GEOMETRIA SINTÉTICA

Matemática B

11.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Geometria Sintética (Matemática B - 11.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática B

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/grupo-de-pessoas-assistindo-no-laptop-1595385/

Data:

Lisboa, junho de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação

de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - GEOMETRIA SINTÉTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	Tarefa 1 Obras Semelhantes	**Geometria no plano** Perímetros e áreas de figuras semelhantes	• Compreender a noção de semelhança. • Relacionar áreas e perímetros de figuras planas semelhantes. • Utilizar escalas para o cálculo de perímetros e áreas.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Resolução de problemas	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B)
4	Tarefa 2 *Google Earth*	**Geometria no plano** Perímetros e áreas de figuras semelhantes	• Compreender a noção de semelhança. • Relacionar área e perímetro de figuras planas semelhantes. • Utilizar escalas para o cálculo de perímetros e áreas.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Resolução de problemas • Recurso sistemático à tecnologia	• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B)
4	Tarefa 3 Problemas da História da Geometria	**Geometria no plano** Perímetros e áreas de figuras semelhantes	• Compreender a noção de semelhança. • Conhecer um ou mais problemas e factos marcantes da História da Geometria ou das aplicações contemporâneas da semelhança de figuras.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • História da Matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B)

2	Tarefa 4 Vistas e cubos	**Geometria no espaço** Volumes de sólidos	• Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional. • Resolver problemas de cálculo de medidas, nomeadamente, volumes ou superfícies.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Práticas enriquecedoras e criatividade • Comunicação matemática	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) • Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B)
6	Coleção de problemas Geometria sintética	**Geometria no espaço** Medidas de volume e capacidade Volumes de sólidos Áreas de superfícies	• Resolver problemas de cálculo de medidas, nomeadamente, volumes ou superfícies. • Resolver problemas do quotidiano envolvendo volumes e capacidades. • Aplicar os conceitos de volume e capacidade no cálculo de quantidades e custos.	Trabalho em grupo	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
2	Tarefa 5 O bolo de noiva	**Geometria no espaço** Medidas de volume e capacidade Volumes de sólidos Áreas de superfícies	• Resolver problemas do quotidiano envolvendo volumes e capacidades. • Aplicar os conceitos de volume e capacidade no cálculo de quantidades e custos. • Relacionar sólidos semelhantes com os respetivos volumes.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

6	Tarefa 6 Empacotamentos	**Geometria no espaço** Empacotamento	• Determinar a melhor solução de empacotamento de objetos num determinado contentor	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) • Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)

Tarefa 1

Obras Semelhantes

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa, pretende-se que os alunos recordem conceitos de Geometria lecionados ao longo do 3.º ciclo.

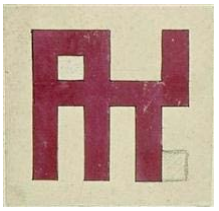
Conhecimentos prévios dos alunos: Cálculo de perímetros e de áreas, noção de figuras semelhantes, razão de semelhança e escala.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:
Os alunos podem resolver de forma autónoma a parte I da tarefa, uma vez que os conteúdos dos itens iniciais já foram trabalhados ao longo do 3.º ciclo do ensino básico.
É importante que, no final da parte I, seja feita uma sistematização dos conteúdos trabalhados no que diz respeito à relação, em figuras semelhantes, entre a razão dos perímetros, a razão das áreas e a razão de semelhança.
Na parte II da tarefa pretende-se que os alunos recordem e apliquem o conceito de escala para determinar medidas em figuras semelhantes.
No item 3. da parte II, os alunos poderão experimentar diferentes orientações da obra (vertical ou horizontal) para a construção do mural sugerido. Os resultados obtidos deverão ser analisados em grande grupo, com toda a turma.

Tarefa 1

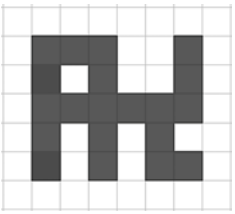
Obras Semelhantes



Parte I

Em 1919 o artista plástico Theo van Doesburg criou um monograma para Antony Cook, representado na imagem ao lado.

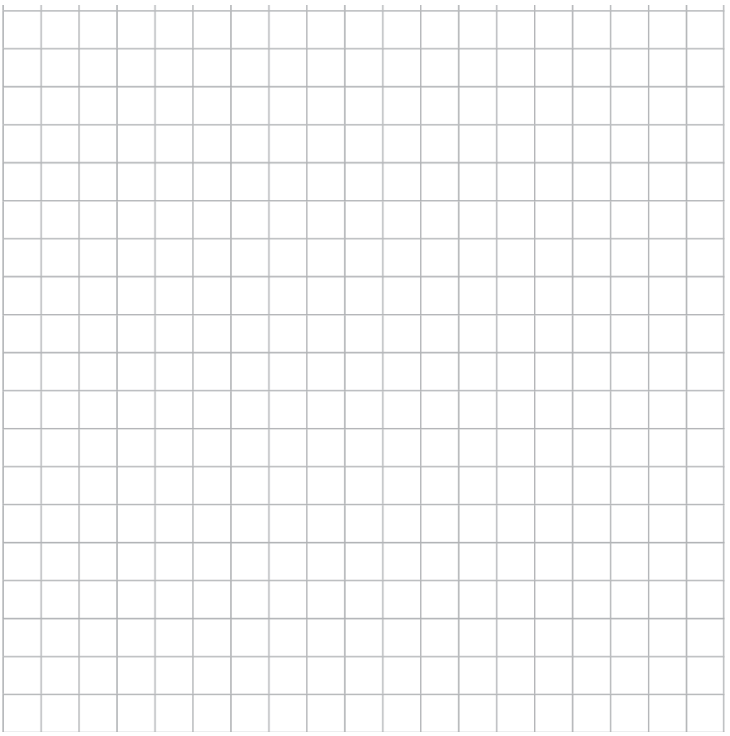
Na figura seguinte está representada uma adaptação desta obra.



1. Utilizando o quadriculado, desenha uma ampliação, de razão 3, da figura dada.

2. Qual é o perímetro da figura inicial? E da figura ampliada?
3. Determina a área da figura inicial e da figura ampliada.
4. Se fizesses uma ampliação da figura inicial de razão 4, quais seriam os valores do perímetro e da área da figura ampliada?
5. E se fizesses uma ampliação da figura inicial de razão 10, quais seriam os valores do perímetro e da área da figura ampliada?

6. Desenha no quadriculado uma redução, de razão $\frac{1}{2}$, da figura inicial.



7. Qual é o perímetro da figura reduzida? Compara com o perímetro da figura inicial. O que podes concluir?
8. Determina a área da figura reduzida? Compara com a área da figura inicial. O que podes concluir?
9. Se fizesses uma redução da figura inicial de razão $\frac{1}{3}$, quais seriam os valores do perímetro e da área da figura reduzida?
10. Considera agora:
    - P_1 o perímetro da figura inicial F_1;
    - P_1 o perímetro da figura final F_2 (ampliada ou reduzida);
    - A_1 a área da figura inicial F_1;
    - A_2 a área da figura final F_2 (ampliada ou reduzida);
    - r o valor da razão de semelhança que transforma a figura F_1 na figura F_2.

    Completa as igualdades:

    $\frac{P_2}{P_1} =$_____ e $\frac{A_2}{A_1} =$_____

Parte II

A obra "Bailarina" (1948), reproduzida na imagem ao lado, de José de Almada Negreiros, é um quadro com a forma de um retângulo de dimensões $53\ cm \times 37\ cm$.

1. Determina o perímetro e a área desta obra.

2. A Rebeca utilizou a escala 1:5 para fazer uma cópia reduzida, desta obra.
   2.1. Qual é valor do perímetro da cópia?
   2.2. Qual é o valor da área da cópia?

3. A turma da Rebeca gostou tanto que resolveu fazer um mural na escola com esta obra. Para isso a Direção da escola disponibilizou uma parede com $3\ m$ de altura e $4\ m$ de comprimento.
   3.1. Quais poderão ser as dimensões máximas da reprodução, sabendo que esta é semelhante ao original?
   3.2. Determina a escala que terão de utilizar para obter a reprodução de dimensões máximas?

Tarefa 2

Google Earth

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é aplicar o conceito de escala em situações reais, utilizando ferramentas digitais (*Google Earth*) e materiais de desenho para determinar comprimentos, perímetros e áreas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Cálculo de perímetros e de áreas, noção de figuras semelhantes, razão de semelhança e de escala.

