OP13 - MODELOS DE GRAFOS

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Modelos de grafos (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-de-pessoas-olhando-no-laptop-3182750/

Data:

Lisboa, setembro de 2024

CC BY SA

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

MÓDULO OP13 - Modelos de grafos

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 0 Desafios	**Modelos de Grafos**	• Familiarizar e incentivar a discussão de situações reais que possam ser modeladas por grafos.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• História da matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões. • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
2	Tarefa 1 Desenha sem levantar o lápis	**Modelos de Grafos** Linguagem e notação da teoria de grafos	• Definir e identificar vértice, aresta, laço e vértice isolado de um grafo e vértices adjacentes. • Indicar a ordem de um grafo e grau de um vértice. • Distinguir arestas paralelas de arestas adjacentes. • Definir e caracterizar grafo regular, subgrafo, grafo conexo, e grafo completo. • Identificar a ordem de um grafo.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
1,5	Tarefa 2 Labirintos	**Modelos de Grafos** Linguagem e notação da teoria de grafos	• Definir e identificar vértice, aresta, laço e vértice isolado de um grafo e vértices adjacentes. • Indicar a ordem de um grafo e grau de um vértice. • Distinguir arestas paralelas de arestas adjacentes. • Definir e caracterizar grafo regular, subgrafo, grafo conexo, e grafo completo. • Identificar a ordem de um grafo.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais (H) • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

3	Tarefa 3 Pontes de Königsberg	**Modelos de Grafos** Grafos de Euler	• Identificar e distinguir caminho de circuito. • Conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler. • Conhecer e aplicar o Teorema de Euler. • Identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano. • Reconhecer em que condições se deve eulerizar um grafo.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• História da matemática • Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Avaliação para a aprendizagem • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
3	Tarefa 4 Caminhos e circuitos de Euler no Google Maps	**Modelos de Grafos** Grafos de Euler	• Identificar e distinguir caminho de circuito. • Conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler. • Conhecer e aplicar o Teorema de Euler. • Identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano. • Reconhecer em que condições se deve eulerizar um grafo.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
2	Tarefa 5 Bebras e grafos	**Modelos de Grafos** Grafos de Euler	• Identificar e distinguir caminho de circuito. • Conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler. • Conhecer e aplicar o Teorema de Euler. • Identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano. • Reconhecer em que condições se deve eulerizar um grafo.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)

2,5	Tarefa 6 Caixeiro viajante	**Modelos de Grafos** Grafos de Hamilton	• Definir e caracterizar um circuito de Hamilton. • Identificar as condições para um grafo admitir um circuito hamiltoniano. • Conhecer e aplicar os algoritmos da Cidade mais próxima e do Peso das arestas para conduzirem a soluções “boas”.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• História da matemática • Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
3	Tarefa 7 Serviços de distribuição	**Modelos de Grafos** Grafos de Hamilton	• Definir e caracterizar um circuito de Hamilton. • Identificar as condições para um grafo admitir um circuito hamiltoniano. • Conhecer e aplicar os algoritmos da Cidade mais próxima e do Peso das arestas para conduzirem a soluções “boas”.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
2	Tarefa 8 As melhores soluções: árvores	**Modelos de Grafos** Árvores	• Definir árvore, árvore abrangente e árvore abrangente de custo mínimo. • Conhecer e aplicar um algoritmo de modo a que permita encontrar soluções “boas” (Kruskal ou de Prim).	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)

2	Tarefa 9 Menos é mais: Caminhos críticos	**Modelos de Grafos** Caminho crítico	• Definir e caracterizar grafo orientado. • Reconhecer a importância da aplicação deste método na determinação do tempo mínimo para a execução de um projeto.	Trabalho a pares ou de grupo, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)

Tarefa 0

Desafios

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo da tarefa é, recorrendo a elementos de jogo, introduzir de uma forma dinâmica e interativa os conceitos de grafo, aresta e vértice.

Conhecimentos prévios dos alunos: Sequências.

Materiais e recursos: Computador com projetor.

Notas e sugestões:
O professor deve organizar os alunos em pares e iniciar a aula com a apresentação do vídeo para a introdução da noção de grafo. Dever-se-á parar o vídeo e solicitar propostas de eventuais resoluções do problema das três casas (que é referido no mesmo). Sugere-se a promoção de uma discussão de forma a que os alunos possam concluir que o problema não tem solução.
Num segundo momento, o professor deverá distribuir a tarefa (versão papel ou digital) que deverá ser resolvida, pelos pares, em 15 minutos.
Deverá solicitar-se a apresentação de mais do que uma resolução do desafio 1, de forma a que possa surgir, através de questionamento por parte do professor, a conclusão que a sequência deverá sempre iniciar e terminar no vértice A ou no vértice E.
Eventualmente haverá necessidade de se orientar, através de questionamento, a resolução do desafio 2, para evitar a desmotivação por parte de alguns alunos.

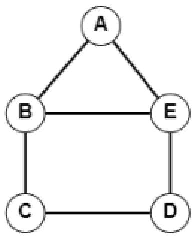
Tarefa 0

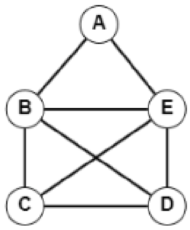
Desafios

Visualiza o vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=dmsuPfpeHvI.

Desafio 1

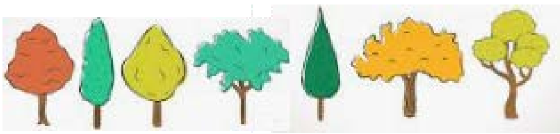
Indica uma sequência (de letras) que permita desenhar cada uma das “casas”, sem levantar o lápis e sem passar duas vezes na mesma linha.





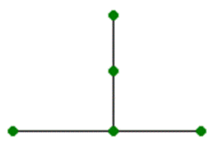
Desafio 2

No Dia Mundial da Árvore (21 de março), um grupo de sete jovens apresentou um projeto para plantar **sete árvores** num dos parques da cidade. O projeto previa que fossem plantadas em *seis filas* e **cada uma das filas deveria ter três árvores**.



Apresenta um esquema possível para a distribuição das **sete** árvores.

Nota: Uma árvore pode estar em mais do que uma fila.
Por exemplo, na figura ao lado, apresentamos-te uma vista de cima de 5 árvores dispostas em duas filas com três árvores em cada fila.



Tarefa 1

Desenha sem levantar o lápis

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A Tarefa tem como objetivo, a partir de uma abordagem com elementos de jogo, a introdução de linguagem e notação da teoria de grafos, e a modelação de uma situação real através de um grafo.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de grafo, vértice e aresta abordados na aula anterior.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Aplicação *Graph Online*. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
O professor deve organizar os alunos em pares e iniciar a aula, distribuindo a tarefa e o respetivo glossário. A resolução da tarefa deve ser acompanhada pelo professor e propõe-se a apresentação das resoluções item a item e respetivas discussões. Dever-se-á fazer uma síntese sobre os conceitos usados até ao item 3, reforçando-se a importância da notação específica dos Grafos.
O item 4 deverá ser resolvido numa segunda parte da aula. O professor deverá selecionar mais do que uma resolução do item 4 para ser apresentada à turma, de forma a ilustrar diferentes grafos representativos da mesma situação (eventualmente, alguma errada). Poderá ser utilizada a aplicação *Graph Online* para modelação da situação apresentada, uma vez que é muito intuitiva e motivadora. Sugere-se que o professor oriente os alunos para recorrerem ao glossário, para esclarecimentos de dúvidas relacionadas com nomenclatura e conceitos relativos aos grafos.

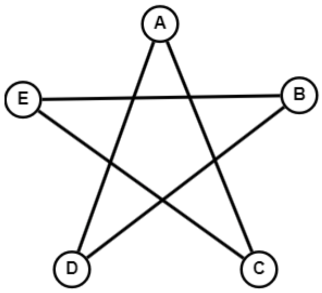
Tarefa 1

Desenha sem levantar o lápis

Os desafios em que se pede para desenhar uma figura sem levantar o lápis e sem passar duas vezes na mesma linha são muito conhecidos.

Para **resolver esta tarefa deves consultar o glossário, sempre que consideres necessário.**

1. Considera a figura ao lado.



1.1. Desenha a figura, iniciando no ponto A, sem levantar o lápis e sem passar duas vezes na mesma linha .

1.2. Será possível responder ao item 1.1. iniciando em qualquer um dos pontos B, C, D ou E? Em caso afirmativo, apresenta um exemplo. Caso contrário, justifica.

1.3. Quais são:

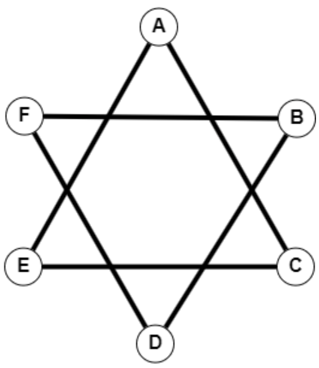
1.3.1. os vértices adjacentes ao vértice A?

