GEOMETRIA ANALÍTICA

Matemática A
10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:
Coletânea de tarefas das turmas piloto - Geometria analítica (Matemática A 10.º ano)

Autoria e adaptação:
Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:
Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:
Lisboa, julho de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - GEOMETRIA ANALÍTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	• Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 Pontos transformados	**Geometria analítica no plano** Coordenadas de pontos num referencial cartesiano	• Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano, ortogonal e monométrico. • Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas transformados de pontos por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia volta de centro na origem.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas • Raciocínio e lógica matemática	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)
1	Tarefa 2 Retas e equações	**Geometria analítica no plano** Retas horizontais e retas verticais e semiplanos	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem equações de retas verticais e não verticais, semiplanos e outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções de condições, em casos simples.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas, equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 3 Pontos no espaço	**Geometria analítica no espaço** Referenciais cartesianos no espaço e coordenadas de pontos	• Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial ortogonal e monométrico.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)

1	Tarefa 4 Pontos, retas e planos… no espaço	**Geometria analítica no espaço** Referenciais cartesianos no espaço e coordenadas de pontos	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem planos paralelos aos planos coordenados e retas paralelas a um dos eixos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)
1	Tarefa 5 A meio caminho	**Geometria analítica no plano** Ponto médio de um segmento de reta **Geometria analítica no espaço** Ponto médio de um segmento de reta	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 6 Calcular distâncias	**Geometria analítica no plano** Distância entre dois pontos **Geometria analítica no espaço** Distância entre dois pontos	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a fórmula da distância entre dois pontos.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)

1	Tarefa 7 Dividir com a mediatriz	**Geometria analítica no plano** Mediatriz	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem a mediatriz de um segmento de reta.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos	• Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos(I)
1	Tarefa 8 Plano mediador e interseção com os eixos	**Geometria analítica no espaço** Plano mediador	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem planos mediadores de um segmento de reta.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 9 Circunferência e círculo	**Geometria analítica no plano** Circunferência e círculo	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem a circunferência e o círculo.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 10 Superfície esférica e esfera	**Geometria analítica no espaço** Superfície esférica e esfera	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem a superfície esférica e a esfera.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

1	Tarefa 11 Conjuntos de pontos e condições	**Geometria analítica no plano** Conjuntos de pontos e condições	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos definidos por conjunções e disjunções, em casos simples.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 12 Translações de pontos	**Vetores no plano e no espaço**	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas propriedades algébricas das operações com vetores.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 13 Pontos, vetores e coordenadas	**Vetores no plano e no espaço** Coordenadas de um vetor num referencial ortonormado	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - norma de um vetor; - coordenadas de um vetor; - coordenadas da soma e da diferença de vetores; - coordenadas do produto de um escalar por um vetor e do simétrico de um vetor.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 14 Soma de um ponto com um vetor	**Vetores no plano e no espaço** Vetor como diferença de dois pontos	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - vetor definido por dois pontos e cálculo das respetivas coordenadas; - coordenadas do ponto resultante da soma de um ponto com um vetor.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

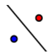
1	Tarefa 15 Vetores alinhados	**Vetores no plano e no espaço** Colinearidade de dois vetores	• Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a relação entre as coordenadas de vetores colineares.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 16 Equação vetorial da reta	**Vetores no plano e no espaço** Equação vetorial da reta no plano e no espaço Equação reduzida da reta no plano	• Reconhecer que uma reta fica definida se for conhecido um ponto da reta e um vetor diretor. • Escrever uma equação vetorial de uma reta. • Estabelecer a relação entre: - as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta. - paralelismo de retas, igualdade do declive e colinearidade de vetores diretores das retas; - equação reduzida e equação vetorial de uma reta.	Trabalho a pares ou em grupo, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Tarefa 1

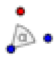
Pontos transformados

1.

1.1. Acede ao link referencial no plano e escreve as coordenadas dos pontos A, B, C e D aí representados.

1.2. Utilizando a ferramenta  obtém os transformados dos pontos A, B, C e D pela reflexão de eixo vertical Oy e escreve as coordenadas desses transformados.

1.3. Qual é a relação que existe entre as coordenadas de um ponto e as coordenadas do seu transformado pela reflexão de eixo Ox ?

1.4. Utilizando a ferramenta  obtém o transformado do ponto A pela meia volta de centro na origem (rotação de 180º de centro O).

1.5. Preenche a tabela, escrevendo as coordenadas dos transformados de A, B, C e D pela transformação indicada em cada coluna da tabela.

	Reflexão de eixo Ox	Reflexão de eixo Oy	Meia volta de centro na origem
A			
B			
C			
D			

1.6. Estabelece uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(a,\ b)$ e as coordenadas do seu transformado:

- pela reflexão de eixo Ox;
- pela reflexão de eixo Oy;
- pela meia volta de centro na origem.

2. Acede ao link simetrias do hexágono.

2.1. Desloca o hexágono arrastando o ponto O e movendo o ponto A, de forma a que este tenha, simultaneamente, simetria de reflexão de eixo Ox e simetria de de reflexão de eixo Oy.

2.1.1. Escreve, para a posição escolhida, as coordenadas dos pontos A e B e as respetivas coordenadas dos seus transformados pela reflexão de eixo Ox.

2.1.2. Escreve, para a posição escolhida, as coordenadas dos pontos E e D e as respetivas coordenadas dos seus transformados pela reflexão de eixo Oy.

2.2. Desloca o hexágono arrastando o ponto O e movendo o ponto A, de forma a que o ponto B seja o transformado do ponto C pela reflexão de eixo Ox.
Fotografa ou desenha o hexágono na posição pretendida.

2.3. Desloca o hexágono de modo que o ponto O coincida com a origem do referencial e o ponto A tenha coordenadas $(2, 0)$.
Considera a reflexão do hexágono de eixo BC e escreve as coordenadas de todos os vértices do hexágono obtido.

Tarefa 1

Pontos transformados

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa pretende introduzir o estudo do tema Geometria Analítica, estabelecendo relações entre conceitos já estudados pelos alunos. No Ensino Básico, tal como durante o estudo de funções, os alunos já devem estar familiarizados com a definição de pontos através das suas coordenadas. Da mesma forma, foi também desenvolvido o estudo de isometrias, pelo que o objetivo da tarefa é estabelecer uma relação entre estes dois conceitos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Isometrias e coordenadas de pontos no plano.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou ao GeoGebra.

Notas e sugestões:

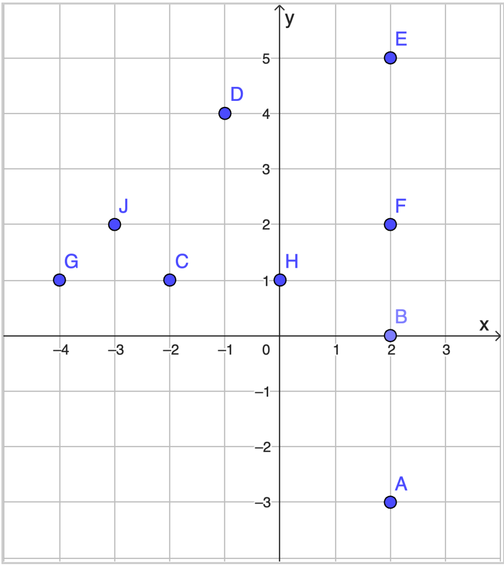
Como se trata de introduzir o estudo da Geometria Analítica, o papel da definição algébrica de pontos através das suas coordenadas deve ser central no diálogo com os alunos.

Pode ser oportuno identificar pontos de contacto com o estudo das isometrias já realizado ao longo do Ensino Básico.

Tarefa 2

Retas e equações

1. Na figura, estão representados, em referencial ortogonal e monométrico, alguns pontos.



1.1.

1.1.1. Quais são os pontos do plano que verificam a condição $x = 2$?

1.1.2. Representa no referencial dois outros pontos que verificam a mesma condição, um com ordenada positiva e outro com ordenada negativa.

1.1.3. Representa geometricamente o conjunto dos pontos do plano que, neste referencial, verificam a condição $x = 2$.

1.1.4. O ponto de coordenadas $(1, 3)$ pertence ao conjunto de pontos definido pela equação $x = 2$? Justifica a tua resposta.

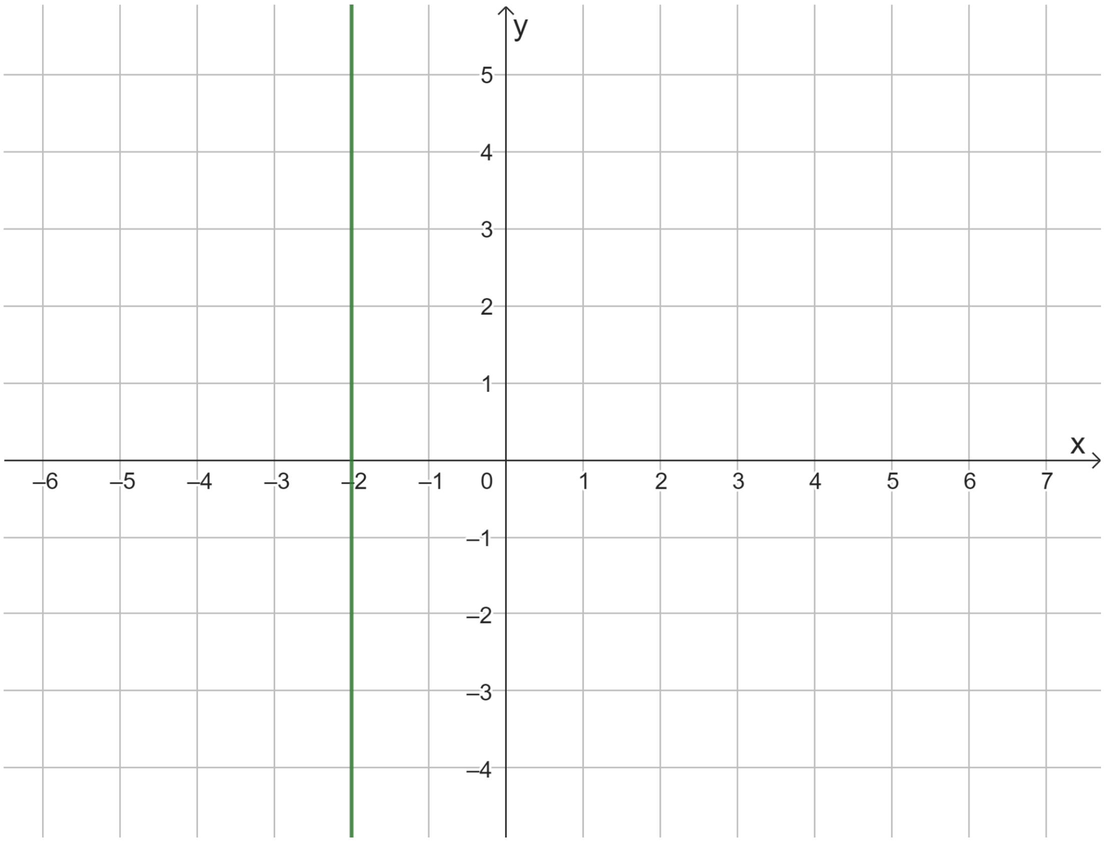
1.1.5. Qual será o valor de a para que o ponto de coordenadas $(a, 5000)$ pertença ao conjunto de pontos definido pela equação $x = 2$?

1.2. Representa a reta que contém os pontos C, G e H e escreve uma equação dessa reta.

1.3. Escreve uma equação que defina a reta FJ.

1.4. Representa no referencial as retas r e s definidas, respetivamente, pelas equações $x = -1$ e $y = 3$. Qual é a interseção das duas retas?

2. No referencial seguinte, está representada a reta r de equação $x = -2$. Esta reta, como qualquer outra, divide o plano em dois semiplanos.



2.1. Representa neste referencial cinco pontos cuja abcissa seja inferior a -2.

2.2. Destaca a sombreado a região do plano em que todos os pontos têm abcissa inferior a -2.

2.3. Escreve uma condição que defina a região sombreada. Abre um ficheiro no GeoGebra e verifica a tua resposta, escrevendo na Folha Algébrica essa condição.

2.4. Acede ao link semiplano e representa, em cada referencial, o semiplano definido pela respetiva condição.

2.4.1. $x > 1$

2.4.2. $x \geq 1$

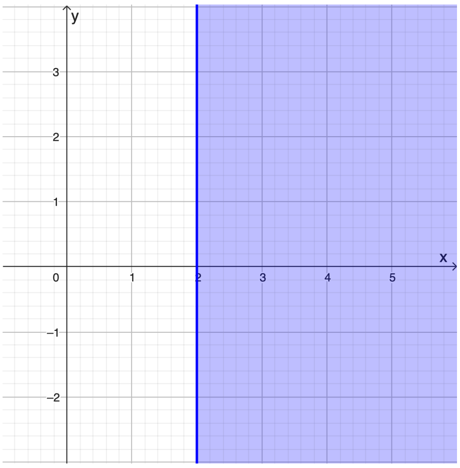
2.4.3. $y < -2$

2.4.4. $y \leq -2$

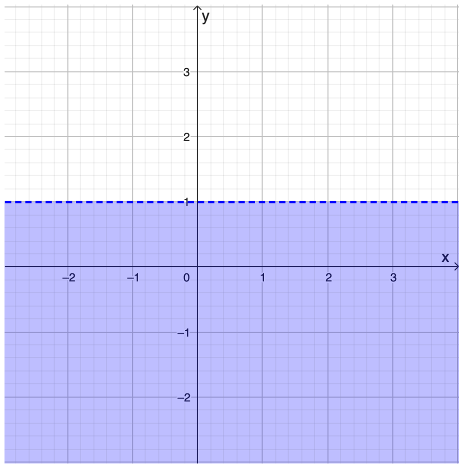
2.4.5. $x > 3$

2.5. Qual é a diferença que observas entre a representação do semiplano definido pela condição $x \geq 1$ e $x > 1$? Explica a razão dessa diferença.

