulos retos.

Após discutirem e analisarem os critérios dos grupos que faltavam (figura 6), a professora propôs que tentassem considerar só o critério do paralelismo dos lados.

Figura 6. Registos no quadro dos grupos 8, 3 e 2 após a discussão os quadriláteros



Antes disso, recordou o significado de paralelismo e a identificação dos lados como segmentos de uma reta.

> *Prof. – Os lados paralelos e as retas paralelas são a mesma coisa ou não?*
>
> *A1 – Eu acho que não, porque os lados acabam, então são segmentos de reta; os lados são um pedacinho da reta.*
>
> *Prof. – Isso, A1! As retas contêm os segmentos de reta que formam os lados e os lados opostos de alguns quadriláteros são paralelos. Agora vamos então usar só o paralelismo dos lados para classificar os quadriláteros e vamos voltar ao grupo 3 que já o tinha usado como critério.*

A discussão em coletivo permitiu relembrar o critério e voltar a falar de cada grupo, clarificando a questão que esteve na origem da hesitação no grupo 3. Logo a seguir, a professora, com os alunos em coletivo, nomeou os quadriláteros.

> *Prof. – As figuras com pelo menos um par de lados paralelos têm um nome, que vocês já ouviram, chamam-se…*
>
> *A2 – Quadriláteros.*
>
> *A4 – Esses são todos, todos têm quatro lados.*
>
> *Prof. – Chamam-se trapézios[3]. Então e o retângulo cor de rosa? É um trapézio?*
>
> *Turma – Não. Ah…sim!*
>
> *Prof. – Então porquê?*
>
> *A4 – Porque tem dois pares de lados paralelos e os trapézios só precisam de pelo menos um.*
>
> *A2 – Então os quadriláteros amarelo, laranja, azul, verde e castanho também são trapézios.*
>
> *Prof. – Isso, A2!*

---

[3] A turma já tinha trabalhado antes com trapézios, identificando-os como figuras com pelo menos dois lados paralelos entre si.

A4 – São todos menos o vermelho[4]*.*

Prof. – Porquê?

A4 – Porque é o único que não tem lados paralelos.

Prof. – Isso! Todos os outros têm pelo menos um par de lados paralelos. Então e no grupo de trapézios o que levou o grupo a separá-los?

A7 – Uns tinham todos os lados paralelos e os outros só tinham um.

Prof. – Uns tinham todos os lados paralelos ao seu oposto, dois pares de lados paralelos e os outros só tinham um par de lados paralelos. Os que têm dois pares de lados paralelos chamam-se paralelogramos. Mas ainda no grupo dos paralelogramos existem uns que são especiais. O que é que uns têm que outros não têm?

A4 – Quatro ângulos retos.

A9 – É tipo uma família.

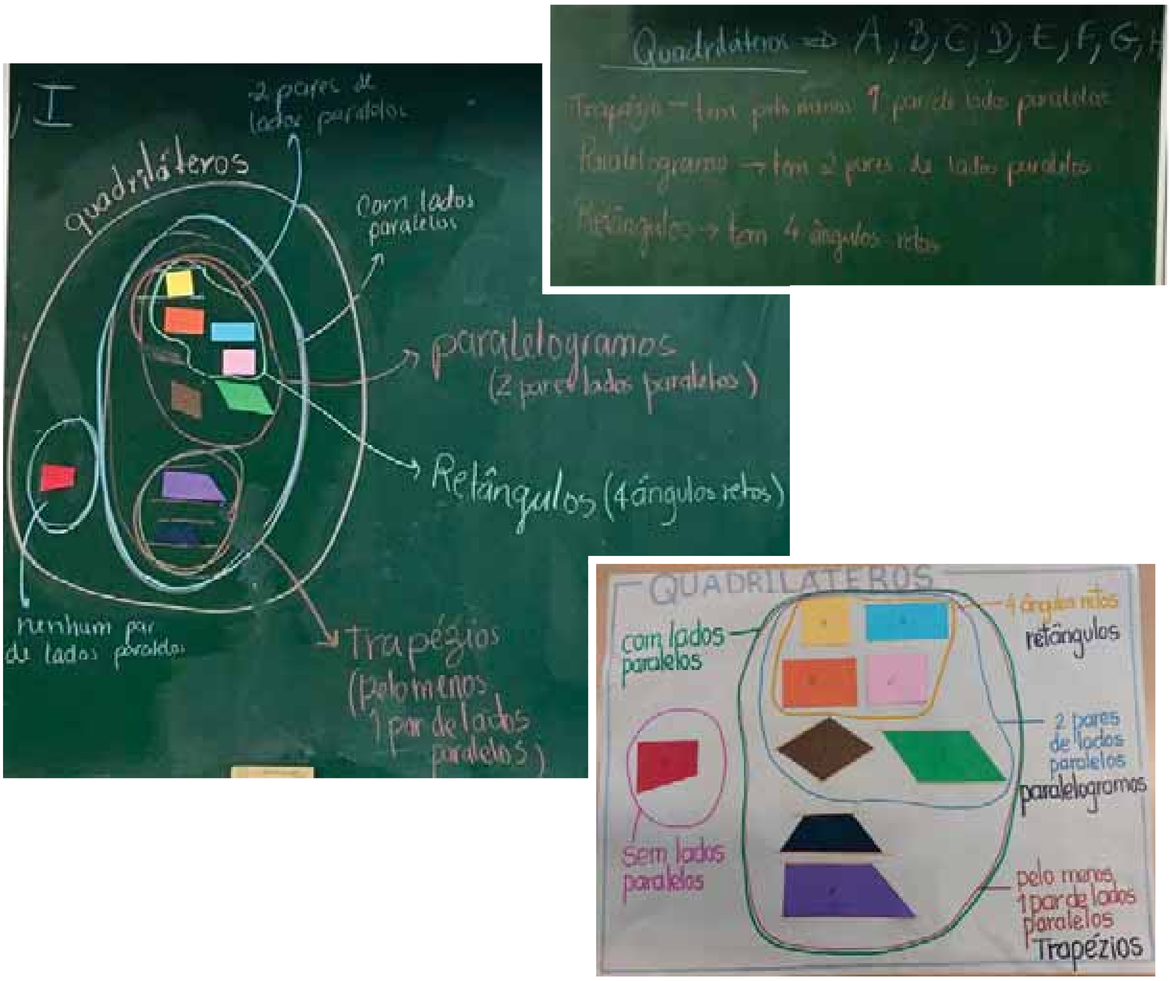
Prof. – Uma família de quê?

A9 – De retângulos.

À medida que a turma ia tirando conclusões, a sistematização foi sendo registada no quadro, pela professora, passando a escrito as ideias-chave do discurso oral de uns que ia sendo completado por outros, quer através de um diagrama, inicialmente construído pelos próprios alunos. Esse diagrama foi depois reproduzido num cartaz de papel manteiga, que ficou afixado na sala de aula, para memória da turma, a que os alunos podem sempre recorrer (figura 7).

[4] Embora a imagem não seja elucidativa, este quadrilátero não apresentava lados paralelos.

Figura 7. Sistematização realizada no quadro e respetivo registo em cartaz



Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Com base na descrição da exploração da tarefa Classificação de quadriláteros importa tecer alguns comentários, a título de síntese, das aprendizagens relativamente a conteúdos e capacidades matemáticas transversais, bem como a capacidades e atitudes gerais transversais realizadas pelos alunos.

Conteúdos matemáticos

O trabalho com figuras planas envolveu os alunos num processo de classificação de quadriláteros com base nas suas propriedades – igualdade de lados, tipo de ângulos, paralelismo dos lados. Os alunos adquiriram experiência matemática em termos de classificação hierárquica, desenvolvendo um olhar analítico sobre os atributos relevantes dos quadriláteros e não pela sua percepção global. Relacionaram as figuras entre si – quadrado, retângulo, losango e paralelogramo – na construção de interpretações e na sua identificação, mediadas pelos seus pares com quem interagem e tomam decisões. A utilização de material físico para manipulação pelos grupos, permitiu olhar a figura em várias posições, rodando-a e virando-a, numa construção de conhecimento sobre as figuras para além da sua imagem prototípica, proporcionando aos alunos a descoberta das propriedades dos quadriláteros.

Capacidades matemáticas transversais

Nesta tarefa, o processo de raciocínio matemático privilegiado foi a classificação. O trabalho dos alunos envolveu identificação de semelhanças e diferenças entre quadriláteros e a sua organização em dois conjuntos: um conjunto de figuras que têm uma característica matemática e, outro, de figuras que não têm. Os alunos classificaram os quadriláteros, comparando-os entre si e juntando-os ou separando-os de acordo com a propriedade escolhida, justificando, apoiando-se em conhecimento estabelecido. A resolução da tarefa implicava que os alunos descrevessem a sua forma de pensar para agrupar os quadriláteros, que ouvissem as dos seus colegas e questionassem as ideias de forma fundamentada, processos inerentes à comunicação matemática. Assim, cada grupo foi apresentando a justificação das suas opções, que ia sendo validada ou refutada pela turma, que contrapunha argumentos com base na propriedade das figuras, numa discussão a partir da qual se foram tirando conclusões e sistematizando ideias em coletivo.

Capacidades e atitudes gerais transversais

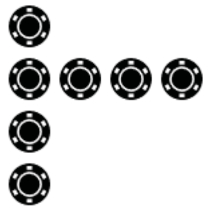
Nesta tarefa os alunos observaram, identificaram e analisaram propriedades dos quadriláteros, construindo uma classificação com sentido, apoiada nas relações identificadas, contribuindo para a construção de um pensamento crítico. Em algumas situações, os alunos foram revendo o entendimento que tinham e reconstruindo um racional comum, ao pensar de forma lógica e de modo abrangente, com base num dado critério, tirando conclusões fundamentadas. Quer no trabalho autónomo, que no momento de discussão coletiva, os alunos debateram pontos de vista, negociaram interpretações, acordaram entendimentos, envolveram-se numa experiência matemática partilhada, que aconteceu num contexto de cooperação e interajuda entre todos, que o professor deve proporcionar que aconteça, dando espaço à voz dos alunos. Ao estabelecerem relações, os alunos fortaleceram as suas redes de conhecimentos em relação às figuras planas, reforçando a sua autoconfiança. A sua discussão permitiu ultrapassar conceções prévias e contribuiu para o desenvolvimento da confiança em si próprios no trabalho em Geometria. O apoio dos outros parece ter sido importante para ganhar segurança e, consequentemente, manter o nível de entusiasmo durante as diferentes etapas da realização da tarefa. Nesta tarefa os alunos desenvolveram espírito de iniciativa na tomada de decisões fundamentadas para classificar, aprendendo a integrar pensamentos, gerir emoções e comportamentos, num processo de autonomia crescente. Foi interessante verificar que a progressiva liberdade, que foi sendo dada aos grupos de alunos, se foi traduzindo em autonomia, evidenciada na responsabilidade pela descoberta de propriedades e relações matemáticas mais potentes.

Tarefa — Criar sequências

Enunciado da tarefa

Criar sequências

A figura ao lado é o 4.º termo de uma sequência de crescimento.



1. Descobre uma forma de contar os elementos desta 4.ª figura da sequência, relacionando-a com a sua ordem na sequência. Explica como fizeste usando palavras, cálculos ou esquemas.