1.3.2. as arestas adjacentes à aresta EB (uma aresta pode representar-se pelos pontos dos seus extremos)?

1.4. Transforma o grafo da figura num grafo completo.

1.5. O grafo da figura é conexo? Justifica a tua resposta.

2. Considera o grafo da figura ao lado.



2.1. Determina a ordem do grafo.

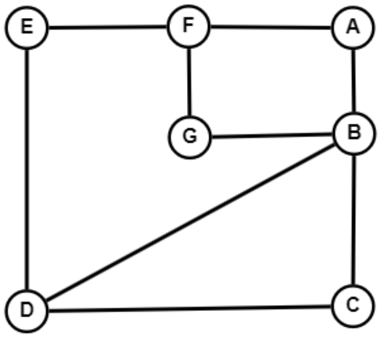
2.2. Qual é o grau do vértice F?

2.3. O grafo é regular? Justifica a tua resposta.

2.4. O grafo é conexo? Justifica a tua resposta.

2.5. Transforma o grafo num grafo completo.

3. Considera a figura ao lado, que representa um grafo de ordem 7 (constituído por 7 vértices)



3.1. Desenha, se possível, a figura sem levantar o lápis e sem passar duas vezes na mesma aresta, iniciando no vértice F. Escreve a sequência de vértices percorrida.

3.2. Desenha a figura, iniciando no vértice A, sem levantar o lápis e sem passar duas vezes na mesma aresta, se possível.

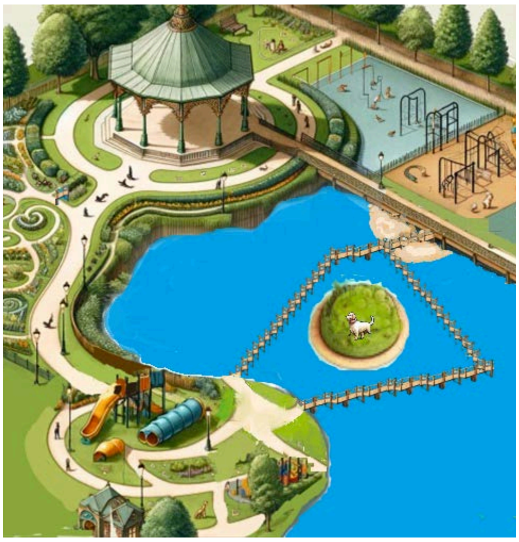
3.3. Dá exemplos de dois vértices adjacentes.

3.4. Serão adjacentes as arestas BC e CD? Justifica.

3.5. Serão adjacentes as arestas BG e AF? Justifica.

3.6. Apresenta uma sequência de vértices que represente um subgrafo de ordem 3.

4. A Íris foi passear o seu cão *Flash* no parque da cidade, perto da sua casa. Neste parque existe um coreto, um lago com uma ilha e duas pontes que o atravessam, um espaço para crianças e um para os cães. Enquanto passeavam pelo parque, o *Flash* desatou a correr à frente da Íris. Foi do espaço dos cães até ao coreto e circundou o coreto. Continuou até ao espaço das crianças. Depois, resolveu atravessar o lago em direção ao espaço para os cães, por uma das pontes, e regressou novamente ao espaço das crianças pela outra ponte. Finalizou a sua aventura, com um mergulho no lago e uma breve visita à ilha situada no meio do lago.



4.1. Desenha um grafo que represente a caminhada do Flash pelo parque e sua posição final. Considera que os vértices representam o espaço dos cães (P1), o coreto (C), o espaço das crianças (P2) e a ilha dos patos (I).

4.2. Considera o texto seguinte em que se omitiram as referências aos vértices, arestas e lacetes.

O grafo que desenhaste é constituído por 4 vértices, um deles isolado, __**(I)**__, duas arestas paralelas, __**(II)**__, e um lacete, __**(III)**__. Neste grafo as arestas __**(IV)**__ são arestas adjacentes.

Associa a cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, a opção, a), b), c) ou d) correta para completar o texto anterior. A cada espaço corresponde uma só opção.

I	II	III	IV
a) A b) B c) C d) I	a) C P1 b) C P2 c) P1 P2 d) P2 P1	a) C C b) P1 P2 c) P2 P2 d) I I	a) C P2 e C P1 b) C I e I P1 c) C C e P2 P1

Tarefa 2

Labirintos

Notas pedagógicas para a ação do professor

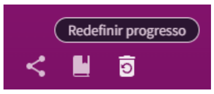
Resumo:
A tarefa tem como objetivo a introdução, de forma intuitiva, dos conceitos de caminho e de circuito a partir de situações reais que podem ser modeladas por grafos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de grafo.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Aplicação *Graph Online* e da aplicação *Mathigon*. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
O professor deverá iniciar a aula fazendo uma contextualização histórica sobre labirintos e algumas curiosidades sobre a presença de labirintos em jardins e em jogos.
O item 1, representa um exemplo muito simples de modelação por um grafo se considerarmos o percurso da entrada até à saída (algo que os alunos fazem muito rapidamente), no entanto, o grau de dificuldade aumenta quando se exige a inclusão de todos os vértices, por esta razão sugere-se que a resolução deste item seja feita no grupo turma.
Os restantes itens deverão ser resolvidos pelos alunos, com supervisão do professor, e propõe-se que a apresentação das resoluções seja feita item por item.
Eventualmente, surgirão dúvidas no item 3 (no caso em que os alunos nunca andaram de metropolitano) pelo facto do mapa do metro apresentado não se tratar de um grafo planar, podendo haver necessidade de se explicar o procedimento de mudança de linha na mesma estação.
O item 4 permite fazer a conexão entre diferentes áreas da matemática, com diferentes abordagens. O professor deverá promover uma discussão que permita a generalização do número de apertos de mão que podem ser dados num conjunto de n pessoas.

Sugere-se o uso da aplicação [*Mathigon*](), para exploração/aprofundamento do item 4. Nesta aplicação, para eliminar resoluções anteriores deve clicar-se na opção “redefinir progresso”.



Tarefa 2

Labirintos

Desde a antiguidade clássica os labirintos estão associados ao perigo, desafio, mistério e fascínio. Foram usados labirintos para defesa de fortalezas, para decoração de jardins míticos de catedrais, de palácios e de quintas e em parques de diversões. Na mitologia grega, o labirinto mais famoso é o de Creta, construído por Dédalo para aprisionar o temível Minotauro.

Fonte: https://www.nationalgeographic.pt/historia/o-mosaico-do-minotauro-conimbriga_2120

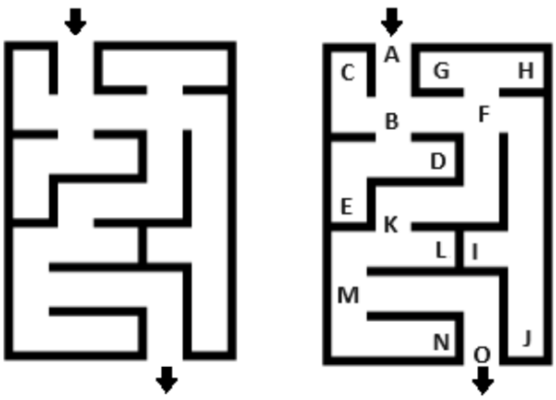
A mitologia dos gregos foi adotada em muitos casos pela civilização romana. A Casa dos Repuxos, da cidade romana de Conímbriga, contém este mosaico excecional, com uma alegoria ao labirinto do minotauro.

Normalmente, o objetivo de um labirinto é percorrê-lo desde a entrada até à saída, de preferência pelo caminho mais curto.

A Teoria dos Grafos estuda os labirintos associando-os a modelos de grafos.

1. Na figura seguinte, o esquema da esquerda apresenta uma forma simplificada de um labirinto. Podemos modelar este labirinto por um grafo, estabelecendo que os vértices representarão a entrada, a saída, todos os cruzamentos e “os recantos sem saída”, e as conexões entre eles são as arestas que definem os caminhos disponíveis

   O esquema da direita representa uma sugestão da atribuição dos vértices, a entrada será feita pelo ponto A e a saída pelo ponto O.



   Representa o labirinto através de um grafo (que inclua todos os vértices) e indica uma sequência de vértices que permita entrar e sair do labirinto.

2. O labirinto da figura ao lado localiza-se num jardim da Indonésia.

   Constrói um grafo que represente o labirinto. Encontra mais do que um caminho para ir da entrada ao centro do jardim e apresenta-os através de uma sequência de vértices.