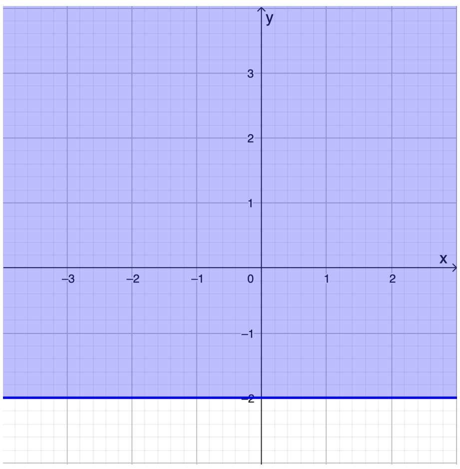
3. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, em referencial ortogonal e monométrico Oxy, um semiplano destacado a sombreado.
Escreve, para cada figura, uma condição que define o semiplano representado.



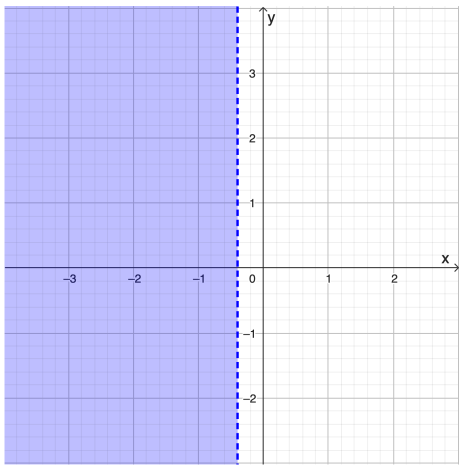
Condição: ________________



Condição: ________________



Condição: ________________



Condição: ________________

Tarefa 2

Retas e equações

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com o conceito de lugar geométrico, em particular, com a identificação do conjunto de pontos do plano que verificam uma condição algébrica. A definição de uma reta (ou de um semiplano) por uma condição algébrica deve ser acompanhada pela verificação geométrica de que os pontos que pertencem a essa reta (ou a esse semiplano) têm coordenadas que verificam a condição. O GeoGebra proporciona um ambiente propício a fazer experiências e verificações, pelo que se propõe que os alunos possam, de forma autónoma, fazer experiências e verificações das suas conjeturas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou ao GeoGebra.

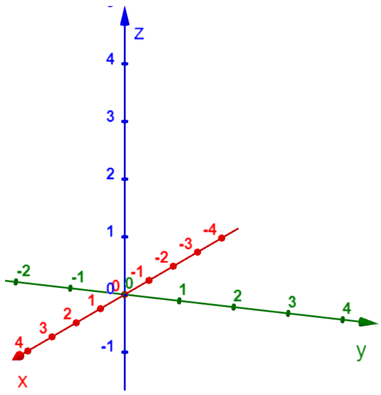
Notas e sugestões:
Considerando o GeoGebra uma ferramenta essencial para testar as conjeturas que os alunos fizerem, pode ser necessário esclarecer algumas questões técnicas, como o acesso às desigualdades através do teclado virtual do GeoGebra para definir semiplanos.
No diálogo com os alunos, na definição das retas e dos semiplanos por uma condição, pode-se solicitar em linguagem natural a propriedade comum a todos os pontos dos lugares geométricos e em seguida, conduzi-los na passagem para a linguagem matemática.

Tarefa 3

Pontos no espaço

1. À semelhança do que se passa na geometria no plano, também na geometria no espaço, se considerarmos um referencial, podemos identificar pontos através das suas coordenadas. No entanto, num referencial no espaço, para cada ponto, é necessária mais uma coordenada do que no plano.
Por exemplo, se considerarmos um ponto P qualquer e se o quisermos localizar num referencial no espaço, ele será definido por três coordenadas $P(x, y, z)$, cada uma relativa a um eixo distinto: eixo das abcissas, Ox, eixo das ordenadas, Oy, e eixo das cotas, Oz.

Sistema de eixos coordenados no espaço



1.1. Considera um referencial no espaço, orientado como o da figura anterior, imaginando a seguinte orientação:
   - o eixo Ox está orientado de trás para a frente;
   - o eixo Oy está orientado da esquerda para a direita;
   - o eixo Oz está orientado de baixo para cima.

   Queremos colocar três pontos nesse referencial.
   Quais são as coordenadas desses pontos, seguindo as seguintes instruções?
   Ponto A: Partindo da origem do referencial, anda 3 unidades para a frente, 2 para a direita e 4 para cima
   Ponto B: Partindo da origem do referencial, anda 3 unidades para trás, 2 para a esquerda e 4 para cima
   Ponto C: Partindo da origem do referencial, anda 2 unidades para a frente, 2 para a esquerda e 2 para baixo.

1.2. Abre o Geogebra na vista 3D, e na Folha Algébrica escreve as coordenadas dos pontos A, B e C que escreveste no item anterior. Roda a folha 3D de modo a mudar o ângulo de visualização do referencial e observa se os pontos estão representados de acordo com as instruções consideradas.

2. Abre o Geogebra na vista 3D.

2.1. Na Folha Algébrica escreve $x = 0$. Como podes observar esta equação representa um plano. Quais são os eixos coordenados que estão contidos neste plano?

2.2. E se na Folha Algébrica colocares $y = 0$? Quais os eixos coordenados que estão contidos neste plano?

2.3. E se escreveres $z = 0$? Quais são os eixos coordenados que estão contidos neste plano?

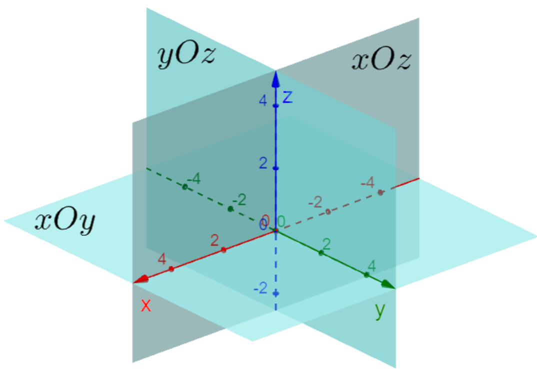
Planos coordenados

A estes três planos chamamos planos coordenados:

- Ao plano de equação $z = 0$, chamamos plano xOy
- Ao plano de equação $x = 0$, chamamos plano yOz
- Ao plano de equação $y = 0$, chamamos plano xOz

Octantes

Os planos coordenados dividem o espaço em oito regiões designadas por octantes.



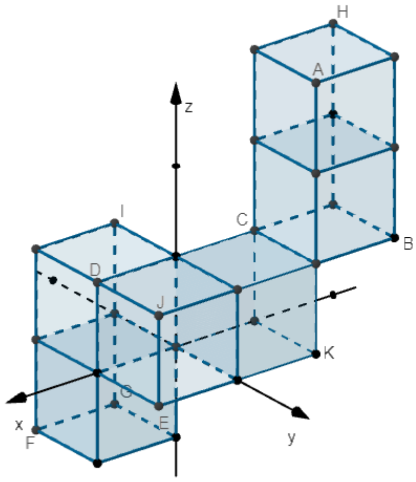
2.4. Escreve as coordenadas de dois pontos que pertençam ao:

2.4.1. plano xOy;

2.4.2. plano yOz;

2.4.3. eixo Ox.

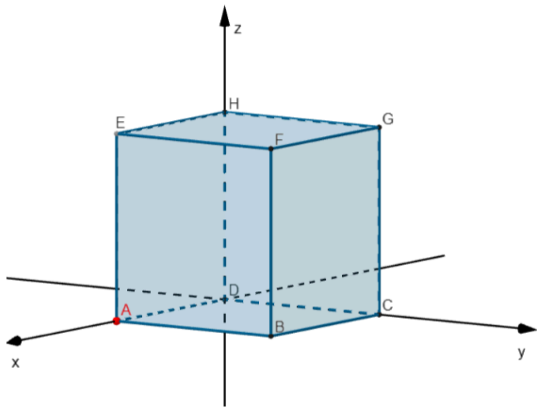
3. Na figura, num referencial $Oxyz$, estão representados seis cubos, cada um com aresta 2. Alguns vértices dos cubos estão assinalados com letras . Podes aceder a este link do Geogebra que te permitirá manipular a figura: https://www.geogebra.org/m/xvuzs4rq



3.1. Os pontos de coordenadas $(2,\ 2,\ 2)$, $(-\ 4,\ 2,\ 2)$ e $(2,\ 0,\ 2)$ correspondem a vértices assinalados. Escreve as letras dos vértices que lhes correspondem.

3.2. Escreve as coordenadas dos restantes vértices assinalados com letras.

4. Na figura, num referencial ortonormado $Oxyz$, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que as arestas são paralelas aos eixos coordenados e que $\overline{AB} = 4$. Podes aceder a este link do Geogebra que te permitirá manipular a figura: https://www.geogebra.org/m/spsjcfqv



4.1. Escreve as coordenadas dos vértices do cubo, sabendo que a origem do referencial coincide com o vértice D e a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy (como se apresenta na figura).

4.2. Escreve as coordenadas dos vértices do cubo, se:

4.2.1. a origem do referencial coincide com o vértice A e o ponto G tem coordenadas $(-\ 4, 4, 4)$;

4.2.2. a origem do referencial coincide com o vértice F e o ponto D tem coordenadas $(-\ 4, -\ 4, -\ 4)$.

Nota: Na apliqueta disponibilizada, podes arrastar o ponto A para posicionar o cubo de acordo com as instruções indicadas.

Tarefa 3

Pontos no espaço

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa pretende familiarizar os alunos com as coordenadas de pontos no espaço. Sendo, previsivelmente, o primeiro contacto dos alunos com um referencial cartesiano a três dimensões, deve ser valorizada a capacidade de visualização dos alunos e o estabelecimento da relação com a componente algébrica.
A terminologia característica dos referenciais no espaço deve ser introduzida de forma natural e sem assumir um papel central.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no plano.

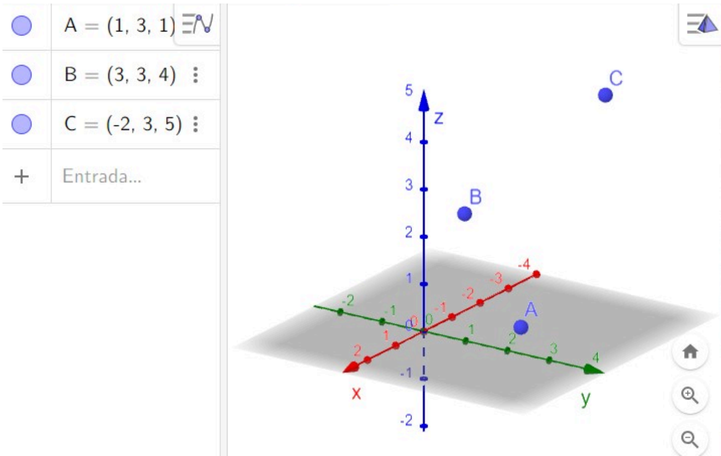
Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas e sugestões:
Sendo o GeoGebra um recurso indispensável pela representação algébrica e geométrica, que é fundamental neste contexto, o professor pode também recorrer a modelos tangíveis de referenciais, como modelos de cartão ou feitos a partir de palhinhas, ou paralelepípedos retângulos em que três arestas concorrentes são definidas como os eixos do referencial.
Podem ainda ser "invocados" outros modelos, para a visualização do referencial no espaço, como a mesa dos alunos, um dos cantos da sala, ou modelos "efémeros" construídos com as canetas dos alunos, para ilustrar "deslocações" paralelas aos eixos, ou exemplificar a posição de alguns pontos relativamente à origem do referencial.

Tarefa 4

Pontos, retas e planos… no espaço.

1. Abre o GeoGebra na vista 3D, representa na Folha Algébrica os pontos de coordenadas $(1, 3, 1)$, $(3, 3, 4)$ e $(-\ 2, 3, 5)$, e responde às seguintes questões :



   1.1. Identifica uma propriedade comum aos pontos marcados.

   1.2. Recorrendo à ferramenta  (plano por 3 pontos) obtém um plano que contém os três pontos marcados, e regista a equação que visualizas na Folha Algébrica.

   1.3. Se marcares um ponto qualquer sobre o plano definido, o que consegues prever sobre as suas coordenadas?

   1.4. Quais são as coordenadas do ponto de interseção do plano definido com o eixo Oy?

   1.5. Descreve a posição relativa do plano definido relativamente aos eixos coordenados (Ox, Oy e Oz) e aos planos coordenados (xOy, xOz e yOz).

2. Abre uma nova janela do GeoGebra, também na vista 3D, e escreve na Folha Algébrica a equação $z = k$.

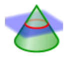
   2.1. Movimenta o seletor k e observa a representação geométrica do plano definido para cada valor de k.

   2.2. Define por uma equação o plano xOy.

   2.3. Descreve a posição relativa dos planos definidos por $z = k$ relativamente aos eixos coordenados (Ox, Oy e Oz) e aos planos coordenados (xOy, xOz e yOz).

   2.4. Consegues prever quais são as coordenadas do ponto de interseção do plano definido por $z = k$ com o eixo Oz?

3. Volta a abrir uma nova janela do GeoGebra, também na vista 3D, e escreve na Folha Algébrica os planos de equações $x = 2$ e $z = 4$.

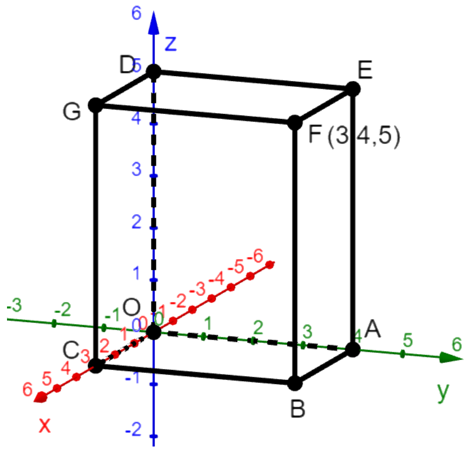
   3.1. Usa a ferramenta  (interseção de duas superfícies) para determinar a interseção dos dois planos.