2. Usa essa forma de contagem para descobrires os termos 1, 2 e 3. Constrói-os.

3. Mantendo a regularidade, constrói o 5.º termo da sequência.

4. Completa a tabela e regista as relações que identificas:

Ordem	Número de elementos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
14	
22	

5. Explica a relação que encontras entre a ordem e o número de elementos de qualquer figura desta sequência.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 4.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	**Tópicos**	**Subtópicos**
Conteúdos matemáticos	Álgebra Regularidades em sequências Expressões e relações	Sequências de crescimento Relações numéricas e algébricas
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar Justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas Linguagem simbólica matemática
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico Criatividade
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Iniciativa e autonomia

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Criar e modificar sequências, revelando criatividade e flexibilidade.
- Estabelecer a correspondência entre a ordem do termo de uma sequência e o termo.
- Prever um termo não visível de uma sequência pictórica de crescimento e justificar a previsão.
- Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.
- Interpretar e modelar situações com variação de quantidades ou grandezas e resolver problemas associados, usando representações múltiplas, em particular letras.

- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.
- Trabalhar com os outros.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos, tampas ou outros objetos para representar termos da sequência de crescimento (por exemplo, 30 por par ou grupo)

Resoluções esperadas dos alunos

A resolução dos alunos em cada uma das questões depende do modo como analisam a estrutura do termo dado, o 4.º termo de uma sequência pictórica.

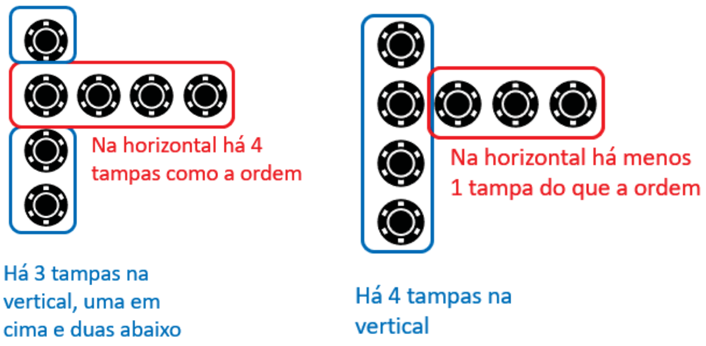
Apresentam-se em seguida três sequências (A, B e C) que se antecipam que podem surgir e a resposta a cada questão para cada uma dessas sequências. Podem surgir sequências cuja estrutura pictórica seja diferente, mas que envolva o mesmo número de elementos em cada termo (sequência numérica igual) (Sequência A e Sequência B). Podem também surgir sequências com estrutura pictórica e numérica diferentes (Sequência A ou B e Sequência C).

Sequência A

Questão 1

Os alunos podem explicar a análise do termo da ordem 4 a partir de um esquema ou palavras (figura 1).

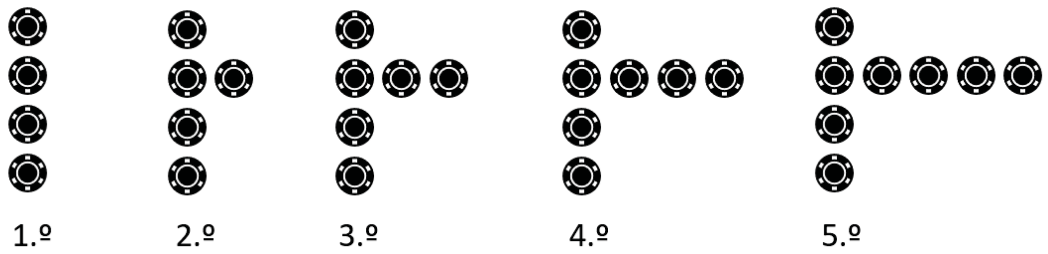
Figura 1. Exemplos de esquema do 4.º termo de uma sequência pictórica, Sequência A



Questões 2 e 3

Seguindo a regularidade identificada na questão 1 podem surgir os cinco primeiros termos pictóricos da figura 2.

Figura 2. Possíveis cinco primeiros termos de uma sequência pictórica, Sequência A



Questão 4

A tabela que resulta desta sequência apresenta-se em seguida:

Ordem	Número de elementos
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9
14	17
22	25

Questão 5

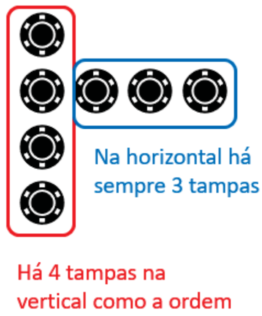
Os alunos podem expressar a relação por palavras: "O número de tampas de um termo é sempre mais 3 do que o número da ordem", ou podem usar a linguagem matemática simbólica, recorrendo a letras (t representa o número de tampas e n representa o número da ordem): $t = n + 3$, $t = 1 + n + 2$, $t = 4 + n - 1$.

Sequência B

Questão 1

Os alunos podem explicar a análise do termo da ordem 4 a partir de um esquema, cálculos ou palavras (figura 3).

Figura 3. Exemplo de esquema do 4.º termo de uma sequência pictórica, Sequência B

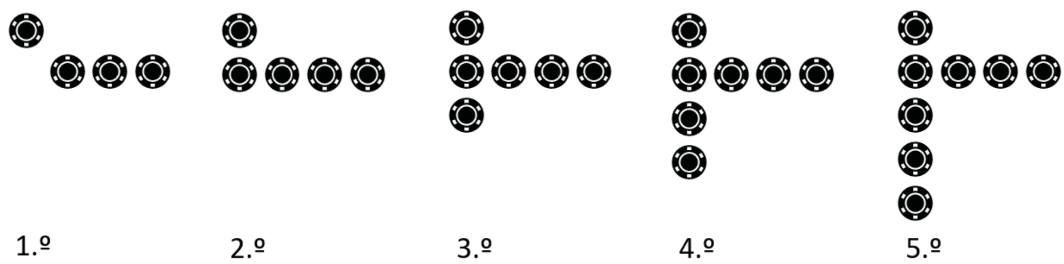


4 + 3

Questões 2 e 3

Seguindo a regularidade identificada na questão 1 podem surgir os cinco primeiros termos pictóricos da figura 4.

Figura 4. Possíveis cinco primeiros termos de uma sequência pictórica, Sequência B



Questão 4

A tabela que resulta da sequência B é igual à que surge na sequência A:

Ordem	Número de elementos
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9
14	17
22	25

Questão 5

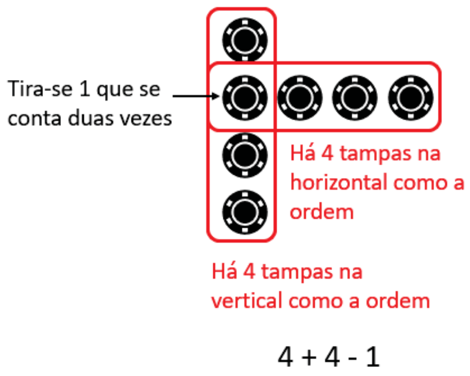
Os alunos podem expressar a relação por palavras: "O número de tampas de um termo é igual à soma do número da ordem com 3", ou podem usar a linguagem matemática simbólica, recorrendo a letras (t representa o número de tampas e n representa o número da ordem): $t = n + 3$.

Sequência C

Questão 1

Os alunos podem explicar a análise do termo da ordem 4 a partir de um esquema, cálculos ou palavras (figura 5).

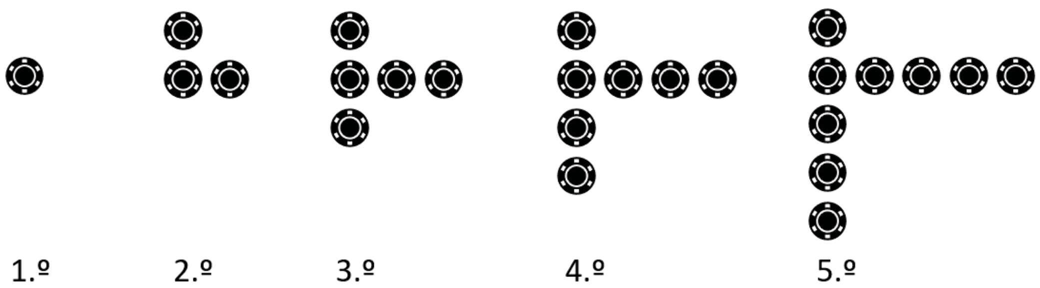
Figura 5. Exemplo de esquema do 4.º termo de uma sequência pictórica, Sequência C



Questões 2 e 3

Seguindo a regularidade identificada na questão 1 podem surgir os cinco primeiros termos pictóricos da figura 6.

Figura 6. Possíveis cinco primeiros termos de uma sequência pictórica, Sequência C



Questão 4

A tabela que resulta desta sequência é a seguinte:

Ordem	Número de elementos
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
14	27
22	43

Questão 5

Os alunos podem expressar a relação por palavras: "O número de tampas de um termo é igual ao dobro da sua ordem menos 1" ou "O número de tampas de um termo é igual ao número da ordem mais o número da ordem menos 1". Também podem usar a linguagem matemática simbólica, recorrendo a letras (t representa o número de tampas e n representa o número da ordem): $t = 2n - 1$ ou $t = n + n - 1$.

Exploração da tarefa

Apresentação da tarefa. A aula deve contemplar três momentos principais: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização. O professor começa com a apresentação da tarefa, distribuindo o enunciado numa folha de papel e tampas ou outros objetos que permitam aos alunos a representação do termo dado, bem como os restantes termos solicitados. O professor faz uma breve explicação da tarefa, sem dar sugestões que possam condicionar as estratégias que possam surgir por parte dos alunos. Tempo previsto: 10 min.

Trabalho autónomo. No momento de trabalho autónomo, em pares ou pequenos grupos, os alunos analisam o termo dado, que corresponde à 4.ª posição na ordem dos termos de uma sequência de crescimento. A partir das relações que estabelecem entre a ordem e o número de elementos da figura, considerando por exemplo a sua distribuição na figura, espera-se que entre os vários grupos surjam diferentes sequências pictóricas de crescimento. Na sua sequência, cada grupo tem de garantir que o termo dado está na ordem 4. Neste momento é essencial que o professor monitorize o trabalho dos alunos para identificar as sequências que surgem a partir dos diferentes modos de olhar para o termo dado. Essa identificação é essencial para selecionar e sequenciar as resoluções a serem partilhadas e discutidas no momento seguinte da aula. Tempo previsto: 30 min.