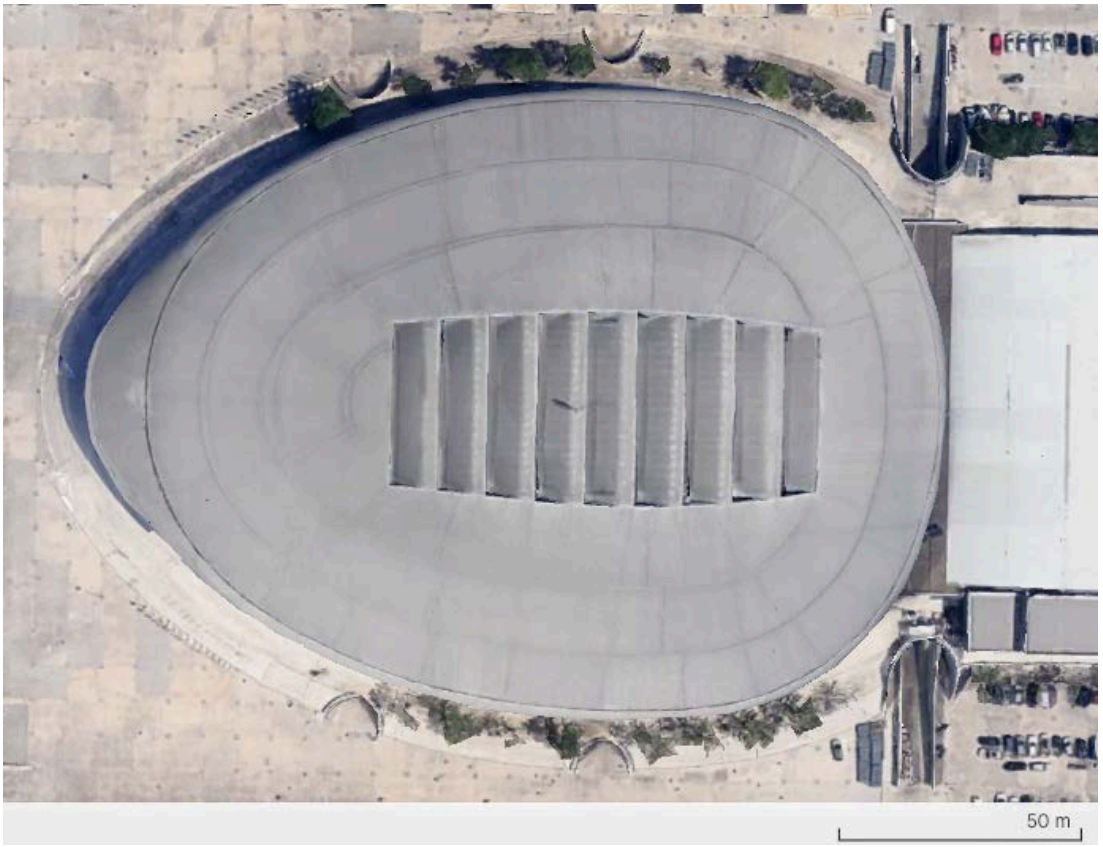
Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à Internet, calculadora gráfica e material de medição.

Notas e sugestões:
Os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos para resolver as situações apresentadas na tarefa.
O professor deverá promover a análise crítica de resultados obtidos pelos alunos e encorajá-los a registarem as etapas, cálculos e conclusões.
Salienta-se que foi necessário rever a conversão de unidades de medida, uma vez que, na aplicação da tarefa, verificou-se que os alunos não o sabiam fazer.
Na discussão dos resultados do item 4., os alunos poderão ser conduzidos a concluir que a relação obtida corresponde à escala do mapa apresentado.
Para finalizar a tarefa, sugere-se a realização de um pequeno trabalho de grupo. Este poderá ser concretizado em aula ou fora dela dependendo do ritmo da turma e gestão da planificação.

Tarefa 2

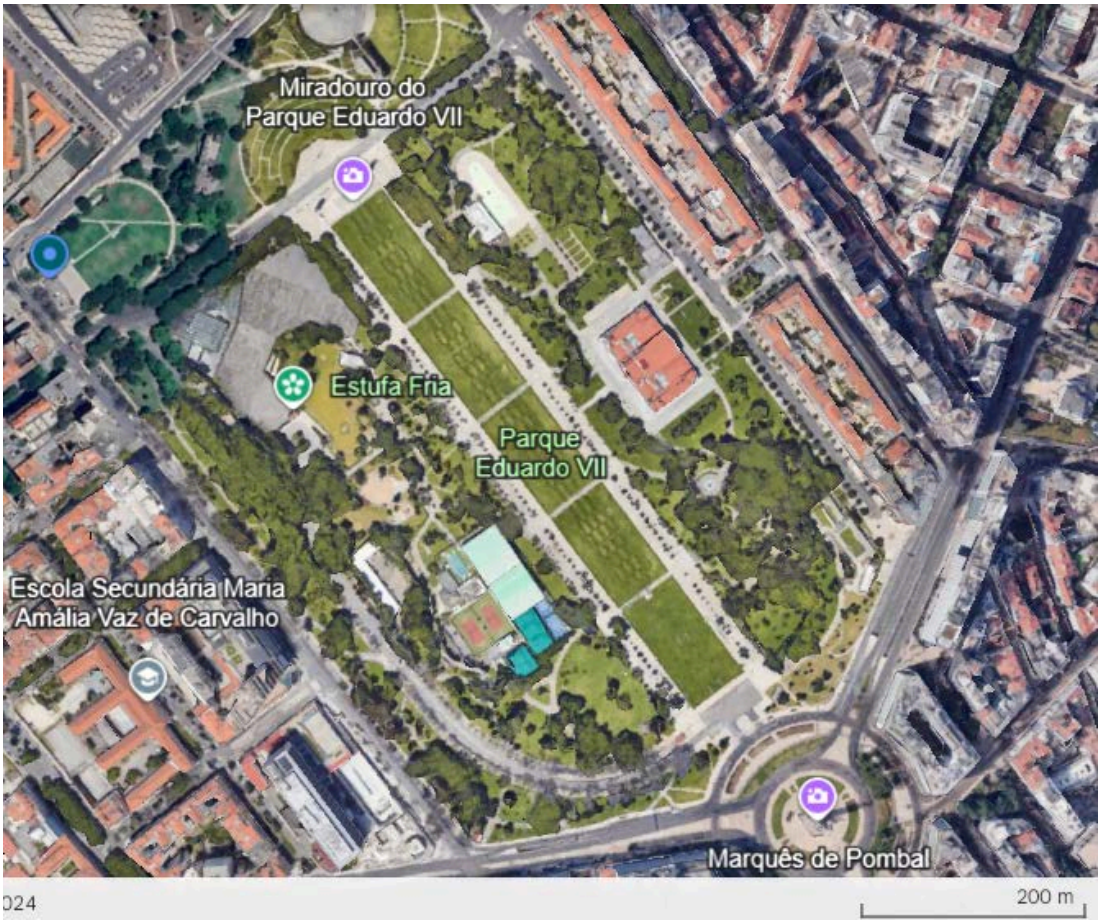
Google Earth

1. Considera a figura seguinte em que se observa a vista área do pavilhão Altice Arena, no parque das Nações, obtida através do Google Earth.



Usando a escala apresentada na figura, e recorrendo a medições, determina o comprimento máximo e a largura máxima do pavilhão.

2. Considera agora a imagem aérea do parque Eduardo VII, em Lisboa, obtida através do Google Earth.



A zona central do parque é constituída por cinco relvados com o formato de retângulos.

Determina um valor, aproximado, da área e do perímetro do retângulo mais próximo do miradouro do Parque, recorrendo à escala apresentada na figura e a material de desenho (régua ou esquadro).

3. Abre a aplicação Google Earth e localiza a tua escola.

3.1. Captura uma imagem com a vista aérea do pavilhão onde está localizada a tua sala de aula, e com a escala visível, descreve o processo e os cálculos que permitem obter as medidas do perímetro e da área do pavilhão .

3.2. No topo da aplicação do Google Earth existe uma ferramenta que permite fazer medições diretamente sobre a imagem. Usa esta ferramenta para obteres os valores das medidas do perímetro e da área do pavilhão e compara-os com os valores obtidos anteriormente.

4. A distância, aproximada, em linha reta entre Lisboa e Porto é 280km.

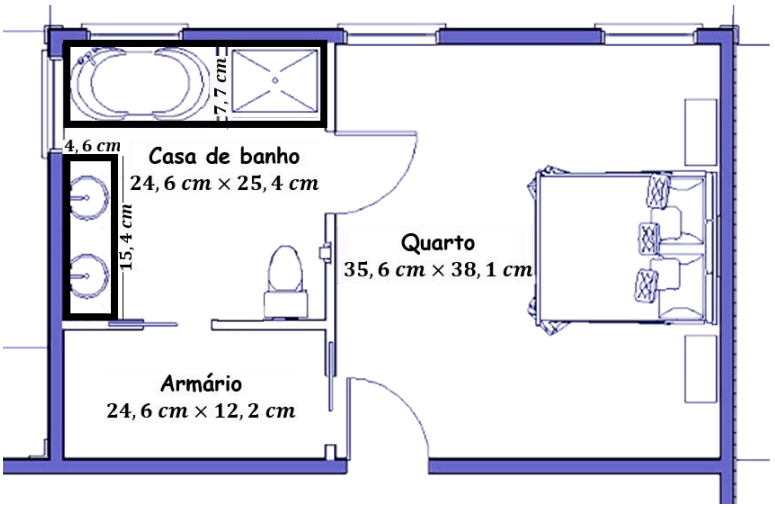
No mapa apresentado na figura ao lado, 1 cm corresponde a que distância na realidade? Utiliza material de desenho para responder a esta pergunta.

5. A Torre dos Clérigos, no Porto, mede 75m de altura.
O Manuel vai imprimir numa impressora 3D um modelo desta torre.
Se usar uma escala de 1:300, qual será a altura do modelo a imprimir?