   3.2. Escreve as coordenadas de um ponto pertencente à interseção dos dois planos.

   3.3. Descreve a posição relativa da reta de interseção dos dois planos relativamente aos eixos coordenados (Ox, Oy e Oz) e aos planos coordenados (xOy, xOz e yOz).

   3.4. Define por uma condição o eixo Ox.

4. No referencial $Oxyz$ da figura está representado um prisma retangular. Sabe-se que o vértice O coincide com a origem do referencial, a face $[OABC]$ pertence ao plano xOy e as coordenadas do vértice F são $(3, 4, 5)$. Escreve:



   4.1. as coordenadas dos vértices B, E e G;

   4.2. as equações dos planos paralelos aos planos coordenados que contêm o ponto F;

   4.3. uma condição que define o plano DEA;

   4.4. uma condição que define a reta que contém a aresta $[GC]$.

5. Define, num referencial $Oxyz$, por uma condição:

   5.1. o plano paralelo ao plano coordenado yOz e que contém o ponto de coordenadas $(-\ 2,\ 3, 4)$;

   5.2. o plano perpendicular ao eixo Ox e que contém o ponto $(-\ 2,\ 3, 4)$;

   5.3. a reta que é paralela ao eixo Ox e que contém o ponto de coordenadas $(-\ 2,\ 3, 4)$.

Tarefa 4

Pontos, retas e planos... no espaço.

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A comparação com o estudo já feito no plano, aliado às representações geométrica e algébrica proporcionada pelo GeoGebra 3D, permite que o estudo de equações de planos paralelos aos eixos seja realizado pelos alunos de forma colaborativa, proporcionando-lhes a possibilidade de estabelecerem e testarem conjeturas. Pretende-se, ainda, que os alunos compreendam que a interseção de dois planos deste tipo é uma reta igualmente paralela e perpendicular aos planos coordenados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos no espaço.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas e sugestões:

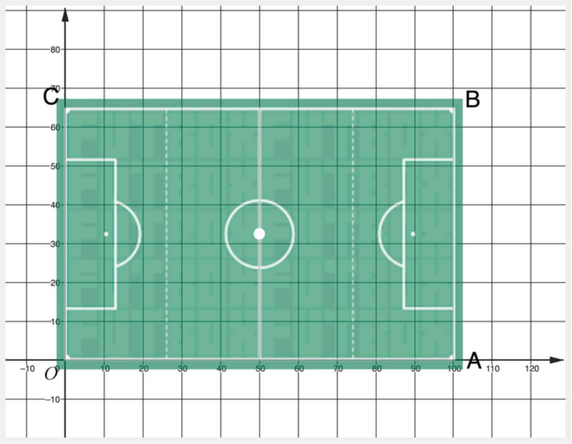
A tarefa foi preparada para ser aplicada numa fase em que o contacto dos alunos com referenciais no espaço ainda é uma novidade. Assim, para além do objetivo principal, continua a ser um objetivo familiarizar os alunos com pontos definidos por três coordenadas, bem como com o vocabulário específico deste tipo de referenciais.

Relativamente à representação algébrica das retas, que surge automaticamente no GeoGebra, será desejável gerir a curiosidade natural dos alunos, e não se recomenda a exploração da equação vetorial nesta fase.

Tarefa 5

A meio caminho

1. No referencial ortogonal e monométrico da figura, está representado um campo de futebol, com 100 metros de comprimento por 65 metros de largura.

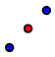


1.1. Escreve as coordenadas dos pontos A, B e C.

1.2. Quais são as coordenadas do ponto que representa o centro do campo de futebol, ponto médio do segmento de reta $[AC]$?

1.3. No início do jogo, a posição da jogadora Ana corresponde ao ponto médio do segmento de reta de extremos no ponto B e no centro do campo de futebol.
Representa o ponto que corresponde à posição da Ana e escreve as suas coordenadas.

2. Abre o ficheiro GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/vjazhbze.

2.1. Representa na folha gráfica 2D os pontos $A(1, 2)$ e $B(3, 8)$ e usa a ferramenta  para obteres o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ e as suas coordenadas.

2.2. Arrasta um dos pontos, A ou B, e observa os valores das coordenadas do ponto médio de $[AB]$.

2.2.1. Qual é a relação que identificas entre as coordenadas dos extremos de um segmento de reta e as coordenadas do seu ponto médio?

2.2.2. A relação que identificaste permite calcular as coordenadas do ponto médio, sabendo as coordenadas dos extremos? Se sim, explica como.

2.3. Usa a relação que descobriste para determinar as coordenadas dos pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, sabendo que as coordenadas de $A,\ B$ e C são, respetivamente, $(1, 1),\ (5,\ 4)$ e $(2, 7)$.

3. Abre outro ficheiro GeoGebra, agora numa folha 3D, e representa os pontos $P(1, 2, 1)$ e $Q(5, 4, 7)$. Usa novamente a ferramenta  para obter o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$.
A relação entre as coordenadas de $[PQ]$ e do seu ponto médio é a mesma que observaste no plano?

4. Determina, num referencial $Oxyz$, as coordenadas do ponto médio de $[AB]$ se:

4.1. $A(-\ 2, 2, 4)$ e $B(2, 2, 4)$

4.2. $A(2, -\ 2, 4)$ e $B(-\ 2, 2, 4)$

4.3. $A(3, 4, 7)$ e $B(5, 8, 3)$

5. Considera, num referencial $Oxyz$, os pontos $P(x_P,\ y_P, z_P)$ e $Q(x_Q,\ y_Q,\ z_Q)$. Escreve as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[PQ]$ em função das coordenadas dos pontos P e Q.

Tarefa 5

A meio caminho

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa pretende familiarizar os alunos com a determinação das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta a partir das coordenadas dos extremos do segmento de reta. Os alunos devem fazer a construção do ponto médio a partir de dois pontos, e visualizar a representação algébrica dos pontos para inferir a relação. Após a escrita da relação para dois pontos do plano, os alunos devem conseguir fazer a extrapolação da relação algébrica para dois pontos do espaço.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos do plano e do espaço.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas e sugestões:
Os alunos devem ser incentivados a fazer várias experiências com os pontos que definem o segmento de reta, nomeadamente, analisando situações com coordenadas negativas ou não inteiras, para testarem a universalidade da relação encontrada e compreenderem a necessidade de criticar a obtenção de valores aproximados quando se trabalha com tecnologia.

Tarefa 6

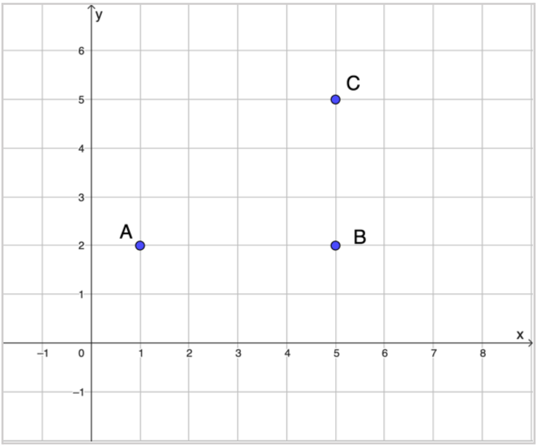
Calcular distâncias

1. No referencial ortogonal e monométrico Oxy, estão representados três pontos, $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ e $C(5, 5)$.

   1.1. Qual é a distância de A a B? E a distância de B a C ?

   1.2. Calcula a distância de A a C, ou seja, $\overline{AC}$.

   Sugestão: Observa que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B.



2. Na figura estão representados, em referencial ortogonal e monométrico, os pontos A e B.

   2.1. Acede à apliqueta [distância entre dois pontos](), altera a posição dos pontos A e B, e explica como se pode calcular a distância entre eles.

   2.2. Explica o significado de:

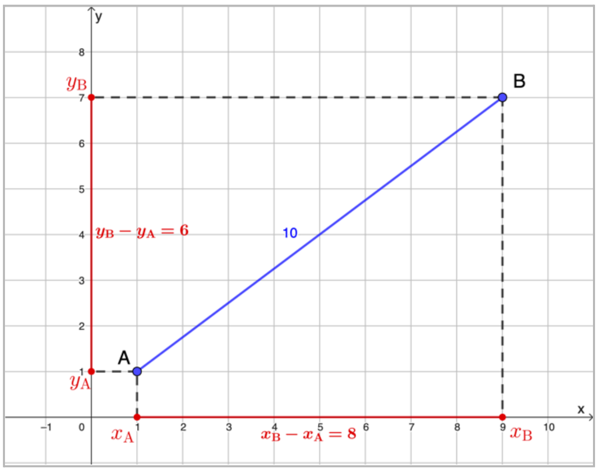
   - $x_B - x_A$
   - $y_B - y_A$

   2.3. Justifica que

   $$\overline{AB}^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$$

   e conclui que

   $$\overline{AB} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$



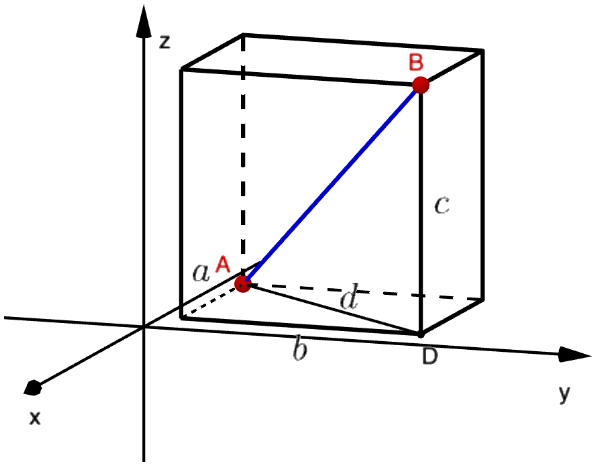
Distância entre dois pontos no plano.

Dados dois pontos do plano, A e B, que num referencial ortogonal e monométrico têm coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), a distância de A a B é dada por

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2}$$

3. A fórmula da distância entre dois pontos do plano pode ser “estendida” para o espaço.

Na figura, está representado, em referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, um paralelepípedo reto de faces paralelas aos planos coordenados.



Sabe-se que o segmento de reta $[AB]$ é uma diagonal espacial do paralelepípedo, e as dimensões do paralelepípedo, como representado na figura, são $a,\ b$ e c.
Se quiseres, podes ver o paralelepípedo em diferentes perspectivas, clicando aqui.

3.1. Determina o comprimento da diagonal $[AB]$ em função de $a,\ b$ e c.

Sugestões:

I. começa por justificar que o triângulo $[ADB]$ é retângulo em D;

II. determina $\overline{AB}$ em função de c e de d, sendo $d = \overline{AD}$;

III. escreve d^2 em função de a e de b;

IV. substitui, na expressão obtida no ponto II., d^2 pela expressão obtida em III.

3.2. Escreve os valores de a, b e c se as coordenadas do ponto A e do ponto B forem, respetivamente, $(1, 2, 1)$ e $(4, 6, 6)$, e determina a distância de A a B.

3.3. Escreve a, b e c em função das coordenadas dos pontos $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ e $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ e obtém uma expressão para a distância de A a B, ou seja, para o comprimento da diagonal $[AB]$ do paralelepípedo, em função das coordenadas dos pontos A e B.

4. Considera num referencial o.m. $Oxyz$, os pontos $P(-1, 3, -1)$, $Q(1, -1, 2)$ e $P(0, 0, 6)$.

Utiliza a expressão obtida em 3.3. para determinar $\overline{PQ},\ \overline{QR}$ e $\overline{RP}$.

Abre o GeoGebra 3D representa os pontos e verifica se os valores que obtiveste coincidem com os valores obtidos no Geogebra.

Tarefa 6

Calcular distâncias

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se com esta tarefa que os alunos conheçam a fórmula da distância entre dois pontos do plano e do espaço. Antes da formalização de uma expressão geral para a distância em função das coordenadas dos pontos, os alunos devem considerar pontos auxiliares com coordenadas em comum com os pontos dados para determinar, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, a distância pretendida. Neste processo, deve ficar claro que as medidas dos comprimentos dos catetos em cada triângulo correspondem à diferença das abcissas, das ordenadas ou das cotas dos dois pontos considerados. Pretende-se assim, que os alunos desempenhem um papel ativo no estabelecimento da fórmula e que, consequentemente, tenham sobre ela uma maior compreensão.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos do plano e do espaço. Teorema de Pitágoras.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas e sugestões:

Durante o trabalho autónomo e na discussão final, os alunos devem ser convidados a analisar e a justificar que o cálculo do valor da distância fica invariante, quando se altera a ordem das coordenadas dos pontos.