Entrada

3. A figura seguinte representa um mapa da rede de Metropolitano (Metro) de Lisboa.

3.1. Apresenta um exemplo de uma viagem com início numa das oito estações terminais e fim numa outra (estação terminal) de uma outra linha.

3.2. A Noa mora nos Restauradores e deslocou-se de Metro até ao Aeroporto para ir apanhar o avião para Munique. Apresenta um trajeto possível.

3.3. Apresenta uma proposta de uma viagem para ir da estação de Alfornelos até à estação do Oriente, percorrendo todas as linhas (amarela, vermelha, verde e azul).

4. Um grupo de amigos combinou encontrar-se para jantar.

4.1. Cinco desses amigos chegaram mais cedo e cumprimentaram-se com um aperto de mão.
Quantos apertos de mão foram dados? Explica como chegaste à resposta.
Sugestão: Traduz a situação através de um grafo em que os amigos são representados pelos vértices e os apertos de mão por arestas.

4.2. Se no jantar estivessem 8 pessoas que se cumprimentam com um aperto de mão, entre elas, quantos apertos de mão seriam dados? Explica como chegaste à resposta.

4.3. Se antes do jantar foram dados 36 apertos de mão (sem repetição dos pares de pessoas), quantas pessoas estavam no evento? Explica como chegaste à resposta.

Nota: Poderás aprofundar mais este tema na aplicação Mathigon.

Tarefa 3

Pontes de Königsberg

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A Tarefa tem como objetivo rever os conceitos de caminho e circuito, utilizando como mote o problema histórico das Pontes de Königsberg.
Pretende-se também com esta tarefa que os alunos se apropriem dos conceitos de circuito e de caminho de Euler e das condições a partir das quais é possível definir um destes caminhos, bem como do Teorema de Euler.

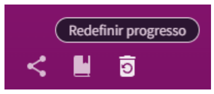
Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de: grafo conexo, grau de um vértice, caminho e circuito.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Vídeo sobre as Pontes de Königsberg e aplicação *Mathigon* (ou em alternativa a aplicação *Graph Online*). Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
O professor deverá iniciar a aula fazendo uma contextualização histórica sobre labirintos e algumas curiosidades sobre a presença de labirintos em jardins e em jogos.
O item 1, representa um exemplo muito simples de modelação por um grafo se considerarmos o percurso da entrada até à saída (algo que os alunos fazem muito rapidamente), no entanto, o grau de dificuldade aumenta quando se exige a inclusão de todos os vértices, por esta razão sugere-se que a resolução deste item seja feita no grupo turma.
Os restantes itens deverão ser resolvidos pelos alunos, com supervisão do professor, e propõe-se que a apresentação das resoluções seja feita item por item.
Eventualmente, surgirão dúvidas no item 3 (no caso em que os alunos nunca andaram de metropolitano) pelo facto do mapa do metro apresentado não se tratar de um grafo planar, podendo haver necessidade de se explicar o procedimento de mudança de linha na mesma estação.
O item 4 permite fazer a conexão entre diferentes áreas da matemática, com diferentes abordagens. O professor deverá promover uma discussão que permita a

generalização do número de apertos de mão que podem ser dados num conjunto de n pessoas.

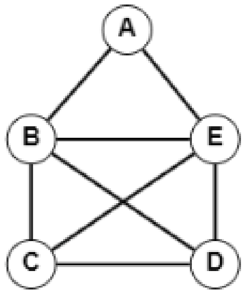
Sugere-se o uso da aplicação *Mathigon*, para exploração/aprofundamento do item 4. Nesta aplicação, para eliminar resoluções anteriores deve clicar-se na opção “redefinir progresso”.



Tarefa 3

Pontes de Königsberg

1. Considera o grafo representado na figura ao lado:



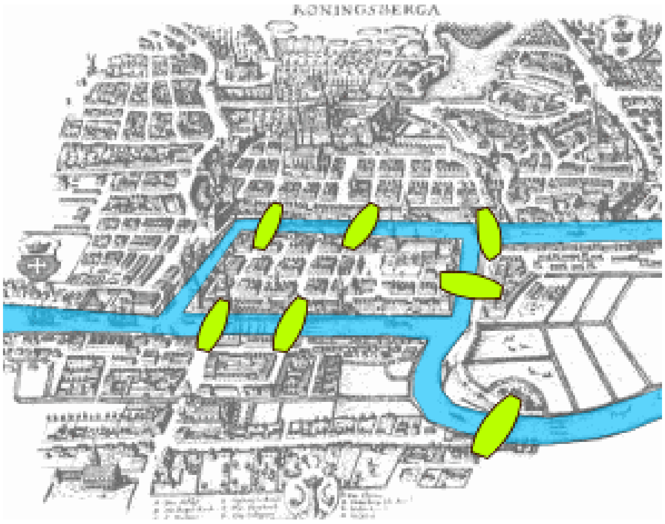
   1.1. Apresenta um caminho com quatro vértices.

   1.2. Define um caminho que passe em todos os vértices.

   1.3. Define um circuito que passe em todos os vértices..

2. Königsberg (atual Kaliningrado) era uma cidade da Prússia Oriental, que estava dividida em quatro partes pelo seu rio Pregel, sendo famosa pelas suas **sete pontes**.

   No século XVIII, levantou-se a questão, se seria possível dar um passeio na cidade, de modo a atravessar cada uma das pontes uma única vez. O passeio não exige que se acabe no mesmo local em que se começou. Podes experimentar fazer este passeio aqui.



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png

   2.1. Modela através de um grafo, utilizando como vértices as letras A, B, C e D, para representar as **quatro partes da cidade**, e arestas para representar as **sete pontes**.

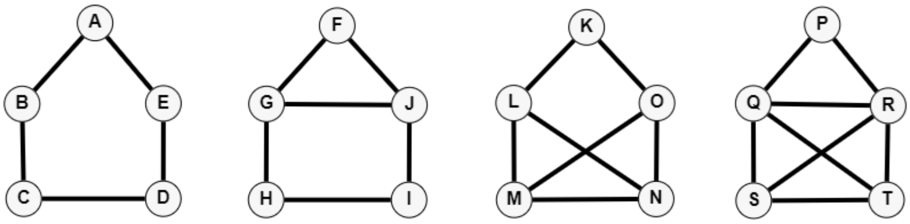
   2.2. Será possível definir um caminho, partindo de um qualquer vértice, que passe por todas as pontes sem as repetir?
   Sugestão: Utilizar a aplicação *Mathigon*, Mapa 1.

   2.3. Depois de ver o vídeo, modela através de um grafo a situação que representa a cidade e as pontes de Königsberg, após a guerra.

2.4. Define um caminho que passe por todas as pontes sem as repetir (na situação pós guerra).

2.5. Recorre à aplicação *[Mathigon]* e tenta, para os Mapas 2, 3 e 4, definir um caminho que percorra todas as pontes uma única vez. Apresenta razões pelas quais nuns casos é possível definir um caminho e noutros não.

3. Considera os grafos (I), (II), (III) e (IV) apresentados na figura seguinte:



(I) (II) (III) (IV)

3.1. Qual dos grafos da figura:

3.1.1. admite um circuito de Euler?

3.1.2. admite um caminho de Euler?

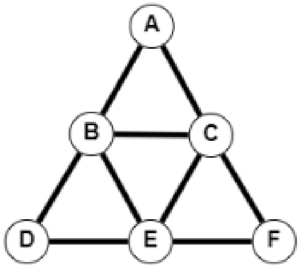
3.2. Em qual dos grafos não é possível percorrer todas as arestas apenas uma única vez? Justifica a tua resposta.

Teorema de Euler
Um grafo é de Euler (grafo no qual é possível definir um ou mais circuitos que passem por todas as arestas uma única vez) se, e só se, é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

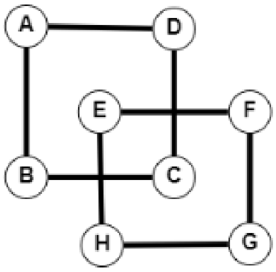
Síntese:

- Um grafo conexo admite um circuito euleriano se, e só se, todos os seus vértices tiverem grau par.
- Um grafo conexo admite um caminho euleriano se, e só se, tiver zero ou dois vértices de grau ímpar (e os restantes de grau par).
- **Se um grafo conexo possuir mais de dois vértices de grau ímpar não é possível percorrer todas as arestas do mesmo uma única vez sem repetir nenhuma delas (neste caso nem admite um circuito nem admite um caminho de Euler).**

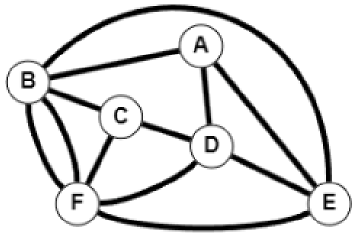
4. Considera os grafos seguintes:



Grafo I



Grafo II



Grafo III

4.1. Quais os grafos que são conexos?

4.2. Em qual dos grafos é possível percorrer todas as arestas uma única vez, partindo e chegando ao mesmo vértice? Justifica a tua resposta.

