P5 - PROBABILIDADE

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Taxa de Variação e Otimização (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/

Data:

Lisboa, junho de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO P5 - Probabilidade

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Determinismos e Surpresas	**Probabilidade** Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	• Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). • Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. • Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S dos resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. • Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

2	Tarefa 2 Moedas, Dados e Pioneses em ação	**Probabilidade** Probabilidade frequencista Regras da probabilidade Probabilidade da união de acontecimentos	• Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$ onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. • Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. • Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
3	Tarefa 3 Laplace: O Senhor dos Dados e das Jogadas Aleatórias!	**Probabilidade** Regra de Laplace	• Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem. • Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $Probabilidade\ de\ A =$ $= \frac{Número\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ possíveis}$	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalhar em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

3	Tarefa 4 Venn, vamos lá ! - Redes sociais	**Probabilidade** Probabilidade da união de acontecimentos	• Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
3	Tarefa 5 Concerto Condicionado: A Sinfonia das Probabilidades	**Probabilidade condicionada** Definição Regra do produto	• Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B)=P(A \cap B)P(B)$. • Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\|B)$, conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
3	Tarefa 6 Quando a Matemática dá razão ao médico	**Probabilidade condicionada** Árvore de probabilidade Tabelas de contingência	• Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. • Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

4	Tarefa 7 Quando a Probabilidade Sobe ao Pódio!	**Probabilidade condicionada** Acontecimentos independentes	• Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A\|B) = P(A)$ (A independente de B) e $P(B\|A) = P(B)$ (B independente de A). • Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) x P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Tarefas e recursos educativos • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

Tarefa 1

Determinismos e Surpresas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com a Tarefa 1 pretende-se que os alunos consigam:

- distinguir fenómenos aleatórios e não aleatórios (ou determinísticos);
- compreender o que são experiências aleatórias, o que é um espaço de resultados ou espaço amostral (de uma experiência aleatória), o que é acontecimento;
- relembrar os conceitos de: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de acontecimento (certo, impossível, elementar e composto); acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:

O professor deve organizar os alunos em pequenos grupos. De seguida, os alunos deverão resolver a mesma tarefa de forma autónoma enquanto o professor acompanha o trabalho desenvolvido. Sugere-se que se faça uma discussão com toda a turma e uma síntese dos conceitos envolvidos, item a item.

Entende-se que o professor deve explorar outros exemplos, eventualmente com base no item 2., que contribuam para consolidar a distinção entre os conceitos de acontecimentos disjuntos e acontecimentos contrários.

Tarefa 1

Determinismos e Surpresas

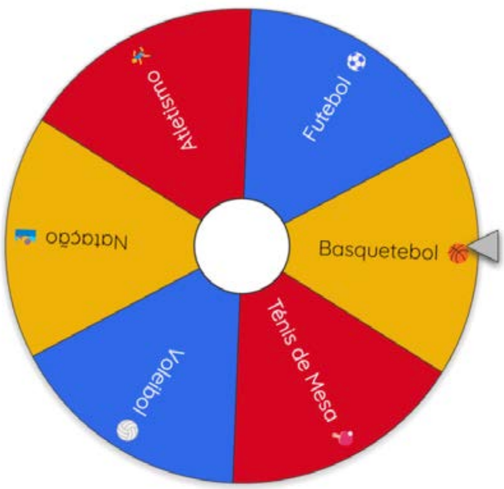
1. Numa aula de Matemática, a professora questionou os alunos sobre os resultados das seguintes experiências:

   Experiência 1: Colocar uma panela com água a aquecer, até à ebulição;
   Experiência 2: De um baralho de cartas, retirar uma carta sem olhar e verificar qual o seu naipe;
   Experiência 3: Colocar um copo de água dentro do congelador, até à solidificação;
   Experiência 4: Abrir uma caixa de bombons sortidos na cor, retirar um bombom sem olhar e verificar a sua cor;
   Experiência 5: Lançar uma moeda ao ar e observar se a face que fica virada para cima é a "face europeia" ou a "face nacional";
   Experiência 6: Largar uma bola do topo de uma rampa inclinada e observar o que acontece.

   1.1. Depois de pesquisares, por exemplo, no ALEA, a diferença entre experiência aleatória e experiência determinística, distingue, das situações apresentadas, as que são aleatórias e as que são determinísticas.

   1.2. Apresenta exemplos, diferentes dos anteriores, um de experiência determinística e outro de experiência aleatória.

2. Os alunos de uma turma estão a organizar uma atividade para angariar fundos para a sua viagem de finalistas. Várias empresas disponibilizaram materiais que poderiam ser sorteados. Decidiram criar uma roleta da sorte, onde os participantes podem ganhar prémios ao acertar na categoria de desporto em que a roleta vai parar. A roleta está dividida em seis setores, geometricamente iguais, de acordo com os seguintes tipos de desportos:



   a. Futebol (com bola, coletivo)

b. Basquetebol (com bola, coletivo)
c. Ténis de mesa (com bola, individual)
d. Voleibol (com bola, coletivo)
e. Natação (sem bola, individual)
f. Atletismo (sem bola, individual)

Considera a experiência aleatória:" Colocar a roleta a rodar e ver em que desporto para."

2.1. Escreve o espaço de resultados desta experiência (ou espaço amostral) e representa-o por uma das letras: E ou S ou Ω (conjunto de todas as possíveis categorias de desporto em que a roleta pode parar).

2.2. Escreve, em extensão, os seguintes acontecimentos:

2.2.1. Acontecimento A: "Sair um desporto";

2.2.2. Acontecimento B: "Sair um desporto individual";

2.2.3. Acontecimento C: "Sair um desporto aquático";

2.2.4. Acontecimento D: "Sair um desporto individual e um desporto coletivo ";

2.2.5. Acontecimento E: "Sair um desporto coletivo";

2.2.6. Acontecimento F: "Sair um desporto com bola".

2.3. Preenche a tabela, colocando X, de modo a classificar cada um dos acontecimentos.

Acontecimentos	Acontecimento impossível	Acontecimento elementar	Acontecimento composto	Acontecimento certo
A				
B				
C				
D				
E				
F				

2.4. Escolhe a opção que define em extensão os acontecimentos:

2.4.1. $B \cap F$.