Tarefa 7

Dividir com a mediatriz

1. Considera, num referencial Oxy, os pontos $A(1, 4)$ e $B(5, 2)$.

1.1. Qual(quais) do(s) seguinte(s) pontos é(são) equidistante(s) dos pontos A e B ?

1.1.1. $D(4, 6)$

1.1.2. $E(1, -1)$

1.1.3. $E(0, -3)$

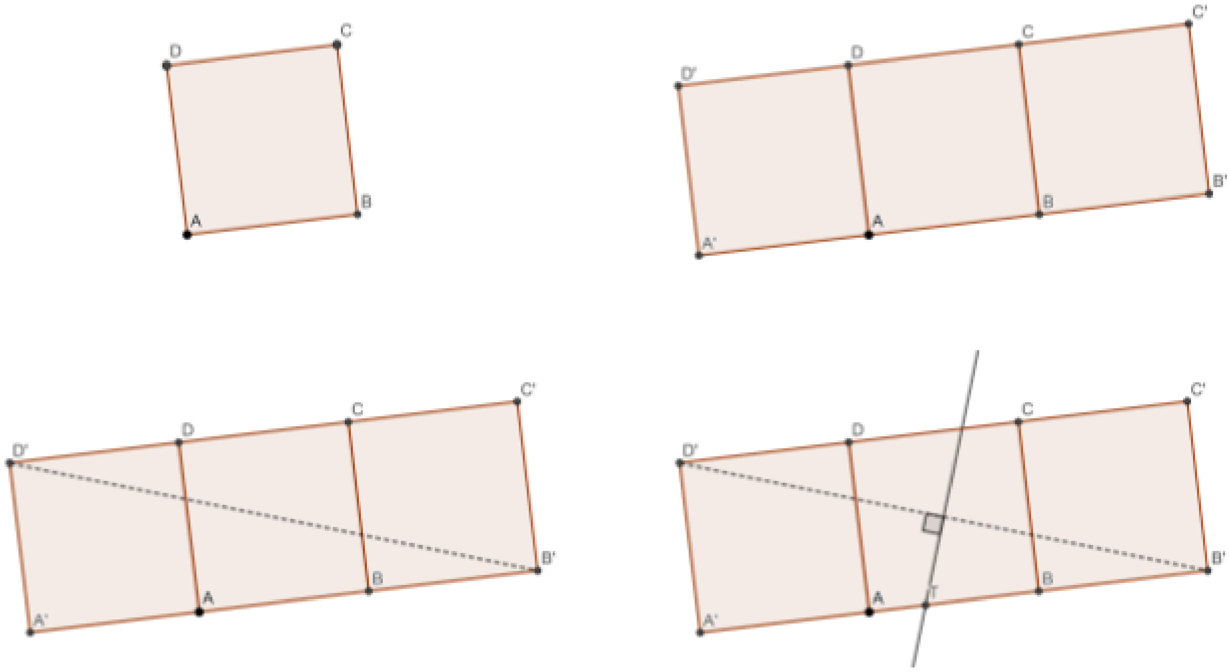
1.2. Define por uma expressão algébrica o conjunto de todos os pontos, $X(x, y)$, equidistantes de A e de B.

Equação da mediatriz de um segmento de reta $[AB]$. Dados dois pontos do plano, A e B, num referencial ortogonal e monométrico, com coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respetivamente, o conjunto de pontos $P(x, y)$, equidistantes de A e de B, é dado por: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$

2. Mostra que, num referencial Oxy, a mediatriz do segmento de reta $[PQ]$, sendo $P(1, 3)$ e $Q(4, 2)$, pode ser definida pela equação $y = 3x - 5$.

3. Considera a sequência de figuras seguinte em que estão representados:

- os quadrados $[ABCD]$, $[A'ADD']$ e $[B'BCC']$ todos com o lado de medida $\overline{AB}$
- a mediatriz de $[D'B']$
- o ponto T, interseção da mediatriz de $[D'B']$ com o lado $[AB]$



3.1. Reproduz no GeoGebra esta construção e descobre a relação entre $\overline{AB}$ e $\overline{AT}$.

3.2. Faz coincidir o ponto A com a origem do referencial Oxy e o ponto B com o ponto de coordenadas $(3, 0)$.
Determina algebricamente a equação da mediatriz de $[D'B']$ e as coordenadas do ponto T. Verifica que a relação que conjeturaste é válida neste caso particular.

3.3. Considera o ponto B com coordenadas $(b, 0)$ e prova a tua conjetura para o caso geral.

Tarefa 7

Dividir com a mediatriz

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com esta tarefa pretende-se, por um lado, que os alunos obtenham uma equação cartesiana da mediatriz através do cálculo da distância entre dois pontos, por outro, que resolvam um problema relacionado com a trisseção de um segmento de reta. Para a resolução deste problema, os alunos irão estabelecer uma conjetura, utilizando o geogebra, validar essa conjetura num caso particular e, posteriormente, fazer a sua generalização.

Conhecimentos prévios dos alunos: Definição de mediatriz . Cálculo da distância entre dois pontos e operações com polinómios, nomeadamente, casos notáveis da multiplicação.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou ao GeoGebra.

Notas e sugestões:
Na questão 1.2. é expectável que os alunos utilizem a noção de distância entre dois pontos para obter a equação cartesiana da mediatriz. No entanto, na discussão desta questão, deve ser explorado outro método de resolução, nomeadamente, determinar a equação da mediatriz à custa dos dois pontos equidistantes de A e de B, conhecidos na questão 1.1..
Pode ser oportuno identificar pontos de contacto com a geometria sintética, enfatizando que a algebrização dos conceitos e das relações, nomeadamente através de representações que dependem de um referencial, é a característica diferenciadora desta abordagem da geometria que agora se inicia.

Tarefa 8

Plano mediador e interseção com os eixos

1. Considera, num referencial $Oxyz$, os pontos $A(1, 1, 3)$ e $B(3, 3, 1)$.

1.1. Qual(quais) do(s) seguinte(s) pontos são equidistantes dos pontos A e B ?

1.1.1. $D(2, 0, 0)$

1.1.2. $E(1, 3, 1)$

1.1.3. $F(4, 0, 2)$

1.2. Define por uma expressão algébrica o conjunto de todos os pontos equidistantes de A e de B.

1.3. Traça no GeoGebra o segmento de reta $[AB]$ e escreve na janela algébrica a condição que determinaste em 1.2.. Observa a representação geométrica definida por essa condição e descreve o conjunto de pontos representado.

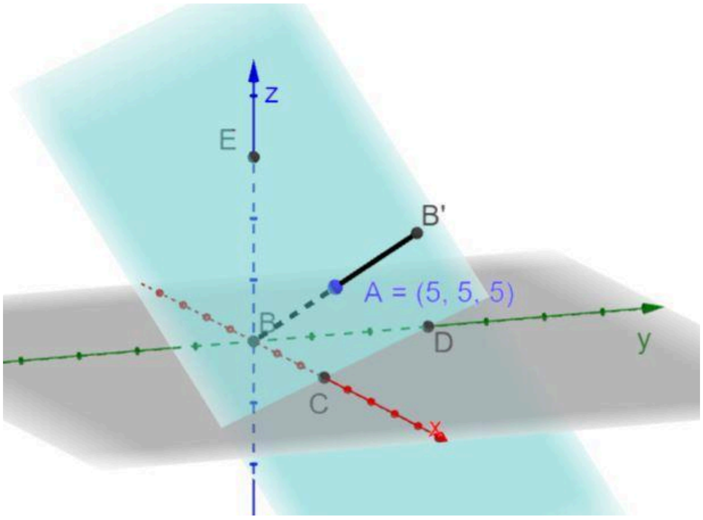
Equação do plano mediador de um segmento de reta $[AB]$.

Dados dois pontos do espaço, A e B, num referencial ortogonal e monométrico, com coordenadas (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B), respetivamente, o conjunto de pontos $P\,(x, y, z)$, equidistantes de A e de B, é dado por:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2$$

2. Considera, num referencial $Oxyz$, o ponto de coordenadas $(5, 5, 5)$ como sendo o ponto médio do segmento $[BB']$ em que B é a origem do referencial.

2.1. Faz uma construção no GeoGebra 3D para encontrar as coordenadas dos três pontos em que o plano mediador do segmento $[BB']$ intersecta os eixos coordenados, de acordo com as indicações seguintes:



- representa o ponto A de coordenadas $(5, 5, 5)$ e um ponto B sobre a origem.
- define o ponto B' transformado do ponto B por uma meia volta de centro A, e traça o segmento de reta $[BB']$;
- traça o plano mediador do segmento de reta $[BB']$ (usando a ferramenta "Plano Perpendicular").
- representa os pontos de interseção do plano mediador com os eixos coordenados.
- estabelece uma relação entre as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos, marcados no ponto anterior, e as coordenadas do ponto A.
- altera as coordenadas do ponto A e verifica se a relação que identificaste se mantém válida.
- identifica em que condições é que a relação se mantém válida.

2.2. Mostra, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, que a relação que identificaste se verifica para um ponto $A(k, k, k),\ k \neq 0$.
Sugestão: Determina as coordenadas dos pontos de interseção do plano mediador do segmento de reta $[BB']$ com os eixos coordenados.

Tarefa 8

Plano mediador e interseção com os eixos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa pretende fazer a extensão do conceito de lugar geométrico dos pontos equidistantes de um segmento de reta, ao contexto do espaço, ou seja, estabelecer o paralelismo entre a mediatriz e o plano mediador de um segmento de reta. Pretende ainda que os alunos possam analisar uma situação problemática, formular uma conjetura e demonstrá-la, recorrendo à equação do plano mediador.

Conhecimentos prévios dos alunos: Mediatriz de um segmento de reta. Distância entre dois pontos do plano e do espaço.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas e sugestões:
Uma discussão coletiva da questão 1. poderá proporcionar um contexto favorável para o aluno determinar uma equação do plano mediador de um segmento de reta a partir das coordenadas dos seus extremos. Pretende-se que os alunos identifiquem a similaridade com a equação da mediatriz e a justifiquem com o facto das duas equações definirem conjuntos de pontos com a mesma propriedade.
A questão 3 é uma oportunidade para voltar a explorar raciocínios demonstrativos em que o trabalho algébrico de manipulação de equações tem um propósito claro para os alunos. Este trabalho será mais significativo se os alunos tiverem passado por um processo de formulação e testagem de conjeturas sustentadas em experiências e verificações no GeoGebra.

Tarefa 9

Circunferência e círculo

1. Abre uma página do Geogebra.
   1.1. Representa um ponto sobre a origem do referencial e renomeia-o com a letra O.
   1.2. Representa os pontos que pertencem aos eixos coordenados cuja distância a O é igual a 3.
   1.3. Representa um ponto no primeiro quadrante e determina a sua distância ao ponto O. Arrasta-o até essa distância ser igual a 3.
   1.4. Representa agora três pontos, um no segundo quadrante, outro no terceiro e outro no quarto, e determina as suas distâncias ao ponto O. Seguidamente, arrasta os pontos até que essas distâncias sejam iguais a 3.
   1.5. Qual é o lugar geométrico que contém todos esses pontos?
   1.6. Considera um ponto do plano de coordenadas $(x,\ y)$. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, escreve uma igualdade que estabeleça que a distância desse ponto à origem é igual a 3.
   1.7. Traça no Geogebra uma circunferência de centro em O e raio 3. Na Folha Algébrica surge uma equação que define este lugar geométrico. Esta equação é equivalente àquela que escreveste na questão anterior?

2. Considera, num referencial Oxy, a circunferência de centro no ponto $(4,\ 2)$ e raio 5.
   2.1. Sabendo que todos os pontos de coordenadas $(x,\ y)$ que pertencem a essa circunferência distam 5 unidades do ponto $(4,\ 2)$ escreve uma equação que defina essa circunferência.
   2.2. Desenha essa circunferência no Geogebra e observa a equação que surge na Folha Algébrica. É igual à que escreveste na questão anterior?

3. Escreve na Folha Algébrica do Geogebra a seguinte inequação:

$$(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 9$$

   3.1. Qual é o conjunto de pontos que é definido por esta inequação?
   3.2. A origem do referencial faz parte desse conjunto? Justifica a tua resposta, usando processos algébricos.

4. Escreve condições que definem, num referencial Oxy, os seguintes conjuntos de pontos:

4.1. Circunferência de centro $(2, \ -3)$ e raio 7.

4.2. Círculo de centro $(-4, \ 0)$ e raio 6.

4.3. Circunferência de centro $(a, \ b)$ e raio r.

4.4. Círculo de diâmetro $[AB]$, em que $A(2, \ 6)$ e $B(-4, \ 2)$.

5.

5.1. Considera, num referencial Oxy, a circunferência de equação $(x-2)^2+(y+4)^2=25$. Escreve as coordenadas do centro e a medida do raio desta circunferência.

5.2. Determina as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox.

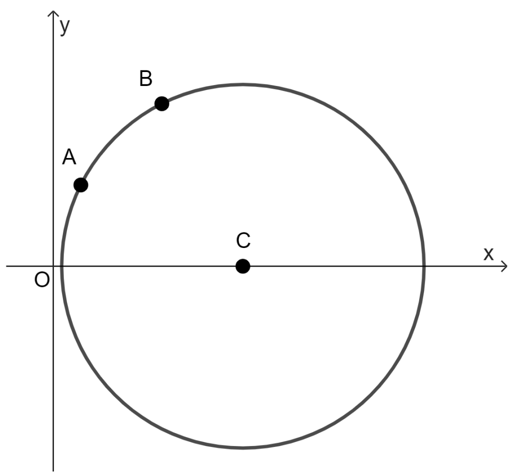
5.3. Considera o ponto $A(4, \ 0)$. Este ponto pertence à circunferência? Está localizado no seu interior? Ou no seu exterior? Explica como deves proceder para investigar onde é que esse ponto está localizado.

5.4. Usa a estratégia que explicaste em 5.3. para averiguar qual é a localização, relativamente à circunferência considerada, dos seguintes pontos: $A(4, \ 0)$, $B(-2, \ 1)$ e $C(-7, \ -2)$.

6. No referencial Oxy da figura, está representada uma circunferência de centro num ponto C que pertence ao eixo das abcissas.

Estão também representados os pontos da circunferência $A(1, 3)$ e $B(4, \ 6)$.

Determina uma equação da circunferência.



EXTRA

7. Considera, num referencial Oxy, a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(5, 2)$ e que contém a origem do referencial.
   7.1. Escreve uma equação que define a circunferência.
   7.2. Representa no Geogebra essa circunferência e ativa a visualização da grelha.
   7.3. Recorre ao GeoGebra e, por observação da grelha, identifica os pontos que pertencem à circunferência, cujas coordenadas são números inteiros.

8. Considera, num referencial Oxy, um ponto B de coordenadas $(-4, 1)$ e a circunferência de centro em B, que contém a origem do referencial. Escreve uma equação que define esta circunferência.
   8.1. Sem recorrer ao Geogebra, indica três pontos que pertencem a esta circunferência, com abcissas diferentes e cujas coordenadas são números inteiros.
   8.2. Mostra que as coordenadas dos pontos que indicaste em 8.1. verificam a equação desta circunferência.

