OP2 - MODELOS DE FUNÇÕES DE CRESCIMENTO

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Modelos de funções de crescimento (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto do Ensino Profissional

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/

Data:

Lisboa, junho de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO OP2 - Modelos de Funções de Crescimento

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2,5	Tarefa 1 Fazer contas à vida…	Modelos de funções de crescimento linear	• Definir e compreender modelos discretos e contínuos de crescimento populacional.	Trabalho individual ou a pares, orientado pelo professor. Correção item a item	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2,5	Tarefa 2 Continuar a fazer contas à vida…	Modelos de funções de crescimento linear	• Definir e compreender modelos discretos e contínuos de crescimento populacional.	Trabalho individual ou a pares, orientado pelo professor.	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Organização do trabalho dos alunos • Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

3	Tarefa 3 Lendas,Trigo e Xadrez…	Modelos de funções de crescimento exponencial	• Reconhecer e estudar modelos de funções de crescimento exponencial.	Trabalho a pares, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
3	Tarefa 4 Onde está o modelo exponencial?	Modelos de funções de crescimento exponencial	• Reconhecer e estudar modelos de funções de crescimento exponencial.	Trabalho a pares, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

3	Tarefa 5 À descoberta do número e (experiência de Bernoulli)...	Modelos de funções de crescimento exponencial	• Reconhecer e estudar modelos de funções de crescimento exponencial.	Trabalho individual ou a pares, orientado pelo professor.	• Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
3	Tarefa 6 Vendas Online: Quando o carrinho de compras vira um foguete!	Modelos de funções de crescimento exponencial	• Comparar o crescimento linear com o crescimento exponencial através do estudo de progressões aritméticas e geométricas.	Trabalho a pares, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recursos sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

3,5	Tarefa 7 Logaritmos: quando a Terra e os ouvidos tremem	Modelos de funções de crescimento logarítmico	• Reconhecer e estudar modelos de função de crescimento logarítmico.	Trabalho a pares, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recursos sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2,5 2	Tarefa 8 Modelo exponencial vs Modelo logístico Debate, após pesquisa prévia pelos alunos, sobre os pontos comuns e distintivos entre os modelos de funções de crescimento de Malthus e de Verhulst.	Modelos de funções de crescimento logístico. Comparação dos Modelos de funções de crescimento.	• Reconhecer e estudar modelos de função de crescimento logarítmico. • Comparar as funções de crescimento linear, exponencial, logarítmico e logístico.	Trabalho a pares, ou em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Recursos sistemático à tecnologia • Práticas enriquecedoras e criatividade • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Tarefa 1

Fazer contas à vida…

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é iniciar o estudo de modelos discretos de funções de crescimento, recorrendo a situações próximas da realidade dos alunos, como a compra de um carro, depósitos bancários com juros simples e o trabalho em regime de part-time, com um salário representado por uma função real de variável natural. Paralelamente, pretende-se que os alunos desenvolvam o pensamento computacional através da utilização de Python, analisando, interpretando e adaptando o programa apresentado a diferentes contextos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Termo geral de uma sucessão.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e/ou computador.

Notas e sugestões:
A realização da tarefa, nos itens em que se pretende trabalhar o pensamento computacional, poderá suscitar dificuldades que poderão ser colmatadas com discussão colaborativa, razão pela qual se sugere que a tarefa seja implementada a pares ou em grupo de três.
Na pergunta 3.1. o professor deve sugerir aos alunos que pesquisem quais as taxas dos descontos, IRS e Segurança Social (SS), a aplicar ao salário bruto que é referido neste item.

Tarefa 1

Fazer contas à vida…

1. O André pretende comprar um carro a crédito. Fez uma pesquisa de mercado e encontrou a seguinte proposta:
   - valor do carro, 24 000€;
   - sem entrada inicial;
   - prestações mensais de 500€;
   - sem juros.

1.1. Ao fim de 3 meses:

1.1.1. qual é o valor que o André já terá pago, pelo carro?

1.1.2. qual é o valor que ainda falta ao André pagar pelo carro?

1.2. Passados n meses:

1.2.1. qual é o valor que o André já terá pago, pelo carro?

1.2.2. qual é o valor que ainda falta ao André pagar pelo carro e justifica por palavras tuas a tua resolução?

1.3. Utilizando a expressão algébrica do item 1.3., calcula o valor que falta pagar, passados 18 meses.

1.4. Quantos anos demora o André a pagar o carro, com prestações mensais de 500 euros?

2. A Catarina herdou dos avós 20000 euros. Com este dinheiro abriu uma conta num Banco. Depois de uma conversa esclarecedora, sobre os produtos que o banco oferecia, decidiu aplicar os 20000 num depósito a prazo, com as seguintes condições:
   - taxa de juro (líquida), fixa, de 2% por ano, durante o período de vigência do contrato;
   - período de vigência, 25 anos;
   - juros pagos, anualmente, na conta à ordem associada.

2.1. No fim do segundo ano:

2.1.1. qual será o valor de juros (acumulados) que a Catarina receberá?

2.1.2. qual será o valor do capital acumulado pela Catarina?

2.2. Copia o código seguinte para o *Google Colab*.

```
Ci=20000
tx=0.02
n=2
j=Ci*tx*n
Ca=Ci+j
print("Ao fim de", n, "anos, a Catarina recebeu", j," euros de juros e acumula um total de", Ca,"€, na conta.")
```

2.2.1. Utilizando o código anterior, verifica os resultados por ti obtidos nos itens 2.1.1. e 2.1.2.

2.2.2. Ajusta os valores do programa, de forma a poderes completar a tabela seguinte:

Ano	0	1	2	3		7	
Juros acumulados	0	400			2000		
Capital acumulado	20000	20400		21200			24000

2.3. Passados n anos:

2.3.1. qual será o valor de juros acumulados que a Catarina irá receber?

2.3.2. qual será o valor do capital acumulado pela Catarina?

2.4. A Catarina foi ainda presenteada com 5000 euros, oferecidos pela madrinha. Decidiu então que investiria todo o dinheiro recebido (25000€), durante o período máximo possível de vigência do contrato, 25 anos.

Perante esta situação o banco apresentou uma ligeira subida da taxa de juro, passando esta para 2,1%.

Será possível a Catarina acumular um total de 40 000 euros, supondo que nunca levantou qualquer quantia?

Utiliza o código fornecido no item 2.2. para responder a esta pergunta, ajustando os dados de entrada.

3. O Tomás decidiu trabalhar num bar de praia durante os meses de junho, julho e agosto .

O dono do bar apresentou-lhe a seguinte proposta:

- salário bruto mensal (ordenado base) - ordenado mínimo nacional (820€, à data);
- ao qual acresce a comissão de 10% do valor de cadeiras alugadas durante o mês, considerando para o efeito, apenas a situação de aluguer diário de cadeira de praia, com um valor 12 euros.