Trabalho de grupo

Na comunidade "Vetusto" estão a construir um edifício com suítes individuais e duplas para utentes reformados.

A figura seguinte apresenta uma cópia da planta de uma suíte dupla na escala 1:11.



1. No chão da casa de banho vai ser utilizado pavimento cerâmico antiderrapante. Este é vendido em caixas com 10 azulejos de $33,3\ cm \times 33,3\ cm$. O custo de cada caixa é de $14,58$ €.

   Considera que apenas por debaixo dos móveis do lavatório e da banheira (assinalados na figura) não vai ser colocado o pavimento cerâmico antiderrapante (a sanita está suspensa).

   1.1. Faz uma estimativa do número de azulejos necessários para pavimentar o chão da casa de banho, justificando a tua resposta.

   1.2. Determina o valor gasto com o pavimento cerâmico antiderrapante.

2. No quarto decidiram forrar a parede que contém as janelas com papel de parede. Sabe-se que:

   - a largura de cada janela, na planta, é $8,7\ cm$;
   - a altura real das janelas é $1,5\ m$;
   - a altura real da parede é $3\ m$.

   2.1. Faz um esboço da parede considerada.

   2.2. Qual é o valor da medida da área onde vai ser aplicado o papel?

   2.3. O papel de parede escolhido é vendido a $39,90$ € por rolo com as seguintes dimensões: $10\ m \times 0,53\ m$. Qual é o custo, em euros, do papel necessário para forrar a suíte referida?

Tarefa 3

Problemas da História da Geometria

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa desafia os alunos a seguirem os procedimentos efetuados por três grandes matemáticos da Antiguidade – Tales de Mileto, Eratóstenes e Hiparco – para resolver problemas geométricos usando conhecimentos matemáticos elementares.

Conhecimentos prévios dos alunos: Semelhança de triângulos, ângulos e arcos de circunferência.

Materiais e recursos: Calculadora e equipamento digital com acesso à Internet.

Notas e sugestões:
Esta tarefa apresenta três desafios, sendo o último proposto como aprofundamento. O professor poderá optar pela realização ou não do último desafio de acordo com as características dos alunos.
Sugere-se a utilização de uma metodologia de trabalho colaborativo, em pares ou pequenos grupos, promovendo a troca de ideias e estratégias de resolução.
No item 2., caso os alunos manifestem dificuldades em relacionar o ângulo medido no triângulo [SAE] com o arco da circunferência terrestre, o professor deverá recordar conceitos trabalhados no ensino básico sobre ângulos ao centro e ângulos alternos internos.
Poderão também surgir dificuldades em compreender a relação entre medidas lineares e angulares, bem como na conversão de unidades e na interpretação de grandezas (exemplo: de estádios para metros).
Nesta tarefa verificou-se que as principais dificuldades se prenderam com a abstração dos conceitos geométricos e a interpretação de métodos antigos. No entanto, com apoio visual e exemplos práticos, a tarefa pode ser uma oportunidade eficaz para os alunos reconhecerem a utilidade da geometria na resolução de problemas reais e vivenciarem a matemática como uma ferramenta poderosa.

Tarefa 3

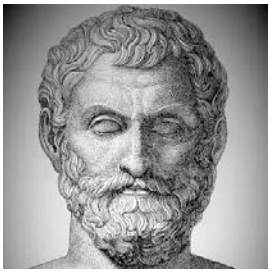
Problemas da História da Geometria

Seguindo o engenho e a imaginação de alguns sábios gregos, vais determinar, aproximadamente, a altura da grande pirâmide do Egito, o meridiano terrestre, o raio da Terra e a distância da Terra à Lua.

1. **A altura da grande pirâmide do Egito**

A Grande Pirâmide de Gizé, também conhecida como a Pirâmide de Quéops, é uma das sete maravilhas do mundo antigo e a única que permanece praticamente intacta. Foi construída aproximadamente entre 2580 e 2560 a.C.

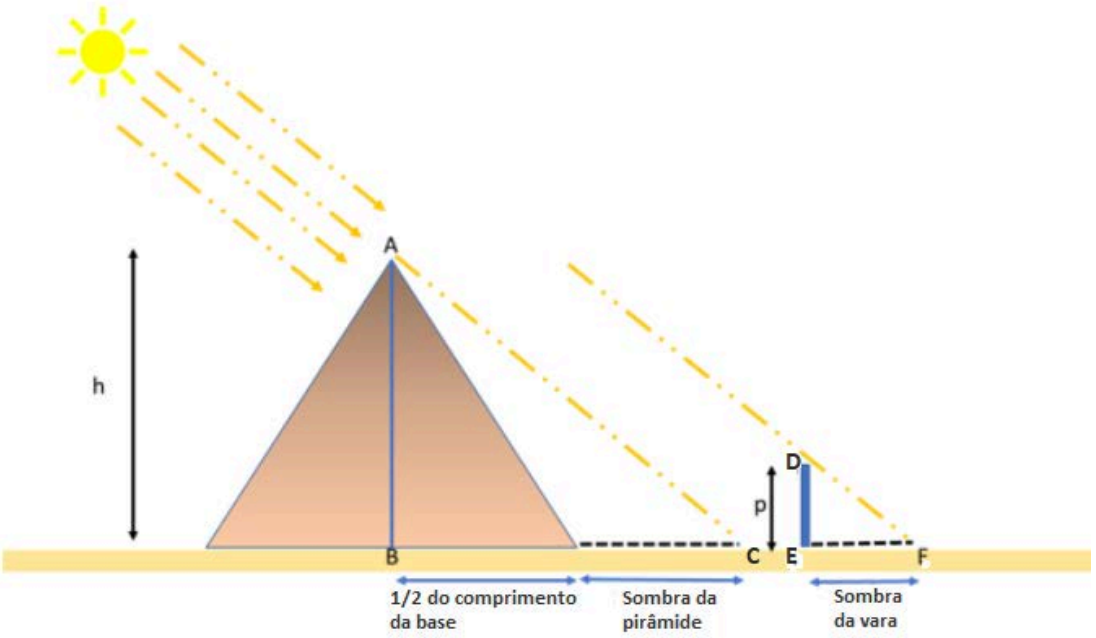
A construção das pirâmides representa um marco importante no desenvolvimento da engenharia e arquitetura no mundo antigo, refletindo o conhecimento matemático e organizacional dos egípcios.



Tales de Mileto (c. 624 a.C. - c. 546 a.C.) foi um filósofo, matemático e astrónomo grego, amplamente reconhecido como um dos Sete Sábios da Grécia e o primeiro filósofo da história ocidental. Nasceu na cidade de Mileto, localizada na Ásia Menor (atual Turquia).

Conta-se que, numa das suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a calcular a altura da grande pirâmide de Quéops cuja base é um quadrado de lado 230 metros, aproximadamente.

Tales conseguiu determinar a altura da pirâmide considerando um esquema, como o seguinte, em que DE representa uma vara espetada, verticalmente, no chão, com altura conhecida.



1.1. Qual é a relação entre os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$? Justifica.

1.2. Completas as igualdades, atendendo à relação dos comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$:

$$\frac{\overline{AB}}{__} = \frac{__}{\overline{EF}} = \frac{__}{__}$$

1.3. Supõe que Tales usou uma vara com 1,5 metros. Numa certa hora do dia, a sombra da vara mede 2 metros e a sombra da pirâmide mede 85 metros.

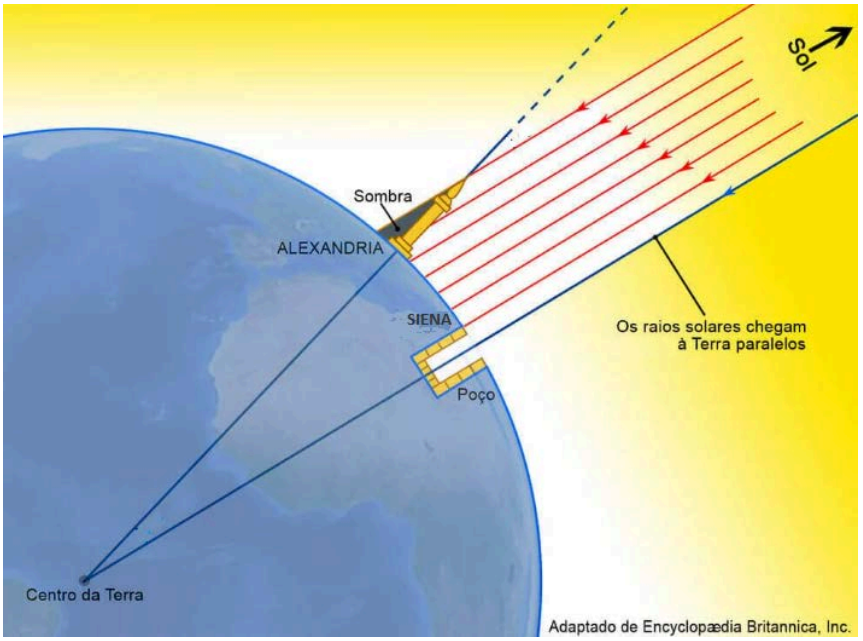
1.3.1. Determina o comprimento do segmento de reta $[BC]$.