9. Considera, num referencial Oxy, um ponto C de coordenadas (a, b) (a e b são números inteiros) e a circunferência de centro em C que contém a origem do referencial.
   9.1. Quantos pontos cujas coordenadas são números inteiros pertencem à circunferência?
   9.2. Prova que o ponto de coordenadas $(a + b, a + b)$ pertence à circunferência.

Tarefa 9

Circunferência e círculo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa pretende que o aluno recorde os conceitos de circunferência e de círculo como lugares geométricos e que os defina através das suas condições num referencial cartesiano, ortogonal e monométrico.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer a circunferência e o círculo como lugares geométricos; saber calcular distâncias, quer analiticamente quer recorrendo ao GeoGebra.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra.

Notas e sugestões:
Esta tarefa tem como objetivo recordar o conceito de circunferência e de círculo como lugar geométrico, e defini-los através de condições envolvendo coordenadas de pontos num referencial do plano. O aluno deve ser orientado a usar a fórmula da distância entre dois pontos para obter as respetivas condições. O GeoGebra permite-lhe comprovar as condições obtidas ao consultar a Folha Algébrica.

Tarefa 10

Superfície esférica e esfera

1. Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano situados a igual distância (o raio) de um ponto dado (o centro).
   E se pensarmos no espaço? É semelhante. Só temos que pensar que temos três dimensões.
   Assim, ao lugar geométrico dos pontos do espaço situados a igual distância (o raio) de um ponto dado (o centro) chamamos superfície esférica. E se a esse conjunto de pontos reunirmos todos os que estão no seu interior, a esse novo lugar geométrico chamamos esfera.
   Considera um referencial $Oxyz$.

   1.1. Escreve uma equação que define o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) que distam 5 unidades do ponto $C(1, 2, 3)$.

   1.2. Escreve uma condição da esfera de centro em $(2, -1, 0)$ e raio 3 .

   1.3. O ponto de coordenadas $(2, -1, 5)$ está no interior da superfície esférica de equação $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$? Justifica a tua resposta.

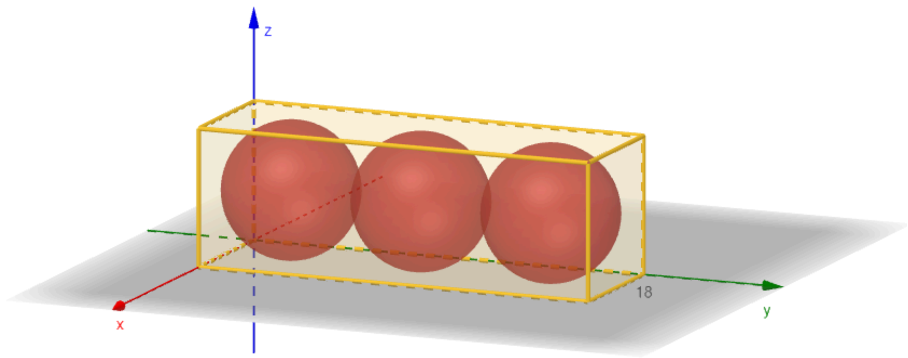
   1.4. Nas alíneas seguintes encontram-se condições que definem superfícies esféricas e esferas. Identifica as condições que definem esferas e as que definem superfícies esféricas e regista os respetivos centros e raios.

   1.4.1. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 10$

   1.4.2. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 \leq 17$

   1.4.3. $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 49$

2. Na figura está representado, num referencial $Oxyz$, um prisma quadrangular. As três esferas contidas no prisma são tangentes entre si e às faces laterais do prisma, que são paralelas aos eixos coordenados. Duas esferas são também tangentes às bases do prisma. Os pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 18, 0)$ são vértices do prisma e os restantes vértices não têm coordenadas negativas. Escreve uma inequação que defina cada uma das três esferas.



Esta construção pode ser manipulada em:

https://www.geogebra.org/m/j4y7fmwx

3. Abre o Geogebra na vista 3D.

3.1. Representa no Geogebra a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

3.2. Representa na Folha Algébrica o plano de equação $z = k$.

3.3. Faz variar o parâmetro k e escreve para que valores deste parâmetro o plano $z = k$:

3.3.1. passa pelo centro da superfície esférica;

3.3.2. é tangente à superfície esférica;

3.3.3. não tem nenhum ponto em comum com a esfera de condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$.

3.4. Determina o valor de k para o qual a interseção do plano com a superfície esférica é uma figura geométrica com perímetro 8π ?

3.5. Escreve outros planos paralelos aos planos coordenados que sejam tangentes a essa superfície esférica.

4. Considera, num referencial $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$(x + 3)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 36$.

Escreve equações dos planos paralelos aos planos coordenados que são tangentes a esta superfície esférica.

Se necessário representa esta superfície esférica no geogebra 3D, para visualizares a esfera e os planos tangentes.

Tarefa 10

Superfície esférica e esfera

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa pretende estabelecer o paralelismo entre circunferência e superfície esférica, e entre círculo e esfera. Na sequência das tarefas anteriores, os conceitos devem ser abordados geometricamente, valorizando a visualização das relações estabelecidas e também algebricamente, clarificando a eficácia deste tipo de representação.
Pretende-se ainda que os alunos sejam capazes de integrar estes conceitos num contexto de resolução de problemas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Circunferência, círculo, superfície esférica, esfera e coordenadas de pontos no espaço.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra.

Notas e sugestões:
Sugere-se que a comparação entre circunferência e superfície esférica, e entre círculo e esfera, seja explorada para identificar as alterações necessárias quando se transpõe para o espaço os conceitos estudados no plano.
Após a identificação das condições algébricas que definem superfícies esféricas e esferas, sugere-se que os alunos recorram a estas condições num contexto de resolução de problemas, valorizando a visualização de modelações digitais das situações em estudo, e a comunicação matemática assente na tradução algébrica das relações identificadas.

Tarefa 11

Conjuntos de pontos e condições

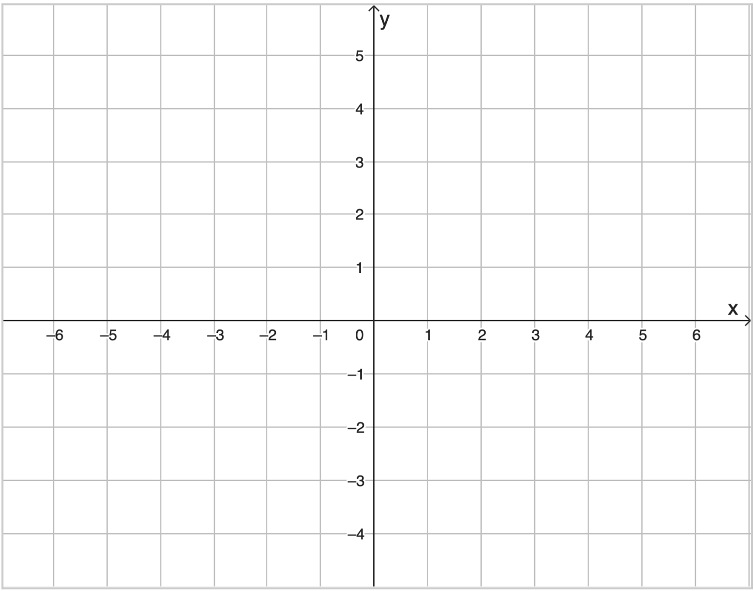
1. Considera o referencial Oxy.

   1.1. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença ao conjunto definido pela condição $x > 2$.

   1.2. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença ao conjunto definido pela condição $y > 3$.

   1.3. Escreve as coordenadas de um ponto que pertença simultaneamente aos dois conjuntos de pontos referidos nos dois itens anteriores.

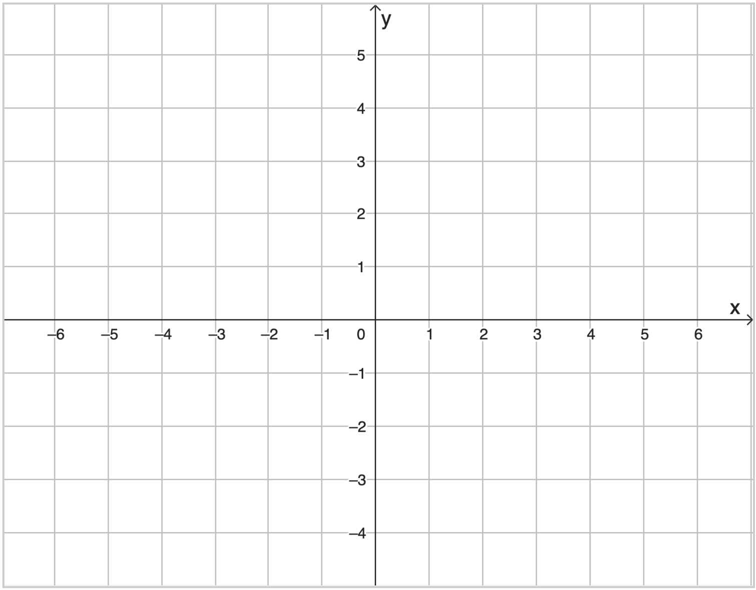
   1.4. Representa no referencial seguinte todos os pontos do plano que verificam simultaneamente as duas condições. Esse conjunto de pontos representa-se analiticamente por: $x > 2 \wedge y > 3$.



Nota: O símbolo matemático $\wedge$ (lê-se “e”) usa-se para representar a conjunção de condições a que corresponde a interseção de conjuntos.

   1.5. Abre o Geogebra e na Folha Algébrica escreve a condição $x > 2 \wedge y > 3$. Observa se a representação geométrica que surge no Geogebra é igual à que representaste no item anterior.

1.6. Representa no referencial seguinte todos os pontos que verificam pelo menos uma das condições $x > 2$ ou $y > 3$. Esse conjunto de pontos do plano representa-se analiticamente por: $x > 2 \vee y > 3$.



Nota: O símbolo matemático $\vee$ (lê-se “ou”) usa-se para representar a disjunção de condições a que corresponde a união de conjuntos.

1.7. Abre o Geogebra e na Folha Algébrica escreve a condição $x > 2 \vee y > 3$. Observa se a representação geométrica que surge no Geogebra é igual à que representaste no item anterior.

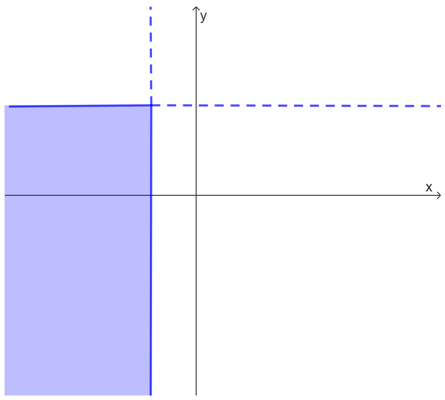
2. Considera as condições:

A) $x \leq -1 \wedge y \leq 2$ B) $x \leq -1 \vee y \leq 2$

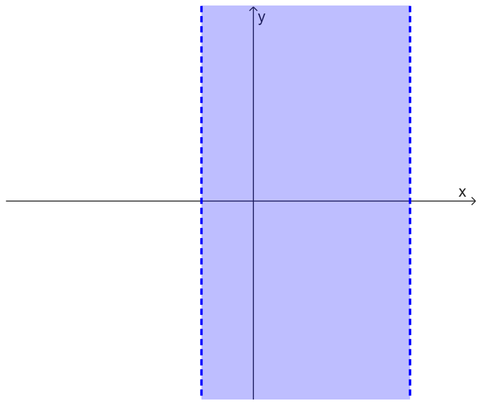
C) $x < 3 \wedge x > -1$ D) $x > 3 \vee x < -1$

Faz corresponder a cada condição uma das regiões sombreadas nas figuras seguintes:

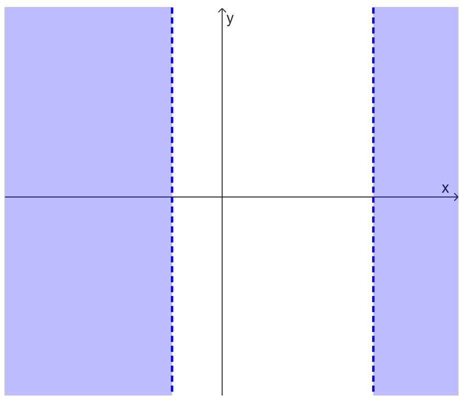
I)



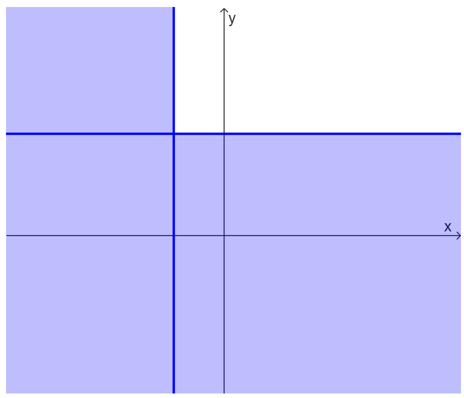
II)



III)



IV)



3. Representa, num referencial ortogonal e monométrico Oxy, o conjunto de pontos do plano definidos pelas seguintes condições:

3.1. $x \geq 1 \wedge y \geq 1$

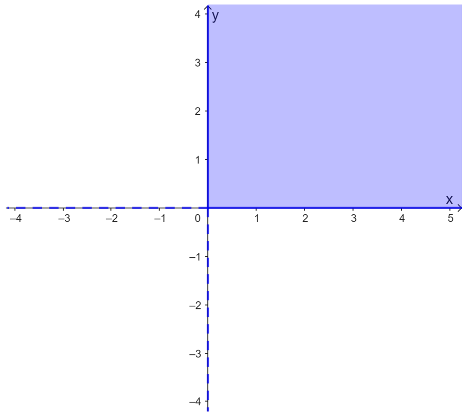
3.2. $2 \leq y \leq 4 \wedge 1 \leq x \leq 3$

3.3. $x > 1 \vee x > 3$

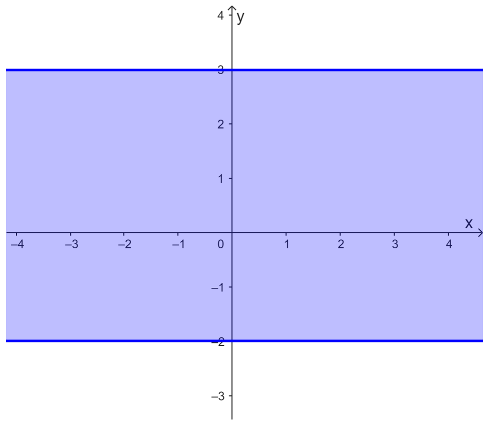
3.4. $y < 4 \wedge y > 0$

4. Escreve uma condição que defina cada um dos conjuntos de pontos representados a sombreado em cada referencial.

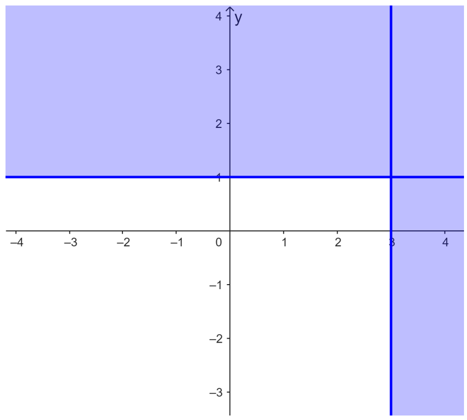
4.1.