(A) $\{Ténis\ de\ mesa,\ Natação,\ Atletismo,\ Futebol,\ Voleibol,\ Basquetebol\}$

(B) $\{\ \} = \emptyset$

(C) $\{Ténis\ de\ mesa\}$

(D) $\{Futebol,\ Voleibol,\ Basquetebol\}$

2.4.2. $C \cup E$

(A) $\{Ténis\ de\ mesa,\ Natação,\ Atletismo,\ Futebol,\ Voleibol,\ Basquetebol\}$

(B) $\{\ \} = \emptyset$

(C) $\{Ténis\ de\ mesa\}$

(D) $\{Futebol,\ Voleibol,\ Basquetebol\}$

2.5. Define, por palavras tuas, os acontecimentos:

2.5.1. $B \cap F$

2.5.2. $C \cup E$

2.6. Considera os acontecimentos:

Acontecimento X: "Sair um desporto de equipa não aquático"

Acontecimento Y: "Sair um desporto individual não aquático"

2.6.1. Escreve em extensão o acontecimento $X \cap Y$;

2.6.2. Escreve em extensão o acontecimento $X \cup Y$;

Dois acontecimentos são **disjuntos** (ou, **mutuamente exclusivos**) se não podem ocorrer ao mesmo tempo. Ou seja, a **interseção** entre dois acontecimentos disjuntos é o **conjunto vazio**.

Se P e Q são acontecimentos **disjuntos**, então $P \cap Q = \emptyset$

Dois acontecimentos dizem-se **contrários** ou **complementares** se a sua **interseção** é o **conjunto vazio** (são disjuntos) e se a sua **união** é todo o **espaço amostral.**

Se P e Q são acontecimentos **contrários**, então $P \cap Q = \emptyset$ **e** $P \cup Q = \Omega$

2.6.3. Completa a seguinte afirmação, selecionando a opção correta da tabela ao lado. A cada espaço em branco corresponde uma opção distinta.

Os acontecimentos X e Y não são acontecimentos contrários, porque apesar da sua _________ ser o ____________, a sua __________ não é o _____________.

união (∪)
interseção (∩)
disjuntos
conjunto vazio
espaço amostral

2.7. Dos acontecimentos:

Acontecimento A: ”Sair um desporto”;

Acontecimento B: ”Sair um desporto individual”;

Acontecimento C: ”Sair um desporto aquático”;

Acontecimento D: ”Sair um desporto individual e um desporto coletivo ”;

Acontecimento E: “Sair um desporto coletivo”;

Acontecimento F: “Sair um desporto com bola”;

2.7.1. Indica dois acontecimentos disjuntos e não contrários;

2.7.2. Indica dois acontecimentos contrários.

Tarefa 2

Moedas, Dados e Pioneses em ação

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, o objetivo é a exploração prática do conceito de probabilidade numa perspetiva frequencista, utilizando modelos simples associados a “jogos de sorte e azar”.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de probabilidade de 8.º ano, calcular a probabilidade de acontecimentos utilizando a frequência relativa e estimar a probabilidade de acontecimentos.

Materiais e recursos: Moedas, pioneses, material de escrita e vídeo.

Notas e sugestões:

Depois de definidos os acontecimentos “Sair face nacional” e “Sair face europeia”, na experiência aleatória lançamento de uma moeda, o professor deverá fazer o paralelismo com as designações dos acontecimentos “sair cara” e “sair coroa” , que são usadas no vídeo. Sugere-se que a visualização do vídeo se faça apenas até ao minuto 5:50.

Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pares, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador/facilitador.

Através da repetição de experiências aleatórias como o lançamento de uma moeda ou de um dado calibrado, os alunos serão levados a observar que, com um número elevado de repetições, a frequência relativa de cada resultado tende a estabilizar em torno de um valor.

Deverá ser também introduzida a ideia de que esta estabilização depende das características do objeto em causa, recorrendo a exemplos como o lançamento de pioneses (ou de dados não calibrados), nos quais as probabilidades dos diferentes resultados não são iguais.

A experiência de lançamento de pioneses, foi selecionada de forma a que os alunos compreendam que o cálculo de probabilidade de alguns acontecimentos (em experiências aleatórias em que os acontecimentos elementares não sejam equiprováveis) tem de ser feito de forma experimental. Recomenda-se que o lançamento dos pioneses seja feito como se um dado se tratasse, de uma forma aleatória e com uma distância à mesa considerável.

Tarefa 2

Moedas, Dados e Pioneses em ação

1. Na experiência aleatória lançamento de uma moeda calibrada, considera os seguintes acontecimentos:

   Acontecimento A: “ Sair face nacional”

   Acontecimento B: “Sair face europeia ”

   Sabe-se que:

   Face nacional: É o lado da moeda que geralmente apresenta uma imagem ou um símbolo, como a efígie de uma figura nacional ou histórica, ou um desenho representativo do país.

   Face europeia: É o lado oposto da moeda, que muitas vezes apresenta um valor numérico e é comum a todas as moedas europeias.

   Visualiza o vídeo Isto é Matemática “Hoje lavas tu a louça” , antes de começares a responder às questões.

   1.1. Comenta as seguintes afirmações, explicando se são verdadeiras ou falsas:

   1.1.1. “Para o acontecimento A, é certo que a frequência relativa, em 10 lançamentos da moeda, é de 50%.”

   1.1.2. “Se em 1000 repetições da experiência obtivermos 900 vezes o acontecimento B, podemos suspeitar (fortemente) que a moeda está viciada.”

   1.2. Completa as frases, riscando o que não interessa, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

   1.2.1. Quando se fizer um número muito grande de lançamentos, a frequência absoluta/relativa do acontecimento A deverá estabilizar num valor próximo de 0 / 0,5 / 1, no caso da moeda ser calibrada.

   1.2.2. Neste caso, diz-se que a probabilidade (frequencista) do acontecimento A, que se representa por $P(A)$, é 0/0,5/1 (valor no qual estabiliza a frequência relativa).