3.1. Determina o valor do salário líquido mensal do Tomás, caso não receba nenhuma comissão.

Nota: Tem em atenção os descontos (SS e IRS) a realizar.

3.2. Escreve um modelo matemático que represente o valor acumulado (salário líquido e comissões), $A(n)$, pelo Tomás no final deste período, onde n representa o número de cadeiras alugadas durante os três meses.

3.3. O Tomás tem como objetivo acumular, pelo menos, 3600 euros, durante os três meses em que vai trabalhar. Quantas cadeiras precisa de alugar, no mínimo, durante esse período?

Tarefa 2

Continuar a fazer contas à vida…

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa permite desenvolver competências essenciais como a modelação matemática, através da construção e interpretação de expressões algébricas que representam situações do quotidiano empresarial; o raciocínio algébrico e gráfico, ao analisar funções lineares e inequações associadas a vendas, custos e lucros; a interpretação e representação gráfica de dados, com recurso à calculadora gráfica; e a resolução de problemas e tomada de decisões fundamentadas, com base em modelos matemáticos ajustados a contextos realistas. Pretende-se que estimule ainda a capacidade de prever, estimar e justificar conclusões com base em padrões de crescimento e análise de dados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Termo geral de uma sucessão e representação gráfica de funções.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e/ou computador.

Notas e sugestões:

No item 1.2.2., embora se utilizem modelos contínuos para representar graficamente as funções G(n) e V(n), é importante ter em conta que, no contexto da situação, a variável n — número de cadeiras produzidas ou número de cadeiras vendidas, respetivamente — só pode assumir valores inteiros não negativos. Assim, a interpretação dos gráficos deve restringir-se a esses pontos discretos do domínio, mesmo que a representação gráfica das funções seja feita com modelos contínuos. Esta abordagem permite visualizar com maior clareza a tendência do crescimento e o ponto de equilíbrio entre os gastos e as vendas, mas a tomada de decisão deve considerar **apenas os valores inteiros de n**, coerentes com o contexto do problema.

Tarefa 2

Continuar a fazer contas à vida…

1. Um empresário de uma fábrica de móveis, realizou um estudo de mercado para analisar a viabilidade de produção de um determinado tipo de cadeiras.

   Desse estudo resultou que:

   - as despesas fixas mensais (contas de água, luz e internet, arrendamento do espaço, materiais de escritório, etc.) eram de 1500 euros;
   - os custos (matéria-prima, mão de obra, gastos gerais de produção, embalagens, etc.) são de 25 euros na produção de cada cadeira ;
   - as cadeiras são produzidas, exclusivamente, por encomenda;
   - cada cadeira será vendida por 75 euros;
   - o lucro é a diferença entre o valor das vendas e o valor dos gastos (soma da despesa e do custo).

1.1. Escreve um modelo matemático que represente:

1.1.1. o valor dos gastos mensais, $G(n)$, onde n é o número de cadeiras produzidas para venda;

1.1.2. o valor das vendas, $V(n)$, onde n é o número de cadeiras vendidas;

1.1.3. o valor do lucro, $L(n)$, onde n é o número de cadeiras vendidas.

1.2. Utiliza a tua calculadora gráfica na resolução deste item.

1.2.1. Reproduz no espaço ao lado, utilizando o mesmo referencial cartesiano, as representações gráficas das funções $G(n)$ e $V(n)$, tendo em conta o contexto da situação.

1.2.2. Qual é o número mínimo de cadeiras que a fábrica de móveis do empresário tem de produzir e vender, por mês, para não ter prejuízo.

1.3. O empresário pretende aumentar a capacidade da fábrica para expandir o negócio. Assim, os gastos fixos vão aumentar para 1750 €.

1.3.1. Quantas cadeiras devem ser produzidas e vendidas para garantir um lucro mínimo de 2500 €, por mês?

Sugestão: para resolveres este item poderás percorrer as seguintes etapas:

- Mostrar que $G(n) = 1750 + 25\,n$;
- Mostrar que $L(n) = 50n - 1750$;
- Escrever $L(n) \geq 2500$;
- Determinar a solução.

1.3.2. O empresário está a considerar uma promoção que reduz o preço de venda de cada cadeira em 20%. Qual seria o novo número mínimo de cadeiras a vender mensalmente para não haver prejuízo?

2. A *NatureBoost*, marca de suplementos alimentares naturais, iniciou há um ano uma estratégia de crescimento digital. Com o objetivo de angariar novos consumidores online, a marca decidiu investir em publicidade nas redes sociais. Ao longo de 12 meses, a *NatureBoost* investiu em publicidade digital, começando com 2000 euros no primeiro mês e aumentando o orçamento em 500 euros, a cada mês.

A tabela seguinte apresenta os dados mensais de investimento em publicidade ao longo dos primeiros 12 meses, bem como o valor realizado nas vendas, com exceção dos meses de abril, agosto e novembro.

Mês	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
Investimento em publicidade	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500
Vendas	10000	12500	14800		19500	21700	23800		27000	28000		29000

2.1. Constrói uma representação gráfica, com os dados da tabela, que relaciona as vendas com o investimento em publicidade.

2.2. Encontra um modelo matemático, que melhor se ajuste aos dados da tabela, que relacione o valor das vendas em função do valor investido em publicidade.

Sugestão: utiliza a calculadora gráfica e verifica qual é o modelo de regressão que melhor se ajusta.

2.3. Utilizando o modelo de regressão encontrado na questão anterior, estima os valores em falta, arredondados à unidade (completando a tabela).

2.4. O gestor financeiro depois de analisar os dados da tabela informou: "Estou disposto a aprovar um orçamento para publicidade, na casa dos 10000 euros, desde que se preveja um retorno das vendas, acima dos 40000 euros. Mantendo-se o padrão definido pelos dados da tabela, será que o gestor vai ou não aprovar o orçamento para a publicidade?

Sugestão: para resolveres este item poderás percorrer as seguintes etapas:

- Representar graficamente o modelo encontrado no item 2.2. ;
- Equacionar o problema ;
- Determinar a solução.

Tarefa 3

Lenda, Trigo e Xadrez…

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa "Lendas, Trigo e Xadrez…" baseia-se na famosa lenda do xadrez, segundo a qual o inventor Sissa pede como recompensa ao rei grãos de trigo dispostos no tabuleiro de forma duplicada. Os alunos são desafiados a completar tabelas, descobrir expressões algébricas e representar graficamente estes dados. Também se analisa um novo cenário de crescimento, o exponencial.
A tarefa sugere a exploração de conceitos de progressões geométricas e aritméticas, funções e representações gráficas, promovendo o pensamento crítico e a ligação entre matemática e narrativas culturais.

Conhecimentos prévios dos alunos: Operações com potências, termo geral de uma sucessão.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e/ou computador.