Tarefa 4

Caminhos e circuitos de Euler no Google Maps

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo que os alunos encontrem caminhos sem repetir arestas, começando e terminando no mesmo vértice, a partir da discussão de situações reais que possam ser modeladas por grafos.

Com esta tarefa pretende-se, também, a partir da problematização de situações reais, aplicar a *eulerização* de grafos para encontrar soluções com o menor número de repetição de arestas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Grafo de Euler.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Aplicação *Graph Online* (como opção ao papel e lápis). Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

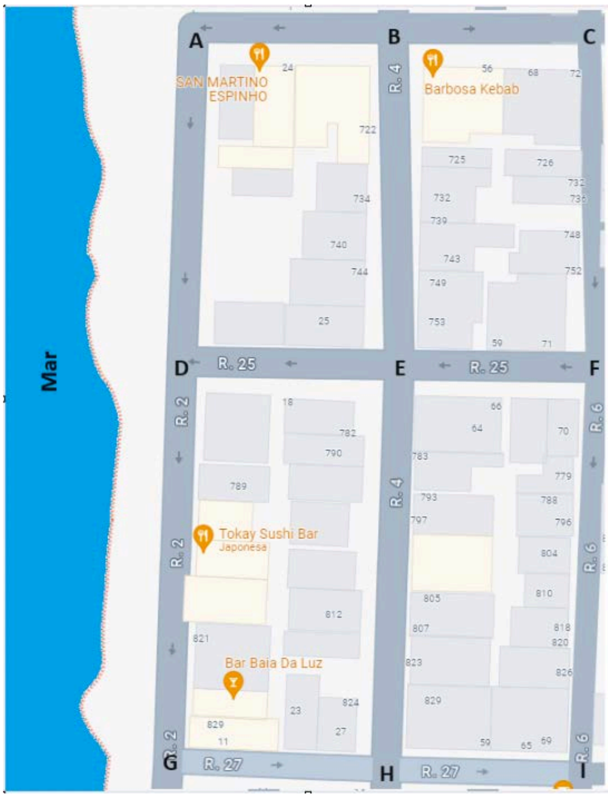
Notas e sugestões:

Propõe-se que a aula contemple dois momentos:

- no primeiro, prevê-se uma abordagem intuitiva do conceito de eulerização, a resolução dos itens 1. e 2. pelos alunos e a respetiva discussão;
- no segundo, com a resolução do item 3., pretende-se a aplicação do conceito de *eulerização* de um grafo e na do item 4., a transformação do grafo dado num grafo de Euler, a partir da construção de novas arestas.

Tarefa 4

Caminhos e circuitos de Euler no Google Maps



1. A figura ao lado representa parte do mapa de uma zona da cidade de Espinho, composta por **seis ruas**. O carteiro que faz a distribuição do correio nesta região/zona da cidade, inicia e termina o seu percurso no cruzamento entre a rua 2 e a rua 23 (vértice A).

    1.1. Modela através de um grafo o percurso que o carteiro faz na distribuição do correio nestas ruas., representando os cruzamentos das ruas por vértices e os percursos por arestas.

    Nota: Nas ruas onde existem habitações de ambos os lados, quer do lado esquerdo quer do direito, a mesma rua deve ser percorrida duas vezes, uma pelo lado esquerdo e outra pelo lado direito.

    1.2. Qual é o grau de cada vértice do grafo que desenhaste?

    1.3. Apresenta uma sequência de vértices que represente o percurso realizado pelo carteiro.

    1.4. A sequência que definiste é um circuito de Euler? Justifica a tua resposta.

    1.5. Apresenta uma sequência de vértices que represente o percurso do carteiro quando inicia e termina a distribuição da correspondência no posto dos correios.
    Nota: O posto dos correios fica localizado na esquina do cruzamento da Rua 25 com a Rua 4, (vértice E).

2. Vila Real de Santo António é uma cidade raiana portuguesa do distrito de Faro. Durante o verão, o patrulhamento é realizado pelos militares da GNR que se deslocam de bicicleta.

   As ruas apresentadas no mapa seguinte têm uma ciclovia que permite aos militares da GNR circular **nos dois sentidos**.

2.1. Apartir do mapa constrói um grafo, representando como vértices os cruzamentos das ruas sinalizadas com as letras (A, B, …., Q) e como arestas as ruas.

2.2. Será possível a um militar da GNR, que está de serviço, percorrer todas as ruas do mapa, apenas num sentido (e uma única vez), partindo do cruzamento entre a Rua 25 de Abril e a Rua Dr. Sousa Martins (vértice C) e voltar ao seu ao ponto de partida? Justifica a tua resposta.

   Sugestão: Consulta o glossário para a justificação.

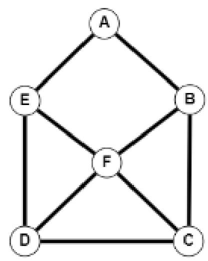
2.3. Desenha um grafo que represente a ronda de um militar da GNR, que pretende simultaneamente :

   - partir e chegar ao cruzamento da Rua 25 de Abril com a Rua Dr. Sousa Martins (vértice C);
   - percorrer todas as ruas;
   - se possível percorrer cada uma das ruas num único sentido e uma única vez, se tal não for possível, percorrer algumas ruas nos dois sentidos.

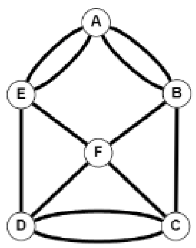
2.4. Qual é o **número mínimo** de vias que teriam os militares da GNR de percorrer nos dois sentidos?

2.5. Escreve uma sequência de vértices que represente a ronda feita pelos militares da GNR nas condições apresentadas na questão 2.4.

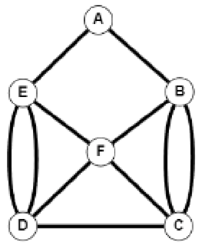
3. *Eulerizar* um grafo conexo que não é de Euler, consiste em duplicar algumas das suas arestas de modo a que se obtenha um novo grafo em que todos os vértices fiquem com grau par.



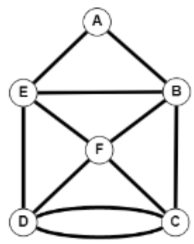
A Professora de matemática pediu para *eulerizar* o grafo representado na figura ao lado.
Três alunos da turma, a Joana, o José e o Joaquim apresentaram as seguintes respostas:



Resposta da Joana



Resposta do José



Resposta do Joaquim

3.1. Justifica quais das respostas apresentam *eulerizações* do grafo da figura inicial.

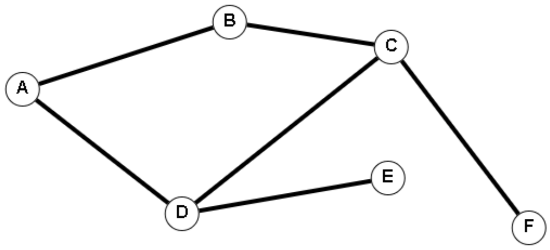
3.2. Justifica quais das respostas não apresentam *eulerizações*.

3.3. Qual foi o aluno que apresentou a melhor *eulerização*?

Nota: A melhor *eulerização* é aquela em que o número de duplicações de arestas é menor.

4. Num parque urbano de Freixo de Espada à Cinta existe um circuito de manutenção com seis estações. Um circuito de manutenção consiste numa série de exercícios dispostos numa sequência ou em estações.

   Na figura ao lado, apresenta-se um grafo no qual os vértices representam as estações e as arestas os percursos pedonais existentes entre elas.



   Pretende-se construir novos trilhos pedonais entre as estações existentes, para que seja possível iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os trilhos (incluindo os novos) e sem repetir nenhum deles.

   4.1. Desenha o grafo correspondente ao circuito de manutenção com os novos trilhos pedonais.

   4.2. Qual é o número mínimo de trilhos novos a construir de forma a respeitar as condições exigidas?

   4.3. Escreve uma sequência de vértices que represente um circuito nas condições exigidas.

Tarefa 5

Bebras e grafos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo a consolidação dos conceitos de circuito de Euler a partir da adaptação de um desafio do projeto Bebras, tendo em vista a promoção de práticas do pensamento computacional.

Conhecimentos prévios dos alunos: Circuito de Euler.

Materiais e recursos: Computador com projetor. Aplicação *Graph Online* (como opção ao papel e lápis). Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
O professor deverá iniciar a aula apresentando o projeto Bebras.
A tarefa deverá ser resolvida autonomamente pelos alunos, em pares e, com supervisão do professor. Sugere-se que o professor selecione algumas resoluções com interesse para a discussão com o grupo turma.