Discussão com toda a turma. Depois dos grupos concluírem a resolução da tarefa, segue-se a discussão coletiva das suas produções. O professor deve solicitar aos grupos com sequências e estratégias de contagem diferentes que apresentem a sequência criada e o modo como pensaram. Caso não surjam sequências de crescimento com diferentes estruturas, depois de discutirem o trabalho dos grupos, o professor pode mostrar uma outra sequência de crescimento que tenha criado e desafiar a turma a descobrir o modo como pensou. A discussão coletiva deve permitir que os alunos identifiquem a possibilidade de serem criadas diferentes sequências. É também importante que ouçam os outros e verifiquem se os colegas têm uma estratégia diferente ou idêntica à sua. Será importante que os alunos, por um lado, verifiquem se os argumentos apresentados pelos colegas são adequados e, por outro lado, possam contrapor e analisar a correção da generalização para dada sequência apresentada. Pode neste momento surgir também a oportunidade de utilizar letras para representar a ordem do termo na sequência e de analisar expressões algébricas que mostrem a compreensão da sequência, usando com significado a simbologia matemática. Tempo previsto: 30 min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos, como as que se apresentam no quadro seguinte:

Exemplos de possíveis dificuldades	**Exemplos de possíveis ações do professor**
Relacionar a estrutura pictórica do termo à sua ordem na sequência.	Incentivar a análise da figura dada, questionando porque é que esse será o 4.º termo da sequência.
Manter a regularidade nos outros termos da sequência.	Questionar os alunos sobre o modo como construíram os termos próximos da sequência (por exemplo, o 3.º termo ou o 2.º termo da sequência). Pedir que clarifiquem a regra que estão a usar e que confirmem se a estão a usar de modo correto em todos os termos (seja de um termo para o seguinte ou anterior, seja de construção do termo a partir do número da sua ordem).
Obter termos mais distantes sem ser de modo recursivo.	Promover um raciocínio mais abstrato nos alunos, de modo a que se foquem na estrutura do termo e na sua relação com a ordem. Por exemplo, colocar-lhes a

	seguinte questão: Se quisessem que um amigo vosso construísse o termo 25 da sequência, que instruções lhe diriam?
Estabelecer a relação entre a ordem e o número de elementos de qualquer figura da sequência criada.	Incentivar a análise da estrutura do termo pictórico, solicitando que assinalem no termo as relações que estabeleceram com a sua ordem. Questionar os alunos se essa relação se verifica em todos os termos que representaram. Pedir que pensem se essa relação também se vai verificar noutros termos que não estão representados e como a partir daí se pode saber o número de tampas (elementos) de qualquer termo da sequência.

Concretização da tarefa na prática

A descrição que apresentamos tem por base os acontecimentos numa das turmas do projeto de operacionalização das AE. Esta tarefa foi concretizada numa aula de Matemática de 60 minutos.

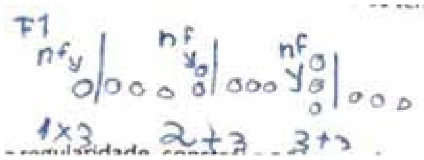
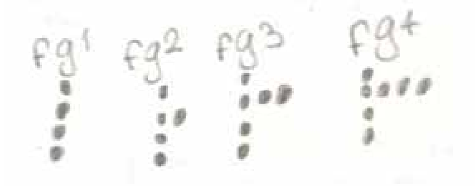
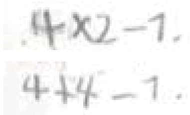
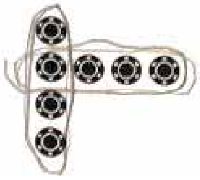
Apresentação da tarefa

A professora formou cinco grupos de quatro elementos, aos quais disponibilizou tampas para que reproduzissem o termo da sequência dado e pudessem mais facilmente manipular e construir os outros termos pedidos. Após a leitura e explicação da tarefa, a professora deu indicação aos grupos para trabalharem autonomamente e explicou que iria circular pela sala para poder ir monitorizando o trabalho.

Trabalho autónomo dos alunos

Os alunos iniciaram o trabalho a pares, construindo com as tampas o 4.º termo da sequência que foi dado no enunciado e, em seguida, analisaram-no discutindo entre si a forma de contar os elementos do termo. Registaram o modo como visualizaram o termo, tendo em conta a sua ordem na sequência, usando esquemas ou expressões numéricas, para evidenciar as relações que estabeleceram. Associaram à ordem o respetivo número de tampas que isolaram no termo, como o que ia variando, e identificaram a parte que consideraram invariante, ou seja, que era comum a todos os termos. Este modo de olhar para a figura fez com os grupos de trabalho identificassem diferentes partes e as suas relações. A partir daí, cada grupo construiu outros termos da sequência, mantendo a regularidade que identificaram. A figura 7 apresenta exemplos de sequências que foram criadas por diferentes grupos. Diferem entre si na disposição dos elementos dos termos pictóricos ou no número de elementos de cada termo pictórico. Podem ver-se em seguida exemplos de esquemas de análise do 4.º termo, outros termos das sequências pictóricas criadas e expressões numéricas que evidenciam diferentes regularidades que os alunos consideraram. Os exemplos (A) e (B) dizem respeito à mesma sequência numérica, mas os termos pictóricos têm uma disposição diferente. Por sua vez, os exemplos (C) e (D) apresentam sequências diferentes.

Figura 7. Exemplos de relações diferentes que surgiram nos grupos durante o trabalho autónomo

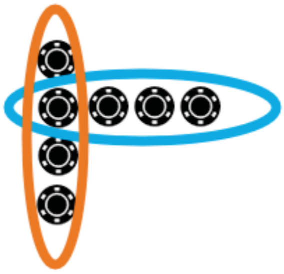
Exemplo	Análise do 4.º termo	Construção dos três primeiros termos
(A)		
(B)		
(C)		
(D)		

Em seguida é descrito o percurso do grupo que chegou à sequência (C).

À medida que iam rodeando para identificar as partes do termo pictórico que visualizavam, decorreu a seguinte discussão:

> *A1 – Uma forma de contar é quatro no horizontal e quatro na vertical [rodeia e obtém a figura 8]. Concordam?*

Figura 8. Esquema da análise do termo dado do grupo C



Grupo – Sim.

A1 – Então vamos passar para a próxima. A3, lê a pergunta 2.

A2 – Eu já pensei numa…

A1 – Cada um vai fazer o seu e depois vemos se concordamos ou não.

Os diferentes elementos do grupo utilizaram as tampas disponibilizadas para representarem os termos 1, 2 e 3 da sequência. Com a continuação da discussão entre si e a partir da manipulação das tampas, os alunos perceberam que as representações construídas não respeitavam uma lei de formação:

A3 – A figura 3 tem de ter mais uma tampa à frente.

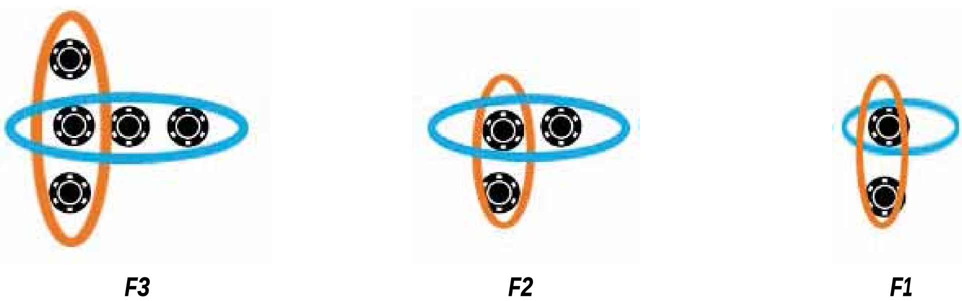
A4 – Eu não concordo, da figura quatro tiramos uma tampa para fazer a três. E da três tiramos uma tampa para fazermos a dois.

A1 – Mas a quatro tem 4 e 4 …

A1 queria dizer que a forma de contar dos colegas não estava correta, porque não correspondia ao que tinham decidido inicialmente. Contudo, A1 não conseguiu argumentar de modo a convencer o grupo da possibilidade de outro modo de analisar o termo dado. A2, que durante a discussão estava a tentar organizar as tampas de acordo com a contagem que tinham decidido inicialmente, olhou para a organização dos colegas e afirmou:

A2 – Olhem aqui, a [figura] três tem 3 e 3. A [figura] dois tem 2 e 2, mas a [figura] um não tem 1 e 1 [pois conta 1 e 2 e deveria ser apenas 1 que se conta tanto na horizontal como na vertical] (figura 9).

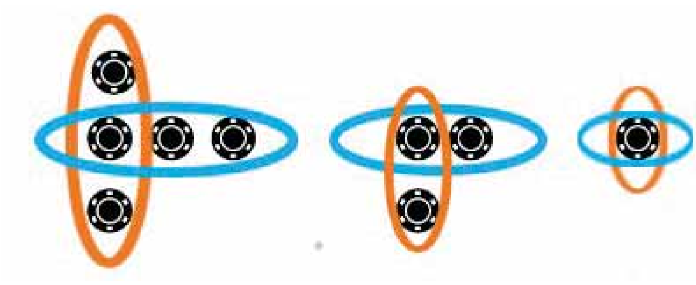
Figura 9. Organização das tampas feita por um dos elementos grupo que não estava correta



Os alunos estão a construir sucessivamente e por esta ordem, o termo 3, o termo 2 e o termo 1. É no termo 1 que o grupo encontra maior dificuldade na aplicação da regularidade que identificou inicialmente, não estando todos os elementos do grupo de acordo. Seguindo a regularidade, o termo 1 deve ficar apenas com uma tampa, o que A1 reconhece no trabalho de A2, chamando a atenção do grupo:

> *A1 – Olhem as tampas da A2, ela tem bem.* (figura 10)

Figura 10. Esquema da representação realizada por A2

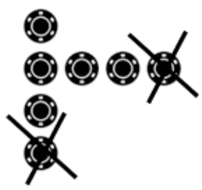


F3 **F2** **F1**

Nesse momento, um dos alunos do grupo esclarece como obtém o 3.º termo a partir do 4.º termo dado:

> *A3 – Então, na quatro, tiramos 1 aqui e 1 aqui [para fazer a figura 3].* (figura 11)

Figura 11. Representação da hipótese sugerida por A3 para obter o 3.º termo



Partindo do raciocínio de A3, A2 continua, avançando para o 5.º termo:

> *A2 – E na 5 acrescentamos! [à 4.º figura, uma tampa na horizontal e uma tampo na vertical]* (figura 12)

Figura 12. Representação do 5.º termo por A2

O grupo chegou a uma relação recursiva, registando por palavras que, de uma figura para a seguinte, a regra seria aumentar dois elementos, um na vertical e um na horizontal, como se pode ler na figura 13. Contudo, precisou do trabalho coletivo para descobrir uma expressão algébrica que os levasse a calcular o número de elementos de qualquer figura.

Figura 13. Registo escrito de um dos elementos do grupo

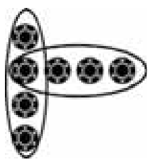
Após a conclusão do trabalho autónomo, cada grupo apresentou as suas sequências e conclusões em discussão coletiva, a partir da projeção no quadro interativo,. Durante este momento de trabalho autónomo, a professora selecionou os grupos cujas resoluções à pergunta 4 queria que fossem discutidas coletivamente de modo a evidenciar a relação descoberta entre o número de qualquer ordem e o respetivo número de elementos da figura, como é apresentado em seguida.

Discussão com toda a turma e síntese das ideias-chave

As conjeturas a que cada grupo chegou foram sistematizadas no quadro pela professora, para que todos pudessem conhecer as ideias de cada um, testar e discutir. A turma avançou na compreensão de cada uma das relações apresentadas e reconstruiu o raciocínio dos diferentes grupos, tentando que os autores não interviessem muito, de modo a que a testagem das conjeturas e verificação da adequação às sequências criadas fosse feita pelos restantes alunos. Nesse processo de testagem nem todas foram validadas, pois em coletivo verificaram que algumas não podiam ser generalizações da sequência construída por não permitirem obter todas os termos.

Num dos casos, a relação estabelecida não era correta. Esse grupo afirmou que a expressão algébrica que traduzia a relação era 4 + n.º f (número da figura). Ao testarem para o 4.º termo dado perceberam que a regra não era válida, pois esta figura não tem oito elementos como se obtém através da expressão, mas sim sete (figura 14).