Notas e sugestões:
Na implementação da tarefa "Lendas, Trigo e Xadrez…", é importante que o professor contextualize a lenda de forma apelativa, podendo iniciar com a visualização do vídeo sugerido ("A Bomba Atómica do Trigo") para despertar o interesse e facilitar a compreensão do problema. Recomenda-se que a exploração da tabela inicial seja feita em conjunto, incentivando a observação de padrões e a construção da expressão algébrica $P(n) = 2^{n-1}$. O uso de calculadoras gráficas ou do GeoGebra deve ser encorajado para que os alunos visualizem o crescimento exponencial graficamente.
Os alunos devem pesquisar na Internet o valor da produção mundial de trigo em 2023.
O professor poderá promover momentos de debate, especialmente nas questões que envolvem a comparação com a produção mundial de trigo, incentivando estimativas e raciocínio crítico.
No item 2.5. o professor, para determinar o valor total do número de grãos de trigo em todas as casas do tabuleiro, poderá adotar diferentes estratégias: recorrer, por

exemplo, a um programa em Python ou a uma folha de cálculo, ou deduzir a fórmula a partir da história do matemático Carl Gauss, quando era criança.

Tarefa 3

Lenda, Trigo e Xadrez…

1. Visualiza o seguinte vídeo Isto é Matemática - T08E13 - "A Bomba Atómica do Trigo".

Conta a lenda que o xadrez foi inventado na Índia, há mais de 1500 anos. O Rajá indiano (rei) ficou tão fascinado com a invenção de Sissa e as infinitas variações de movimentos possíveis, que resolveu recompensar o inventor.
Sissa, pede ao rei um pagamento em grãos de trigo, calculado de forma simples: um grão na primeira casa do tabuleiro, dois grãos na segunda, quatro na terceira e assim por diante, duplicando a quantidade em cada casa.
Inicialmente, o pedido é visto como modesto, e o rei sugere que Sissa peça algo de maior valor, mas ele insiste na exatidão do pedido.
O rei então ordena que os grãos de trigo sejam trazidos. Mas, à medida que os matemáticos e sábios do reino calculam a quantidade necessária, a imensa escala da recompensa começa a ser revelada. O que parecia simples torna-se um desafio impossível: duplicar os grãos para cada casa do tabuleiro leva a números inimagináveis.

Sugestão: Podes utilizar o código QR para aceder a um programa em Python e, ou usar a ligação Trigo.ipynb determinar a quantidade de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro, fazendo os ajustes que considerares necessários.

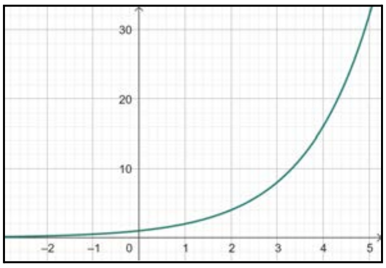
1.1. Completa a tabela seguinte, determinando a quantidade de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro.

Número da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grãos (por casa)	1	2	4							

1.2. Escreve uma expressão algébrica, $P(n)$, que permite calcular o número de grãos de trigo para qualquer casa de ordem n.

1.3. Utilizando a calculadora gráfica ou o Geogebra, representa os pares ordenados correspondentes ao número da casa e número de grãos por essa casa. Por exemplo, (3 , 4) corresponde aos 4 grãos da casa 3.

A função $P(n)$ (número de grãos na n-ésima casa) representa uma **função exponencial** pelo facto de ser uma função de base constante (nesta situação, base 2) e expoente variável (n), cuja representação gráfica, quando a base é maior que 1, apresenta esta forma:



$$f: x \rightarrow a^{x},\ a > 1$$

1.4. Escreve o número de grãos correspondente à última casa do tabuleiro?

1.5. Completa a tabela seguinte, com o número total (acumulado) de grãos de trigo ao longo de cada casa do tabuleiro.

Número da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grãos (por casa)	1	2	4							
Número total de grãos	1	3	7							

1.6. Compara as últimas duas linhas da tabela. Escreve a expressão algébrica, $T(n)$, que te permite calcular o número total (acumulado) de grãos para a casa de ordem n.

1.7. Escreve o número total de grãos acumulados até à última casa do tabuleiro.

1.8. Supondo que 25 grãos são aproximadamente 1 grama, será que a produção mundial de 2023 seria suficiente para pagar a Sissa? Explica a tua resposta.

2. Se o pedido de Sissa ao rei fosse:

- 1 grão pela primeira casa;
- 3 grãos pela segunda casa;
- 5 pela terceira casa;
- e assim sucessivamente, somando dois ao número de grãos da casa anterior.

2.1. Completa a tabela seguinte, determinando a quantidade de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro, de acordo com este novo pedido.

Número da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grãos (por casa)	1	3	5							

2.2. Utilizando a calculadora gráfica ou o Geogebra, representa os pares ordenados correspondentes ao número da casa e número de grãos dessa casa.

2.3. Escreve uma expressão algébrica, $S(n)$, que permite calcular o número de grãos de trigo para qualquer casa de ordem n.

2.4. Explica se nesta situação podemos afirmar que se trata de um crescimento exponencial ou de um crescimento linear.

2.5. (Aprofundamento) Qual será o total de grãos acumulados até à última casa do tabuleiro?

Tarefa 4

Onde está o modelo exponencial?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Na tarefa aborda-se o crescimento exponencial em dois contextos reais: a propagação do jacinto-de-água no rio Ave e a disseminação de uma publicação nas redes sociais. Os alunos analisam dados, utilizam a calculadora gráfica ou GeoGebra para modelar os dados através de funções exponenciais, interpretam expressões algébricas e representações gráficas e fazem previsões. Pretende-se com esta tarefa promover a compreensão de funções exponenciais, o uso de ferramentas tecnológicas e a aplicação da matemática em situações da vida real e da atualidade, articulando-a com temas ambientais e digitais.

Conhecimentos prévios dos alunos: Utilização de calculadora gráfica e/ou software de representação gráfica para modelação.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e/ou computador.

Notas e sugestões:

Recomenda-se começar a aula com uma troca de ideias sobre espécies invasoras e fenómenos virais, tendo em vista tornar os temas relevantes para os alunos. É útil trabalhar a leitura e interpretação de tabelas e gráficos em pequenos grupos, recorrendo ao GeoGebra ou à calculadora gráfica.

O professor pode orientar os alunos na identificação da base e do fator de crescimento de uma função exponencial, reforçando a diferença face a crescimentos lineares. Pode ser promovida a interpretação crítica dos resultados obtidos, bem como a ligação aos impactos ambientais e sociais envolvidos.

A segunda parte da tarefa envolve a temática do marketing nas redes sociais, temática atual e que poderá vir a motivar os alunos. Sugere-se também que os resultados sejam apresentados oralmente tendo como objetivo o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos.