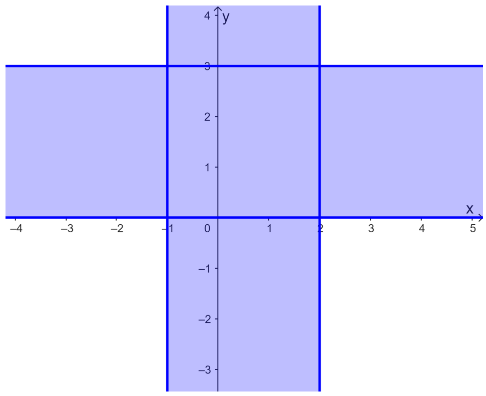
4.2.



4.3.



4.4.



5. Representa, num referencial Oxy, os conjuntos de pontos do plano definidos pelas seguintes condições:

5.1. $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x > 1$

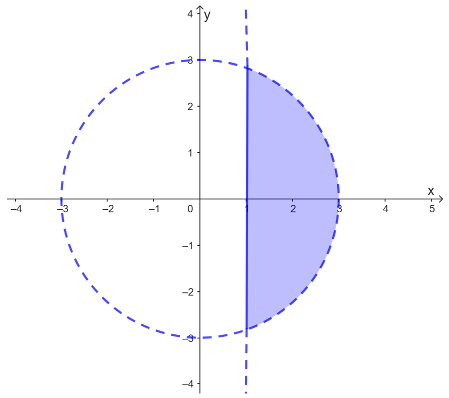
5.2. $1 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$

5.3. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + (y - 3)^2 \leq 9$

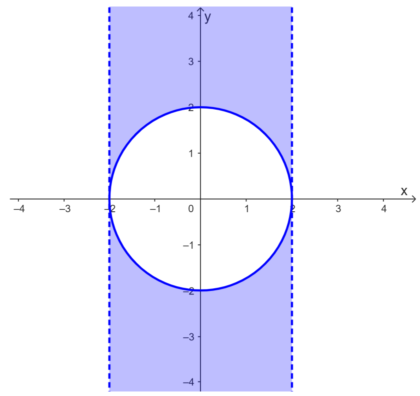
5.4. $(x - 2)^2 + y^2 \geq 4 \wedge y \geq 1$

6. Escreve uma condição que defina cada um dos conjuntos de pontos representados a sombreado em cada referencial.

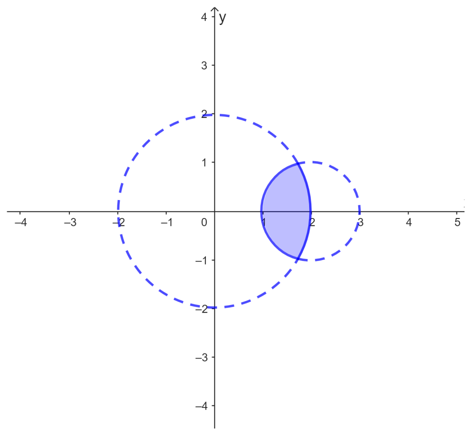
6.1.



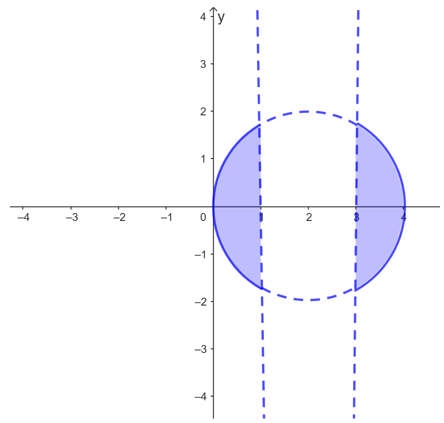
6.2.



6.3.



6.4.



7. Descreve, usando linguagem corrente, os conjuntos de pontos do plano que, num referencial Oxy, são definidos por cada uma das seguintes condições:

7.1. $x < 0 \land x > 2$

7.2. $y \leq 4 \lor y > 2$

7.3. $x \geq -2 \land x \leq -2$

Tarefa 11

Conjuntos de pontos e condições

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo introduzir a conjunção e a disjunção de condições que definem conjuntos de pontos no plano. Ao longo da lecionação deste tema, os alunos são confrontados com condições que identificam lugares geométricos. Aqui vão relembrar a conjunção e a disjunção de condições e compreender quais os conjuntos de pontos que são definidos por elas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Referencial cartesiano do plano. Lugares geométricos do plano e respetivas condições: semiplanos definidos por retas paralelas aos eixos coordenados, circunferência e círculo.

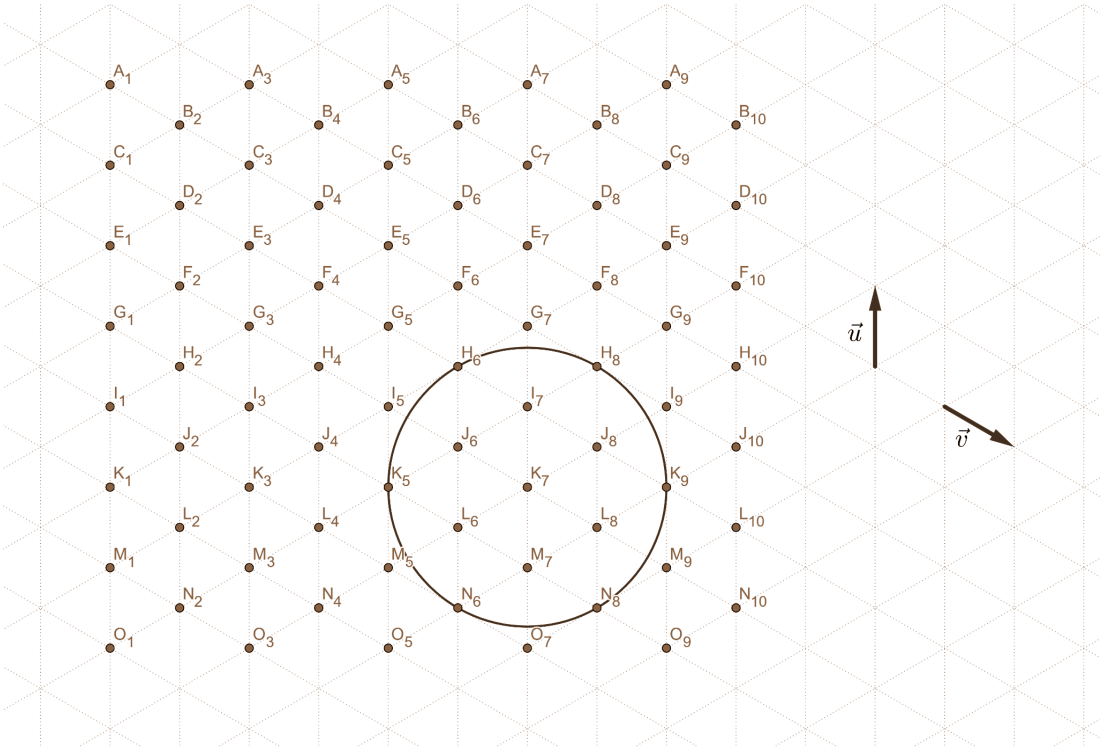
Materiais e recursos: Material de desenho - régua, esquadro e compasso - e computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra.

Notas e sugestões:
Nesta tarefa, a discussão com toda a turma pode ser feita em duas fases, ocorrendo a primeira após a resolução do item 1, onde devem ser valorizados os conceitos de conjunção e disjunção de condições.
É natural que os alunos usem o GeoGebra para testar hipóteses de resposta. O professor deverá valorizar, e até sugerir esta alternativa, para que os alunos possam, de forma autónoma, detetar erros ou validar resoluções diferentes, por exemplo, com recurso a parêntesis.
Durante a discussão final, a propósito do item 7, deve ser introduzida a terminologia relativa a condição impossível e conjunto vazio e a condição universal, sem que, no entanto, estas definições assumam um papel de destaque.

Tarefa 12

Translações de pontos

1. Na grelha seguinte, constituída por triângulos equiláteros, estão representados 75 pontos, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e a circunferência de centro em K_7 e que contém o ponto H_6.



1.1. Qual é o transformado do ponto H_6 pela translação associada ao vetor:

1.1.1. $\vec{u}$

1.1.2. $\vec{u} + \vec{v}$

1.1.3. $\vec{v} + \vec{u}$

1.1.4. $-\vec{u}$

1.1.5. $\vec{v} + \vec{u} + \vec{v}$

1.1.6. $2\vec{v} + \vec{u}$

1.1.7. $\vec{v} - \vec{u}$

1.2. O transformado do ponto H_4 pela translação associada ao vetor $3\vec{v}$ é o ponto K_7, que é o centro da circunferência.

Usando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou outros vetores que resultam de operações entre eles, escreve um vetor associado a uma translação, que transforma o ponto H_4

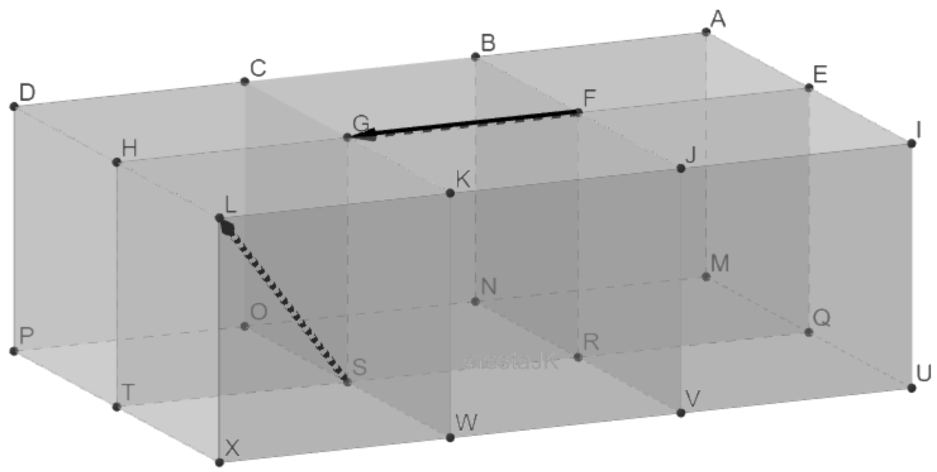
1.2.1. num ponto no interior da circunferência;

1.2.2. num ponto no exterior da circunferência;

1.2.3. num ponto da circunferência;

1.2.4. no ponto A_1.

2. Na imagem estão representados: seis cubos geometricamente iguais e os vetores $\vec{FG}$ e $\vec{SL}$.



Esta construção pode ser manipulada em:

https://www.geogebra.org/m/kbgu4ufb

2.1. Qual é o transformado do ponto N pela translação associada ao vetor:

2.1.1. $\vec{FG}$

2.1.2. $\vec{FG} + \vec{SL}$

2.1.3. $2\vec{FG}$

2.2. Recorrendo às letras da figura, completa cada uma das igualdades seguintes, com o vetor adequado.

2.2.1. $E = P + \dots\dots\dots$

2.2.2. $E = A + \overrightarrow{UV} + \dots\dots\dots$

2.2.3. $E = X - \overrightarrow{PT} + \dots\dots\dots$

2.2.4. $E = M + 2\overrightarrow{OT} + \dots\dots\dots$

Tarefa 12

Translações de pontos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa pretende recuperar os conceitos de vetores estudados no 8.º ano. Pretende-se, de igual forma, estender estes conceitos ao espaço. É ainda uma boa oportunidade para referir as propriedades operatórias da soma de vetores a partir de casos concretos, sendo recomendável a introdução de vocabulário específico como , "direção", "sentido", "vetor simétrico" ou "vetor nulo", sem a necessidade de sobrevalorizar a formalização de definições.

Conhecimentos prévios dos alunos: Imagens de pontos transformados por uma translação, identificando o vetor que caracteriza a translação.

Materiais e recursos: As imagens que sustentam a tarefa podem ser acedidas em https://www.geogebra.org/m/h3gsvjrs e em https://www.geogebra.org/m/kbgu4ufb podendo ser disponibilizadas aos alunos, ou usadas como suporte para a discussão da tarefa em grande grupo.

Notas e sugestões:

A gestão da discussão do trabalho dos alunos deve clarificar alguns aspetos relevantes para o contexto dos vetores, como o facto de o mesmo vetor poder ter representações diferentes. É expectável que diferentes alunos formulem a resolução usando representações diferentes do mesmo vetor.