Define-se **probabilidade** - definição frequencista - **de um acontecimento** A e representa-se por $P(A)$, como sendo **o valor obtido para a frequência relativa** com que se observou A, num grande número de realizações da experiência aleatória.

2. Considera a experiência aleatória deixar cair um pionés em cima de uma mesa e os acontecimentos elementares:

   L: "A base do pionés fica de lado"

   M: "A base do pionés fica sobre a mesa"

2.1. Consideras que, na experiência descrita, os acontecimentos L e M são equiprováveis (têm igual probabilidade de ocorrer)?

2.2. Usa os cinco pioneses que te disponibilizaram para fazeres 25 lançamentos e regista o número de vezes em que se observou o acontecimento L e o número de vezes em que se observou o acontecimento M, e completa a tabela, considerando também as experiências dos teus colegas.

N.º de lançamentos	Frequência absoluta do acontecimento L	Frequência absoluta do acontecimento M	Frequência relativa do acontecimento L	Frequência relativa do acontecimento M
125				
250				
500				
1000				
1500				
2000				
2500				
3000				
3500				

2.3. Utilizando a abordagem frequencista de probabilidade, estima a probabilidade do acontecimento L. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

2.4. Indica, justificando, se os acontecimentos M e L são equiprováveis?

2.5. Calcula o valor de $P(L) + P(M)$.

2.6. Do diálogo que se segue, entre dois colegas, a Maria e o Miguel, qual dos dois tem razão? Justifica.

Miguel: "Nos cálculos que fiz, a probabilidade do acontecimento L é igual $\frac{37}{25}$."

Maria: "Miguel, o valor que apresentas não pode representar o valor de uma probabilidade."

2.7. Completa as frases, com valores numéricos, de modo a obteres propriedades que decorrem da definição frequencista de probabilidade de um acontecimento:

- A probabilidade do acontecimento L está compreendida entre _______ e ________.
- A soma das probabilidades dos acontecimentos L e M é igual a ________.

3. Considera a experiência aleatória que consiste em "lançar um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6 e verificar o número da face que fica voltado para cima". Utiliza a apliqueta Lançar um dado cúbico para responder às questões seguintes:

3.1. Escreve o espaço de resultados (representa o acontecimento "sair face numerada com o 1" por "1", e assim sucessivamente).

3.2. Quando se lança o dado um grande número de vezes, qual é o valor expectável para a frequência relativa de cada um dos acontecimentos elementares (acontecimentos constituídos por um único resultado)? Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3.3. Considerando os valores obtidos na questão anterior, como estimativa para as probabilidades dos acontecimentos elementares, qual é a probabilidade dos acontecimentos:

3.3.1. A: "sair face com o número 3";

3.3.2. B: "sair face com um número superior a 5";

3.3.3. C: "sair face com um número ímpar";

3.3.4. Qual é o valor que esperas obter na soma: $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$. Justifica a tua resposta.

Tarefa 3

Laplace: O Senhor dos Dados e das Jogadas Aleatórias!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo propor aos alunos a resolução de problemas de cálculo de probabilidades, partindo de situações intuitivas e recorrendo à Regra de Laplace. Pretende-se, que os alunos compreendam a importância de organizar a informação disponível, através de diferentes representações, nomeadamente diagramas em árvore ou tabelas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Probabilidade de um acontecimento elementar, regras da probabilidade.

Materiais e recursos: Material de escrita e vídeo.

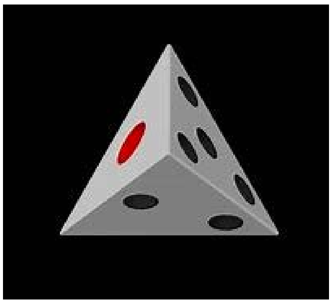
Notas e sugestões:

Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pares ou individualmente, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador/facilitador. O professor deve promover uma discussão sobre as resoluções dos alunos, com toda a turma, no fim do trabalho autónomo.

No item 5.1.4. recomenda-se que o professor especifique que o acontecimento “saírem bolas de cores diferentes” é o acontecimento contrário de “saírem bolas de cores iguais”, e resolva este item usando o resultado obtido no item 5.1.3. .

Tarefa 3

Laplace: O Senhor dos Dados e das Jogadas Aleatórias!



1. A Maria recebeu no Natal um jogo de tabuleiro com um dado diferente e ficou admirada, pois o dado tem apenas quatro faces.

   1.1. Escreve o espaço de resultados associado à experiência aleatória "Lançar o dado tetraédrico regular e equilibrado (em cima de uma mesa) e verificar qual é o número de pintas da face que ficou encostada ao tampo da mesa".

   Sugestão: Representa por 1, o resultado "o número de pintas da face encostada ao tampo da mesa é 1" e assim sucessivamente.

   1.2. O irmão da Maria, disse que a probabilidade do número de pintas da face encostada ao tampo da mesa ser dois, é $\frac{1}{3}$. Diz, justificando, se concordas com a afirmação do irmão da Maria.

   > Relembra
   > **Regra de Laplace**
   > Numa experiência aleatória, em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, define-se **probabilidade de um acontecimento** A e representa-se por $P(A)$, a razão entre o número de resultados favoráveis à realização de A e o número de resultados possíveis.
   > $$P(A) = \frac{número\ \ de\ resultados\ favoráveis\ à\ realização\ de\ A}{número\ de\ resultados\ possíveis}$$

   1.3. Completa a seguinte tabela de probabilidades:

Número de pintas da face encostada ao tampo da mesa	1	2	3	4
Probabilidade				

   1.4. Determina a probabilidade do acontecimento "o número de pintas da face encostada ao tampo da mesa ser par".

2. Dois irmãos, o António e a Beatriz, decidiram recorrer a uma experiência aleatória para ver quem lava a louça no final do jantar. Para tal, decidiram lançar dois dados cúbicos equilibrados (cujas faces são numeradas de 1 a 6) e somar os pontos saídos (face voltada para cima) em cada dado.