Tarefa 4

Onde está o modelo exponencial?

1. O jacinto-de-água (Eichhornia crassipes) é a planta aquática mais conhecida, em Portugal, por invadir rios e lagos. Esta planta é nativa da América do Sul e foi introduzida em vários países como planta ornamental, mas rapidamente se tornou invasora. A invasão desta espécie é uma preocupação ambiental em Portugal, e na União Europeia, pois afeta a biodiversidade local e dificulta o uso dos recursos hídricos.

Podes consultar informação complementar em:

- https://www.jn.pt/129208555/rio-ave-volta-a-ficar-coberto-com-jacintos-de-agua/
- https://www.cm-viladoconde.pt/comunicacao/gabinete-de-comunicacao/noticias/noticia/camara-municipal-alerta-arh-do-norte-para-forte-presenca-de-jacinto-de-agua-no-rio-ave

1.1. Em Vila do Conde, uma equipa de biólogos está a acompanhar o crescimento da planta jacinto-de-água, no rio Ave. Os biólogos encontraram um pequeno "nicho" de 13 plantas e iniciaram o estudo da sua reprodução, nessa zona, fazendo observações sistemáticas, em intervalos de tempo regulares, que se encontram registados na tabela seguinte:

Número da observação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número total de plantas	13	26	50	103	199	400	789	1702	3415	6800

1.1.1. Recorrendo à calculadora gráfica (ou o Geogebra) representa os pares ordenados correspondentes ao número da observação e respetivo número de plantas.

1.1.2. Usa a calculadora gráfica, e com base nos valores da tabela, qual será o tipo de modelo (linear ou exponencial) que melhor se ajusta ao crescimento do número de plantas? Explica a tua opção/escolha.

1.1.3. Escreve a expressão algébrica da função obtida pela calculadora, que modela a situação. Apresenta os valores arredondados às décimas.

À função cuja expressão analítica é da forma $f(x) = ab^x$, dá-se o nome de função exponencial.

1.1.4. Qual é o número esperado de plantas na décima segunda observação, mantendo-se o padrão de crescimento anteriormente apresentado? Utiliza a expressão algébrica obtida no item anterior.

1.1.5. A partir de que observação é expectável um número de plantas superior a 800 000. Resolve graficamente.

1.2. Supondo que o intervalo de tempo entre cada observação foi de 10 dias, e que a primeira observação aconteceu no dia 1 de abril de 2024, quantas plantas existirão a 9 de junho de 2024? Justifica a tua resposta.

2. O crescimento do número de seguidores em redes sociais como Instagram ou TikTok, de um conteúdo viral ou uma estratégia de marketing eficaz, pode ser bem modelado por uma função exponencial.

2.1. Uma marca pretende publicitar um produto, recorrendo a influenciadores. Um influenciador lança uma publicação que inicialmente alcança 5000 pessoas. Com as partilhas e interações, em cada dia o número de pessoas já alcançadas é incrementado em 25%, relativamente ao dia anterior.

2.1.1. Completa o preenchimento da tabela seguinte, aproximando sempre cada resultado às unidades:

Dias (após a publicação)	0	1	2	3	4	7	10	14
Número total de pessoas	5000				12 208			

2.1.2. Recorre à calculadora gráfica para ajustar uma função exponencial aos pontos representados. Escreve a expressão algébrica da função exponencial obtida pela calculadora. Apresenta os valores arredondados às centésimas.

2.1.3. Qual é o número esperado de pessoas alcançadas pela publicação no vigésimo dia, mantendo-se o padrão de crescimento anteriormente apresentado? Utiliza a expressão algébrica obtida no item anterior.

2.1.4. O gestor de publicidade espera que cada influenciador tenha um alcance mínimo de 4 milhões de pessoas no primeiro mês (30 dias). Caso não atinja este valor, o influenciador não será utilizado em campanhas futuras. Será este influenciador capaz de alcançar esse objetivo? Resolve graficamente e explica a tua resposta.

Tarefa 5

À descoberta do número e (experiência de Bernoulli)…

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos exploram a origem e o significado do número e, associado ao crescimento exponencial e aos juros compostos. A partir da fórmula dos juros compostos, os alunos observam o comportamento do capital acumulado à medida que se aumenta a frequência de capitalização ao longo de um ano. Concretamente, vão completar o preenchimento de uma tabela com valores aproximados de $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, verificando que estes se aproximam de um valor, o número e. A atividade culmina com a representação gráfica da função $f(x) = e^x$ e a análise das suas principais propriedades. Finalmente, exploram-se comparações entre e^x e a^x (com $a > 1$).

Conhecimentos prévios dos alunos: Potências com expoentes reais, interpretação de tabelas e análise gráfica.

Materiais e recursos: Calculadora científica ou gráfica, computador ou dispositivo móvel com acesso à internet para explorar a apliqueta GeoGebra, podendo também recorrer ao uso de uma folha de cálculo.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a atividade seja iniciada com uma breve contextualização sobre os juros compostos e a sua aplicação prática no dia a dia, de forma a despertar o interesse dos alunos. Na exploração da tabela, deve-se orientar os alunos para que observem como os valores de $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ se vão aproximando de um número à medida que o número de capitalizações k aumenta, conduzindo-os à descoberta do número *e*. Durante esta fase, é importante garantir o correto uso da calculadora e o arredondamento adequado dos valores.

Na análise do gráfico de $f(x) = e^x$, deve-se incentivar a identificação das principais propriedades da função, como o domínio, contradomínio, monotonia, continuidade e limitação (intuitiva). Recomenda-se, ainda, a utilização da apliqueta do GeoGebra para comparar a função e^x com outras do tipo a^x e promover uma reflexão sobre o efeito do valor da base. Finaliza-se com a sistematização dos conceitos, reforçando a relevância do número *e* em contextos de crescimento contínuo.

Tarefa 5

À descoberta do número e (experiência de Bernoulli)…

Nos investimentos financeiros com juros compostos, o montante investido aumenta exponencialmente ao longo do tempo. A cada período de capitalização, o valor investido inicialmente cresce ao acumular com os juros, de acordo com a seguinte fórmula: $C_a = C_i \times \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{k\times n}$ onde,

- C_a: Capital acumulado ao fim de n anos de capitalização
- C_i: Capital inicial
- t: taxa de juro anual (escrita na forma decimal)
- k: número de períodos de capitalização, num ano
- n: número de anos de capitalização

Já no século XVII, Jakob Bernoulli (1655-1705), matemático suiço, estudou o que acontece se aumentarmos a frequência com que os juros são capitalizados (anual, mensal, diariamente, etc.) até ao limite, de forma contínua.
Para esta situação específica, vamos considerar $C_i = 1; t = 100\%$ e $n = 1$.