1.3.2. Determina a altura da pirâmide.

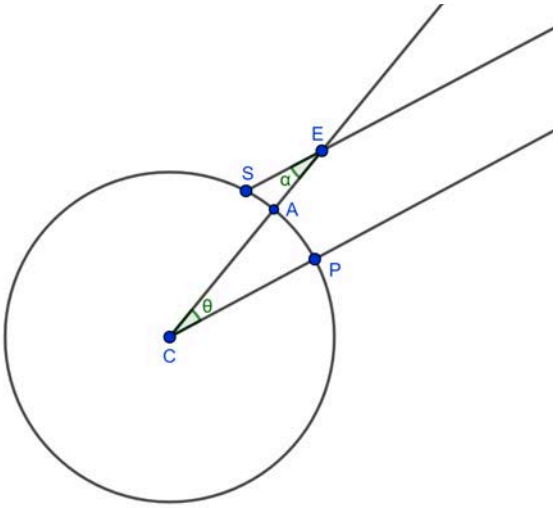
2. **O meridiano terrestre e o raio da Terra**

Eratóstenes de Cirene (cerca de 275 a.C. – c. 195 a.C.) foi um dos mais destacados cientistas, matemáticos, geógrafos, astrónomos e poetas da Antiguidade. É considerado o pai da Geografia na Antiguidade devido aos importantes estudos sobre as medições da Terra que realizou.
Foi bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria (Egito), uma das mais importantes instituições do mundo antigo.

Nos seus estudos, através de documentos da biblioteca, Eratóstenes sabia que, ao meio dia do Solstício de Verão, em Siena (atual Assuão, Egito), o Sol era refletido no fundo de um poço, concluindo assim que, nesse instante, em Siena, os raios solares incidem verticalmente sobre a superfície da Terra.
A distância entre Alexandria e Siena é, de acordo com os registos, igual a 5000 estádios (um estádio é uma medida de comprimento usada na Grécia Antiga, corresponde a 160 metros).
Por outro lado, em Alexandria, à mesma hora, os raios chegam com uma certa inclinação, devido à curvatura da Terra.
Eratóstenes observou, a essa hora, que uma estaca com 1 metro de comprimento colocada na vertical produzia uma sombra com 13,2 cm de comprimento.



Na figura seguinte, encontra-se um esquema simplificado da situação:



C - Centro da Terra
P - Poço em Siena
A - Localização da estaca em Alexandria
E - Extremidade da estaca
S - Extremidade da sombra da estaca

Com estas medições e observações, Eratóstenes mediu o comprimento do meridiano terrestre e o raio da Terra.
Tu também o podes fazer.

2.1. No Geogebra e constrói um triângulo $[SAE]$ retângulo em A, cujas medidas dos catetos $\overline{AE}$ e $\overline{AS}$ são 1 e 0,132, respetivamente.

2.2. Determina a amplitude do ângulo SEA desse triângulo.

2.3. O ângulo que mediste corresponde ao ângulo α da figura anterior. Justifica que $\alpha = \theta$.

2.4. Qual é a amplitude do arco de circunferência que une Siena e Alexandria (arco PA)?

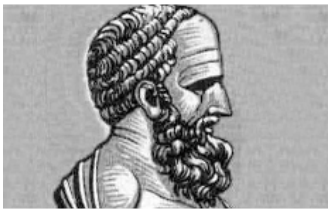
2.5. Qual é a medida, em quilómetros, desse arco de circunferência ?

2.6. Calcula o comprimento da circunferência (meridiano terrestre) que contém o arco que une Siena e Alexandria.

2.7. Qual é o valor do raio dessa circunferência?

Acabaste de determinar o raio da Terra, tal como fez Eratóstenes!

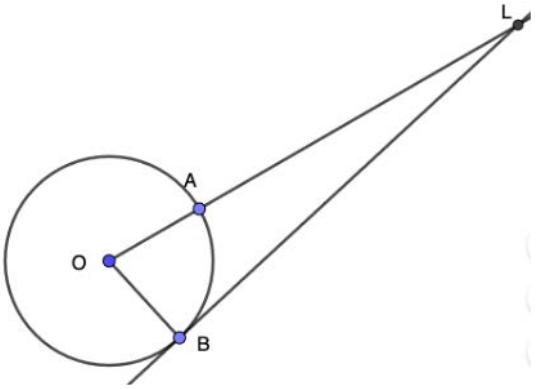
3. (Aprofundamento) **Distância da Terra à Lua**



Hiparco de Nicéia (190 a.C - 120 a.C) foi um astrónomo, matemático e geógrafo grego. Dividiu pela primeira vez o círculo terrestre em 360o e concebeu uma rede de paralelos e meridianos para determinar as coordenadas terrestres (latitude e longitude). Hiparco ficou conhecido como pai da astronomia, uma vez que determinou a distância da Lua à Terra e do Sol à Terra.

Para determinar a distância da Terra à Lua, Hiparco constatou que, em determinado instante, um observador em B (ver figura seguinte) via a Lua (L) a aparecer no horizonte, no mesmo instante, em que um observador colocado em A (ver figura seguinte) via a Lua na vertical.

Observando o tempo de duração de um eclipse da Lua, Hiparco estimou que a amplitude do arco AB era, aproximadamente, igual a 89^o.



Recorrendo ao Geogebra faz a construção do triângulo usando uma circunferência de raio 1, para representar a Terra.

3.1. Justifica que este triângulo que construíste é semelhante ao triângulo referido por Hiparco.

3.2. Mede, no Geogebra, a distância de A a L.

3.3. Quantos raios da Terra são necessários para obteres a distância da Terra à Lua?

3.4. Qual é a distância da Terra à Lua?

Utiliza como comprimento do raio da Terra o valor obtido por Eratóstenes e que calculaste no item anterior.

Tarefa 4

Vistas e Cubos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa explora a relação entre representações tridimensionais de sólidos (construídos com cubos) e suas projeções ortogonais (vistas), tendo como objetivo desenvolver as competências de visualização espacial e de raciocínio geométrico.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noção de perspetiva, projeção ortogonal e volumes de sólidos.

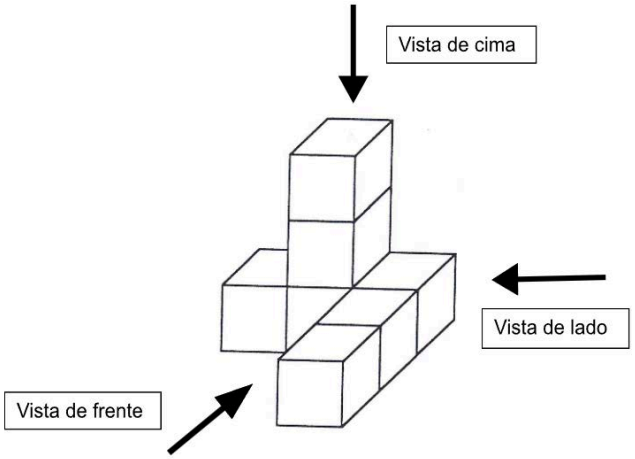
Materiais e recursos: Materiais manipuláveis (cubos de madeira).

Notas e sugestões:
A combinação de representações bidimensionais e tridimensionais favorece o desenvolvimento da perceção espacial dos alunos.
É natural que alguns alunos encontrem dificuldades em visualizar o objeto tridimensional a partir das suas projeções no plano (vistas), pelo que poderá ser interessante utilizar materiais manipuláveis (cubos de madeira) para ajudar os alunos.
Aquando do cálculo dos volumes, poderá ser necessário chamar a atenção para considerarem os cubos "ocultos", não se focando apenas nos visíveis. O professor deverá enfatizar que o volume corresponde à soma de todos os cubos que compõem o sólido, incluindo aqueles que não estão imediatamente percetíveis numa única vista.
No item 3. e no caso dos alunos não conseguirem avançar na sua resolução de forma autónoma, o professor poderá dinamizar uma resolução partilhada e simultânea com toda a turma.

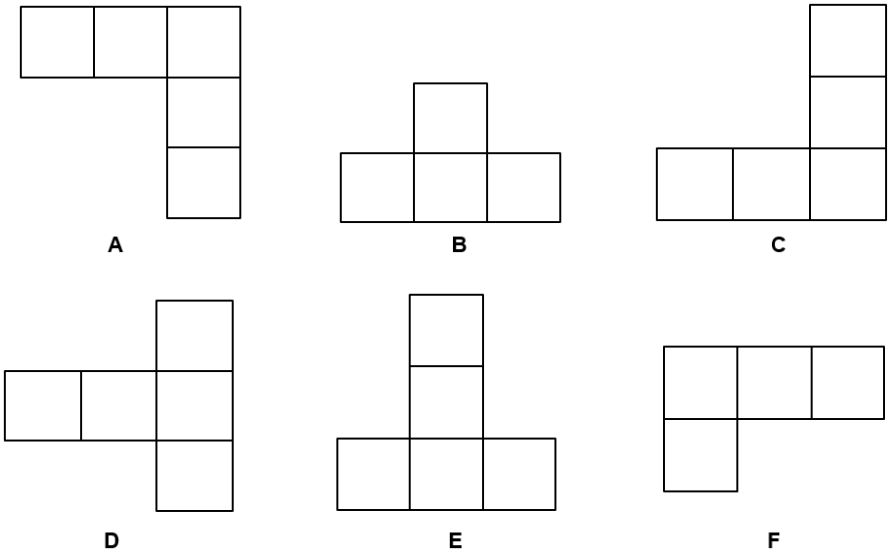
Tarefa 4

Vistas e Cubos

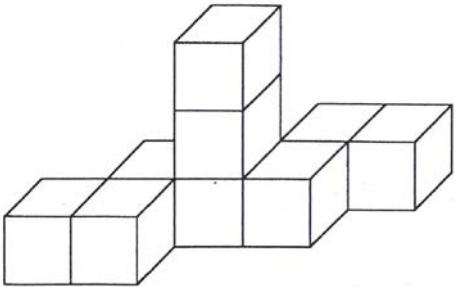
1. A figura seguinte apresenta um sólido formado por sete cubos geometricamente iguais. O sólido tal como está representado diz-se em perspetiva.