O António lava a louça se a soma dos pontos for 5, 6, 7 ou 8.
A Beatriz lava a louça se a soma for 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12.

Sugestão: Visualiza o vídeo "Isto é Matemática - Sorte, Azar ou Matemática" como introdução.

A probabilidade de ser o António a lavar a louça é a mesma que a da Beatriz? Explica a tua resposta.
Sugestão: Constrói uma tabela de dupla entrada que represente a soma dos pontos em cada lançamento.

3. Um grupo de estudantes do Curso de Técnico de Eletrónica, Automação e Computadores tem de construir um circuito elétrico. Para tal vão escolher alguns componentes. Para o circuito, necessitam de:

- um tipo de fio: existem três disponíveis (fio de cobre de 2,5 mm^2, fio de alumínio de 4 mm^2 e fio de cobre flexível de 6 mm^2);
- um disjuntor: existem dois disponíveis (disjuntor de 8A e disjuntor de 16A).

Sabendo que a escolha dos componentes será feita ao acaso, responde às questões seguintes:

3.1. Qual é a probabilidade de ser construído um circuito com:

3.1.1. o fio de cobre de 2,5 mm^2?

3.1.2. o disjuntor de 8A?

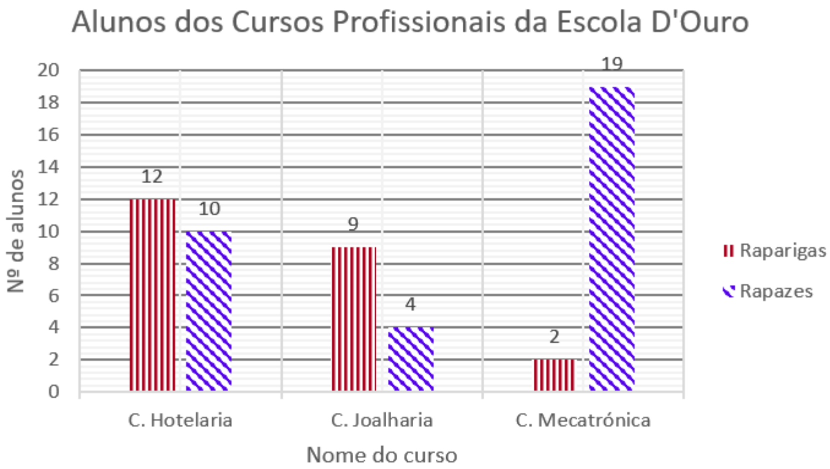
3.1.3. o fio de alumínio de 4mm^2 e o disjuntor de 16A?

3.2. Qual é a probabilidade de ser construído um circuito com um fio de cobre?

4. Na Escola Profissional D'Ouro existe apenas uma turma de cada um dos seguintes cursos:

- Profissional de Hotelaria;
- Profissional de Joalharia;
- Profissional de Mecatrónica.

No gráfico seguinte estão representados os dados referentes ao género, por curso, dos 56 alunos destes três cursos:



4.1. Escolhendo ao acaso um destes alunos, qual é a probabilidade de:

4.1.1. ser do Curso de Mecatrónica (apresenta o resultado na forma de dízima);

4.1.2. ser uma rapariga;

4.1.3. ser uma rapariga do Curso de Hotelaria (apresenta o resultado na forma de fração irredutível).

4.2. Escolheram-se ao acaso dois alunos, um a seguir ao outro. Qual é a probabilidade de apenas um deles ser rapaz do Curso de Joalharia?

Sugestão: Começa por construir um diagrama em árvore ou uma tabela que descreva a situação.

5. Um saco contém 4 bolas amarelas, 3 pretas e 2 vermelhas, indistinguíveis ao tato.

5.1. Considera a experiência aleatória que consiste retirar 2 bolas sucessivamente e com reposição, ou seja, a primeira bola é retirada, registada a sua cor e colocada novamente no saco.

Calcula a probabilidade de:

5.1.1. saírem duas bolas pretas;

5.1.2. sair uma bola vermelha e uma bola preta;

5.1.3. saírem bolas de cores iguais;

5.1.4. saírem bolas de cores diferentes.

5.2. Considera agora a experiência aleatória de retirar 2 bolas sucessivamente e sem reposição, ou seja a primeira bola é retirada, registada a sua cor e não volta a ser colocada no saco.

Calcula a probabilidade de (apresenta o resultado em forma de fração irredutível):

5.2.1. saírem duas bolas pretas;

5.2.2. sair uma bola vermelha e uma bola preta;

5.2.3. saírem bolas de cores diferentes.

Tarefa 4

Venn, vamos lá ! - Redes sociais

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como principal objetivo promover a compreensão do conceito de probabilidade da união de acontecimentos, utilizando como ponto de partida situações próximas da realidade dos alunos . Para isso, recorre-se à representação dos acontecimentos através de diagramas de Venn, facilitando a visualização das relações entre os conjuntos. Com base nesta representação, trabalha-se a fórmula da probabilidade da união e da interseção de dois ou mais acontecimentos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Diagramas de Venn, operações com acontecimentos.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a tarefa seja realizada individualmente ou em pares, de forma autónoma pelos alunos. Após a fase de trabalho autónomo, o professor deverá promover uma discussão coletiva das diferentes resoluções apresentadas pelos alunos, incentivando a partilha e análise crítica. É recomendável que sejam exploradas várias estratégias de resolução, de modo a permitir que os alunos compreendam e comparem a eficácia de cada uma.

No item 1.4. , tendencialmente, a resolução será calcular a probabilidade do acontecimento contrário de não utilizar nenhuma das duas redes sociais. No entanto, é sugerido que se utilize os resultados obtidos no item 1.3., de forma a levar o aluno a calcular a probabilidade da união de acontecimentos, intuitivamente.

Tarefa 4

Venn, vamos lá ! - Redes sociais

As redes sociais transformaram-se num fenómeno global, influenciando a forma como comunicamos e partilhamos experiências.
A sua popularização começou em meados dos anos 2000, com o surgimento de plataformas como o MySpace e, mais tarde, o Facebook, que rapidamente conquistaram utilizadores em todo o mundo.
[...] 86% dos jovens admite estar viciado nas redes sociais, face à média europeia de 78% , e 90% já as utiliza desde os 13 anos. E oito em cada dez prefere comunicar pelas redes sociais, em vez de pessoalmente [...]