Substituindo na fórmula obtemos:

$$C_a = 1 \times \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k\times 1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}.$$

Jakob Bernoulli mostrou que $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}$ tende a estabilizar para um determinado valor, quando o k é muito grande ($k \to +\infty$). Vamos (re)descobrir esse valor.

1. Completa a tabela seguinte, apresentando os valores de $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}$ arredondados com nove casas decimais.

k (n.º de capitalizações feitas durante um ano)	$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}$
1	
2	
3	
4	
12	
24	
365	
8760	
525600	
31536000	
315360000	

2. Escreve, com seis casas decimais, o número para o qual tende a estabilizar o valor de $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$, quando k é muito grande.

Este número (irracional, aproximadamente 2,718281828459…) representa-se pela letra e. É conhecido como **número de Neper** ou **constante de Euler.** Foi descoberto como uma constante matemática associada ao crescimento exponencial e às funções logarítmicas que virás a estudar ainda neste módulo. A sua descoberta não foi obra de uma única pessoa. O seu estudo e aplicação envolveu vários matemáticos ao longo do tempo (Neper, Bernoulli e Euler, entre outros).

3. Utilizando a calculadora gráfica, faz um esboço da representação gráfica de $f(x) = e^{x}$.

   3.1. Completa a tabela seguinte, tendo como referência a análise do gráfico obtido no item anterior:

	Domínio	Contradomínio	Monotonia	Continuidade	Limitação	
					x tende para -∞	x tende para +∞
$f(x) = e^{x}$						

4. Será que alguma das propriedades estudadas para a função e^{x} (ver a tabela do item 3.1.) se altera quando consideramos as funções do tipo a^{x}, com $a > 1$? Podes recorrer à apliqueta https://www.geogebra.org/m/cxauttgt para responderes à questão.

Tarefa 6

Vendas Online: Quando o carrinho de compras vira um foguete!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos analisam duas situações: o crescimento de receitas no setor do comércio eletrónico, com foco na plataforma *Shein*, e o aumento do número de veículos elétricos (BEV) em Portugal. Através da leitura de gráficos e tabelas, os alunos devem identificar padrões de crescimento, construir modelos matemáticos (lineares ou exponenciais), e realizar previsões baseadas nesses modelos. A tarefa tem em vista o desenvolvimento de competências de interpretação de dados reais e aplicação de funções exponenciais em contextos práticos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Interpretação e construção de tabelas e gráficos, conhecimentos básicos sobre funções exponenciais, utilização da calculadora gráfica para ajuste de modelos e resolução gráfica de equações simples.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica, computador ou dispositivo móvel, com acesso à internet para consulta de fontes complementares sobre comércio eletrónico ou vendas de veículos elétricos.

Notas e sugestões:

Recomenda-se que a exploração da tarefa se inicie com uma breve contextualização sobre o crescimento do comércio eletrónico e a transição energética no setor automóvel, para despertar o interesse dos alunos e aproximar a Matemática da realidade. Deve-se orientar os alunos na leitura crítica dos dados apresentados nas tabelas, conduzindo-os a identificar se o crescimento observado se enquadra num modelo linear ou exponencial, promovendo a compreensão dos modelos. Durante a construção dos modelos, com auxilio da calculadora gráfica, é importante garantir que todos os alunos dominem os procedimentos necessários e compreendam o significado dos parâmetros obtidos.

Na parte final da tarefa, ao abordar a limitação dos modelos, especialmente a extrapolação de dados para anos longínquos como 2050, deve-se fomentar a reflexão crítica sobre os limites da Matemática na previsão do futuro.

Tarefa 6

Vendas Online: Quando o carrinho de compras vira um foguete!

1. O *e*-commerce, ou comércio eletrónico, refere-se à compra e venda de produtos pela Internet, envolvendo transações comerciais realizadas por meio de plataformas online. Este modelo de negócio não se resume apenas à criação de um site, mas abrange uma estrutura digital integrada que facilita a venda, o atendimento ao cliente e diversas automações, como marketing e controlo de stock. Este contexto é essencial para compreender o funcionamento de plataformas como a *Shein*, a *Temu* e a *Amazon*.

Mudanças no *e-commerce*: Shein perde fôlego e Temu surge como nova favorita
Fonte: Marketeer em 16:59, 24 Out, 2024

O crescimento das receitas da retalhista online Shein abrandou para 23% no primeiro semestre deste ano, em comparação com os 40% do ano passado. Já a concorrente Temu apresenta resultados em profunda expansão e um enorme crescimento de popularidade.
(...)
A Shein, que vende tops de 5 euros e vestidos de 10 euros, registou um rápido crescimento impulsionado pelo seu modelo de negócio de baixo custo, que consiste em enviar encomendas para clientes de todo o mundo diretamente das fábricas da China.

Estatísticas de receita e uso de Shein para 2024
Fonte: Gilmario, 22 de outubro de 2024
Em 2023, a Shein apresentou uma estimativa de US$ 32,2 biliões nas vendas em todo o mundo.
Segundo o padrão de crescimento apresentado, os analistas fizeram previsões para que, no final de 2024, fosse atingido o valor de receita de US$ 50 biliões, como se apresentado na tabela seguinte:

	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Receita Shein (US$ biliões)	0,61	1,55	1,99	3,15	9,81	15,7	22,7	32,2	50

1.1. Assumindo que a previsão dos analistas está correta, identifica o ano com o maior crescimento absoluto em relação ao ano anterior. Justifica a tua resposta.

1.2. Com base nos valores da tabela, qual será o tipo de modelo (linear ou exponencial) que melhor pode descrever o crescimento das receitas. Explica a tua opção/escolha.

Sugestão: Considera o ano 2016, o ano zero, 2017 ano 1 e assim sucessivamente, e constrói uma nova tabela e encontra, recorrendo à calculadora gráfica, o modelo que melhor se ajusta aos dados.

1.3. Escreve uma expressão analítica da função exponencial ($f(x) = ab^x$ ou $f(x) = ae^{bx}$) que melhor se ajusta aos valores da tabela. Apresenta os valores dos parâmetros a e b arredondados às milésimas.

1.4. Supondo que se mantém o padrão de crescimento, encontrado no item 1.3., estima qual será o valor da receita, em biliões de US$, esperado para 2026? Apresenta os valores arredondados às milésimas.

1.5. Em que ano se prevê que a receita seja superior a US$ 573 biliões, mantendo-se o mesmo padrão de crescimento e usando o modelo de crescimento cuja expressão analítica é $y = 0,74928 \times 1,73907^x$?