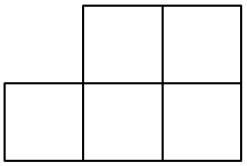
Quais das representações seguintes correspondem às vistas de cima, de frente e de lado do sólido? Escolhe a opção correta para cada uma dessas vistas.



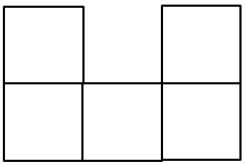
2. Desenha as vistas de cima, de lado e de frente do seguinte sólido.



3. Supõe um modelo de um sólido constituído por cubos geometricamente iguais, que tem as seguintes vistas de frente e de lado:

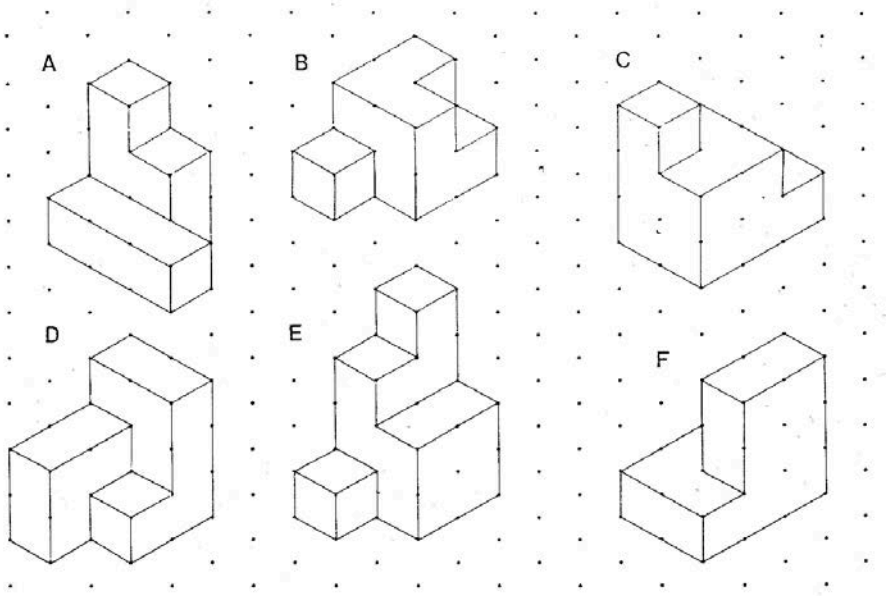


Vista de frente



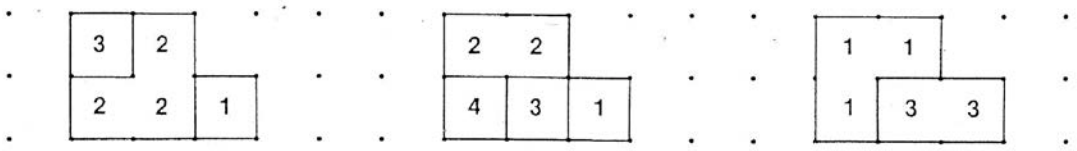
Vista de lado

4. Considera os seguintes sólidos constituídos por vários cubos:

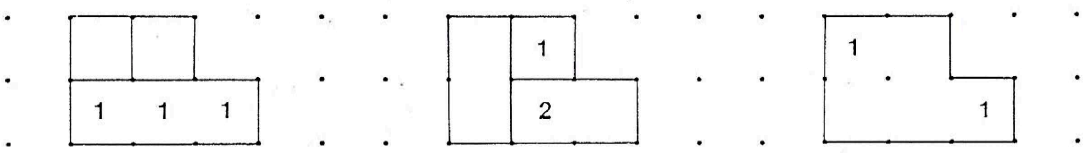


A vista de cima de um sólido deste tipo pode ser codificada colocando em cada coluna o número de cubos que a compõem.

4.1. Descobre quais os sólidos que correspondem às três vistas de cima codificadas que se seguem:

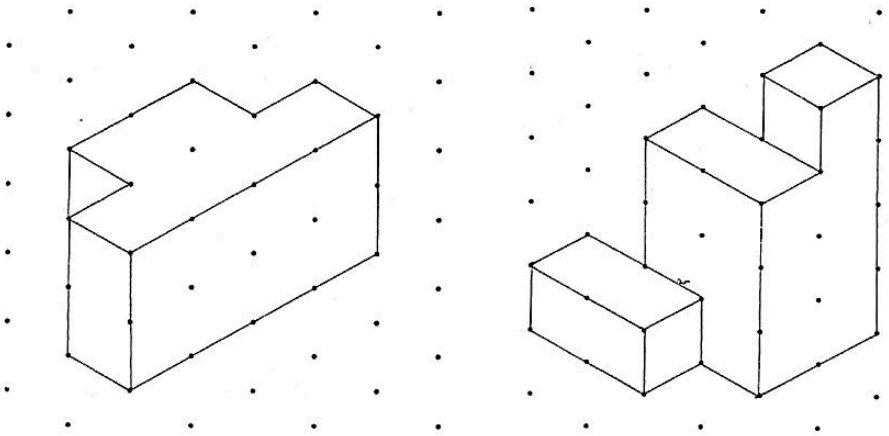


4.2. Faz corresponder as seguintes "vistas codificadas" incompletas aos restantes sólidos e completa os respetivos códigos de cada uma das vistas.

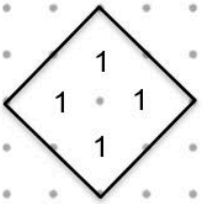
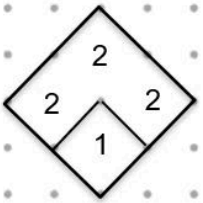


4.3. Considerando para unidade o volume de um cubo, determina o volume de cada sólido e descobre uma forma rápida para determinar os seus volumes.

5. Desenha a vista de cima "codificada" correspondente a cada um destes sólidos.



6. Desenha em perspetiva os dois sólidos que correspondem às seguintes vistas de cima "codificadas":

Vista de cima "codificada"	Perspetiva do sólido
	
	

Coleção de problemas

Geometria sintética

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta proposta de trabalho permite relacionar os conteúdos das tarefas anteriores. Os alunos encontrarão um conjunto de situações problemáticas que lhes permitirão aplicar e consolidar os conhecimentos adquiridos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Razão de semelhança, cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:
Numa primeira parte da proposta, é apresentada uma coleção de problemas que inclui questões mais simples. Na segunda parte, é apresentada um conjunto de problemas que implica que os alunos demonstrem um maior domínio na aplicação dos conceitos geométricos, uma vez que apresenta problemas com maior grau de complexidade, múltiplas etapas e contextualizações mais exigentes.
Perante eventuais dificuldades na resolução de alguns itens, sugere-se que os alunos comecem por identificar o tipo de sólido associado a cada objeto (prisma, cilindro, cone, esfera), reforçando, assim, a ligação entre as representações bidimensionais e a sua correspondência tridimensional.
A resolução em grupo é recomendada, pois fomenta o trabalho colaborativo, a discussão de ideias e a partilha de estratégias de resolução.
Adicionalmente, será benéfico que os alunos construam o seu próprio formulário à medida que resolvem os problemas. Esta prática ajuda a consolidar o significado dos elementos envolvidos nos cálculos e a promover uma aprendizagem mais ativa e significativa.
Recomenda-se que os problemas e exercícios propostos possam ser ajustados às especificidades de cada turma, por exemplo, selecionando apenas algumas das propostas.

Coleção de problemas

Geometria sintética

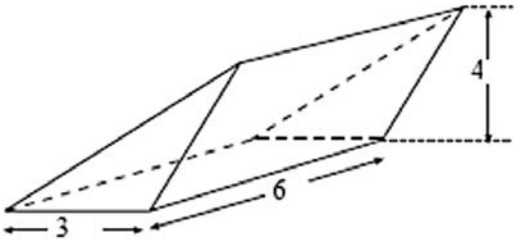
Parte I

1. Na imagem ao lado está representada uma casinha de pássaros, com o formato de um paralelepípedo. Esta construção, com um volume de $129\,978\ cm^3$, tem $83\ cm$ de altura e $54\ cm$ de largura.
   Determina a sua profundidade.