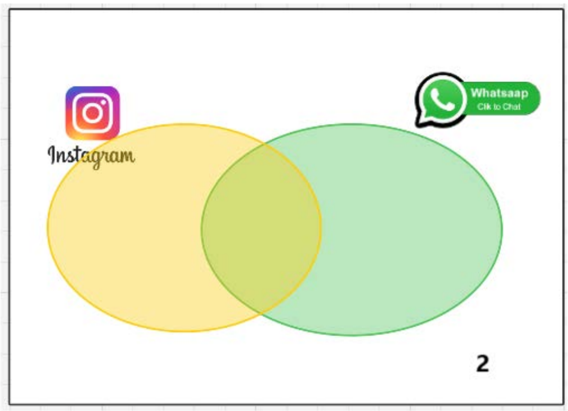
https://www.publico.pt/2023/05/30/impar/noticia/nove-dez-jovens-usam-redes-sociais-desde-13-anos-revela-estudo-2051500

Por outro lado, enquanto promovem a conexão global, as redes sociais levantam questões sobre privacidade, bem-estar emocional e uso responsável.

1. As redes sociais Instagram e WhatsApp são das mais utilizadas pelos jovens.
   Na turma da Maria, que é constituída por 27 alunos, ela sabe que:
   - 15 alunos utilizam o WhatsApp;
   - 22 alunos utilizam o Instagram;
   - 2 alunos não utilizam nenhuma destas duas redes sociais.

   1.1. Qual é o número de alunos da turma que utilizam pelo menos uma destas duas redes sociais?

   1.2. Completa o seguinte diagrama de Venn com os respetivos números de alunos.



1.3. Escolhendo um aluno da turma da Maria ao acaso, calcula a probabilidade de esse aluno:

1.3.1. utilizar a rede social Instagram;

1.3.2. utilizar a rede social WhatsApp;

1.3.3. utilizar ambas as redes sociais.

1.4. Mostra que a probabilidade de, escolhido um aluno ao acaso, ele utilizar pelo menos uma das redes é igual a $P(I \cup W) = \frac{25}{27}$.

Sugestão: Utiliza os resultados obtidos no item 1.3.

> Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B, tem-se:
>
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.5. Escolhendo, ao acaso, um aluno da turma, qual é a probabilidade de este não utilizar o Instagram?

> Qualquer que seja o acontecimento A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, onde $P(\overline{A})$ representa o acontecimento contrário de A (ou acontecimento complementar de A).

2. Numa escola, fez-se um inquérito aos 120 alunos dos Cursos Profissionais, para se conhecer os gostos musicais relacionados com o Rap e o Hip-Hop. Os resultados obtidos foram os seguintes:

- 52 alunos gostam de música Rap;
- 78 alunos gostam de música Hip-Hop;
- 25 alunos gostam de Rap e Hip-Hop simultaneamente;
- alguns alunos não gostam nem de Rap nem de Hip-Hop.

2.1. Constrói um diagrama de Venn que traduza a informação apresentada.

2.2. Escolhido um dos alunos, ao acaso, qual é a probabilidade, sob a forma de percentagem, arredondada às décimas, de:

2.2.1. não gostar de Rap?

2.2.2. gostar apenas de Hip-hop?

2.2.3. gostar de ambos os tipos de música?

2.2.4. gostar de pelo menos um dos dois tipos de música?

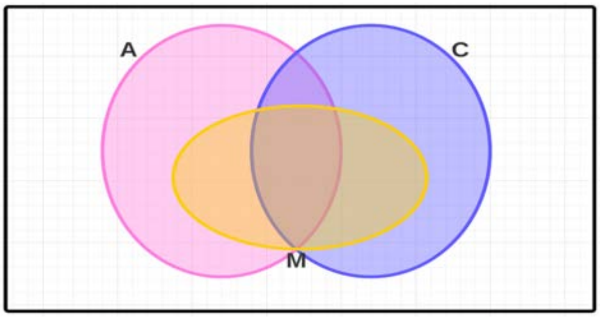
2.2.5. gostar apenas de um dos dois tipos de música?

2.3. Escolhido, ao acaso, um destes alunos que gosta de Hip-hop, qual é a probabilidade de também gostar de Rap?

3. Os 100 trabalhadores de uma empresa, na sua deslocação casa emprego, utilizam diversos meios de transporte, conforme os dados da tabela:

Meio de transporte	Número de pessoas
Autocarro	50
Comboio	35
Metropolitano	30
Autocarro e Comboio	10
Autocarro e Metropolitano	15
Comboio e Metropolitano	20
Os três meios de transporte	5

3.1. Completa o diagrama de Venn que traduz a informação apresentada.



3.2. Escolhendo um trabalhador desta empresa, ao acaso, calcula a probabilidade (em forma de fração irredutível) de:

3.2.1. não utilizar qualquer um destes transportes (autocarro, comboio, metropolitano);

3.2.2. utilizar pelo menos um destes três transportes;

3.2.3. utilizar os três transportes;

3.2.4. utilizar autocarro ou metropolitano;

3.2.5. usar apenas o metropolitano.

Tarefa 5

Concerto Condicionado: A Sinfonia das Probabilidades

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com esta tarefa, pretende-se que os alunos reconheçam, a partir de situações intuitivas que, por vezes, ao calcular a probabilidade de um acontecimento já se dispõe de informação prévia sobre o resultado da experiência. Essa informação permite atualizar a atribuição de probabilidade ao acontecimento, introduzindo assim o conceito de probabilidade condicionada.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noção de espaço de resultados, cálculo de probabilidade.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:
O item 2.1. pretende retomar estratégias e conteúdos já trabalhados na Tarefa 3 e, por outro lado, mostrar a importância da árvore de probabilidade no cálculo da probabilidade de um acontecimento.
No item 2.3.4. sugere-se que sejam exploradas diferentes resoluções, através das informações disponibilizadas, com construção de árvore de probabilidade ou de uma tabela (esta última resolução tende a ser, em geral, mais prontamente compreendida pelos alunos).