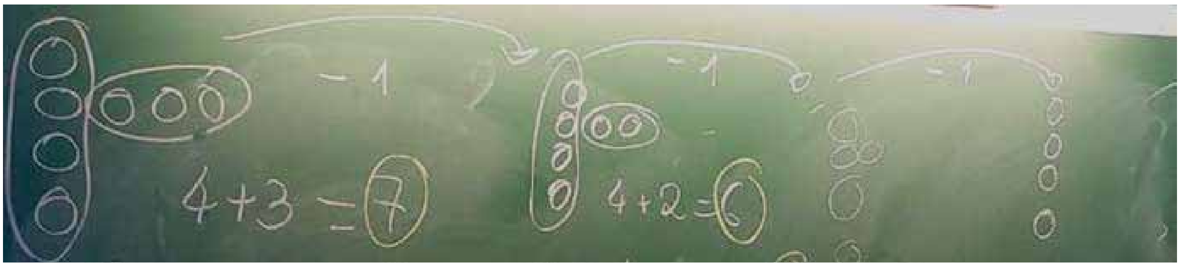
Figura 14. Registo do trabalho de um grupo que estabeleceu uma relação que não é válida para o 4.º termo dado



4.º termo dado

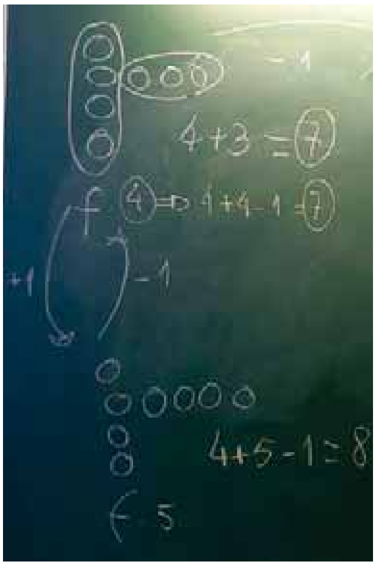
Um outro grupo, o grupo B, começou por explicar como contaram os elementos do 4.º termo e o modo como pensaram para construir as os termos anteriores da sequência: mantiveram sempre os 4 elementos na vertical e foram tirando 1 aos elementos na horizontal (figura 15).

Figura 15. Registo no quadro da apresentação do trabalho do grupo B



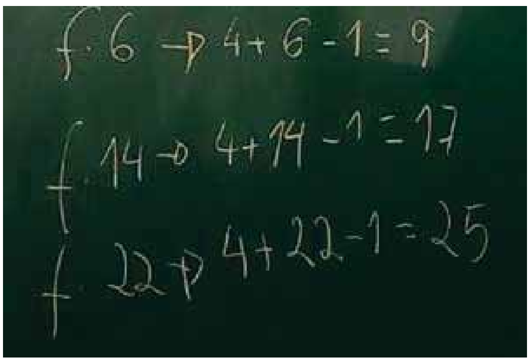
Para o 5.º termo, este grupo manteve os quatro elementos da vertical e acrescentou um elemento à horizontal, fazendo sempre o mesmo para as figuras seguintes (figura 16).

Figura 16. Registo no quadro do 5.º termo da sequência do grupo B



Em seguida, explicou como calcular o número de elementos de alguns termos distantes mantendo a regularidade que identificou, como mostra o registo da figura 17. Os alunos identificam a parte que se mantém invariante em todos os termos e o que varia em função da ordem do termo. Reconhecem que além dos 4 que se mantêm em todos os termos, na horizontal acrescentam-se tantos elementos quanto o número da figura menos um.

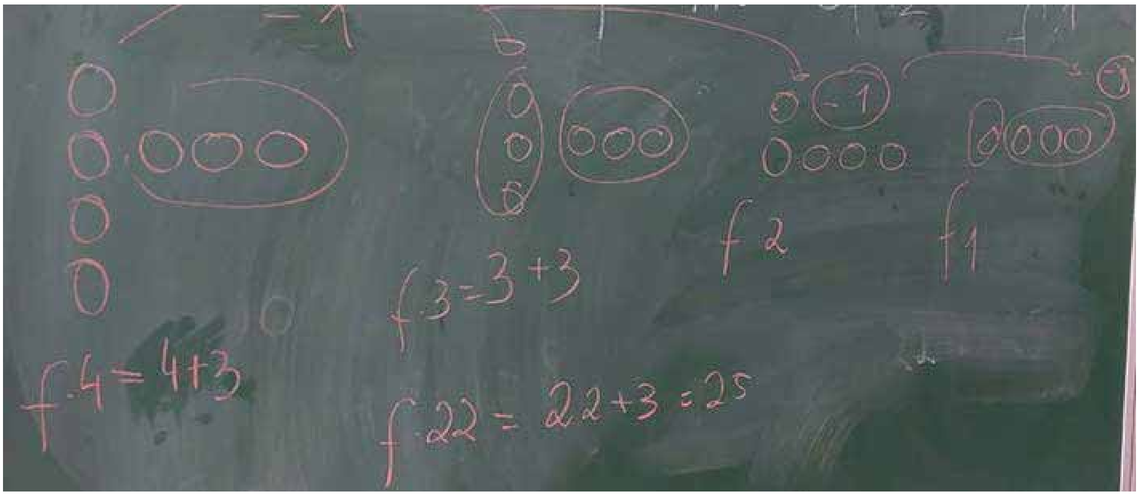
Figura 17. Cálculo de termos distantes pelo grupo B



Por fim, o grupo traduziu na expressão algébrica 4+*n*-1 (sendo *n* o número de ordem da figura) a regularidade descoberta, explicando a relação que encontrou entre a ordem e o número de elementos respetivos, funcionando para qualquer figura desta sequência. Esta generalização foi validada pela turma.

O grupo que se seguiu, o grupo A, identificou a mesma regularidade, mas construiu uma sequência diferente: mantiveram sempre os 3 elementos da horizontal e fizeram variar, em função da posição na sequência, o número de elementos na vertical (figura 18).

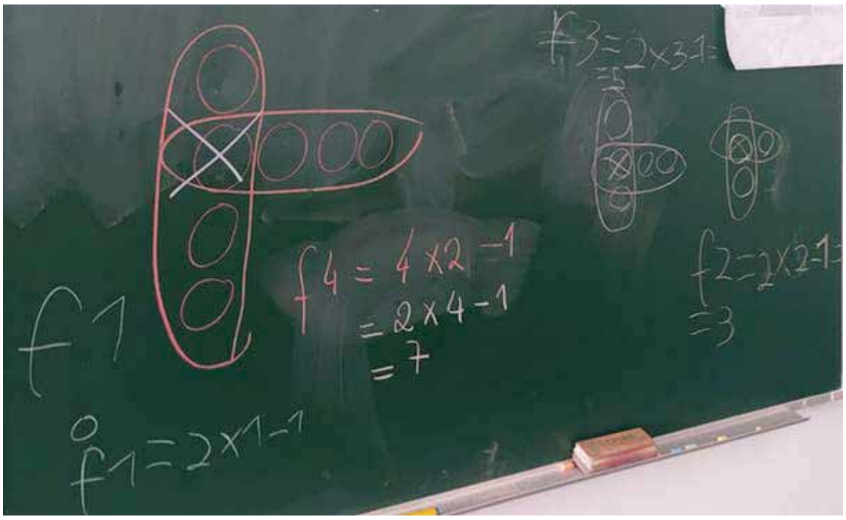
Figura 18. Registo no quadro da apresentação do grupo A



Depois de testar para o termo de ordem 22, a expressão algébrica foi explicada utilizando a regularidade que encontraram: "*n* representa o número da figura e o número de elementos da vertical e a esse número adicionamos sempre 3, que são os elementos da horizontal e que nunca se alteram" (figura 18). Desta generalização expressa verbalmente surge a expressão algébrica *n*+3, em que *n* representa a ordem da figura.

O último grupo, o grupo C, foi chamado a partilhar no quadro a sua sequência, a partir do modo como interpretou o termo dado. Os alunos identificaram no 4.º termo, quatro elementos dispostos na vertical e quatro elementos dispostos na horizontal, em que um desses elementos era comum a ambas as direções. Associaram o número de elementos à ordem do termo. É visível no esquema e na expressão numérica que consideraram o dobro do número de ordem e retiram o elemento comum que, desse modo, estava a ser contado duas vezes (figura 19).

Figura 19. Registo no quadro da apresentação do grupo C



A turma verificou tratar-se de uma sequência de crescimento diferente da anterior. A partir da discussão deste exemplo surgiu uma expressão algébrica que representa esta sequência (figura 20).

Figura 20. Registo de expressões algébricas para uma sequência construída

A turma concluiu ser possível criar diferentes sequências em que um dos termos é igual. Concluídas as apresentação, os alunos do grupo que, no momento de trabalho autónomo, não tinham conseguido chegar a uma regra que permitisse a generalização reconheceram que esta última expressão algébrica traduzia a forma como tinham pensado:

A1 – Professora, o que estava a faltar era retirarmos o elemento que estava a mais.

A3 – Sim, até porque podemos dizer que 4+4 =2x4, 3+3=2x3 e 2+2=2x2 e por isso só era preciso termos tirado 1 que repetia.

Importa destacar que, no momento de discussão coletiva, o raciocínio partilhado por uns foi sendo retomado e reinterpretado por outros, permitindo a cada grupo mobilizar processos de raciocínio com sentido e avançar na construção de novo conhecimento.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Com base na descrição da exploração da tarefa *Criar sequências* importa sistematizar aprendizagens relativamente a conteúdos e capacidades matemáticas transversais, bem como a capacidades e atitudes gerais transversais realizadas pelos alunos.

Conteúdos matemáticos

A proposta de trabalho envolveu os alunos na descoberta de regularidades em sequências de crescimento, promovendo a sua criatividade, dado que foram os alunos que criaram sequências pictóricas tendo por base uma condição, partir do 4.º termo da sequência dado. Da análise desse termo pictórico criaram os três primeiros e o 5.º termo da sequência de modo a respeitar uma regularidade que fosse verificada para o termo dado. Os alunos analisaram também a sequência numérica associada à sequência pictórica através da representação simbólica da expressão numérica, que lhes permitia calcular o número de elementos de cada termo, e do registo em tabela. Na tabela identificaram termos dos quais não têm representação visual, respeitando a regularidade criada. A análise promovida pela criação de uma sequência a partir de um termo dado reforçou a relação entre a ordem do termo e os elementos que o constituem. Foi a partir dessa análise que descreveram a generalização da sequência, expressando-a em linguagem natural ou por uma expressão algébrica. De acordo com a sequência criada, surgiram expressões como: nx2-1; 4+n-1; n+3. Na discussão coletiva testaram a generalização para termos mais distantes, dando sentido à relação estabelecida e reforçando a compreensão da utilização dos símbolos matemáticos.