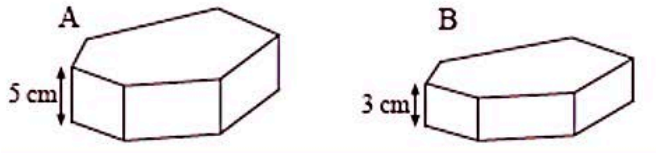
2. Um rolo de pintura de parede é composto por uma parte cilíndrica para aplicar a tinta e uma pega, onde o rolo gira.
   A parte cilíndrica tem $6,8\ cm$ de diâmetro e $31,2\ cm$ de comprimento.
   Determina a área pintada pelo rolo após uma rotação completa.
   Apresenta o resultado com uma aproximação às centésimas.

3. Dois cubos com $6\ cm$ de aresta, foram colados de forma a formarem um prisma.
   Qual é a área da superfície do sólido obtido?

4. Na figura ao lado está uma representação esquemática de uma embalagem de palitos com a forma de um prisma triangular. A unidade das medidas é o centímetro.
   Calcula o seu volume.



5. Os prismas A e B, da figura seguinte, têm a mesma área de base.



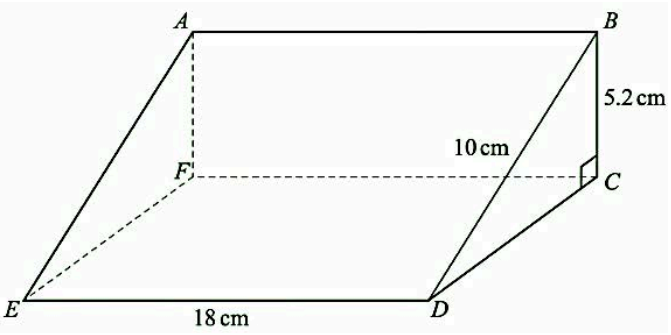
Os prismas não estão representados à escala.

Completa a tabela:

	Prisma A	Prisma B
Altura (cm)	5	3
Volume $\left(cm^3\right)$	200	

6. Na figura ao lado está representado o prisma reto $[ABCDEF]$, em que as bases são triângulos retângulos.

Tal como é indicado na figura, sabe-se ainda que:



- $\overline{BD} = 10\ cm$;
- $\overline{BC} = 5,2\ cm$;
- $\overline{ED} = 18\ cm$.

Determina o volume do prisma.

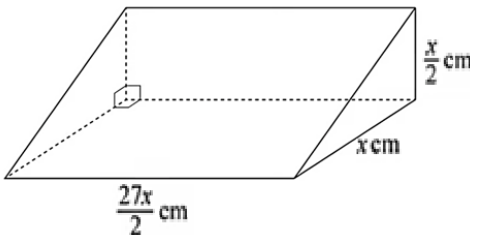
7. Uma peça de ouro com $600\ cm^3$ de volume foi derretida para fazer 1120 esferas com $0,45\ cm$ de raio.

Determina o volume de ouro não utilizado na produção das esferas.

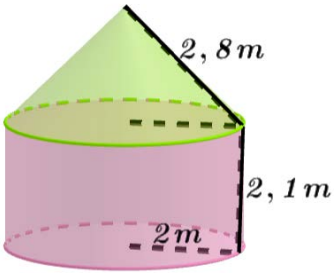
Nota: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

8. A figura ao lado representa um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo. O prisma tem de volume $1000\ cm^3$.

Considerando as dimensões do prisma assinaladas na figura, determina o valor de x.



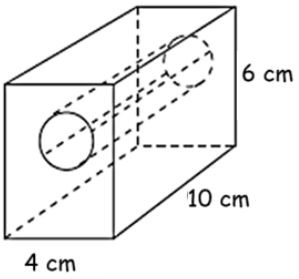
9. Na Meia Praia, em Lagos, foi montado um quiosque provisório.
A figura ao lado, apresenta em esquema o quiosque, formado por uma base com a forma cilíndrica e a cobertura com a forma de um cone (sem base).
A parte lateral (incluindo o topo cónico) é de lona e as dimensões do quiosque encontram-se na figura.
Sabendo que o preço da lona escolhida é $10,71\ €\ /m^2$, determina o dinheiro gasto em lona nesta construção.
Nota: o chão não é coberto com lona.



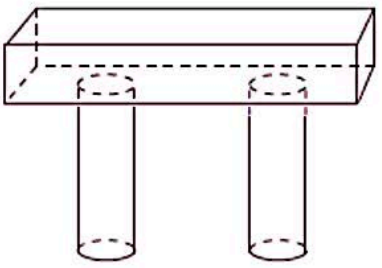
10. Pretende-se construir uma caixa de ferro, sem tampa, com a forma de um paralelipípedo retângulo, cujas dimensões externas são $38\ cm$, $30\ cm$ e $18\ cm$. As faces laterais e a base têm uma espessura de .
Qual é o peso da caixa sabendo que um centímetro cúbico de ferro pesa $7,5\ g$.
Sugestão: Começa por determinar o volume de ferro usado na construção da caixa.

Parte II

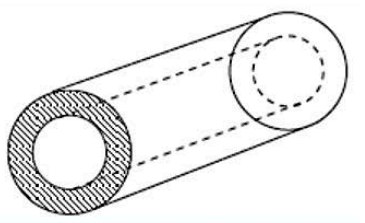
1. No esquema ao lado, está representado um bloco de madeira, com o formato de um paralelipípedo retângulo, onde foi feito um furo cilíndrico com $2\ cm$ de diâmetro que atravessa toda a peça.
Determina o volume do bloco de madeira.



2. Numa rotunda é colocada uma obra de arte construída em cimento. Esta obra é constituída por uma placa com a forma de um paralelipípedo retângulo assente sobre dois pilares cilíndricos, como mostra o esquema ao lado.
As dimensões da placa são $0,6\ m$, $3\ m$ e $0,4\ m$.
Cada um dos pilares tem $3\ m$ de altura e $0,4\ m$ de diâmetro.
Calcula o volume total de cimento utilizado para a construção da obra de arte.
Apresenta o resultado, arredondado às unidades.



3. O esquema ao lado representa um tubo cilíndrico metálico com $100\ cm$ de comprimento.
Os diâmetros interior e exterior do tubo medem $20\ cm$ e $30\ cm$, respetivamente. A figura não está representada à escala.



3.1. Determina o volume de metal necessário para construir o tubo.

3.2. Para não enferrujar, toda a superfície do tubo tem de ser coberta por uma tinta de esmalte especial.

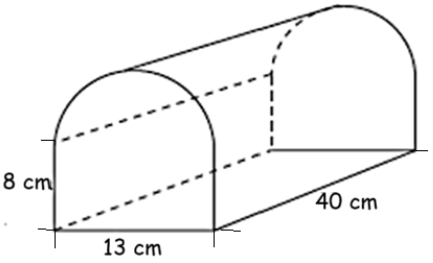
3.2.1. Calcula a superfície total do tubo, incluindo a superfície interior.

3.2.2. Sabendo que $1\ l$ de tinta cobre $5\ m^2$, determina quantos tubos, idênticos ao anterior, se podem pintar com $1\ l$ de tinta.

Nota: apresenta os resultados com aproximações adequadas à situação.

4. Em determinadas regiões dos Estados Unidos da América é usual o uso de caixas de correio exteriores semelhantes às da imagem ao lado.
Numa Escola Secundária, a Associação de Estudantes resolveu construir uma caixa deste tipo para que os alunos coloquem lá sugestões, reclamações e informações.

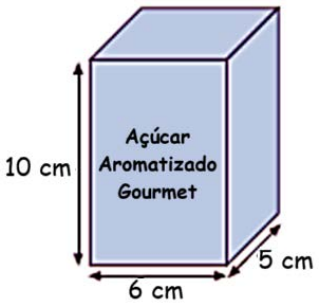
A secção transversal da caixa é constituída por um retângulo e um semicírculo, como mostra o esquema da figura ao lado.
O esquema não está representado à escala.



4.1. Determina o volume da caixa de sugestões.
Apresenta o resultado aproximado às unidades.

4.2. Calcula a área total exterior da caixa de sugestões.
Apresenta o resultado aproximado às unidades.

5. Uma empresa de distribuição de açúcar aromatizado gourmet comercializa o seu produto em embalagens com formato de um paralelipípedo retângulo, com as dimensões indicadas na figura ao lado.

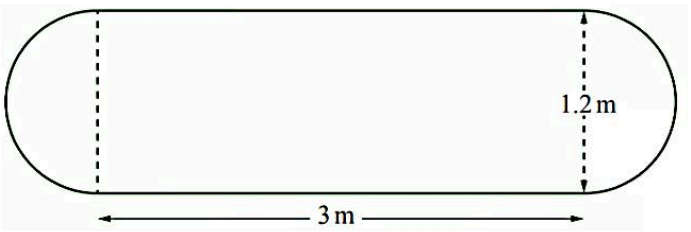


5.1. Determina o volume da embalagem.

5.2. Para comemorar o primeiro aniversário da empresa, foram criadas embalagens especiais, cujas dimensões tinham mais $20\ \%$ do que a embalagem *standard*. Qual é o volume da nova embalagem?

5.3. A embalagem inicial (*standard*) permite encher dez açucareiros. Quantos açucareiros podem ser enchidos com uma embalagem especial?