Tarefa 5

Bebras e grafos

Os desafios Bebras da responsabilidade do Departamento de Ciência de Computadores da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (DCC/FCUP) visam promover o Pensamento Computacional entre estudantes de todas as idades.

https://bebras.pt/problemas

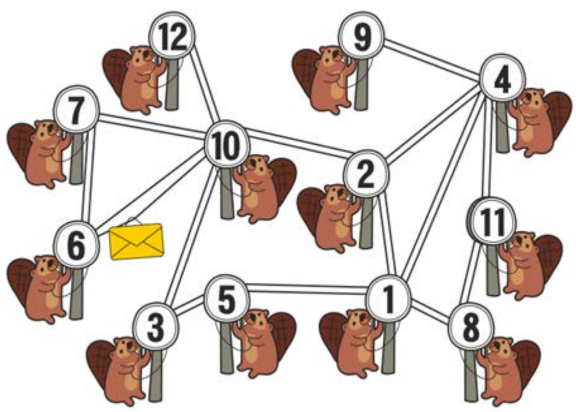
https://bebras.dcc.fc.up.pt/problems/2020/problemas_11_12.pdf

https://profdavid.wixsite.com/recursos/bebrascomsolucoes

Como organizar os castores, visitando cada rua uma única vez?

O Castor Mestre é responsável por organizar uma comunidade com 12 elementos e pretende visitar os elementos da comunidade em suas casas. Para tal, pretende começar e acabar na mesma casa, e **passar uma única vez por cada rua**. Mas, como também quer verificar o estado das ruas, **terá que passar em todas as ruas**.

As casas dos 12 castores estão localizadas conforme o esquema da figura ao lado:



1. É possível o Castor Mestre cumprir com o seu objetivo e visitar todos os elementos da comunidade? Se sim, apresenta um circuito possível. Justifica a tua resposta.

2. E se fosse construída uma rua entre as casas 12 e 9, seria possível visitar todos os castores, começando e acabando na mesma casa e passando exatamente uma vez em cada rua? Modela a situação através de um grafo, identificando as arestas e os vértices.

3. Caso o Castor Mestre não consiga cumprir o objetivo de percorrer todas as ruas uma única vez, começando e terminando na mesma casa (supondo que já existe uma rua entre a casa 12 e a casa 9), apresenta uma solução para o problema de modo que consiga realizar o seu objetivo, repetindo o menor número possível de ruas. Justifica a tua resposta e apresenta um circuito possível.

Tendo em conta a situação inicial, responde ao item seguinte:

4. O Castor Contente e o Castor Rezingão mudaram-se para esta comunidade. O Castor Mestre colocou-os nas casas com os números 13 e 14 (que vão ser construídas), podendo ser necessário construir novos acessos. O Castor Mestre ficou preocupado porque não sabia onde devia localizar as casas para cumprir com o seu objetivo.
   Apresenta uma possível localização das novas casas e respetivos acessos, sem alterar as ruas e a disposição das casas já existentes e de modo que o Castor Mestre consiga visitar os 14 castores, começando e terminando na mesma casa e sem repetir as ruas.
   Modela a situação através de um grafo e apresenta um circuito possível.

(Adaptado de trabalhos da formação "Capacitação para as Aprendizagens Essenciais de Matemática A para o Ensino Secundário")

Tarefa 6

Caixeiro Viajante

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo fazer a introdução ao estudo do conceito de circuito de Hamilton, a partir do problema histórico ”problema do caixeiro viajante”. Por fim, propõe-se uma situação real que pode ser modelada por um grafo, em que se pretende construir um plano de viagem para visitar várias cidades, sem as repetir, começando e acabando na mesma.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de caminho, de circuito e de grafo completo.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas para professor:

Os itens 1. e 2. deverão ser resolvidos pelos alunos de forma autónoma, com supervisão do professor, seguida da apresentação e discussão das resoluções dos alunos.

Antes de passar à resolução do item 3., sugere-se a visualização do vídeo, como introdução ao conceito de circuito hamiltoniano. No fim do trabalho autónomo realizado pelos alunos, o professor deverá selecionar algumas resoluções com interesse para a discussão com o grupo turma.

Tarefa 6

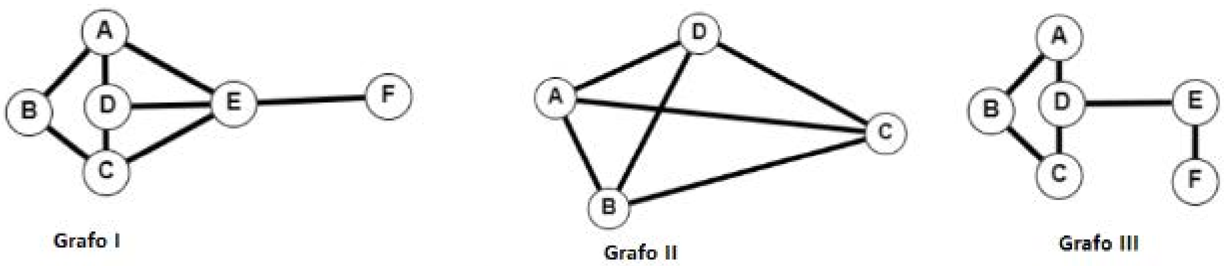
Caixeiro Viajante

O matemático irlandês William Rowan Hamilton (1806-1865) desenvolveu estudos em modelos de grafos nos quais se pretendia **encontrar caminhos abertos ou fechados de forma a utilizar todos os vértices e sem haver repetição**. Este matemático criou o famoso problema do "Dodecaedro do viajante" ou " Da viagem à volta do mundo" que consta de um dodecaedro, poliedro regular com vinte vértices, no qual atribuiu, a cada um dos 20 vértices, o nome de cada uma de 20 cidades. O problema constava na determinação de um percurso, no poliedro, que partisse de uma cidade e a ela voltasse depois de ter percorrido cada uma das 19 outras cidades (sem repetir cidades visitadas).

Como já estudaste, um grafo conexo possui circuitos de Euler (se é grafo de Euler) se todos os seus vértices tiverem grau par. No entanto, relativamente aos circuitos de Hamilton, **não existe uma forma simples que nos permita tirar conclusões sobre a possibilidade de percorrer todos os vértices de um grafo sem haver repetições**.

Um caminho que percorre todos os vértices de um grafo conexo, sem repetições de vértices, chama-se caminho de Hamilton ou caminho hamiltoniano. Se o caminho for fechado então dizemos que se trata de um circuito de Hamilton.

1. Chama-se **ponte** a uma aresta de um grafo conexo que, quando retirada, torna o grafo num grafo desconexo.Considera a figura seguinte em que se representam três grafos.



1.1. Dos grafos da figura anterior, qual ou quais têm pontes?

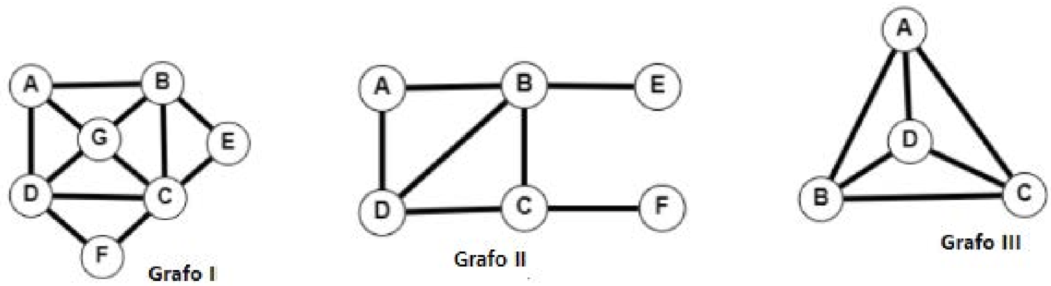
1.2. Quais dos grafos da figura são completos?

1.3. Em qual dos grafos da figura anterior é possível definir um circuito de Hamilton?

William Rowan Hamilton concluiu que:

- Num grafo completo existem sempre vários circuitos de Hamilton;
- Num grafo com pontes não existem circuitos de Hamilton (mas podem existir caminhos).

2. Considera os grafos representados na figura seguinte:

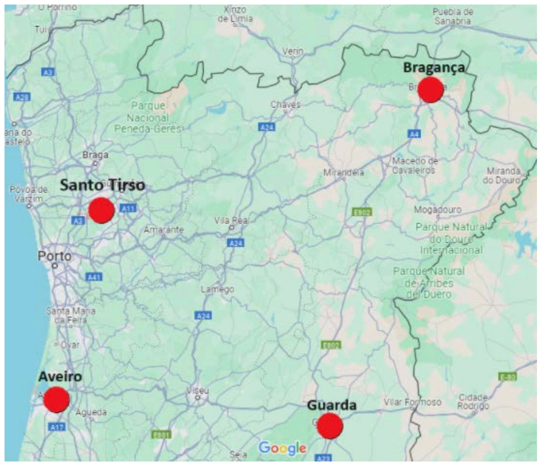


2.1. Quais os grafos que não admitem um circuito de Hamilton?

2.2. Escolhe um dos grafos e apresenta uma sequência de vértices que defina **um circuito de Hamilton**.

Antes de continuares a resolver a tarefa, visiona o vídeo para ficares a saber mais acerca da profissão de caixeiro viajante.