Capacidades matemáticas transversais

A tarefa contribuiu para aprendizagens relativas às capacidades matemáticas de raciocínio matemático, comunicação matemática e representações matemáticas. No âmbito do trabalho com sequências foi possível promover a generalização algébrica, tendo os alunos formulado e testado conjeturas relativamente à sequência que criaram. A partir da análise que fizeram do termo dado, identificaram regularidades que mantiveram para outros termos da sequência, definindo o que variava em função da ordem e o que permanecia constante em cada termo. Tiveram de verificar a sua conjetura para o termo dado e também para os restantes termos que construíram. Verifica-se no trabalho de sala de aula descrito que nem sempre a análise que faziam era viável para todos os termos ou que os termos que construíam nem sempre mantinham a regularidade, havendo necessidade de rever o seu trabalho, verificar e justificar a generalização que apresentavam. Os alunos fizeram os seus registos escritos sobre a sequência e as suas regularidades usando representações visuais, tabelas, linguagem natural e representações simbólicas. A generalização, em que os alunos conseguiram indicar uma relação entre a ordem e o número de elementos de qualquer figura desta sequência, foi expressa de diferentes modos, tendo vários grupos usado a linguagem simbólica matemática. Assim, conseguiram comunicar sinteticamente e com precisão essa relação, fazendo uso da letra para representar a ordem como variável. Um momento importante da aula foi o momento de discussão coletiva, uma vez que se tinham de ouvir uns aos outros, partilhar e discutir ideias oralmente sobre as sequências apresentadas, verificando se eram iguais às suas, mas com uma análise diferente, ou se eram mesmo diferentes, mas igualmente válidas. Para tal, tiveram de analisar o que outros apresentaram, confrontar com o seu trabalho e encontrar argumentos para validar ou refutar uma sequência. Na discussão coletiva tiveram oportunidade de analisar diferentes representações usadas para expressar relações, contribuindo assim para o desenvolvimento da sua compreensão em torno das ideias matemáticas expressas de diferentes modos, em particular, ao analisar diferentes expressões algébricas.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Nesta tarefa os alunos tiveram oportunidade de trabalhar em pequenos grupos de modo autónomo. Sendo dado apenas um termo pictórico de uma sequência, tiveram de o analisar e discutir ideias dentro do grupo em torno de como poderia ser a estrutura de outros termos da sequência, o que também apelou ao seu pensamento criativo. Nesta tarefa, diferentes grupos criaram diferentes sequências, dependendo do modo como analisavam o termo dado e relacionavam a sua estrutura pictórica com a sua ordem na sequência. Para o pensamento crítico dos alunos e o desenvolvimento da sua autonomia foi fundamental perceberem a importância de testarem e validarem as suas conjeturas, quando procuravam generalizar a relação entre a ordem e os elementos do termo, para a sequência que criaram.

Tarefa — Construindo retângulos no Scratch

Enunciado da tarefa

Construindo retângulos no Scratch

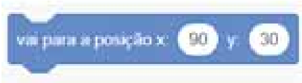
No Scratch, usa dois atores para desenhar dois retângulos diferentes, em que todos têm um perímetro com 20 unidades de medida de comprimento. Usa o cenário e os atores que já te são dados no *link* https://scratch.mit.edu/projects/808858204. Considera como unidade de medida de comprimento o lado da quadrícula e como unidade de medida de área a assinalada no cenário.

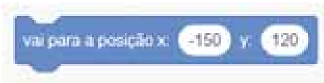
Esta tarefa tem quatro etapas que deves fazer:

A. Faz a programação em cada um dos atores para cada um desenhar um retângulo diferente com as condições indicadas.

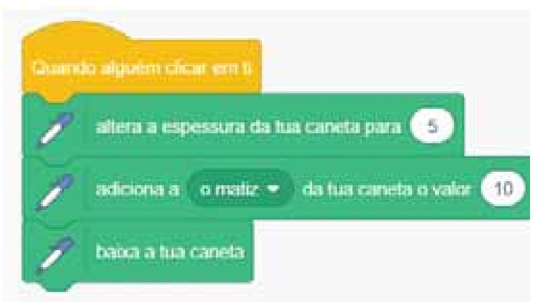
1. Introduz a programação inicial seguinte referente ao evento "Quando alguém clica em bandeira verde", em cada um dos atores, alterando apenas a sua posição no palco.

Alguns exemplos de posições em que se podem situar os atores:





2. Introduz a programação inicial seguinte relativa ao evento "Quando alguém clica em ti", em cada um dos atores para que fiquem preparados para desenhar.



3. Para cada ator, no evento "Quando alguém clica em ti", acrescenta os blocos necessários para desenhar um retângulo com perímetro igual a 20 unidades de comprimento sobre as linhas do quadriculado. Para percorrer um lado de uma quadrícula são precisos 30 passos.

Usa o bloco seguinte o número de vezes necessárias e coloca no espaço respetivo o número de passos que permitem desenhar cada um dos lados do retângulo.

Usa o bloco seguinte para fazer rodar o ator e coloca o valor respetivo em cada gira.

B. Testa o teu projeto e verifica se cada ator desenhou um retângulo diferente com um perímetro com 20 unidades de medida de comprimento. Revê o projeto para o melhorares ou corrigir erros que possam existir.

4. Por exemplo, pensa nas seguintes questões para te ajudar a rever o projeto, em cada um dos retângulos:

Questões	**Sim**	**Não**
O ator desenhou um retângulo?		
Os lados do retângulo estão sobre as linhas do quadriculado?		
O retângulo tem 20 unidades de medida de perímetro?		

C. Depois de desenhados os dois retângulos responde às duas questões seguintes:

5. Preenche a tabela seguinte com os valores relativos aos retângulos que desenhaste:

Ator	Medida de comprimento de cada lado				Perímetro	Área
ator 1						
ator 2						

6. Regista as tuas conclusões a partir da tabela sobre o perímetro e sobre a área desses retângulos.

D. Partilha com os teus colegas os retângulos que desenhaste e analisa os retângulos dos teus colegas. Podem preencher uma tabela com todos os retângulos diferentes.

7. Quantos retângulos diferentes descobriram na turma?

8. Qual o retângulo com maior medida de área? E qual a sua área?

9. Discute com os teus colegas o que descobriram sobre o perímetro e sobre a área dos retângulos que desenharam. Regista as principais conclusões.

Planificação da aula

Enquadramento curricular

Ano de escolaridade: 4.º ano

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Geometria e Medida Figuras planas Álgebra Expressões e relações	Quadriláteros Medição e unidades de medida Relações numéricas e algébricas
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar
	Pensamento Computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
	Representações matemáticas	Representações múltiplas
Capacidades e atitudes gerais transversais	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Generalizar a expressão para o cálculo da medida da área do retângulo, relacionando-a com a contagem estruturada do número de unidades existentes num retângulo.
- Generalizar a expressão para o cálculo da medida da área do quadrado.
- Classificar hierarquicamente quadriláteros (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo) com base nas suas propriedades (igualdade de lados, tipo de ângulos, paralelismo dos lados).

- Interpretar e modelar situações com variação de quantidades ou grandezas e resolver problemas associados, usando representações múltiplas, em particular letras.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

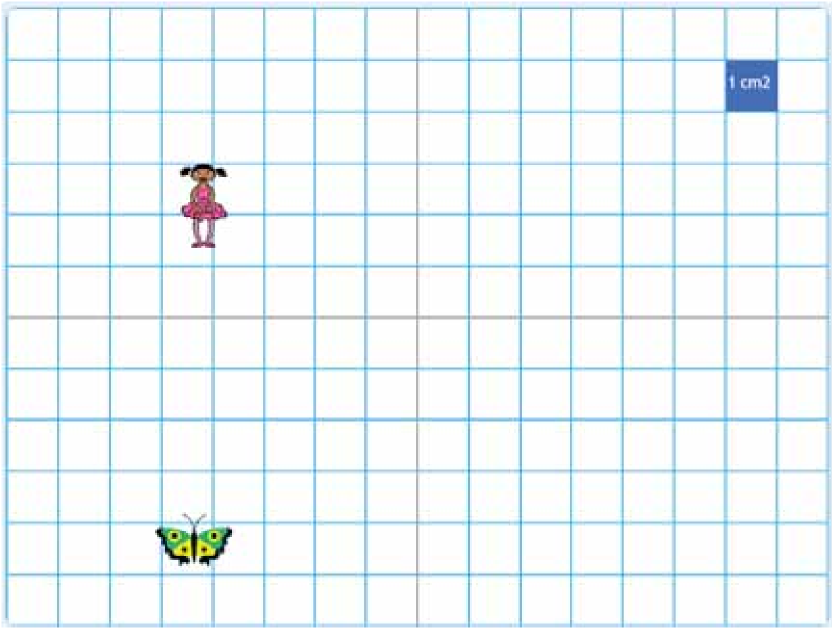
Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos, computador com acesso à Internet, projeto base do Scratch disponível no *link* https://scratch.mit.edu/projects/808858204.

Resoluções esperadas dos alunos

Cenário dado. Quando acedem ao *link*, os alunos vão ter já dois atores disponíveis e no cenário um quadriculado que tem assinalada a unidade de medida de área (figura 1).

Figura 1. Cenário do projeto Scratch dado



Parte A

Questões 1 e 2

Nestas duas questões iniciais os alunos têm de começar por reproduzir a lista de blocos que é facultada, em cada um dos atores. Um aspeto que têm de especificar para cada um dos atores é a sua posição no cenário. A tarefa apresenta duas sugestões de posição "vai para a posição x:90 y:30"; "vai para a posição x:-150 y:120". Os alunos podem escolher outras, mas devem escolher para valores de *x* e de *y* números que sejam divisíveis por 30 por forma a que fiquem sobre as linhas do quadriculado.

Questão 3

Com unidades inteiras como medida do comprimento dos lados do retângulo, existem cinco retângulos possíveis que os alunos podem representar, garantindo que têm de perímetro 20 unidades de comprimento. A unidade de medida é a medida do lado de uma quadrícula. São a seguir apresentados exemplos dos retângulos possíveis (figura 2) e a respetiva programação (figura 3).

Figura 2. Desenho no Scratch de retângulos com perímetro de 20 unidades de comprimento

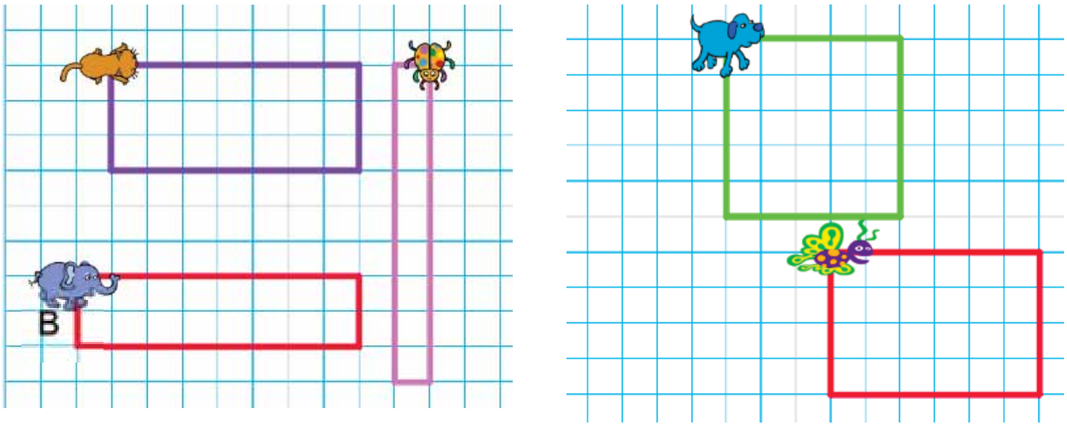


Figura 3. Programação no Scratch de retângulos com perímetro de 20 unidades de comprimento

<table>
<tr><th>A - Retângulo com 9 u.a.</th><th>B - Retângulo com 16 u.a.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>C - Retângulo com 21 u.a.</th><th>D - Retângulo com 24 u.a</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>E - Retângulo com 25 u.a.</th></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Parte B

Questão 4

Esta questão pretende reforçar o processo de depuração. Os alunos têm de verificar as três questões para cada um dos retângulos. Caso obtenham algum *Não*, têm de rever o seu trabalho, corrigir o erro e testar novamente.