2. A tabela seguinte apresenta a evolução do número de veículos elétricos (BEV- Battery Electric Vehicles) em Portugal, de 2010 a 2024, segundo a Associação de Utilizadores de Veículos Elétricos:

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Nº de veiculos	950	1303	1594	2055	2459	3411	4838	8005	14391	22834	33749	52292	80271	129929	190665

Fonte: https://www.uve.pt/page/parque-ve-2024/

2.1. Recorrendo à calculadora gráfica, encontra um modelo exponencial, na forma$y = ab^x$ que melhor se ajuste aos dados da tabela apresentada. Considera que $x = 0$ corresponde ao ano de 2010, $x = 1$ corresponde ao ano de 2011 e, assim sucessivamente. Apresenta os valores dos parâmetros a e b com aproximação às centésimas

2.2. Recorre ao modelo encontrado no item 2.1. e apresenta o valor estimado do número de veículos do Parque de BEV em Portugal, no ano de 2027.

2.3. Consideras que uma previsão do número de veículos BEV em Portugal para o ano 2050 realizada utilizando este modelo é fiável? Justifica a tua resposta.

Tarefa 7

Logaritmos: quando a Terra e os ouvidos tremem

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa explora-se o conceito e a aplicação de funções logarítmicas em contextos reais como a perceção sensorial, os sismos e a intensidade sonora. Os alunos são desafiados a analisar tabelas, construir e interpretar modelos logarítmicos, compreender o comportamento gráfico da função logaritmo e aplicar este conhecimento ao cálculo de magnitudes sísmicas e intensidade sonora. Através de situações concretas, reforça-se o papel dos logaritmos na compressão de escalas associadas a fenómenos em que se verifica uma grande amplitude de valores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Interpretação de tabelas e gráficos, resolução gráfica de equações com exponenciais, utilização da calculadora gráfica.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica, vídeo: "Isto é Matemática – Tenho um Logaritmo no Canto do Olho", e acesso à Internet para consulta de informação complementar sobre sismos ou som.

Notas para professor:

Aconselha-se iniciar a aula com o vídeo sugerido, pois é uma excelente forma de introduzir o tema de forma acessível e prática. Durante a resolução dos itens, o professor deve orientar os alunos a compreenderem a natureza dos fenómenos que seguem um comportamento logarítmico, em oposição a modelos lineares ou exponenciais. É fundamental esclarecer os erros de interpretação comuns, como os apresentados nas respostas dos alunos fictícios, no item 1.2..

Na componente gráfica, o professor deve apoiar a leitura e interpretação do gráfico de $f(x) = ln(x)$, destacando domínio, contradomínio, monotonia, continuidade e limitação (intuitiva). Na aplicação prática à escala de Richter e à intensidade sonora, recomenda-se reforçar o significado das escalas logarítmicas como forma de "traduzir", para números mais compreensíveis, grandezas que variam em ordens muito elevadas.

Por fim, a tarefa deve ser concluída com uma reflexão sobre a relevância das funções logarítmicas na interpretação e estudo de fenómenos naturais e no quotidiano, com particular atenção para as limitações destas escalas em situações extremas, como os grandes sismos. O objetivo final é que os alunos reconheçam a utilidade das funções logarítmicas como ferramentas para descrever fenómenos complexos e para apoiar a tomada de decisões com base em dados numéricos.

Tarefa 7

Logaritmos: quando a Terra e os ouvidos tremem

Os modelos com funções logarítmicas são essenciais para descrever fenómenos em que o crescimento ocorre de forma cada vez mais lenta à medida que a variável independente aumenta, sendo amplamente utilizados em diversas áreas, como economia, marketing, ciências naturais e engenharia. Aplicam-se, por exemplo, à perceção de preços pelos consumidores, à medição da magnitude de sismos, à intensidade do som em decibeis e à escala de pH, permitindo uma melhor compreensão e comparação de variações significativas em grandezas físicas e psicológicas.

1. Antes de começares a resolver este item, visualiza o vídeo que é um excerto de "Isto é Matemática - Tenho um Logaritmo no Canto do Olho - - T04E01".

   1.1. Completa a tabela seguinte (de acordo com as informações do vídeo):

Massa (em grama)	100	1000		
Nível de sensação	1	2		4

   1.2. Foi pedido aos alunos de uma turma que indicassem um modelo que melhor se ajustasse aos valores da tabela anterior, e foram obtidas as respostas seguintes:

   Aluno A - Trata-se de um modelo linear uma vez que o nível de sensação aumenta, quando o peso aumenta, podendo a situação ser modelada pela função: $f(x) = 10x$.

   Aluno B - Trata-se de um modelo exponencial uma vez que o peso aumenta ("muito rápido") quando o nível de sensação aumenta, podendo a situação ser modelada pela função: $g(x) = 10 \times 10^{x}$.

Aluno C - Não se trata de um modelo linear, porque as variáveis peso e nível de sensação não são diretamente proporcionais. Enquanto o peso aumenta 10 vezes, o nível de sensação aumenta uma unidade.
Tratar-se-ia de um modelo exponencial se a variável independente fosse o nível de sensação e a variável dependente o peso.
Então, o modelo não pode ser nem linear nem exponencial.

Qual (quais) o(s) aluno(s) que responderam corretamente?

1.3. Recorre à calculadora gráfica, e utilizando os vários modelos de regressão que a calculadora disponibiliza, qual será o modelo de regressão que melhor se ajusta aos valores da tabela.
Escreve a expressão algébrica do modelo que melhor se ajusta (à situação apresentada), com arredondamento às milésimas.

2.

2.1. Utilizando a calculadora gráfica, faz um esboço da representação gráfica de $f(x) = ln(x)$.

2.2. Completa a tabela seguinte, tendo como referência a análise ao gráfico obtido no item 2.1.:

	Domínio	Contradomínio	Monotonia	Continuidade	Limitação	
					x tende para -∞	x tende para +∞
$f(x) = ln(x)$						

2.3. Será que alguma das propriedades estudadas para a função $ln(x)$ (ver a tabela do item 2.2.) se altera quando consideramos as funções do tipo $g(x) = log\, x$. Recorre à calculadora gráfica para realizares algumas experiências.

3. Admite que a magnitude M, de um sismo, na escala de Richter, é dada por:

$$M = \frac{2}{3} \log E - 3,25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo.

3.1. Em fevereiro de 2025, ocorreu um sismo no Seixal com magnitude 4,7 (na escala de Richter).

Fonte: :https://www.ipma.pt/pt/media/noticias/news.detail.jsp?y=2025&f=Nota_tecnica_sismo_17022025_seixal_html

Determina a energia libertada, E, pelo sismo do Seixal. Apresenta o resultado na forma de notação científica, arredondado às milésimas.

(Adaptado do Exame de Matemática A de 2009, Ép. especial)

3.2. Em agosto de 2024 ocorreu um sismo em Sines com magnitude 5,3 (na escala de Richter).

Fonte: https://www.ipma.pt/pt/media/noticias/news.detail.jsp?y=2024&f=noticia_sismo_agosto.html)

Sabendo que a diferença entre a magnitude do sismo de Sines e o do Seixal é de 0,6 mostra que a energia libertada pelo sismo de Sines é aproximadamente 8 vezes superior à energia libertada pelo sismo do Seixal.