3. Uma empresa distribuidora de alimentos tem o seu Centro Logístico em Santo Tirso. Todos os dias, um camião sai de Santo Tirso e desloca-se às cidades: Aveiro, Bragança e Guarda, voltando ao Centro Logístico.
A empresa está a estudar o melhor percurso de modo que a distância a percorrer seja a menor possível.



Na tabela seguinte, encontram-se as distâncias entre as cidades por onde o camião tem de passar:

	Santo Tirso (ST)	Aveiro (A)	Bragança (B)
Aveiro (A)	98 Km		
Bragança (B)	202 Km	288 Km	
Guarda (G)	227 Km	159 Km	294 Km

3.1. Faz um esquema que apresente todas as rotas possíveis, partindo e chegando de Santo Tirso e sem repetir localidades. O esquema deve incluir a distância, em quilómetros, entre cada uma das localidades e a distância total percorrida pelo camião.
Sugestão: Representa as rotas recorrendo a um esquema em "diagrama de árvore".

3.2. Apresenta **todas** as possibilidades de rotas que permitam sair e voltar a Santo Tirso, passando uma única vez por cada localidade.

3.3. Qual das sequências define a rota com a menor distância a percorrer pelo camião?

3.4. Qual é o número mínimo de quilómetros que o camião percorre semanalmente?

Tarefa 7

Serviços de distribuição

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo a apresentação dos algoritmos da Cidade mais próxima e do Peso das arestas, para resolver situações em que se pretenda visitar todos os vértices percorrendo as arestas com menos peso e assim obtendo "boas" soluções para as diferentes situações.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de caminho, de circuito e de grafo completo.

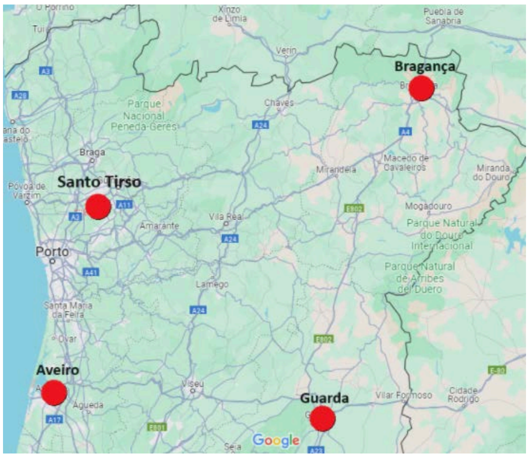
Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
A tarefa deverá ser resolvida autonomamente pelos alunos, em pares e, com supervisão do professor, item por item. O professor deverá selecionar algumas resoluções com interesse para a discussão com o grupo turma, no fim do trabalho autónomo.
A seleção dos itens ilustra que a aplicação dos algoritmos pode conduzir a resultados iguais ou próximos da melhor solução. O uso dos algoritmos permite a determinação de uma solução "boa" (que pode não ser a melhor), mas que é facilitadora da resolução do problema quando o número de vértices é grande.

Tarefa 7

Serviços de distribuição

1. Uma empresa distribuidora de alimentos tem o seu Centro Logístico em Santo Tirso. Todos os dias, um camião sai de Santo Tirso e desloca-se às cidades: Aveiro, Bragança e Guarda, voltando ao Centro Logístico.
A empresa está a estudar o melhor percurso de modo que a distância a percorrer seja a menor possível.



Na tabela seguinte encontram-se as distâncias entre as cidades por onde o camião tem de passar:

	Santo Tirso (ST)	Aveiro (A)	Bragança (B)
Aveiro (A)	98 Km		
Bragança (B)	202 Km	288 Km	
Guarda (G)	227 Km	159 Km	294 Km

1.1. Desenha um grafo ponderado que modele a situação.

1.2. Utiliza o algoritmo apresentado a seguir para determinar o itinerário mais curto, a iniciar e a terminar em Santo Tirso.

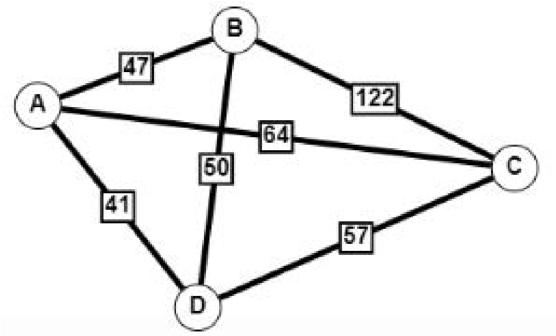
Algoritmo da cidade mais próxima ou vizinho mais próximo
Escolhe-se um vértice para ponto de partida; a partir deste, escolhe-se a aresta com menor peso que faça a ligação com um dos vértices adjacentes ainda não visitado, e assim sucessivamente, até regressar ao ponto de partida, quando se esgotarem todos os vértices não visitados, ou seja:

1. Definir o vértice de partida;
2. A partir do vértice inicial, escolher a aresta incidente com menor peso (se houver mais do que uma hipótese, escolher aleatoriamente);
3. Continuar a construir o circuito, partindo de um vértice para outro ainda não visitado, sempre pela aresta de menor peso. Repetir este passo até que todos os vértices tenham sido visitados.

1.3. Utiliza o algoritmo apresentado a seguir para determinar o itinerário mais curto:

> **<u>Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas ou algoritmo das arestas classificadas</u>**
> Ordenam-se as arestas por ordem crescente dos pesos; em seguida, escolhemos sucessivamente a aresta com menor peso, atendendo a que não pode haver três arestas incidentes no mesmo vértice nem se podem formar circuitos enquanto houver vértices por visitar, ou seja:
> 1. Escolher a aresta (ou uma das arestas) com menor peso;
> 2. Escolher, de entre as arestas que restam, a de menor peso, tendo em conta as seguintes restrições;
>   - não permitir que 3 arestas incidam num mesmo vértice;
>   - não permitir que se formem quaisquer circuitos que não incluam todos os vértices;
> 3. Repetir o passo anterior até que todos os vértices estejam incluídos;
> 4. Fechar o circuito.

2. Considera o grafo da figura seguinte que representa as distâncias, em quilómetros, entre quatro cidades.



2.1. Aplica, se possível, o Algoritmo da Cidade mais Próxima, para determinares o circuito de Hamilton de custo mínimo, iniciando e terminando em A. Calcula a distância total do circuito que determinaste.

Nota: Desenha o grafo que se obtém pela aplicação do Algoritmo da Cidade mais Próxima,, iniciando e terminando no vértice A .

2.2. Aplica, **o Algoritmo da ordenação do peso das arestas**, para determinares o circuito de Hamilton de custo mínimo, iniciando e terminando em A. Calcula a distância total do circuito que determinaste.

2.3. Compara os valores obtidos com cada um dos algoritmos.

3. A Maria vai visitar quatro cidades do norte e do centro de Portugal: Braga, Lamego, Porto e Viseu.

Pretende iniciar e terminar a viagem em Lamego, não se importando com a ordem com que irá visitar essas cidades.

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias , em quilómetros, entre as referidas cidades.

	Braga (B)	**Lamego (L)**	**Porto (P)**	**Viseu (V)**
Amarante (A)	74	71	61	107
Braga (B)		117	70	130
Lamego (L)			106	62
Porto (P)				75

A Maria pretende aplicar um dos algoritmos seguintes para determinar um percurso com início e fim em Lamego e sem repetir nenhuma das outras cidades.

Opção 1

Passo 1: A cidade de partida deverá ser Lamego.

Passo 2: Seleciona-se a cidade mais próxima, tendo em conta que, se houver duas cidades à mesma distância, a seleção é aleatória.

Passo 3: Passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma cidade, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

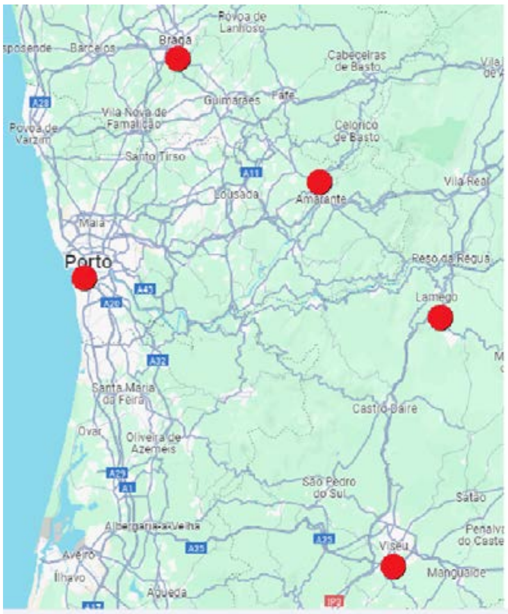
Opção 2

Passo 1: Ordenam-se as arestas (distâncias entre cada par de cidades) por ordem crescente, indicando-se, o peso correspondente.