Tarefa 5

Concerto Condicionado: A Sinfonia das Probabilidades

1. A Maria deseja ir a um concerto de verão, pelo que, após pesquisa, selecionou várias opções de concerto do seu agrado:

Nas respostas às seguintes questões, apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Considera a experiência aleatória: a Maria compra, ao acaso, um bilhete para um dos sete concertos selecionados.

1.1. Seja M o acontecimento: "comprar um bilhete, para um dos concertos selecionados, cujo preço é inferior a 80 euros".
Determina $P(M)$.

1.2. Considera o acontecimento I: "comprar um bilhete cujo artista cante em Inglês".
Determina a probabilidade de a Maria comprar um bilhete cujo preço seja inferior a 80€ e cujo artista cante em Inglês (ou seja, $P(M \cap I)$).

1.3. Determina a probabilidade de a Maria escolher um concerto de um artista que cante em Inglês, sabendo que decidiu ir a um concerto cujo preço do bilhete é inferior a 80€.

Seja S um espaço de resultados, associado a uma experiência aleatória, e P uma probabilidade nesse espaço. Dados os acontecimentos A e B, com $P(B) > 0$, define-se probabilidade condicionada de A sabendo que B ocorreu e representa-se por $P(A\|B)$, como sendo: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

1.4. Resolve o item 1.3. utilizando a definição de probabilidade condicionada.

1.5. Se a Maria decidiu ir a um concerto em Inglês, qual é a probabilidade de não pagar mais de 80 euros pelo bilhete?

2. Numa festa de final de curso encontravam-se 120 jovens, dos quais 40% são raparigas.

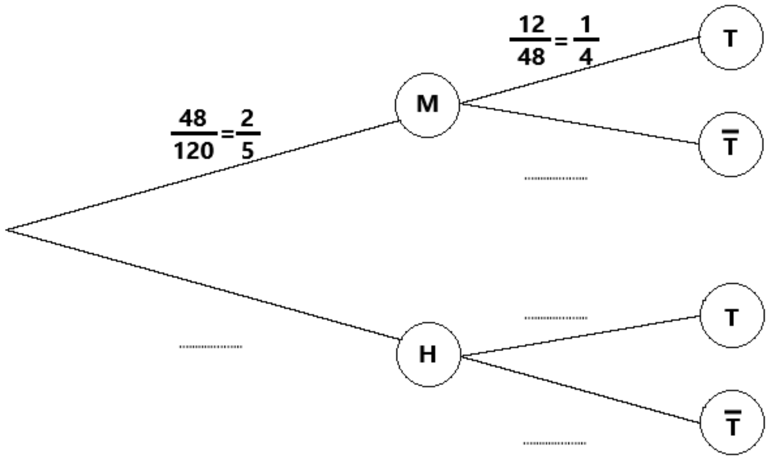
2.1. Na festa irão ser sorteados dois bilhetes (um para cada participante) para o Festival Primavera Sound do Porto. Selecionando, ao acaso e sucessivamente, dois jovens dessa festa, a probabilidade dos bilhetes serem oferecidos a jovens do mesmo sexo é:

(A) $\frac{94}{595}$ (B) $\frac{144}{595}$ (C) $\frac{288}{595}$ (D) $\frac{307}{595}$

2.2. No resultado de um questionário feito aos participantes, obteve-se que um quarto das raparigas e que dois terços dos rapazes gostam de música Techno.

Completa o diagrama de árvore de probabilidade, considerando os seguintes acontecimentos:

- Acontecimento M: ser rapariga (Mulher)
- Acontecimento H: ser rapaz (Homem)
- Acontecimento T: gostar de Techno
- Acontecimento $\overline{T}$: não gostar de Techno



$P(M \cap T) =$............

2.3. Escolhendo-se, ao acaso, um participante na festa final do curso, calcula a probabilidade de:

2.3.1. gostar de Techno;

2.3.2. não gostar Techno e ser rapariga;

2.3.3. não gostar de Techno sabendo que é rapariga;

2.3.4. entre os que não gostam de Techno, ser rapariga.

3. Os Rimónios, um grupo de Rock , pretendem realizar uma audição para selecionar dois novos elementos, um baterista e um vocalista.

Dos candidatos, sabe-se que:

- 70% são rapazes;
- 14 são bateristas;
- 60% dos bateristas são rapazes.

Considera a experiência aleatória que consiste em escolher um dos candidatos ao acaso.

3.1. Calcula a probabilidade de o candidato ser rapaz e baterista.

Sugestão: Começa por definir os acontecimentos e utiliza uma igualdade equivalente a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, para os acontecimentos definidos.

3.2. Considera que a probabilidade de ser um vocalista rapaz é de 55%.

Completa a tabela, com os respectivos valores de probabilidade, considerando os acontecimentos:

- V: "ser vocalista";
- M: "ser rapariga|mulher".