Parte C

Questão 5

Independentemente do ator que está a desenhar um retângulo, podem surgir na aula os retângulos seguintes:

Exemplo	Medida de comprimento de cada lado				Perímetro	Área
A	9	1	9	1	20	9
B	8	2	8	2	20	16
C	7	3	7	3	20	21
D	6	4	6	4	20	24
E	5	5	5	5	20	25

Questão 6

Exemplos de conclusões que se espera que possam surgir na turma:

- O perímetro é a soma da medida de comprimento de todos os lados.
- O perímetro é sempre igual.
- O número de quadrículas do retângulo é igual à multiplicação da medida de comprimento de dois lados adjacentes.
- A área não é igual.
- Retângulos diferentes podem ter igual perímetro, mas medida de área diferente.

Parte D

Questão 7

Depois de terem partilhado as várias resoluções espera-se que consigam indicar que podem existir 5 retângulos diferentes, reconhecendo o quadrado como um caso particular de retângulo.

Questão 8

O retângulo com maior medida de área, com um perímetro de 20, é o quadrado, cuja medida de comprimento do lado é 5. A sua área é de 25.

Questão 9

Algumas conclusões que podem emergir:

- Há retângulos que podem ter igual perímetro, mas medida de área diferente.
- De entre os retângulos com igual perímetro, o que tem maior área é o quadrado.

Exploração da tarefa

Apresentação da tarefa. Antes do início da aula, o professor deve disponibilizar aos alunos o *link* para o projeto Scratch que tem os elementos iniciais já introduzidos. Pode enviar por e-mail ou disponibilizar numa plataforma a que todos os alunos tenham acesso. O professor começa com a apresentação da tarefa, distribuindo o seu enunciado numa folha de papel a todos os alunos e referindo que será utilizado o Scratch para a representação de retângulos diferentes, mas com um perímetro igual ao que é indicado. Deve em seguida solicitar aos alunos que liguem o computador e acedam ao *link* facultado. Nesse *link* acedem a uma base para o desenvolvimento do projeto no Scratch que tem já introduzidos o cenário (Quadriculado 30 por 30), com a unidade de medida de área assinalada, e dois atores que serão programados para desenhar os retângulos no palco. Tempo previsto: 10 min.

Trabalho autónomo. No momento de trabalho autónomo, em pares, os alunos devem programar os atores para cada um desenhar um retângulo diferente e testar o seu programa para verificarem se estão a obter o pretendido. Devem ter atenção à posição do ator de modo a terem espaço suficiente para desenharem o retângulo pretendido sem que os atores interfiram um com o outro ou o ator saia do palco. Devem ter em atenção o sentido do bloco Gira (para a direita ou para a esquerda), devem verificar o número de passos a indicar em cada lado em função do número de quadrículas que se pretende que tenha cada lado do retângulo, considerar que 90° corresponde à amplitude de um ângulo reto. Durante a programação dos retângulos, podendo depender do à vontade e do conhecimento que os alunos têm no trabalho com o Scratch, podem verificar que há conjuntos de blocos que se repetem e que é possível utilizar o bloco, Repete, para reduzir o número de blocos usados. Os exemplos de resoluções acima mostram situações em que não é utilizado o Repete e situações em que é utilizado, sendo igualmente válidas as duas situações. No processo de construção do programa vão emergir as diversas práticas de pensamento computacional.

Além do trabalho no Scratch, devem fazer os registos do progresso do seu trabalho no enunciado dado. É relevante que procurem explicitar as suas ideias de modo claro e se foquem em características e ideias matemáticas relevantes. Devem identificar a medida de comprimento dos lados de cada retângulo que lhes permite ter o perímetro indicado. Podem verificar que lados paralelos têm igual comprimento. No que respeita à área, podem, por um processo de contagem organizada, identificar o número de unidades de área que cobrem a superfície de cada retângulo e relacioná-lo com a multiplicação entre os comprimentos de dois lados adjacentes.

Os alunos podem requerer o apoio do professor por dificuldades na programação, mas espera-se que sejam dificuldades iniciais que depois de ultrapassadas permitam que sejam capazes de autorregular o seu trabalho. Ainda neste momento, é importante que o professor monitorize o trabalho dos alunos para identificar a diversidade de retângulos que está a surgir na turma e selecione as produções que serão discutidas. Tempo previsto: 60 min.

Discussão coletiva. No momento de discussão coletiva, os alunos vão verificar que existem outros retângulos com perímetro 20 além dos que desenharam. Mesmo que durante a partilha de retângulos descobertos pelos alunos surjam as cinco soluções possíveis, o professor pode questionar se depois de terem visto várias possibilidades poderá ainda existir mais alguma. Também no caso de todas surgirem no momento de partilha e discussão das produções dos alunos, o professor deve questionar se os alunos têm a certeza que têm todas as soluções possíveis, promovendo também desse modo o pensamento computacional. Os alunos devem definir uma estratégia que lhes permita garantir que estão todas as possibilidades contempladas e apresentar os seus argumentos. Devem reconhecer o caso particular do quadrado. Com a ajuda dos alunos, deve ser sistematizada a expressão para o cálculo da medida da área do retângulo e do quadrado, recorrendo a letras que facilitem a sua identificação. Tempo previsto: 50 min.

Dificuldades previstas e ações do professor

Durante a resolução desta tarefa podem surgir dificuldades que requerem uma ação do professor, sem que com isso reduza o nível de desafio cognitivo para os alunos:

Exemplos de possíveis dificuldades	Exemplos de possíveis ações do professor
Amplitude do ângulo a indicar no bloco Gira	Que tipo de ângulos tem o retângulo? Para obter o ângulo reto é necessário indicar 90° no bloco Gira.
Número de passos a indicar em cada lado	A quantos passos corresponde o lado de uma quadrícula? E quantas quadrículas querem percorrer para desenhar um lado? A quantos passos isso vai corresponder?
Alinhar o desenho com o quadriculado	Verifiquem a direção do vosso ator. Confirmem que está a 90°. Verifiquem a posição do ator. Confirmem que tanto o valor de x como o de y são números múltiplos de 30.
Descobrir todos os retângulos	Será que existe mais algum retângulo com perímetro igual a 20? Como podemos garantir que não há outros?

Concretização da tarefa na prática

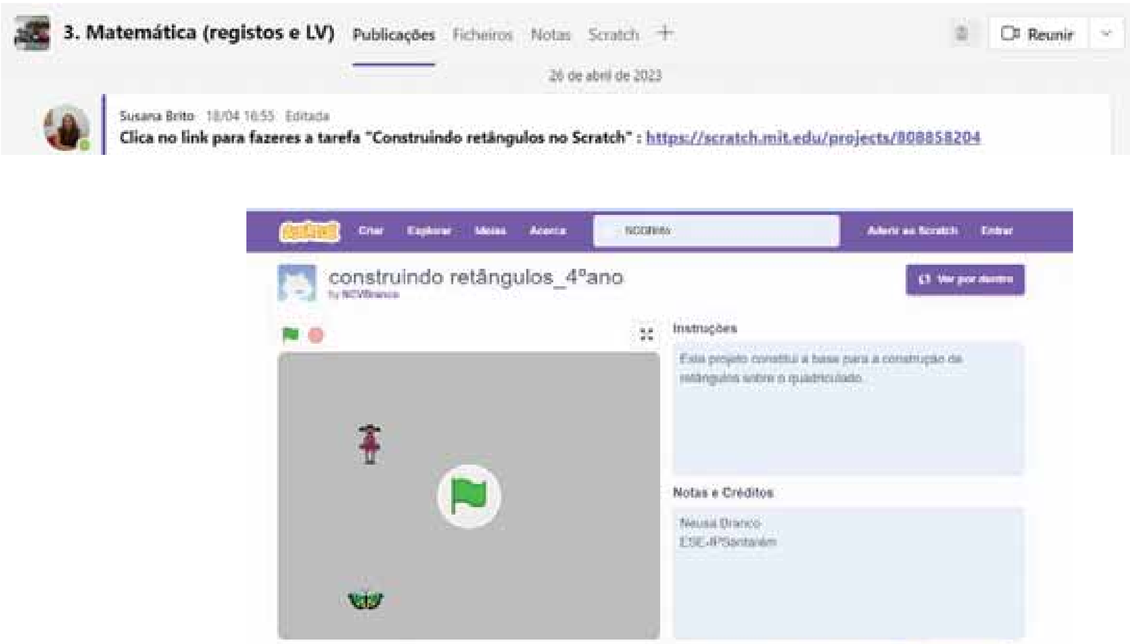
A descrição que apresentamos tem por base os acontecimentos numa das turmas do projeto de operacionalização das AE. Para a concretização desta tarefa foram necessárias duas aulas de Matemática de 60 minutos.

Apresentação da tarefa

Antes da aula, a professora disponibilizou no Microsoft Teams®, na equipa da turma, o *link* para o projeto Scratch, com os elementos iniciais já introduzidos.

No início da aula a turma foi organizada em 10 pares. Cada par tinha um computador ou *tablet* com acesso à Internet. A professora distribuiu e explicou o enunciado. Após clarificadas as dúvidas sobre a tarefa, os alunos ligaram o computador e acederam ao *link* (figura 4).

Figura 4. Captura de ecrã da equipa *teams* da turma com o *link* para a tarefa

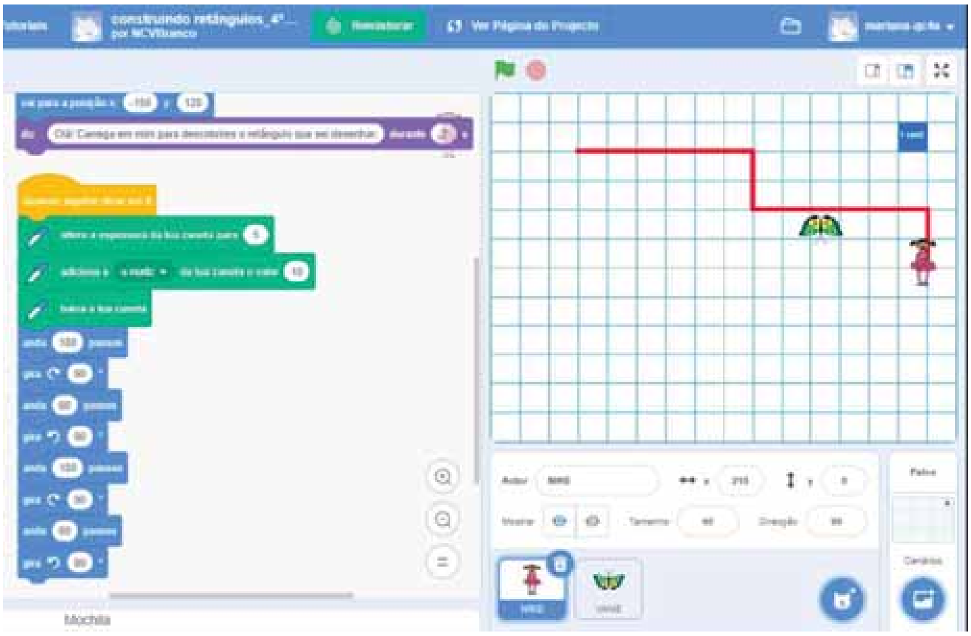


Trabalho autónomo dos alunos

Ao longo do trabalho autónomo, à medida que os alunos avançaram, foram cometendo alguns erros de programação. Esses erros eram detetados ao testarem a sequência de blocos introduzida e verificarem que no cenário (quadriculado) não era construída a figura geométrica esperada ou do modo pretendido. Para os ultrapassar, fizeram a revisão da sequência de blocos construída, analisando passo a passo os procedimentos, descobrindo o que não estava bem, sozinhos ou com a ajuda da professora, e refazendo o código, alterando blocos ou corrigindo indicações em blocos específicos.