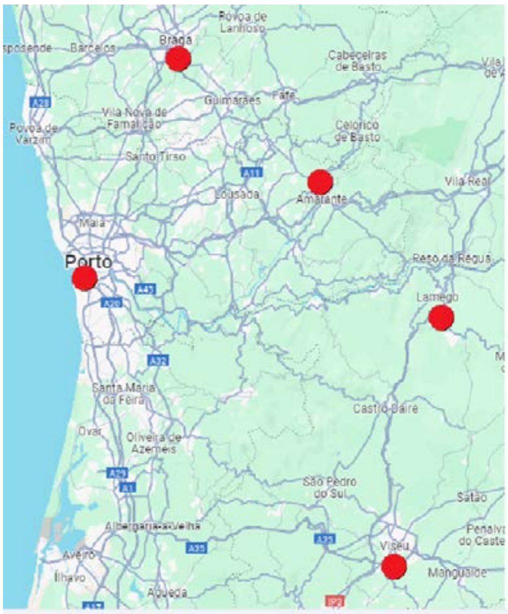
Passo 2: Selecionam-se, sucessivamente, as arestas de menor peso, tendo em conta que:
- na mesma cidade (vértice) não podem incidir três arestas;
- nunca se fecha um circuito enquanto houver cidades por visitar;
- repetir este passo até que todas as cidades sejam visitadas;
- regressa-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

Passo 3: Ordena-se a solução de acordo com a cidade de partida (Lamego).

Opção 1



Opção 2



A Maria aplicou os dois algoritmos e concluiu que usando a opção 2 obteria um percurso cuja distância total seria inferior à obtida com a opção 1.

Diz, justificando, se a Maria tem razão.

Na tua resposta, deves:

- apresentar um grafo ponderado para cada uma das opções (1 e 2);
- aplicar os algoritmos de cada uma das opções (1 e 2);
- apresentar um circuito dado pela opção 1;
- apresentar um circuito dado pela opção 2;
- indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- apresentar uma conclusão.

(adaptado do Exame Nacional de MACS- 2013, Época Especial)

Tarefa 8

As melhores soluções: Árvores

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo da tarefa é obter boas soluções aplicando os algoritmos de Kruskal e de Prim, recorrendo a "árvores", permitindo assim articular e relacionar os vários saberes em contexto real.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de grafo conexo, grafo ponderado e circuito.

Materiais e recursos: Computador com projetor, computadores ou telemóveis. Aplicação *Graph Online*. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
Para a resolução da tarefa, a pares e de forma autónoma, os alunos devem recorrer ao glossário para esclarecimento de conceitos, sempre que seja necessário. Sugere-se que se considerem três momentos:

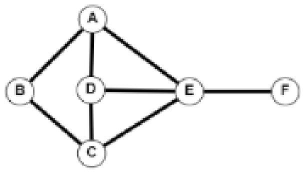
- resolução dos itens 1. e 2. e apresentação (de diferentes resoluções no item 2.) ao grupo turma;
- apresentação de diferentes resoluções do item 3. (no caso do algoritmo de Prim) e discussão no grupo turma;
- apresentação de diferentes resoluções do item 4. (no caso do algoritmo de Prim) e discussão no grupo turma.

Nota: Uma vez que no documento das AE se refere que o aluno deve conhecer e aplicar um algoritmo (de Kruskal ou de Prim) de modo a que permita encontrar soluções "boas", sugere-se que se dê maior ênfase à utilização do algoritmo de Kruskal por ser, significativamente, de mais fácil aplicação.

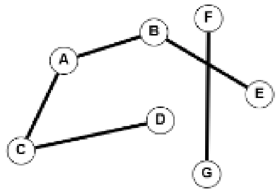
Tarefa 8

As melhores soluções: Árvores

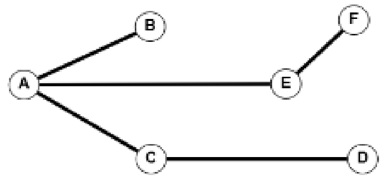
1. Indica, justificando quais dos seguintes grafos são árvores.



Grafo I

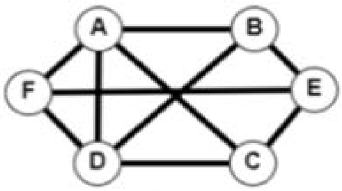


Grafo II

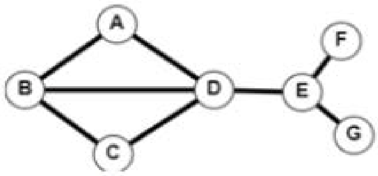


Grafo III

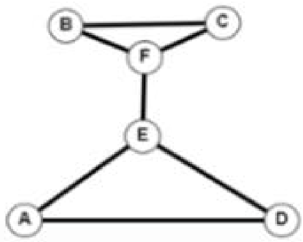
2. Considera os grafos da figura seguinte.



Grafo I



Grafo II



Grafo III

Define, para cada um dos grafos, uma árvore abrangente ou geradora.

3. O Euro 2024 (Campeonato Europeu de futebol) realizar-se-á entre 14 de junho e 14 de julho, de 2024, em dez cidades da Alemanha: Berlim, Colónia, Dortmund, Düsseldorf, Frankfurt, Gelsenkirchen, Hamburgo, Leipzig, Munique e Stuttgart. Com o intuito de avaliar as condições de segurança de alguns estádios de futebol, uma comissão vai proceder à sua inspeção.
A tabela seguinte apresenta a lotação máxima de cada um dos dez estádios:

Cidade	Lotação (nº de espetadores)	Cidade	Lotação (nº de espetadores)
Berlim	71 000	Gelsenkirchen	50 000
Colónia	43 000	Hamburgo	49 000
Dortmund	62 000	Leipzig	40 000
Düsseldorf	47 000	Munique	66 000
Frankfurt	47 000	Stuttgart	51 000

Uma comissão de peritos irá fazer inspeções de segurança aos estádios que tenham capacidade superior ou igual a 50 000 espetadores.

O percurso das visitas aos estádios, para a realização das inspeções será feito em função da duração média das viagens de comboio, entre as diferentes cidades, que se apresentam na tabela seguinte:

	Dortmund (D)	**Gelsenkirchen (G)**	**Munique (M)**	**Stuttgart (S)**
Berlim (B)	5h35	4h27	4h28	5h42
Dortmund (D)		0h 19	13h14	4h
Gelsenkirchen (G)			5h50	4h30
Munique (M)				2h30

3.1. Desenha um grafo ponderado que modele a situação.

3.2. Apresenta um percurso que se obtenha com a aplicação do algoritmo de Kruskal, na determinação do menor tempo gasto nas viagens entre as cinco cidades.

Na tua resposta, apresenta:

- um grafo que resulte da aplicação do algoritmo;
- um percurso possível para a comissão utilizar na inspeção dos estádios;
- o total de horas e minutos, que a comissão irá gastar neste percurso.

3.3. Apresenta um percurso que se obtenha com a aplicação do algoritmo de Prim, na determinação do menor tempo de viagens entre as cinco cidades.

Na tua resposta, apresenta:

- um grafo que resulte da aplicação do algoritmo;
- um percurso possível para a comissão utilizar na inspeção dos estádios;
- o total de horas e minutos, que a comissão irá gastar neste percurso.

4. Na festa de S. João, no Porto, pretende-se instalar numa praça uma iluminação decorativa, formada por um fio de luzes suspenso entre seis edifícios, E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

   A tabela seguinte apresenta o comprimento, em metros, do fio de luzes que será necessário instalar entre cada par de edifícios:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1		155	85	142	126	56
E2	155		100	32	34	125
E3	85	100		81	82	30
E4	142	32	81		35	105
E5	126	34	82	35		105
E6	56	125	30	105	105	

   De modo a minimizar o custo da instalação da iluminação decorativa foram aplicados o algoritmo de **Kruskal** e o algoritmo de **Prim**.

   4.1. Usa o algoritmo de Kruskal para calcular o comprimento mínimo necessário para iluminar a praça nas condições apresentadas.

   Na tua resposta deves apresentar:

   - um grafo ponderado que resulte da aplicação do **Algoritmo de Kruskal**;
   - o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar.

   4.2. Usa o algoritmo de Prim para calcular o comprimento mínimo necessário para iluminar a praça nas condições apresentadas.