	V	$\overline{V}$	
M			
$\overline{M}$	0,55		0,7
		0,25	1

3.3. Calcula e apresenta o resultado na forma de fração irredutível:

3.3.1. $P(V|M)$

3.3.2. $P(M|V)$

3.4. Sabendo que à audição se apresentaram 20 candidatos, quantos eram os rapazes vocalistas?

Tarefa 6

Quando a Matemática dá razão ao médico

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa, os alunos deverão reconhecer a relevância das tabelas de contingência e das árvores de probabilidade na organização e interpretação de dados, facilitando o cálculo da probabilidade condicionada. Serão confrontados com situações de complexidade crescente, de forma a aplicar e consolidar estratégias e conhecimentos previamente trabalhados no domínio do cálculo de probabilidade.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noção de espaço de resultados, cálculo de probabilidade e probabilidade condicionada.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:
Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pares ou individualmente, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador/facilitador. O professor deve promover uma discussão sobre as resoluções dos alunos, com toda a turma, no fim do trabalho autónomo.
Sugere-se que antes da resolução do item 1.2.2., o professor questione se os acontecimentos "ser do grupo A" e "ser do grupo B" são ou não disjuntos (para evitar confusões sobre o grupo AB que pode ser entendido como a interseção de "ser do grupo A e ser grupo B".
No item 3.3., o professor deve levar os alunos a comparar os valores obtidos, nos itens 3.3.1. e 3.3.2., de forma a realçar que a probabilidade de ser saudável sabendo que é consumidor de bebidas energéticas é inferior à probabilidade de ser saudável, sabendo que não consome bebidas energéticas.
No item 3.4. o professor deve alertar os alunos que embora a probabilidade do acontecimento interseção de indivíduos saudáveis e consumidores (29%) seja superior à probabilidade do acontecimento interseção dos indivíduos saudáveis e não consumidores (28%), o mesmo não acontece com os valores das probabilidades condicionadas ($P(S|C) = 48,3\%$ e $P(S|\overline{C}) = 70,0\%$) , uma vez que os universos dos consumidores e não consumidores são diferentes.

Tarefa 6

Quando a Matemática dá razão ao médico

1. Existem quatro grupos sanguíneos: A, B, O e AB, alguns mais comuns do que outros. A cada tipo de sangue associa-se o fator Rh, que pode ser positivo ou negativo. Assim, da associação do Rh e do sistema de grupos sanguíneos ABO, surgem oito tipos de sangue diferentes: A+, A-, B+, B-, O+, O-, AB+ e AB-. Para mais informações visualiza o seguinte vídeo: https://youtu.be/1zy2FCYOjok?si=pkRTtkynNC5ZbBFI
Em Portugal, a distribuição dos grupos sanguíneos, em percentagem, está de acordo com a tabela seguinte:

Distribuição do tipo sanguíneo ABO e Rh por país (médias populacionais)

País	População[1]	O+	A+	B+	AB+	O−	A−	B−	AB−
Portugal[54]	10 302 674	36.2%	39.8%	6.6%	2.9%	6.1%	6.8%	1.1%	0.5%

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_do_tipo_sangu%C3%ADneo_por_pa%C3%ADs

1.1. Tendo em conta que a população portuguesa, estimada para 2025 é de cerca de 10,38 milhões, quantos serão, aproximadamente, os indivíduos do grupo A?

1.2. Considera a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um português. Calcula a probabilidade, apresentando o resultado na forma de percentagem arredondada às décimas, de:

1.2.1. ser dador universal (grupo O-);

1.2.2. ser do grupo A ou do grupo B;

1.2.3. ser do grupo AB, se é Rh- ;

1.2.4. ser do grupo A ou Rh+.

2. "Deixe de Fumar pela sua saúde",
A acumulação de substâncias nocivas encontradas no tabaco enfraquece o sistema imunitário, estimula o crescimento de células cancerígenas e afeta as defesas. Como resultado, os fumadores podem desenvolver cancro do pulmão.

Do estudo feito por um hospital a mil utentes, sabe-se que:

- 870 utentes não tinham cancro do pulmão;
- 210 utentes eram fumadores;
- 90% dos utentes com cancro do pulmão eram fumadores.

Considera a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um destes mil utentes.

2.1. Determina, em percentagem, a probabilidade de ter cancro do pulmão e ser fumador.

Sugestão: Usa a regra do produto, que te dá a probabilidade simultânea de dois acontecimentos A e B, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$.

2.2. Considera os seguintes acontecimentos:

C: "ter cancro de pulmão";

F: "ser fumador".

Completa a tabela, com as informações disponíveis.

	C	$\overline{C}$	**Total**
F			
$\overline{F}$			
Total			**1000**

2.3. Calcula a probabilidade, sob a forma de percentagem, arredondada às décimas, do utente selecionado:

2.3.1. não ter cancro e não ser fumador;

2.3.2. não ter cancro ou ser não fumador;

2.3.3. ter cancro sabendo que é fumador.

3. Num estudo feito a 2000 pessoas sobre os efeitos do consumo de bebidas energéticas, sabe-se que 1200 consomem bebidas energéticas regularmente e 800 não consomem. O estudo registou, ainda, a presença de quatro doenças associadas ao consumo de bebidas energéticas (hipertensão (H), insónia (I), arritmias cardíacas (A) e diabetes (D)). Nesta tabela, (S) significa não ter nenhuma doença.
A tabela abaixo mostra as percentagens de consumidores e não consumidores de bebidas energéticas que apresentam, ou não, cada uma dessas doenças:

Categoria	**H**	**I**	**A**	**D**	**S**	**Total**
Consumidores (C)	13,2	10,8	7,2	6	22,8	60
Não consumidores ($\overline{C}$)	4	2,8	2	3,2	28	40
Total	17,2	13,6	9,2	9,2	50,8	100

3.1. Quantos participantes têm diabetes?

3.2. Selecionando, ao acaso, um dos participantes do estudo, calcula, em percentagem, arredondada às décimas, a probabilidade:

3.2.1. de ser consumidor e ter diabetes;

3.2.2. de ter hipertensão, independentemente de consumir bebidas energéticas ou não;

3.2.3. de ser consumidor de bebidas energéticas, sabendo que tem insónia.

3.3. Escolhendo um participante ao acaso, qual a probabilidade de ele ser saudável sabendo que:

3.3.1. é consumidor de bebidas energéticas;

3.3.2. não é consumidor de bebidas energéticas.

3.4. Deu-se conta de que havia um erro nas percentagens do estudo e a tabela foi atualizada:

Categoria	H	I	A	D	S	Total
Consumidores (C)	11,2	8,8	6	5	29	60
Não consumidores ($\overline{C}$)	4	2,8	2	3,2	28	40
Total	15,2	11,6	8	8,2	57	100

De acordo com estes novos dados, comenta a seguinte afirmação: "A probabilidade de ser saudável sabendo que é consumidor de bebidas energéticas é maior do que a probabilidade de ser saudável, sabendo que não é consumidor."