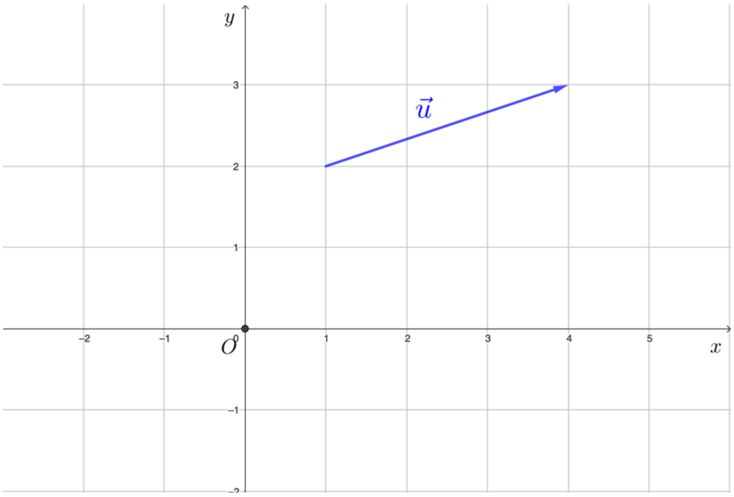
O item 1.1 tem o objetivo de criar um contexto favorável à explicitação das propriedades algébricas da adição de vetores. Assim, é importante assinalar que as respostas coincidentes em itens diferentes permitem apenas ilustrar a propriedade, e incentivar a apresentação de outros exemplos que também validem as propriedades assinaladas em cada momento. Sendo desejável que os alunos compreendam que esta abordagem não constitui uma demonstração formal da propriedade, não se considerando relevante um trabalho algébrico para formalizar a demonstração da propriedade em causa.

Relativamente aos vetores no espaço, durante a discussão deve ser assinalada a necessidade de recorrer a uma terceira dimensão para descrever a direção e o sentido de cada vetor. Assim, para além de “movimentos” orientados segundo as direções ”esquerda-direita” e “cima-baixo”, os alunos devem reconhecer claramente que será necessário recorrer a uma direção “adicional”, por exemplo “frente-trás”. Desta forma, pretende-se criar um contexto favorável para o estudo de vetores definidos pelas suas coordenadas.

Tarefa 13

Pontos, vetores e coordenadas

1. Na figura, está representado, em referencial ortonormado (o.n.) Oxy, o vetor $\vec{u}$.



1.1. Representa, neste referencial, o ponto A, tal que $A = O + \vec{u}$.

1.2. Quais são as coordenadas do ponto A neste referencial?

1.3. Justifica que $\vec{OA} = \vec{u}$.

1.4. Representa, neste referencial, os pontos $X(1, 0)$ e $Y(0, 1)$ e os vetores $\vec{e} = \vec{OX}$. e $\vec{f} = \vec{OY}$, e identifica os números reais a e b tais que $\vec{OA} = a\,\vec{e} + b\,\vec{f}$.

1.5. Compara as coordenadas do ponto A, com os valores de a e de b.

O par ordenado (a, b), assim obtido, é designado por coordenadas do vetor $\vec{u}$.

1.6. O comprimento do vetor $\vec{u}(a, b)$ representa-se por $\|\vec{u}\|$, e lê-se "*norma de u*".

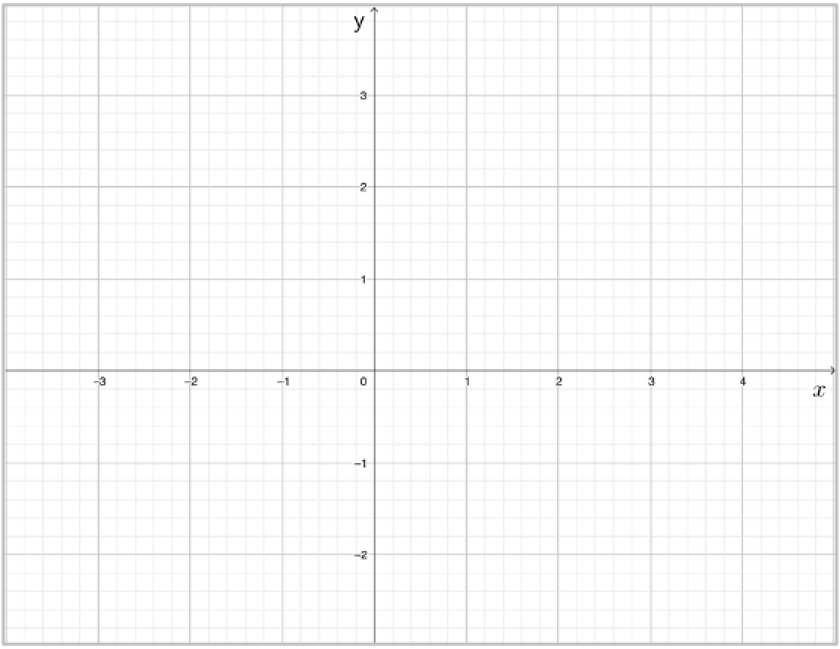
Justifica que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.7. Abre a apliqueta [Vetores simétricos](). Escreve na folha algébrica "*-u*" para obteres uma representação do vetor simétrico de $\vec{u}$. Muda a posição de um dos extremos da representação do vetor $\vec{u}$ e observa na folha algébrica, para cada posição desse extremo, a relação entre as coordenadas de $\vec{u}$ e do seu simétrico. Descreve a relação observada.

1.8. Justifica que $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.

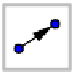
2. Considera, num referencial o.n. Oxy, os vetores $\vec{a}(2,3)$ e $\vec{b}(1,-4)$.

2.1. Representa, no referencial seguinte, os pontos $A = O + \vec{a}$ e $B = A + \vec{b}$ e escreve as suas coordenadas .



2.2. Diz, justificando, quais são as coordenadas do vetor $\vec{a} + \vec{b}$?

2.3. Abre um ficheiro GeoGebra, e:

- usando a ferramenta  constrói, na folha gráfica 2D, dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- na folha algébrica escreve "*u+v*", para obteres o vetor $\vec{u} + \vec{v}$;
- observa, na folha algébrica, as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$.

Explica como podes obter as coordenadas do vetor $\vec{u} + \vec{v}$, a partir das coordenadas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, e verifica se esta relação se mantém válida quando se alteram os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Nota: Para alterar os vetores basta arrastar um dos pontos nos seus extremos.

2.4. Explica como podes obter as coordenadas do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ a partir das coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Podes utilizar o mesmo ficheiro GeoGebra para testar a relação que conjeturaste.

2.5. Ainda com o mesmo ficheiro e com os mesmos vetores, obtém as coordenadas dos vetores $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ e $-2\vec{u}$, observa e explica a relação entre as coordenadas destes vetores e as coordenadas do vetor $\vec{u}$.

Podes utilizar o mesmo ficheiro GeoGebra para testar a relação que conjeturaste.

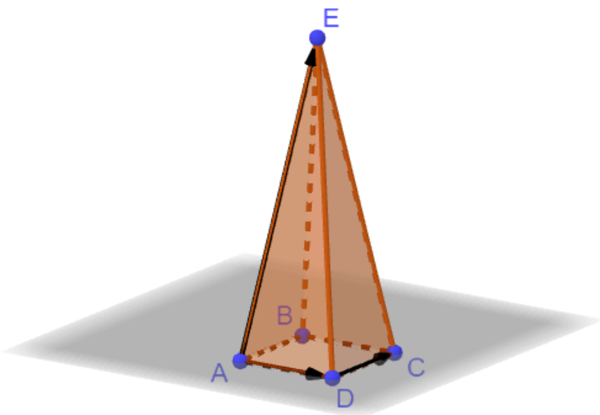
2.6. Se as coordenadas de $\vec{u}$ são (u_1, u_2), quais são as coordenadas do vetor $k\,\vec{u}$?

2.7. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 5$, qual é o valor de $\|3\vec{u}\|$? E de $\|-3\vec{u}\|$?

De forma análoga ao plano, num referencial o.n. no espaço, se $\vec{u}(a, b, c)$ temos que: $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

3. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular reta $[ABCDE]$, representada na figura.

Determina o volume da pirâmide sabendo que $\vec{AE}(-1, 1, 6)$, $\vec{AD}(0, 2, 0)$ e $\vec{DC}(-2, 0, 0)$.



Tarefa 13

Pontos, vetores e coordenadas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivos definir um vetor através das suas coordenadas e introduzir o conceito de norma de um vetor. Os dois conceitos são abordados no plano e no espaço.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de vetor e coordenadas de pontos no plano e no espaço.

Materiais e recursos: Computador com acesso à Internet.

Notas e sugestões:
Pretende-se que os alunos compreendam que a invariância do vetor, independentemente de qualquer que seja a sua representação num plano, é visível na sua definição através das coordenadas. Pretende-se igualmente que os alunos interpretem as coordenadas de um vetor como a decomposição do vetor em vetores com a direção dos eixos coordenados. A norma de um vetor é definida a partir das respectivas coordenadas e identificada com a medida de comprimento associada ao vetor.

Tarefa 14

Soma de um ponto com um vetor

1.

1.1. Abre uma página do Geogebra e marca num referencial os pontos $A(1,\ 2)$ e $B(6,\ 5)$.

1.2. Traça um vetor de origem em A e extremidade em B. Na Folha Algébrica surgem as coordenadas do vetor $\vec{AB}(5, 3)$, mas escritas na vertical e sem vírgula, pois é desta forma que o Geogebra representa as coordenadas dos vetores.

1.3. Como poderás observar, ao arrastar o ponto A ou o ponto B, as suas coordenadas alteram-se, e respetivamente as coordenadas do vetor. Arrasta o ponto B uma unidade para a direita ou uma para a esquerda ou uma para cima ou uma para baixo, que alterações observas nas coordenadas do vetor? Altera as coordenadas do ponto A. Que alterações observas nas coordenadas do vetor?

1.4. Estabelece uma relação entre as coordenadas dos pontos A e B e as coordenadas do vetor $\vec{AB}$.

1.5. Representa o vetor $\vec{AB}$ fazendo coincidir a sua origem com a origem do referencial. Quais são as coordenadas do ponto que coincide com a extremidade do vetor?

1.6. Se adicionares as coordenadas do vetor $\vec{AB}$ às do ponto A, que coordenadas obténs?

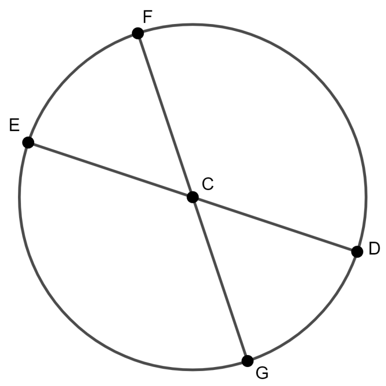
As coordenadas do vetor $\vec{AB}$ obtêm-se fazendo a diferença entre as coordenadas do ponto B e as coordenadas do ponto A: $\vec{AB} = B - A$
Se somarmos as coordenadas do vetor $\vec{AB}$ às coordenadas do ponto A obtemos as coordenadas do ponto B: $A + \vec{AB} = B$
Estes resultados são válidos em referenciais no plano e em referenciais no espaço.

2. Considera, num referencial o.n., os pontos $A(-4, 3)$, $B(-2, 5)$ e $C(2, 1)$.

2.1. Determina as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ e $\vec{CA}$.

2.2. Mostra que o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

3. Sabe-se que $[DE]$ e $[FG]$ são diâmetros de uma circunferência de centro C.
Considera num referencial o.n., os pontos D, E e G de coordenadas $(8, 1)$, $(2, 3)$ e $(6, -1)$, respetivamente.



3.1. Mostra que as coordenadas do centro C são $(5, 2)$.

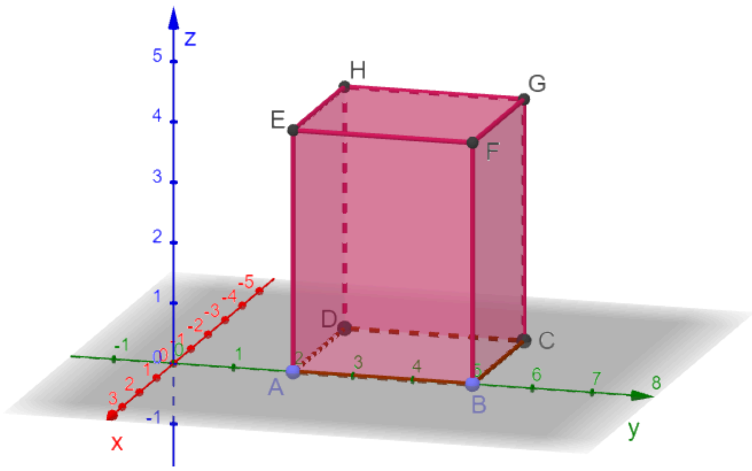
3.2. Determina as coordenadas do ponto F.

4. Num referencial o.n., os pontos $P(-2, 1)$, $Q(5, 0)$ e $R(0, -2)$ são vértices de um paralelogramo.

4.1. Usa o Geogebra para investigar as possíveis localizações do quarto vértice, e escreve, para cada caso, as suas coordenadas.

4.2. A partir das coordenadas dos pontos P, Q e R, determina analiticamente as coordenadas dos pontos que identificaste no item anterior.

5. No referencial o.n. da figura, está representado um prisma quadrangular regular com as faces paralelas aos planos coordenados. Sabe-se que $A(0,\ 2,\ 0)$ e $G(-\ 3,\ 5,\ 4)$.



5.1. Determina as coordenadas de:

5.1.1. $\overrightarrow{GA}$

5.1.2. $\overrightarrow{FC}\ +\overrightarrow{FE}$

5.1.3. $A\ +\ 2\overrightarrow{GA}$

5.2. Determina as coordenadas de um ponto P tal que:

5.2.1. $\overrightarrow{AP}\ =\overrightarrow{FC}$

5.2.2. $P\ =\ E\ -\ 3\overrightarrow{GA}$

5.3. Considera $K\ =\ G\ +\frac{1}{2}\ \overrightarrow{GA}$.

Calcula as coordenadas do ponto k e escreve a equação da superfície esférica que contém todos os vértices do prisma.