(Adaptado do Exame de Matemática A de 2009, Ép. especial)

3.3. A ponte Vasco da Gama foi concebida/construída para resistir a um sismo cuja energia libertada seja cinco vezes a do terremoto de Lisboa de 1755. Um geofísico estimou que a energia libertada, E, no sismo de 1755, foi de $4,2 \times 10^{17}$ joules. Qual é a magnitude, M, de um sismo com essa característica?

(Adaptado do Exame de 1998, 2.ª fase, cód.135)

3.4. Comenta a seguinte afirmação: "O terramoto (...) de 1755 (...), com uma magnitude entre 8.8 e 9.0 na escala de Richter, foi 40 vezes superior ao sismo desta segunda-feira (sismo de Sines, agosto de 2024), que não registou vítimas nem estragos."

Fonte: https://rr.pt/noticia/pais/2024/08/26/o-que-tem-em-comum-o-grande-terramoto-de-lisboa-de-1755-e-o-sismo-desta-2-feira/391253/

4. O som é uma onda que se propaga por um meio material que geralmente é o ar. Por exemplo, se uma buzina produz um som de 100 dB de intensidade, será que duas buzinas produzem um som de 200 dB?

Se uma buzina produz 100 dB de nível de intensidade sonora, então duas buzinas produzem, juntas, 103 dB. Por sua vez, três buzinas produzem 104,7 dB e quatro buzinas produziriam 106 dB. Assim, quando duplicamos a fonte geradora de som, aumentamos 3 dB ao nível da intensidade sonora. Se tivéssemos 10 buzinas teríamos 110 dB, ou seja, 10 dB a mais que uma única buzina.

Resumindo:

- duplicando a fonte geradora de som, temos 3 dB a mais
- multiplicando a fonte geradora por 10, temos 10 dB a mais.

4.1. Completa a tabela seguinte, de acordo com as informações do texto.

N.º de buzinas	1	2	3		8	10	100
Nível da intensidade sonora (dB)	100		104,7	106		110	

4.2. O nível da intensidade do som (N, medido em decibéis, dB) em função da intensidade sonora (I, medida em W/m^2), é dado de acordo com a seguinte igualdade: $N(I) = 120 + 10\,log(I)$.

Completa a tabela seguinte, tendo em consideração a igualdade anterior.

Nível da intensidade sonora (dB)	100			110	
Intensidade sonora (W/m^2)		0,02	0,08		1

4.3. Se o nível de intensidade de um concerto de rock for 110 dB, calcula quantas vezes é maior a intensidade sonora desse concerto do que a intensidade do som da buzina considerada no item 4.2.?

Tarefa 8

Modelo exponencial vs Modelo logístico

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se explorar as diferenças entre os modelos de crescimento exponencial e logístico, recorrendo a situações concretas que ilustram a importância de compreender o comportamento dos fenómenos em diferentes fases. Os alunos acompanham, inicialmente, o crescimento da planta invasora jacinto-de-água no rio Ave, analisando dados de campo, aplicando modelos de regressão e interpretando as limitações ambientais ao crescimento exponencial. Posteriormente, aplicam o conceito de crescimento logístico ao lançamento de um produto tecnológico (SmartCap) e ao fenómeno de propagação de informação entre pessoas num evento, consolidando a perceção de que nem todo o crescimento é para sempre e que, em muitos contextos, existe uma saturação natural do sistema.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções exponenciais e suas propriedades. Utilização da calculadora gráfica para regressões e análise de gráficos, interpretação de tabelas e adequação de modelos matemáticos a situações concretas.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica plataforma GeoGebra (para exploração dinâmica da função logística).

Notas para professor:

Esta tarefa é adequada para consolidar o pensamento crítico dos alunos relativamente à escolha do modelo matemático mais adequado para descrever um fenómeno real. Recomenda-se começar pela contextualização ambiental, com o caso do jacinto-de-água, que permitirá discutir as limitações físicas e biológicas ao crescimento, mostrando, na prática, porque é que o modelo logístico é, por vezes, mais adequado que o modelo exponencial.

O professor deve orientar os alunos na análise comparativa entre os dados e as previsões do modelo, incentivando o debate sobre os fatores que provocam o abrandamento do crescimento (limitação de espaço, recursos, competição, entre outros). A introdução do caso do SmartCap reforça a aplicação dos modelos em contexto económico, destacando o impacto de campanhas de marketing e os limites do mercado.

A análise do fenómeno de disseminação da informação num evento deve ser trabalhada como exemplo prático de crescimento logístico com saturação evidente, permitindo que os alunos explorem o comportamento da função e compreendam o conceito de capacidade máxima.

No final, é importante promover um balanço comparativo entre os modelos exponencial e logístico, destacando a relevância de selecionar o modelo adequado, de acordo com as características do fenómeno.

Sugere-se, caso a planificação o permita, a promoção de um debate, após pesquisa prévia pelos alunos, sobre os pontos comuns e distintivos entre os modelos de crescimento de Malthus e de Verhulst.

Reforça-se a utilização criteriosa da calculadora gráfica e o desenvolvimento da capacidade de interpretar os resultados num contexto real.

Tarefa 8

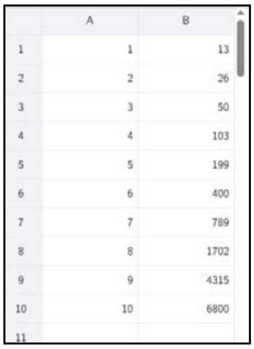
Modelo exponencial vs Modelo logístico

1. Na Tarefa 4, item 1. aprendeste que o jacinto-de-água (Eichhornia crassipes) é uma planta aquática invasora muito comum em Portugal, sobretudo em rios e lagos. Podes consultar mais informação (complementar) nestas notícias:

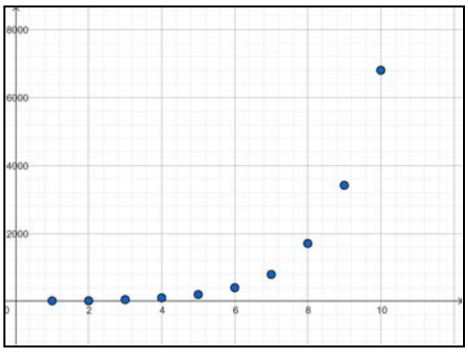
- https://www.jn.pt/129208555/rio-ave-volta-a-ficar-coberto-com-jacintos-de-agua/
- https://www.cm-viladoconde.pt/comunicacao/gabinete-de-comunicacao/noticias/noticia/camara-municipal-alerta-arh-do-norte-para-forte-presenca-de-jacinto-de-agua-no-rio-ave