6. Na figura seguinte está representado um esquema das superfícies (superior e inferior, que são iguais) de um lago, num jardim.



A superfície é composta por um retângulo ($3\ m \times 1,2\ m$) e dois semicírculos.

6.1. Determina a área da superfície representada.

6.2. As paredes entre a superfície superior e a inferior são verticais e têm de altura 20 cm. Quantos litros de água são necessários para encher o lago?

6.3. Quando o lago ainda estava vazio, choveu. A quantidade de água que ficou no lago foi 500 litros. Qual é a altura do nível da água?

6.4. Pretende-se pintar as paredes e o fundo do lago com uma tinta impermeabilizante. Com cada litro desta tinta, pinta-se uma superfície de $5\ m^2$.

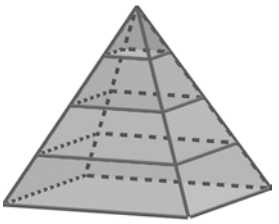
6.4.1. Qual é o valor da área a pintar?

6.4.2. Cada lata de tinta tem $0,5\ l$ e custa 8 €. Qual é o custo da tinta necessária para pintar o lago?

7. Numa Escola Secundária, a turma de Artes Visuais do 11.º ano começou a organizar uma visita de estudo a Florença. Para angariar fundos para esta atividade, decidiram vender velas com um design, projetado pelos alunos, como mostra a figura ao lado.

O molde para fazer as velas, tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular, com $16\,cm$ de altura e $6\,cm$ como comprimento da aresta de base.

Cada vela é composta por 4 blocos com a mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior — e cores diferentes (da base para o topo: lilás, azul, verde e magenta), como mostra o esquema ao lado.



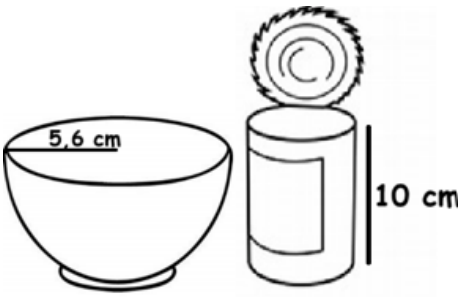
7.1. Determina o volume de cera necessário para fazer uma destas velas.

7.2. Justifica que as medidas das arestas das bases dos 4 blocos da vela são, $6\,cm$, $4,5\,cm$, $3\,cm$ e $1,5\,cm$, respetivamente, da base para o topo da vela.

7.3. Qual é o volume de cera de cada cor, necessário para fazer uma vela?

7.4. Calcula a área mínima de papel necessário para embrulhar cada vela.

8. Na figura ao lado estão representadas uma tigela com a forma de uma semiesfera com $5,6\,cm$ de raio e uma lata cilíndrica de altura $10\,cm$. A lata está cheia de molho de tomate (o esquema não está representado à escala). Quando se verte o molho para a tigela vazia, este ocupa $80\,\%$ da sua capacidade.

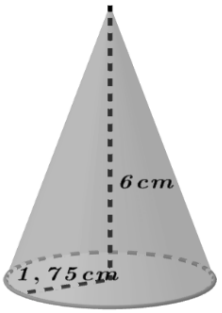


Calcula a medida do raio da base da lata.

Sugestão: começa por determinar o volume da tigela.

Nota: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

9. Na figura ao lado está representado um saleiro com o formato de um cone com $1,75\ cm$ de raio e $6\ cm$ de altura.



9.1. Determina a área da superfície total do cone.

9.2. Supõe que a altura do sal dentro do saleiro é $4,5\ cm$ e que a superfície de sal forma um círculo paralelo à base do cone.
Determina o volume do sal que se encontra dentro do saleiro.

9.3. Pretende-se esvaziar o saleiro. O sal sai a uma velocidade de $200\ mm^3$ por segundo. Quanto tempo demora para o saleiro ficar totalmente vazio?

TAREFA 5

O bolo de noiva

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa visa consolidar e aprofundar os conhecimentos dos alunos sobre a semelhança de sólidos, em particular cubos e cilindros, através da exploração de relações entre comprimentos das arestas, áreas e volumes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Razão de semelhança, razão entre áreas de figuras semelhantes e cálculo de volumes.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet. Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:
A primeira parte da tarefa permite uma abordagem exploratória, promovendo a experimentação com uma apliqueta 3D do GeoGebra. Os alunos irão construir diferentes cubos, e preencher uma tabela que os leva a descobrir relações fundamentais entre o comprimento das arestas, as áreas das faces e os volumes dos cubos.
O professor deve promover a discussão sobre as relações entre os valores registados na tabela e levar os alunos a generalizar fórmulas com base nas observações realizadas. Os alunos com mais dificuldades poderão trabalhar com valores concretos e usar estratégias visuais, enquanto que outros alunos poderão explorar casos genéricos (cubo de ordem n) e justificar matematicamente as relações.
A segunda parte da tarefa pressupõe a aplicação de conhecimentos sobre semelhança de cilindros e conversão de unidades.
O professor deverá incentivar os alunos a identificarem as dimensões dadas e as relações de semelhança entre os cilindros e a realizarem uma análise crítica das razões fornecidas (volumes e áreas laterais) para deduzirem as dimensões dos bolos.
Os alunos podem evidenciar dificuldades no cálculo de algumas razões de semelhança ou não mobilizar adequadamente as razões entre áreas e entre volumes de figuras semelhantes. Se usarem apenas a razão de semelhança entre os

comprimentos e, a partir daí, efetuarem os restantes cálculos, o professor deverá promover a discussão, explorando as razões entre áreas e volumes de figuras semelhantes, mostrando que são alternativas mais eficazes.

TAREFA 5

O bolo de noiva

Parte I

Abre a apliqueta do GeoGebra 3D: https://www.geogebra.org/m/gfk6xhbp

Considera que o cubo dado tem de aresta 2 unidades.

1. Faz variar o seletor de modo a visualizares três cubos de maior dimensão. Preenche a tabela abaixo em que r é a razão de semelhança entre os comprimentos das arestas, quando partimos do cubo de aresta 2 e o ampliamos para encontrar os restantes.

Cubos	Aresta	r	Área da face	Volume
1.º cubo	2	1	4	8
2.º cubo				
3.º cubo				
4.º cubo				
10.º cubo				
Cubo de ordem n				

2. Qual é a aresta de um cubo de volume 4096? E a sua área total?

3. Considera os cubos de arestas 20 e 4.

   Determina a razão entre:

   3.1. os comprimentos das arestas dos dois cubos (razão de semelhança);

   3.2. as áreas de uma face de cada cubo;

   3.3. as volumes dos dois cubos.

4. Completa as seguintes afirmações, de forma a obteres proposições verdadeiras.

> Considera dois sólidos semelhantes. Então conclui-se que:
> - a razão entre as áreas é o _____ da razão de semelhança.
> - a razão entre os volumes é o _____ da razão de semelhança.

Parte II

Nascida em 1971, Joana Vasconcelos é uma artista plástica portuguesa com uma carreira de cerca de 30 anos que abarca uma enorme variedade de técnicas. Reconhecida pelas suas esculturas monumentais e instalações imersivas, descontextualiza objetos do quotidiano e atualiza o conceito de artes e ofícios para o século XXI.

Joana Vasconcelos criou, para a Fundação Rothschild (Inglaterra), uma escultura de três pisos intitulada "Bolo de Noiva", como mostra a figura ao lado.

O José Pasteleiro foi desafiado a criar um bolo de noiva inspirado na obra de Joana Vasconcelos. O bolo será formado por **três cilindros semelhantes** que serão colocados empilhados, ficando o cilindro de maior raio na base, tal como na escultura.

O bolo médio (cilindro do meio) tem $30\ cm$ de diâmetro e $10\ cm$ de altura.

O bolo maior é uma ampliação do bolo médio. A razão entre os volumes dos dois bolos é de $3,375$.

O bolo menor é uma redução do bolo médio. A razão entre as suas áreas laterais é de $\frac{1}{4}$.

1. Determina as dimensões (altura e raio da base) do bolo maior.
2. Determina o volume do bolo menor.
3. Qual é o volume total do bolo?
4. Sabendo que $1\ cm^3$ de bolo "pesa" $0,406\ g$, calcula o "peso" do bolo. Apresenta o resultado, em kg, com aproximação às centésimas.
5. Tendo em conta que o preço, por kg, é de $19\ €$, determina o preço final deste bolo de noiva.
6. Para o transporte do bolo, em segurança, o José Pasteleiro mandou construir uma caixa com o formato de um prisma quadrangular regular cujas dimensões excedem as dimensões do bolo em $5\ cm$.
   Determina as dimensões da caixa bem como a medida da área da sua superfície.

TAREFA 6

Empacotamentos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta é uma tarefa planeada para conduzir os alunos a otimizarem situações de empacotamentos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Áreas e volumes de sólidos; visualização espacial e raciocínio geométrico.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet. Calculadora.

Notas e sugestões:
Sugere-se que a tarefa comece com a visualização do vídeo de "Isto é Matemática - Empacotamentos".
No item 2., poderão verificar-se alguns constrangimentos na alínea 2.3. relacionados com a dificuldade de leitura e interpretação dos alunos.
No item 3., o professor deverá salientar a importância da noção de eficácia de empacotamento na vida real e dar exemplos de como poderá ser importante para as suas profissões futuras: exemplo transportar telas, ou outros objetos, de dimensões variadas ou escolher um transporte com capacidade suficiente.