Um dos pares descobriu, com facilidade, a medida da amplitude do ângulo que permitia ao ator construir o vértice do retângulo, mas mostrou dificuldade em compreender em que sentido tinham de o fazer girar, se no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio ou se no mesmo sentido dos ponteiros do relógio. Nesta situação, os dois alunos assumiram a posição do ator, representando o percurso programado com movimentos do corpo. Assim, descobriram que tinham de girar o ator sempre no mesmo sentido, o que não estavam a fazer inicialmente (figura 5).

Figura 5. Exemplo de projeto Scratch com erro na rotação



Ao longo desta etapa do trabalho, surgiram outros obstáculos relacionados com erros no cálculo do número de passos. Por um lado, sendo um quadriculado em que o lado da quadrícula corresponde a 30 passos, era importante que realizassem esse raciocínio multiplicativo para a correspondência com a unidade de medida de área do quadriculado. Por outro lado, era necessário introduzir um número de passos que permitisse construir um retângulo com 20 u.c. de perímetro. Estes erros foram descobertos pelos pares quando, após a construção da figura, iam verificar o seu perímetro (figura 6).

Figura 6. Exemplo de projeto Scratch com retângulo que não tinha 20 cm de perímetro

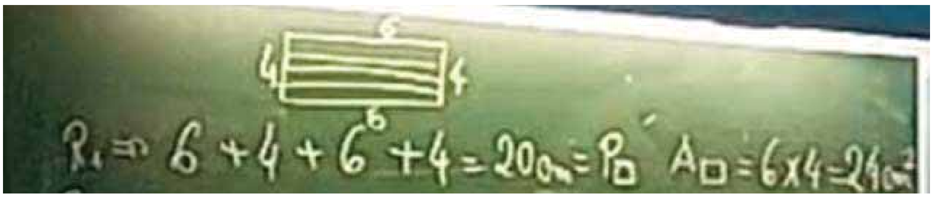
Após todos os alunos terem concluído as etapas A e B, foi-lhes pedido que fizessem uma captura de ecrã dos retângulos desenhados no Scratch e colocassem no Microsoft Teams®, para que ficassem acessíveis a todos e se pudesse, em coletivo, explorar o trabalho de cada par.

Discussão com toda a turma e síntese de ideias chave

A discussão coletiva partiu da observação dos retângulos publicados no Microsoft Teams®. A professora pediu aos alunos que identificassem, de entre os retângulos construídos, os que eram diferentes. À medida que os alunos iam dizendo, a professora registava no quadro e pedia ao par respetivo para indicar a medida do comprimento dos lados e explicar como tinham determinado o perímetro e a área.

Num dos retângulos apresentados (figura 7), quando a professora pediu aos alunos para explicarem como tinham calculado a área, a multiplicação retangular surgiu como uma estratégia eficaz.

Figura 7. Registo no quadro da análise do retângulo com 20 cm de perímetro e 24 cm² de área



A1 – Contámos os quadradinhos.

Prof. – Mas contaram os quadradinhos todos?

A1 – Não, contámos na vertical e na horizontal.

Prof. – E depois o que fizeram?

A1 – Depois fizemos a multiplicação retangular.

Prof. – Então e se não tivermos quadrados para contar, como fazemos para calcular a área?

A2 – Mediamos os lados.

Prof. – E depois?

A2 – Fazemos o mesmo, multiplicamos o lado maior e o lado menor.

Os alunos não conheciam formalmente o cálculo da área. Através da multiplicação retangular reconheceram que o valor do comprimento de cada lado correspondia ao número de quadrados. Como cada quadrado correspondia a uma unidade de medida de área, para determinar a área podiam multiplicar as medidas de cada lado, generalizando assim a fórmula de cálculo da área do retângulo.

A dada altura, a propósito da apresentação de um retângulo em que todos os lados tinham o mesmo comprimento, a professora chamou a atenção dos alunos, que rapidamente o identificaram como uma situação especial (figura 8).

Figura 8. Registo no quadro do cálculo do perímetro e da área do quadrado com 5 cm de lado

A3 – Não, é um retângulo especial, tem os lados iguais.

Prof. – E qual é o nome deste retângulo especial?

A3 – Quadrado.

Prof. – Como calcularam a área do quadrado?

A3 – Contámos os quadradinhos.

Prof. – E agora que já viram uma forma mais eficaz, como fariam?

A4 – A área é 25.

Prof. – Mas como calculaste?

A4 – 5x5.

Prof. – Então fizeram lado vezes lado (lxl), é isso?

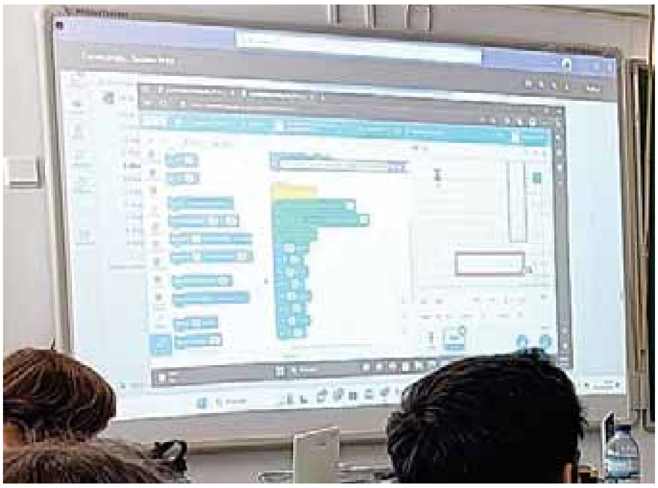
A3 e A4 – Sim.

Apoiada na descoberta do cálculo da área do quadrado a partir da experiência com os retângulos anteriores, realizada por alguns alunos, a professora sistematizou as ideias numa linguagem algébrica que passou a ser comum a todos. A situação permitiu que os alunos atribuíssem significado às letras para representar as quantidades em situações em que estas são desconhecidas, generalizando as expressões para o cálculo da medida da área do retângulo e do quadrado.

> *Prof. – No quadrado, como os lados têm o mesmo comprimento, podemos calcular a área fazendo [escreve no quadro lxl]. Nos outros retângulos calculamos o lado maior vezes o menor, ou podemos substituir por comprimento vezes largura [escreve no quadro cxl].*

A apresentação dos retângulos avançou. Após a identificação de um quinto retângulo, os alunos não encontravam mais nenhum retângulo diferente. A professora pediu-lhes que confirmassem, justificando, que apenas era possível representar cinco retângulos diferentes com 20 cm de perímetro em que o comprimento de lados é um número natural. Os alunos decidiram que seria importante voltar ao Microsoft Teams® para analisarem os retângulos publicados. A professora projetou os retângulos de todos os grupos e, em coletivo, analisaram-nos (figura 9). Os alunos tiveram oportunidade de observar a representação visual do retângulo no quadriculado e também o código referente a cada triângulo, analisando os blocos usados, a sua ordem, e também os valores introduzidos para o número de passos que permitem desenhar cada lado do retângulo.

Figura 9. Projeção na sala dos retângulos explorados



Na partilha do que tinham descoberto, identificaram situações em que tinham retângulos congruentes, argumentando que tinham as mesmas medidas, mas disposições diferentes.

> *Prof. – Então este retângulo não é diferente dos que estão no quadro?*
>
> *Turma – Não, é o quatro.*
>
> *Prof. – É o quatro? Têm a certeza?*
>
> *A5 – Sim, é a mesma coisa, mas a ordem da medida dos lados está trocada.*
>
> *Prof. – Não estou a perceber!*

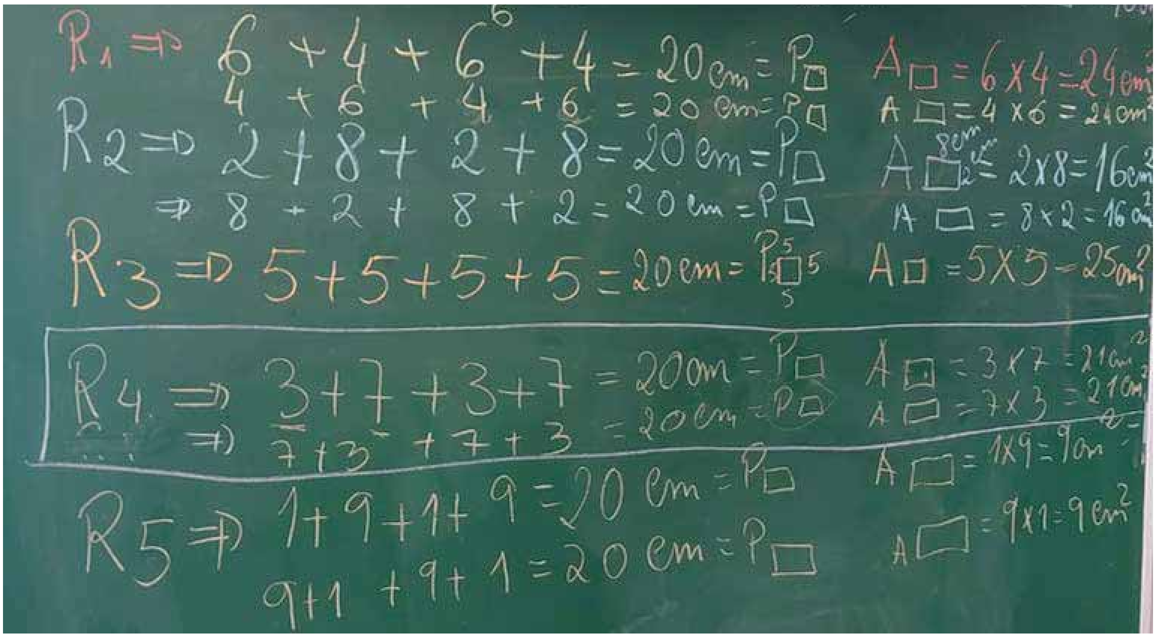
A professora, procurando argumentos válidos, focou a atenção em dois retângulos que tinham os lados com os mesmos comprimentos (figura 10). Nesta situação a ordem dos blocos e o número de passos é exatamente igual, tendo influência a direção com que o ator inicia o desenho.

Figura 10. Projeção na sala dos dois retângulos em discussão

A1 – É o mesmo, só que eles colocaram os bonecos em posições diferentes e por isso desenharam um na vertical e outro na horizontal.

A2 – E podemos fazer o mesmo com todos os outros (figura 11)*. Não há mais nenhum.*

Figura 11. Registo no quadro dos cinco retângulos diferentes construídos



Após a discussão do retângulo 4, e seguindo o mesmo raciocínio, foram reorganizar a medida dos lados dos diferentes retângulos, comutando o valor do comprimento das duas dimensões e assim identificando os retângulos que eram congruentes. É importante destacar a forma como os alunos mobilizaram o conhecimento que já tinham dos números e das operações com retângulos e das suas propriedades.