Tarefa 14

Soma de um ponto com um vetor

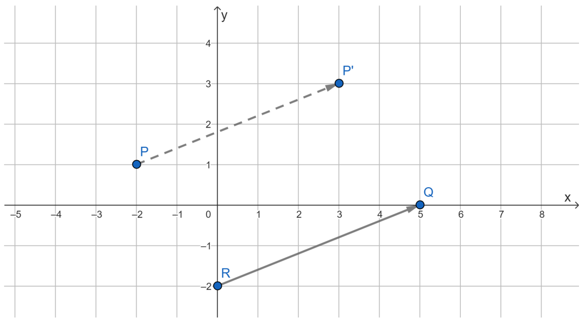
Notas pedagógicas para a ação do professor

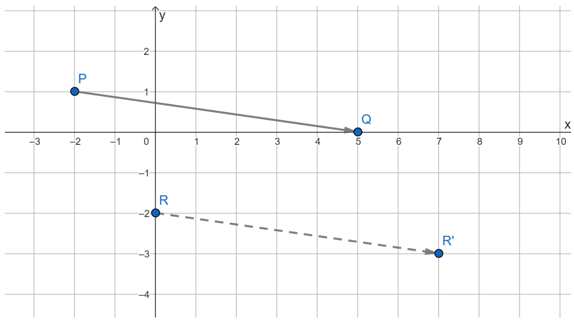
Resumo:
A tarefa pretende familiarizar os alunos com a relação entre as coordenadas de um vetor definido por dois pontos e as coordenadas dos pontos. Pretende-se ainda resolver problemas em que a relação estabelecida permita comunicar de forma eficaz relações e conceitos com recurso a vetores.

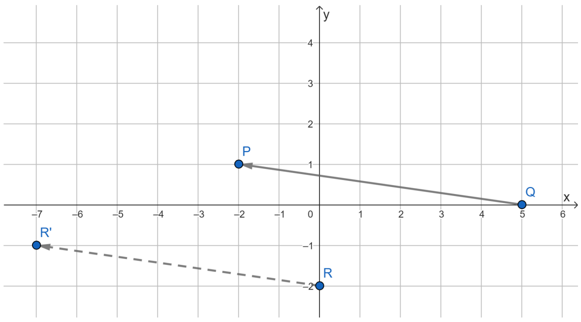
Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de pontos e de um vetor no plano e no espaço.

Materiais e recursos: Computador com acesso à internet.

Notas e sugestões:
A relação que é visada nesta tarefa pode ser facilmente enunciada, mas pretende-se que sejam os alunos a passar pelo processo de identificação e sistematização. Poderá ser uma estratégia interessante não veicular as relações estabelecidas e proporcionar registos estruturados das relações visadas (como os que constam na tarefa apresentada) apenas após a discussão da tarefa com os alunos.
No item 4 não é essencial que todos os alunos encontrem as três alternativas, sendo de privilegiar a obtenção das coordenadas do quarto vértice a partir de translações dos vértices e de vetores definidos pelos vértices. Durante a discussão final, o professor poderá apresentar as alternativas que os alunos não tenham conseguido descobrir, como a seguir se exemplifica.







Deve ser explicitado que, em qualquer dos três casos, é possível obter o quarto vértice por mais do que um processo.

Tarefa 15

Vetores alinhados

1. Considera, num referencial o.n., os vetores $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(3,6)$, $\vec{c}(5,10)$, $\vec{d}(4,1)$ e $\vec{e}(-2,-4)$.

   1.1. Abre uma folha no GeoGebra e representa cada um dos vetores. Por exemplo, para representar o vetor $\vec{a}$ podes escrever na janela algébrica: a=(1,2).

   1.2. Quais são os vetores que têm a mesma direção?

   1.3. Que relação existe entre as coordenadas do vetor $\vec{a}$ e as coordenadas do vetor $\vec{b}$?

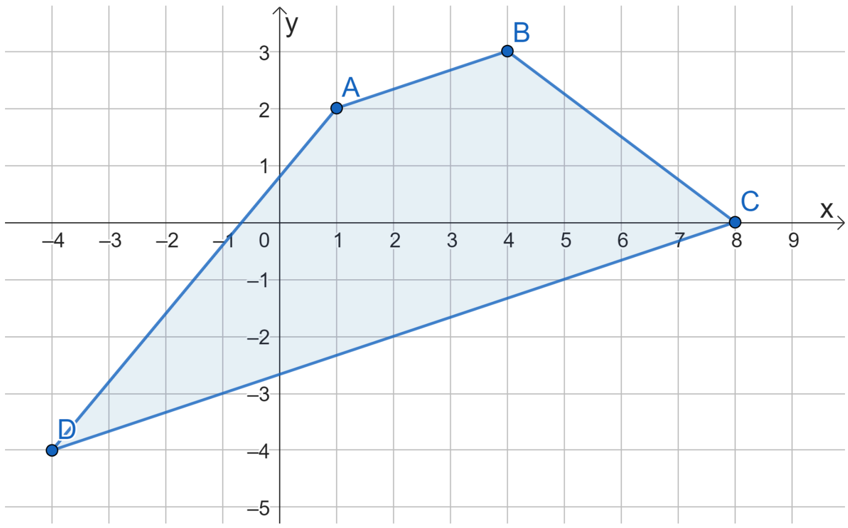
   1.4. Qual é a relação entre as coordenadas de quaisquer dois desses vetores que têm a mesma direção?

   1.5. Escreve as coordenadas de dois vetores, $\vec{f}$ e $\vec{g}$, com a mesma direção do vetor $\vec{d}$ e sentidos diferentes.

   1.6. O vetor $\vec{h}(-32,-8)$ tem a mesma direção do vetor $\vec{a}$? E do vetor $\vec{d}$? Justifica a tua resposta.

Dois vetores são colineares se tiverem a mesma direção. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, se existir um número real k, tal que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
Esta condição é válida para vetores do plano e do espaço.

2. Considera, num referencial o.n., o quadrilátero $[ABCD]$ em que $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(8, 0)$ e $D(-4, -4)$.



2.1. Quais são as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$?

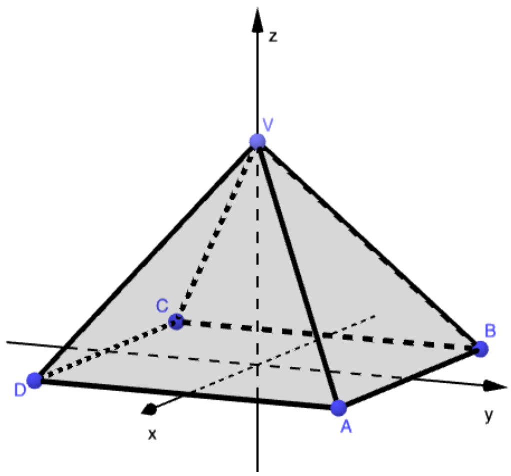
2.2. Mostra que $\left\|\vec{CD}\right\| = 4\left\|\vec{AB}\right\|$.

2.3. Justifica se o quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio.

2.4. Determina as coordenadas de M_1 e M_2, pontos médios de $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente.

2.5. Mostra que a reta M_1M_2 é paralela à reta CD.

3. No referencial o.n. $Oxyz$ está representada uma pirâmide quadrangular $[ABCDV]$ regular com 48 cm³ de volume, cujo vértice V tem como coordenadas $(0,\ 0,\ 4)$, o centro da base coincide com a origem do referencial e as arestas da base são paralelas aos eixos coordenados.



3.1. Escreve as coordenadas de um vetor colinear com $\vec{AV}$.

3.2. Verifica se o vetor $(-3, -3, -4)$ é colinear com $\vec{BV}$.

3.3. Calcula o valor de a, de modo a que o vetor de coordenadas $(2a, a + 3, 8)$ seja colinear com o vetor $\vec{CV}$.

Tarefa 15

Vetores alinhados

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa pretende explicitar o conceito de colinearidade de vetores, explorando a complementaridade da visualização do paralelismo das representações vetoriais e a correspondência algébrica da proporcionalidade das coordenadas.

É ainda pretendido que os alunos possam mobilizar esta relação num contexto de resolução de problemas, onde a relação entre a norma de vetores colineares ou o paralelismo de duas retas seja determinante.

Conhecimentos prévios dos alunos: Coordenadas de um vetor.

Materiais e recursos: Computador com acesso à internet.

Notas e sugestões:

O recurso ao GeoGebra, nomeadamente à representação geométrica e algébrica de vetores, possibilita que os alunos explorem, discutam em grupo e identifiquem a relação entre as coordenadas de vetores colineares.

Da mesma forma, a ilustração geométrica dos procedimentos algébricos solicitados na parte final da tarefa pode ser um contributo para que os alunos atribuam significado ao valor escalar que permite estabelecer a relação de colinearidade entre dois vetores.

Tarefa 16

Equação vetorial da reta

1. Abre o GeoGebra (com o referencial visível).

   1.1. Representa o ponto $A(3, 1)$ e o vetor $\vec{u}(2, -1)$.

   1.2. Obtém o ponto A', transformado de A, pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.

   1.3. Obtém o ponto A'', transformado de A, pela translação associada ao vetor $2\vec{u}$.

   1.4. Obtém o ponto A''', transformado de A, pela translação associada ao vetor $k \times \vec{u}$.

   Altera o valor do parâmetro k e descreve a localização dos diferentes pontos A''' obtidos para cada valor de k.

   1.5. Seleciona o valor $k = 5$ e escreve as coordenadas do ponto A''' correspondente, em função das coordenadas do ponto A e das coordenadas do vetor $\vec{u}$.

Equação vetorial de uma reta do plano

Num referencial o.n., dado um ponto $A\left(x_A, y_A\right)$ e um vetor $\vec{u}\left(u_1, u_2\right)$, a reta que contém o ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$ é definida pela condição:

$$(x, y) = \left(x_A, y_A\right) + k\left(u_1, u_2\right),\ k \in \mathbb{R}$$

Ao vetor $\vec{u}$ chamamos *vetor diretor da reta.*

2. Considera, num referencial o.n., a reta definida por $(x, y) = (6, -15) + k(3, 1),\ k \in \mathbb{R}$.

   2.1. Escreve as coordenadas de um ponto da reta com abcissa diferente de 6.

   2.2. Escreve as coordenadas de um ponto da reta cuja ordenada é -10.

   2.3. Escreve as coordenadas de um ponto da reta pertencente ao 1.º quadrante .

   2.4. Justifica que o ponto $(0, -17)$ pertence à reta.

   2.5. Calcula o declive da reta.

   2.6. Estabelece uma relação entre o declive da reta e as coordenadas do vetor diretor da reta.

   2.7. Escreve o declive da reta $(x, y) = \left(x_A, y_A\right) + k\left(u_1, u_2\right),\ k \in \mathbb{R}$, sendo $u_1 \neq 0$.

Equação vetorial de uma reta do espaço

Num referencial o.n., dado um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, a reta que contém o ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$ (vetor diretor), é definida pela condição:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3),\ k \in \mathbb{R}$$

3.

3.1. Define por uma equação vetorial a reta que contém os pontos de coordenadas $(1, -1, 3)$ e $(0, 0, 2)$.

3.2. Define por uma equação vetorial o eixo Oz.

3.3. Verifica se o ponto $P(-1, -2, -3)$ pertence à reta definida por:
$(x, y, z) = (3, 0, -3) + k(2, 1, -3),\ k \in \mathbb{R}$

4. Abre o projeto de *Python* Equação vetorial da reta no plano.ipynb que permite obter uma equação vetorial da reta no plano, conhecidas as coordenadas de dois pontos da reta.

Altera o programa para que seja possível obter:

4.1. A equação reduzida de uma reta do plano, conhecidas as coordenadas de dois pontos dessa reta.

4.2. Uma equação vetorial de uma reta do plano, conhecida a sua equação reduzida, ou seja, o valor do declive (m) e da ordenada na origem (b).

4.3. A equação reduzida de uma reta do plano, conhecida uma equação vetorial dessa reta (ou seja, as coordenadas de um ponto e do vetor diretor).

4.4. Uma equação vetorial de uma reta do espaço, conhecidas as coordenadas de dois pontos dessa reta.

Tarefa 16

Equação vetorial da reta

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se com esta tarefa que os alunos compreendam o conceito de equação vetorial de uma reta a partir da colinearidade de vetores. Deve ser clarificado na discussão global que o ponto e o vetor diretor não são escolhas únicas, mas que também não são arbitrárias. Deve ser, ainda, trabalhada a similaridade das equações vetoriais no plano e no espaço.

Propõe-se que a equivalência entre equações reduzidas da reta no plano e a correspondente equação vetorial, bem como a obtenção de pontos a partir da equação da reta possa ser operacionalizado propondo aos alunos a escrita de programas em *Python*. Também num contexto de programação em *Python*, é ainda proposto que os alunos obtenham diferentes equações da reta, quando é definida por dois pontos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Colinearidade de vetores e alguma familiaridade com programas simples escritos na linguagem *Python*.

Materiais e recursos: Computador com acesso à internet.

Notas e sugestões:

O recurso ao GeoGebra e à criação de um seletor pretende dar um suporte visual ao parâmetro da equação vetorial que permite gerar vetores colineares com o vetor diretor da reta. Na discussão com os alunos o GeoGebra permite também ilustrar as relações entre o declive e um vetor diretor de uma reta no plano, bem como no 3D obter representações algébricas de retas no espaço, que são apresentadas na forma vetorial.

Poderá ser necessário clarificar junto dos alunos que no Geogebra os vetores devem ser designados por uma letra minúscula e que o produto de um escalar por um vetor, por exemplo o produto de “k” por “u”, no GeoGebra, deve ser escrito como “k*u”.