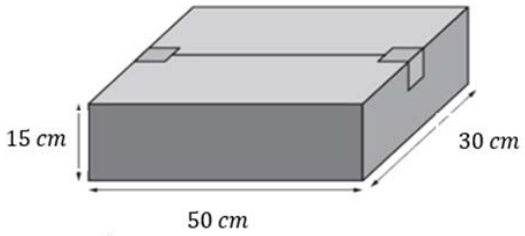
TAREFA 6

Empacotamentos

1. Visualiza o vídeo: de "Isto é Matemática - Empacotamentos".
   Qual é a relação entre o design de uma embalagem e a matemática?
   Para responder a esta questão deves ter em conta:
   - as características de um objeto que pretendes embalar;
   - os conceitos matemáticos que precisas para projetar essa embalagem.

2. A fábrica *Guloseimas* produz gomas e outros doces. Para realizar a entrega a nível nacional é necessário embalar os respetivos produtos e proceder ao empacotamento de pequenas caixas numa caixa de dimensões maiores.
   Sabe-se que os pacotes de gomas têm a forma de um prisma quadrangular regular, como mostra a figura ao lado, sendo a base do pacote um quadrado com $2\ cm$ de lado e $5,5\ cm$ de altura.

   Para fazer a distribuição do produto vão ser utilizadas caixas de cartão com a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões internas são as referidas na figura seguinte:



   Sabe-se que todos os pacotes de gomas devem ser colocados da mesma forma e que existem diferentes maneiras de o fazer.

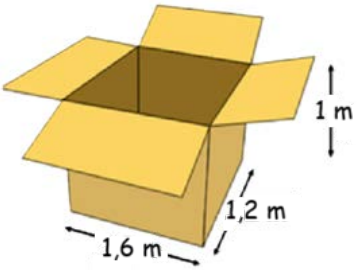
   2.1. Encontra três maneiras de posicionar os pacotes de gomas nas caixas de cartão.
   Sugestão: Faz um esquema para cada disposição dos pacotes de gomas.

   2.2. Para cada situação identificada anteriormente, determina o número de pacotes de gomas que cabem nas caixas de cartão e apresenta o número máximo obtido.

   2.3. Calcula o volume do espaço não preenchido em cada situação.

3. Uma empresa de conservas acondiciona feijão cozido, em latas. Sabe-se que as latas têm a forma de um cilindro de altura $17\ cm$ e diâmetro da base igual a $11\ cm$. Estas são as dimensões exteriores da lata.

3.1. Para distribuir grandes quantidades deste produto, a empresa embala as latas de feijão em caixas com a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões internas estão indicadas na figura ao lado.



3.1.1. As latas de feijão devem ser posicionadas todas da mesma forma. Encontra três maneiras diferentes de posicionar as latas de feijão nas caixas. Qual foi o número de latas de feijão que consegues colocar dentro de uma caixa, em cada uma das situações?

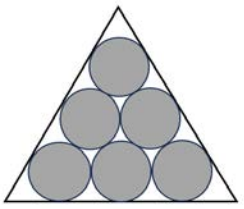
3.1.2. Qual é o número mínimo de caixas necessárias para transportar $20\ 000$ latas de feijão? Justifica.

3.2. Um cliente encomendou à empresa latas de feijão, mas exige que a caixa usada no transporte contenha apenas **seis** latas de feijão.

O cliente sugeriu à empresa que a caixa tivesse a forma de um prisma triangular regular. Solicitou ainda que:

- a altura da caixa seja igual a altura da lata de feijão;
- a base da caixa seja um triângulo equilátero, com $42\ cm$ de lado, aproximadamente.

O esquema da figura ao lado ilustra a situação descrita.



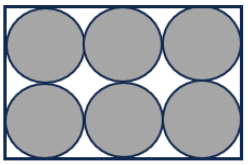
3.2.1. Calcula o volume da caixa usada no transporte das seis latas de feijão.

Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3.2.2. Determina o volume ocupado pelas seis latas de feijão.

Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3.3. Se não tivessem sido impostas condições especiais pelo comprador, a empresa teria embalado as seis latas de feijão numa caixa com a forma de um prisma retangular.



Relativamente a essa caixa, sabe-se que:

- a altura da caixa é igual a altura da lata de feijão;
- a base da caixa é um retângulo e só pode conter seis latas de feijão como podes observar no esquema da figura ao lado.

3.3.1. Determina as dimensões da base da caixa.

3.3.2. Calcula o volume da caixa.

3.4. A eficácia de um empacotamento pode ser estudada calculando a razão entre o espaço ocupado pelas latas e o volume total da embalagem, isto é:

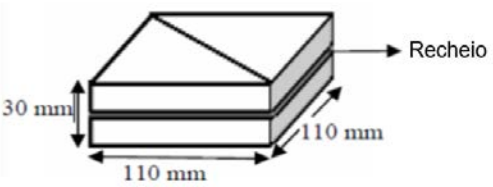
$$r = \frac{V_{Latas}}{V_{embalagem}}$$

Quanto maior for esta razão, mais eficaz é o empacotamento.

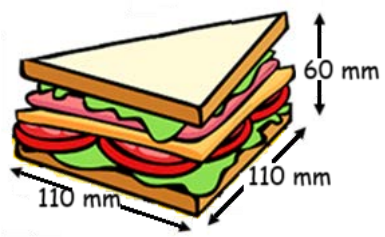
O gerente da empresa afirma que o empacotamento das seis latas de feijão é mais eficaz se for usado um paralelipípedo retângulo. Será que tem razão?

Justifica a tua resposta.

4. Numa estação de serviço vendem-se sandes, onde o recheio é colocado entre duas fatias de pão de base em formato quadrangular. Cada lado das fatias de pão mede $110\ mm$ e a sandes tem $30\ mm$ de espessura, como indicado na figura ao lado.

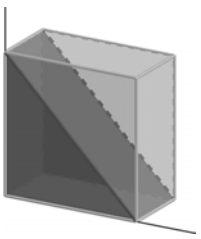


Para ser embalada, a sandes é cortada na diagonal e cada metade é colocada sobreposta numa embalagem que tem a forma de um prisma triangular como ilustrado na figura seguinte.



4.1. A embalagem é feita de papel *Kraft* e as suas dimensões são superiores às da sandes em $5\ \%$. Determina a área do papel *Kraft* utilizado para construir a embalagem.

4.2. A estação de serviço recebe as sandes numa caixa de cartão com $94\ cm$ de comprimento, $58\ cm$ de largura e $36\ cm$ de altura. As sandes vão ser embaladas como indicado na figura seguinte:



Determina o número máximo de sandes que é possível embalar nesta caixa de cartão.

5. A empresa "*Folha-de-Flandres*" começou a produzir latas de spray vazias para vender a outras empresas.

Sabe-se que:

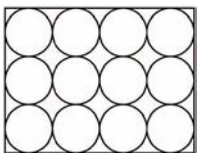
- a lata (com tampa) tem a forma de um cilindro.
- cada lata (incluindo a tampa) tem $20\ cm$ de altura e $6,5\ cm$ de diâmetro da base.

5.1. O departamento criativo está a estudar qual é o tipo de empacotamento que será mais adequado tendo em consideração que:

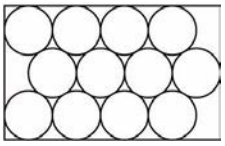
- as caixas de transporte têm a forma de um prisma retangular;
- cada caixa deverá permitir 3 filas de 4 latas, num total de 12 latas por caixa;
- dentro da caixa só há um nível de latas (não há latas sobrepostas).

Foram selecionadas duas opções (A e B) para apresentar ao Diretor Criativo, conforme os esquemas seguintes:

Opção A



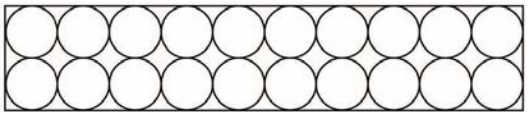
Opção B



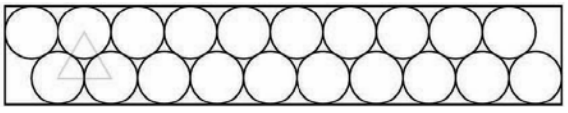
Qual das embalagens garante maior eficácia de empacotamento?

5.2. O volume das encomendas de latas de spray foi muito grande, pelo que o presidente da empresa pediu que estudassem a opção de utilizar caixas com capacidade para 20 latas, num só nível, e apresentou duas propostas cujos esquemas são os seguintes:

Opção C



Opção D



Nota: Podes observar na opção D a representação de um triângulo que te poderá ajudar nas alíneas que se seguem.

5.2.1. Em qual das propostas, C ou D, há menor desperdício de espaço? Justifica.

5.2.2. Determina qual das caixas (opção C ou D) tem menor área de superfície? Considera as seis faces da caixa.

5.2.3. (Aprofundamento) Identifica uma terceira opção para embalar as 20 latas (num só nível) que possua uma menor área de superfície do que a opção C. Justifica.