Posto isto, a professora pediu aos alunos que encontrassem uma justificação que validasse a conjetura que tinham acabado de fazer.

> *Prof. – Então como posso provar que estes são os únicos retângulos que existem com um perímetro de 20 cm?*
>
> *A6 – Porque são possíveis todos os amigos do dez.*
>
> *A1 – Porque o perímetro é 10+10, por isso podemos dizer o que a A6 disse.*
>
> *Prof. – Ok é uma boa justificação, alguém tem outra estratégia?*
>
> *A7 – Nós começámos pelo quadrado e depois fomos tirando nuns lados e acrescentando nos outros.*
>
> *A8 – Nós também, mas reparei agora que acabou por ser a mesma coisa que os amigos do 1o.*

Importa destacar as conexões que os alunos estabelecem entre as propriedades do retângulo e as estratégias de cálculo mental relacionadas com os amigos do 10. Os alunos usaram o facto do retângulo ter os lados com comprimentos iguais dois a dois para reduzir a análise do perímetro igual a 20 a uma situação em que têm de pensar em dois pares de números naturais cuja soma é 10, que correspondem à medida do comprimento dos lados adjacentes. Neste momento de discussão coletiva é evidente a forma como os argumentos de alguns alunos vão sendo retomados por outros, que os estendem, descobrindo novas relações. Finalizada esta etapa, os alunos sistematizaram as descobertas:

> *A8 – Nós concluímos que o perímetro dos retângulos é igual, mas a área de cada um é diferente.*
>
> *Prof. – Ok, mais.*
>
> *A2 – O retângulo com maior área é o quadrado.*
>
> *A6 – Com 20 cm de perímetro só conseguimos construir 5 retângulos diferentes e que os lados tem a medida dos amigos do 10 (5+5+5+5; 6+4+6+4; 7+3+7+3;8+2+8+2; 9+1+9+1).*

Os alunos observaram que retângulos com o mesmo perímetro podem ter áreas diferentes; o quadrado é sempre o retângulo com a maior área; e que recorrendo aos amigos do 10 percorrem todas as possibilidades para as medidas de comprimento dos lados, provando que só existem cinco retângulos com perímetro 20. Essas conclusões enunciadas pelos alunos foram registadas pela professora no quadro e cada um dos alunos fez o respetivo registo no seu caderno.

Reflexão final: Síntese das aprendizagens realizadas

Realiza-se em seguida uma reflexão global sobre o contributo da tarefa Construindo retângulos no Scratch para as aprendizagens essenciais previstas relativamente a conteúdos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais.

Conteúdos matemáticos

A tarefa permitiu reforçar a hierarquia entre o quadrado e o retângulo. Os alunos identificaram como construção possível o quadrado com perímetro 20 como caso particular do retângulo de perímetro 20. Além disso, permitiu reforçar a compreensão das características dos retângulos no que respeita aos ângulos retos e aos lados paralelos dois a dois, obtendo lados opostos iguais. O facto de se fixar o valor do perímetro permitiu que os alunos encontrassem diversas estratégias para descobrir todos os retângulos possíveis, estabelecendo conexões com o seu conhecimento dos números. O trabalho nesta proposta em torno do cálculo da medida da área do retângulo, a partir do uso de um quadriculado, em que cada quadrícula corresponde a uma unidade de medida de área, permitiu estabelecer a relação com a contagem estruturada do número de unidades que permitem cobrir toda a superfície do retângulo. Os alunos reconheceram ainda o cálculo da medida da área do retângulo como uma multiplicação que associaram à disposição retangular. A partir da generalização para o cálculo da medida da área do retângulo e do reconhecimento do caso particular do quadrado, generalizaram a expressão para o cálculo da medida da área do quadrado. Assim, em estreita articulação com o tema Álgebra, foi promovido o uso de representações múltiplas, em particular com o uso da letra para representar quantidades desconhecidas, e assim generalizar o cálculo da medida da área de retângulos e de quadrados. O contexto permitiu que os alunos dessem significado às letras que foram escolhidas pela professora de modo a facilitar a sua identificação. A professora reforçou esse significado, tanto no caso do retângulo, como no caso particular do quadrado.

Capacidades matemáticas transversais

Uma das capacidades matemáticas transversais abordada nesta tarefa é o pensamento computacional. Os alunos identificam a informação essencial do problema tanto no enunciado como no projeto Scratch facultado. A prática de decomposição do problema é aqui evidenciada. Alguns alunos começam por se centrar na construção de um retângulo e depois em outro. Outros identificam logo medidas para a construção dos dois retângulos, sendo que para encontrarem soluções definem uma etapa de menor complexidade: descobrir medidas para dois lados adjacentes dos retângulos cuja soma dê 10. A tarefa promoveu outras práticas como a identificação de padrões, a algoritmia e a depuração. A utilização do Scratch tem a vantagem de permitir testar o código e verificar a sua adequação. Os procedimentos passo a passo tinham de ser executados de modo correto, para que o desenho obtido fosse um retângulo que cumprisse as condições dadas. A tarefa fomentou a utilização de representações múltiplas para apoiar a compreensão, a expressão de ideias e processos matemáticos por parte dos alunos. A representação visual recorrendo à tecnologia facilitou a comparação de soluções e a aferição de características. Os alunos concluíram sobre a congruência de retângulos em diferentes posições a partir dessas representações. Também a representação em tabela e a listagem de todos os retângulos descobertos apoiou a formulação e testagem de conjeturas. Os alunos conseguiram representar de diferentes modos o cálculo da medida da área do retângulo, em particular em linguagem algébrica, que potenciou o surgimento de conexões internas que reforçaram a sua compreensão. Em diversos momentos, quer em trabalho autónomo, quer em discussão coletiva, a tarefa fomentou a comunicação matemática dos alunos, tanto oral como escrita. Também foi evidente o contributo de ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada para a compreensão dos alunos sobre as ideias matemáticas propostas na tarefa. Os alunos deram sentido às estratégias e justificações apresentadas por outros, confrontando-as com as suas estratégias e assim estabelecendo mais relações.

Capacidades e atitudes gerais transversais

Esta tarefa promoveu o trabalho colaborativo entre os alunos, durante o seu trabalho autónomo, quando procuravam as medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos de modo a obterem um perímetro de 20, bem como nos momentos de discussão coletiva, em que colaboraram para verificar se tinha conseguido na turma listar todos os retângulos possíveis. Assim, em conjunto averiguaram se na turma tinham descoberto todos os retângulos possíveis. O primeiro desafio que foi lançado aos alunos, de construírem o código no Scratch para dois atores em que cada um tinha de desenhar um retângulo diferente com as condições indicadas, um perímetro de 20 unidades de comprimento, valorizou as suas ideias e os processos matemáticos por si desenvolvidos. O momento de partilha aquando da discussão coletiva reforçou essa valorização, permitindo que todos contribuíssem para uma conclusão coletiva sobre os retângulos que eram possíveis de desenhar, sendo as medidas dos lados número naturais. A tarefa promoveu também a autorregulação e a perseverança.

Ao ser usado um ambiente de programação por blocos, os alunos tiveram oportunidade de analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las. Puderam testar o seu código e corrigir os erros no caso de não obterem as figuras que satisfizessem as condições dadas. O contexto proporcionado também se mostrou vantajoso para promover a persistência na resolução da tarefa e para os alunos não desistirem até encontrarem pelo menos dois dos retângulos possíveis.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7–35.

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). As representações: Escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, *166*, 19–24.

Bonotto, C. (2001). How to Connect School Mathematics with Students' Out-of-School Knowledge, *ZDM*, *33*(3), 75–84.

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, *144-145*, 38–42.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Canavarro, A. P., & Vicente, M. (2009). A experimentação do novo Programa de Matemática: Reportagem numa turma do 3.º ano em Évora. *Educação e Matemática*, *109*, 30–36.

Casa, T. M., Firmender, J. M., Cahill, J., Cardetti, F., Choppin, J. M., Cohen, J., … Zawodniak, R. (2016). *Types of and purposes for elementary mathematical writing: Task force recommendations*. http://mathwriting.education.uconn.edu

Coordenação do Projeto REASON (2022). Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 100–107). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Delgado, C., Mendes, F., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Números.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Espadeiro, R. G. (2021). O pensamento computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, *110*, 19–25.

Goldin, G. A. (2018). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer.

Hardin, J. S., & Horton, N. J. (2017). Ensuring that mathematics is relevant in a world of data science. *Notices of the American Mathematical Society*, *64*(9), 986–990. https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p986.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). *Revisiting programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium* (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!": Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática, 149-150*, 76–80.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes modos de utilização do GeoGebra na resolução de problemas de Matemática para além da sala de aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 266–288.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Martins, O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, V., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. ME-DGE.

Mendes, F., Delgado, C., & Mata-Pereira, J. (2022). *Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Geometria*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Menezes, L., & Ferreira, F. (2018). Humor no ensino da matemática: Oportunidades para a aprendizagem. *Educação e Matemática, 149-150*, 53–59.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R. A., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135–164). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mestre, C. (2018). A importância das discussões coletivas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação e Matemática, 149–150*, 23–27.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM, 53*(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

OECD (2018). *PISA 2021 Mathematics framework* (Draft) https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Oliveira, H., & Henriques, A. (2022). Aprofundar o conhecimento sobre o raciocínio matemático na formação inicial de professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 86-101). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Pereira, S. (2021). *Organização e tratamento de dados na educação pré-escolar e no 3.º ano de escolaridade*. [Relatório de Estágio de Mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. https://hdl.handle.net/1822/77939

Pierce, R., & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38*(3), 214–225.

Pinto, M. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade.* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Évora]. Repositório da Universidade de Évora. https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/18507

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 419–430.

Ponte, J. P. (2022). Introdução. In J. P. Ponte (Org.), *Raciocínio matemático e formação de professores* (pp. 6-8). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7-11.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. MEC-DGIDC.

Reis, S. (2011). *Atitudes e emoções de alunos do 4.º ano perante desafios matemáticos*. [Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve]. https://sapientia.ualg.pt/entities/publication/0327d640-1ca7-4efd-a491-08a17524b2b9

Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: An experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments, 28*(3), 316–327. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1612448

Sáez-López, J. M., Sevillano-García, M. L., & Vazquez-Cano, E. (2019). The effect of programming on primary school students' mathematical and scientific understanding: Educational use of mBot. *Educational Technology Research and Development*, *67*(6), 1405–1425. https://doi.org/10.1007/ s11423-019-09648-5.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de Matemática? In C. Lopes, & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11–34). Mercado Letras.

Seehorn, D., Carey, S., Fuschetto, B., Lee, I., Moix, D., O'Grady-Cunniff, D., Owens, B., Stephenson, C., & Verno, A. (2011). *CSTA K--12 Computer Science Standards: Revised 2011*. ACM.

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática, 149–150*, 13–16.

Stein, M. K., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 165*, 22–28.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16. http://www.jstor.org/stable/40248592

Tomás Ferreira, R. A. (2018). Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem. *Educação e Matemática, 149–150*, 1.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438–445.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). O contributo de uma *gallery walk* para promover a comunicação matemática. *Educação e Matemática, 149-150*, 2–8.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39-60.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35.

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L., & Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: A systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education, 10*(3). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w