Tarefa 7

Quando a Probabilidade Sobe ao Pódio!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo promover, numa primeira fase, a compreensão intuitiva do conceito de independência de acontecimentos.

Numa fase seguinte pretende-se que os alunos reconheçam que dois acontecimentos A e B são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A|B) = P(A)$ (o que significa que A é independente de B) e que $P(B|A) = P(B)$ (o que significa que B é independente de A).

Finalmente, que os alunos compreendam que os acontecimentos A e B são independentes quando se verifica, também, a igualdade $P(A \cap B) = P(A)xP(B)$.

Conhecimentos prévios dos alunos: Probabilidade condicionada.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas e sugestões:

Propõe-se que a tarefa seja resolvida em pares ou individualmente, de forma autónoma pelos alunos, tendo o professor o papel de moderador facilitador. O professor deve promover uma discussão sobre as resoluções dos alunos, com toda a turma, no fim do trabalho autónomo.

Sugere-se a exploração de diferentes estratégias de resolução (quer mobilizando a compreensão intuitiva do conceito de independência de acontecimentos, quer através da relação $P(A|B) = P(A)$ quer utilizando a condição equivalente $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Tarefa 7

Quando a Probabilidade Sobe ao Pódio!

1. O João é um jogador de basquetebol e está a treinar lançamentos livres e acerta 80% dos lançamentos. Ele faz dois lançamentos seguidos.

   1.1. Se o João acertar o primeiro lançamento, isso afeta a probabilidade de acertar (ou falhar) o segundo? Justifica.

   1.2. Calcula a probabilidade de acertar o segundo lançamento, sabendo que acertou o primeiro.

   > Dois **acontecimentos** dizem-se **independentes** quando a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, os **acontecimentos** A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são **independentes** se:
   > - $P(A|B) = P(A)$ (se A independente de B)
   >
   > ou
   > - $P(B|A) = P(B)$ (se B independente de A)
   >
   > ou
   > - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

   1.3. Qual é a probabilidade de acertar nos dois lançamentos?

   Sugestão: Organiza a informação numa árvore de probabilidade.

   1.4. Qual é a probabilidade de falhar ambos os lançamentos?

   1.5. Qual é a probabilidade de acertar pelo menos um dos dois lançamentos?

2. Portugal fez história no Mundial de Andebol Masculino de 2025 ao vencer a Alemanha (vice-campeã olímpica). Com este triunfo, a seleção garantiu um lugar nas meias-finais da competição, sendo a sua melhor participação de sempre, conquistando desta forma, o 4.º lugar, no Mundial.

Adaptado de:
https://www.olympics.com/pt/noticias/portugal-alemanha-mundial-handebol-masculino-2025-quartas-de-final

A tabela seguinte apresenta, segundo o Instituto Nacional de Estatística (INE), o número de atletas federados em Portugal, no ano 2023, em Andebol e noutras modalidades:

	Praticantes inscritos (N.º), em Portugal, no ano de 2023, em federações desportivas por sexo e Modalidade desportiva		
Sexo	Praticante de andebol	Praticante de outras modalidades	Total
Feminino	19 055		243 917
Masculino		500 389	529 928
Total		725 251	

Adaptado de:
https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_indicadores&indOcorrCod=0001122&contexto=bd&selTab=tab2

2.1. Completa a tabela apresentada acima, de acordo com os dados disponibilizados.

2.2. Escolhido, ao acaso, um atleta federado, calcula, em percentagem arredondada às décimas, a probabilidade de:

2.2.1. ser do sexo masculino;

2.2.2. ser homem sabendo que é praticante de Andebol;

2.2.3. ser praticante de Andebol e homem.

2.3. Os acontecimentos H (ser homem) e A (ser praticante de andebol) são independentes? Justifica.

3. Num determinado campeonato da Primeira Liga de Futebol de Portugal, um analista estatístico recolheu os seguintes dados sobre três equipas: FCP, SLB e SCP.

- O FCP tem uma probabilidade de 0,7 de vencer qualquer jogo.
- O SLB tem uma probabilidade de 0,5 de vencer qualquer jogo.
- O SCP tem uma probabilidade de 0,5 de vencer qualquer jogo.

Supõe que os resultados dos jogos são independentes entre si (isto é, não são considerados jogos entre duas destas três equipas).

3.1. Qual é a probabilidade de o FCP ganhar, consecutivamente, os próximos dois jogos?

3.2. Qual é a probabilidade de o SLB perder, consecutivamente, os dois próximos jogos?

3.3. Qual é a probabilidade de o FCP e o SCP ganharem os seus próximos jogos?

3.4. Qual é a probabilidade de apenas uma das três equipas ganhar o seu próximo jogo?

3.5. Qual é a probabilidade de nenhuma das três equipas ganhar o seu próximo jogo?

3.6. Qual é a probabilidade de pelo menos uma das três equipas ganhar o seu próximo jogo?

4. A competição na natação é muito exigente, e cada centésimo de segundo pode fazer a diferença entre a glória e a desilusão. Portugal tem, recentemente, obtido nesta modalidade, muito bons resultados em competições internacionais.
Imaginemos um nadador que compete nos 100 metros livres e tem duas formas de alcançar um lugar no pódio:

- **Acontecimento A** (A) – O nadador conquista uma medalha ao terminar a final entre os três primeiros. A probabilidade deste evento ocorrer é **30%** ($P(A) = 0,3$).
- **Acontecimento B** (B) – O nadador recebe uma medalha devido à desqualificação de um adversário, algo que pode acontecer por falsas partidas ou infrações nas viragens. A probabilidade deste evento é $P(B) = p$.
- A probabilidade total de o nadador sair da prova com uma medalha, seja por mérito próprio ou por desqualificação de um concorrente, é **70%** ($P(A \cup B) = 0,7$).

4.1. Calcula p (em percentagem, arredondada às unidades), considerando que os acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos, o que significa que, ou o nadador ganha a medalha diretamente, ou só a recebe devido à desqualificação de outro nadador – nunca ambas as situações ao mesmo tempo.

4.2. Calcula p (em percentagem, arredondada às unidades), considerando os acontecimentos A e B independentes.