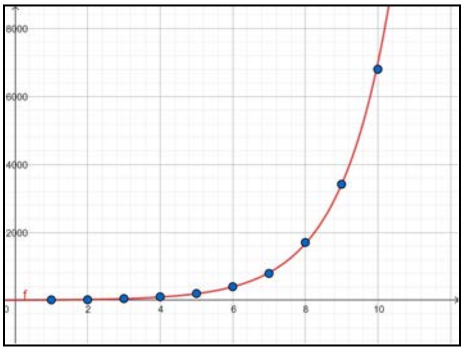
Em Vila do Conde, uma equipa de biólogos acompanhou o crescimento da planta jacinto-de-água, no rio Ave, durante 90 dias. No início do estudo, no dia 1 de abril de 2024, existiam 13 plantas. As observações foram realizadas de 10 em 10 dias. Os dados recolhidos encontram-se registados na tabela seguinte:

N.º da observação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º total de plantas	13	26	50	103	199	400	789	1702	3415	6800



	A	B
1	1	13
2	2	26
3	3	50
4	4	103
5	5	199
6	6	400
7	7	789
8	8	1702
9	9	4315
10	10	6800
11		





Uma função exponencial que modela esta situação (aproxima estes dados), com os valores arredondados às décimas é $f(x) = 6,3 \times 2^x$, onde x representa o número de observações (realizadas de 10 em 10 dias), e $f(x)$ o número total estimado de plantas.

1.1. Supondo que o crescimento do jacinto-de-água segue este padrão exponencial, qual será o número de plantas ao fim de 180 dias, ou seja, na 19.ª observação (correspondente ao dia 27 de setembro de 2024). Calcula esse número analiticamente, utilizando o modelo apresentado.

1.2. É esperado/expectável que o número de plantas continue a crescer exponencialmente, sem limites, sem qualquer restrição? Justifica a tua resposta, com base em fatores ambientais e biológicos.

1.3. Como o estudo foi prolongado por mais 90 dias, os biólogos continuaram a realizar observações sistemáticas (com o mesmo intervalo de tempo) que se encontram registadas na tabela seguinte:

N.º da observação	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N.º total de plantas	12 793	22 347	37 005	51 450	64 960	73 007	76 997	79 994	82 345

Compara este valor real (82 345 plantas) com o valor previsto na alínea 1.1. (1 651 507).
Quais os fatores que podem justificar esta grande diferença?

1.4. Considerando todos os dados (das 19 observações), em que momento é visível um abrandamento do crescimento? Justifica a tua resposta com base nos valores da tabela.

1.5. Com base nos dados da tabela, consideras possível que o número de plantas possa ultrapassar as 100 000? Justifica a tua resposta.
Sugestão: Visualiza graficamente a distribuição dos dados da tabela com a ajuda da calculadora gráfica.

1.6. Com a ajuda da calculadora, e utilizando os vários modelos de regressão que a calculadora disponibiliza, para indagar qual será o modelo de regressão (linear, exponencial, logarítmico, logístico) que melhor se ajusta aos valores da tabela. Escreve a expressão algébrica da função logística, obtida pela calculadora, que modela a situação. Apresenta os valores arredondados às décimas.

1.7. Se o crescimento seguir o padrão da função logística, qual te parece que é o número máximo de plantas que este local consegue sustentar?

2. Uma empresa lançou um novo boné inteligente — o *SmartCap* — com ligação a aplicações de saúde e música. A aceitação no mercado foi lenta nos primeiros dias, mas após uma campanha viral no *TikTok*, as vendas começaram a crescer rapidamente. No entanto, a empresa sabe que há um limite de mercado para o produto (o mercado-alvo já foi estudado).
A evolução do número de vendas do *SmartCap* segue o modelo logístico, dado por:

$$V(t) = \frac{15000}{1+29e^{-0,6t}}$$

onde:

- $V(t)$ número de clientes ao fim de t dias desde o início da campanha viral;
- t: tempo em dias.

2.1. Quantos bonés *SmartCap* foram vendidos antes de ser lançada a campanha viral no *TikTok*?

2.2. Quantos bonés *SmartCap* terão sido comprados ao fim de 5 dias, após o início da campanha viral?

2.3. Ao fim de quantos dias o número de bonés *SmartCap* vendidos ultrapassará os 10000?
Para responderes a esta questão, recorre às capacidades da tua calculadora gráfica e apresenta os gráficos visualizados e os valores da(s) abcissa(s) arredondada(s) às unidades.

2.4. O que se espera que venha a acontecer com o número de bonés *SmartCap* vendidos à medida que o tempo vai passando?

3. A função logística é usada para representar crescimentos controlados, ou seja, situações que começam com um crescimento rápido, depois abrandam e acabam por estabilizar perto de um valor máximo.

Uma função logística é do tipo: $f(x) = \frac{c}{1+a\times e^{-bx}}$, com $a, b, c > 0$.

3.1. Acede ao GeoGebra e introduz a função $f(x) = \frac{c}{1+a\times e^{-bx}}$, $com\ a, b, c > 0$.

Configura os valores mínimo e máximo de cada um dos 3 seletores gerados automaticamente, para tomar valores do intervalo entre 0 e 10, com passo de 0,1.

3.2. Completa a tabela seguinte, tendo como referência a análise dos gráficos obtidos:

	Domínio	**Contradomínio**	**Monotonia**	**Continuidade**	**Limitação**	
					x tende para -∞	**x tende para +∞**
$f(x) = \frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$ $a, b, c > 0$						

4. O Festival "Som na Relva" juntou 50000 pessoas num enorme recinto ao ar livre. A banda principal preparou uma surpresa para os fãs mais atentos: um encontro exclusivo (meet & greet) com os membros da banda, que só seria anunciado discretamente momentos antes do concerto.
Por motivos de segurança, o recinto estava sem qualquer acesso à internet e às redes de comunicação. A única forma de divulgar a informação era através do "passa-palavra".
Um dos elementos da equipa de produção revelou a informação, 90 minutos antes do início do espetáculo, a cinco pessoas no recinto. Essas pessoas começaram a partilhar a informação. A tabela seguinte apresenta o número total de pessoas que ficaram a saber da surpresa, a cada 10 minutos.

minutos após a divulgação da informação	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
n.º total de pessoas que conhecem a informação	37	272	1939	11482	34388	47106	49588	49944	49992	49999

4.1. Considera que o processo começa com 5 pessoas informadas no minuto 0. Utiliza a calculadora gráfica para ajustar modelos aos dados da tabela. Qual dos modelos: linear, exponencial, logarítmico ou logístico, se ajusta melhor à situação apresentada?. Justifica a tua resposta.

4.2. Escreve a expressão analítica, com os parâmetros arredondados às décimas, do modelo que melhor se ajusta aos valores apresentados, encontrado no item 4.1..