   Na tua resposta deves apresentar um grafo ponderado que resulte da aplicação do Algoritmo de **Prim**.

(Adaptado do Exame Nacional de MACS- 2021,2.ª Fase)

Tarefa 9

Menos é mais: Caminhos críticos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa apresenta duas situações reais para determinação de caminhos críticos no cálculo do tempo mínimo para a execução de um projeto.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de grafo.

Materiais e recursos: Computador com projetor. Glossário que se encontra, como anexo, no final desta coletânea.

Notas e sugestões:
Antes dos alunos começarem a resolver a tarefa, sugere-se que o professor apresente exemplos de atividades do quotidiano (ou de uma empresa) onde seja necessário realizar determinados procedimentos em simultâneo e com precedências.
Os alunos deverão realizar a tarefa a pares e a seguir fazer a apresentação à turma das suas resoluções.

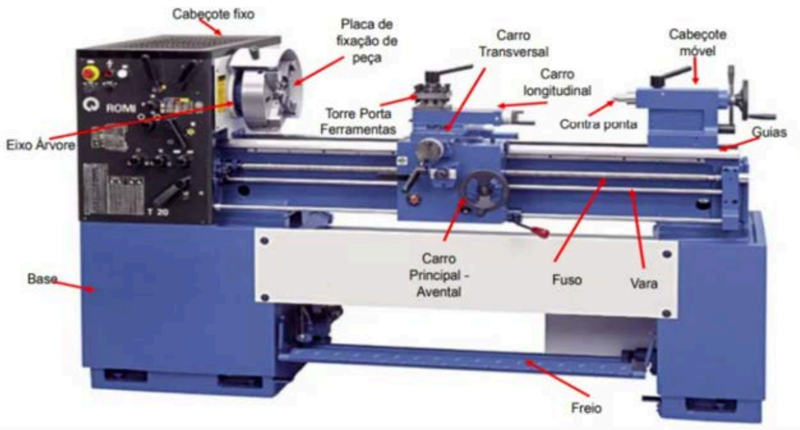
Tarefa 9

Menos é mais: Caminhos críticos

Digrafo: é um grafo em que as arestas têm um sentido associado.

Caminho crítico: Percurso representado por uma sequência de tarefas (representadas por vértices) e que corresponde ao maior somatório dos pesos dos vértices que o compõe. Permite calcular o tempo mínimo na realização de um conjunto de tarefas.

1. Para reparar um torno mecânico que apresenta problemas na árvore e na bomba de lubrificação, é necessário seguir o protocolo (que inclui as tarefas de A a F) que se apresenta na tabela seguinte:



Tarefa	Precedências	Duração
A - Retirar a placa, a proteção e escoar o óleo	—----	1 h
B - Retirar a árvore	**A**	3 h
C - Lavar o cabeçote	**A**	2 h
D - Trocar os rolamentos	**B**	3 h
E - Trocar a bomba de lubrificação	**B** e **C**	2 h
F - Montar, abastecer e testar o conjunto	**D** e **E**	4 h

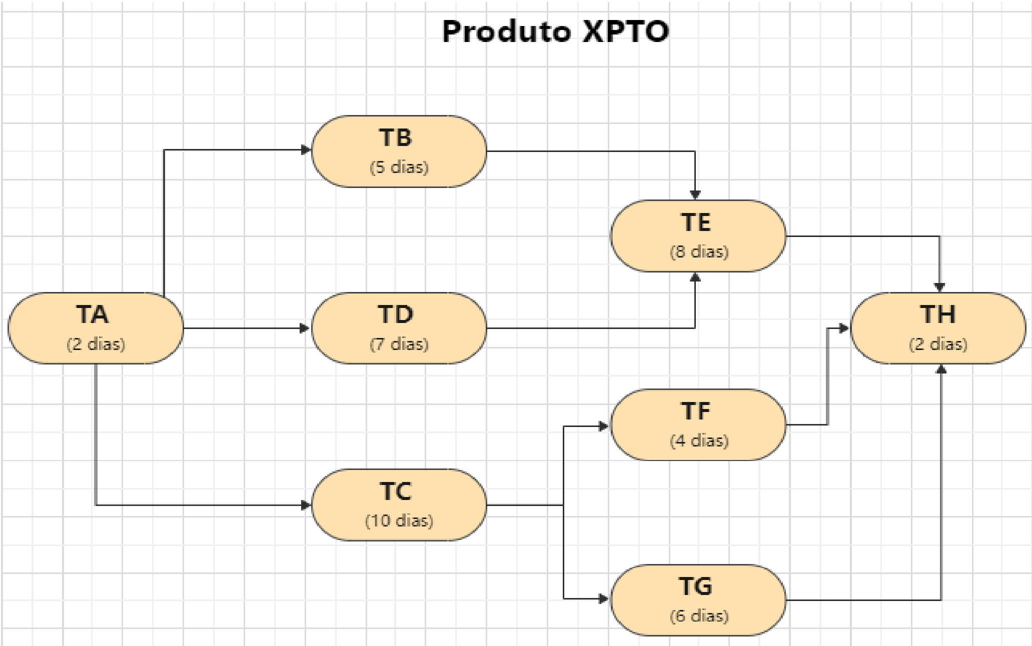
1.1. Representa, através de um digrafo, a informação que consta na tabela.

1.2. Indica todas as possíveis sequências de concretização das tarefas e as respetivas durações.

1.3. Será que é possível fazer esta reparação em 9 horas?

Adaptado de https://gestaodesegurancaprivada.com.br/metodo-do-caminho-critico-o-que-e/

2. Na empresa *SofTEC* vai ser criado um novo produto informático, XPTO.
A planificação das tarefas necessárias para o seu desenvolvimento (de TA até TH) encontra-se no digrafo representado na figura seguinte:



2.1. De acordo com o digrafo preenche a tabela seguinte:

Tarefa	Precedências	Duração
Início do projeto -**TA**		
Pesquisa de mercado-**TB**		
Desenvolvimento do produto- **TC**		
Design do produto- **TD**		
Marketing e publicidade- **TE**		
Testes do produto -**TF**		
Formação dos elementos da equipa-**TG**		
Lançamento do produto - **TH**		

2.2. Apresenta todas as possíveis sequências de concretização das tarefas e as respetivas durações.

2.3. Apresenta o caminho crítico e o tempo mínimo para a concretização do produto.

GLOSSÁRIO

Tarefas 1 e 2

Grafo - Conjunto de pontos e linhas que ligam entre si todos ou alguns desses pontos.

Vértices - Pontos que constituem o grafo.

Arestas - Linhas que constituem o grafo e que ligam os vértices.

Arestas incidentes - Uma aresta que une dois vértices diz-se aresta incidente em cada um dos seus vértices.

Grau de um vértice - É o número de arestas incidentes nesse vértice.

Vértices adjacentes - Dois vértices ligados por uma aresta dizem-se vértices adjacentes.

Arestas adjacentes - São arestas que são incidentes no mesmo vértice (tem um vértice em comum).

Lacete - É uma aresta que liga um vértice a ele próprio.
Para determinação do grau de um vértice, os lacetes contam como duas arestas incidentes no vértice.

Arestas paralelas - São arestas distintas que ligam os mesmos vértices.

Vértice isolado - É um vértice que não tem arestas incidentes.

Vértice terminal - É um vértice que tem apenas uma aresta incidente

Ordem de um grafo - É o número de vértices desse grafo.

Grafo conexo - É um grafo no qual existe sempre uma sequência de arestas a unir quaisquer dois dos seus vértices.

Grafo simples - É um grafo que não tem arestas paralelas nem lacetes.

Multigrafo - Grafo com arestas paralelas ou lacetes.

Grafo completo - É um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes.

Grafo orientado (digrafo) - É um grafo cujas arestas têm sentidos definidos.

Grafo regular - É um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau.

Subgrafo de um grafo G - Qualquer grafo formado por um subconjunto dos vértices do grafo G e por um subconjunto das arestas.

Percurso ou passeio - É uma qualquer sequência de vértices adjacentes, podendo haver repetição de vértices.

Caminho - É um passeio ou percurso aberto que começa num vértice e termina noutro diferente.

Circuito - Se um percurso é fechado e não repete nenhuma aresta denomina-se circuito. Um circuito começa e termina num mesmo vértice.

GLOSSÁRIO

Tarefas 3, 4 e 5

Caminho de Euler - Um caminho de Euler ou um caminho euleriano é um caminho que passa uma única vez em cada aresta.
Um grafo admite um caminho de Euler ou caminho euleriano se, e só se, é conexo e tiver zero ou dois vértices de grau ímpar. No caso de ter dois vértices de grau ímpar o caminho tem início num desses vértices e termina no outro.

Circuito de Euler - Um circuito de Euler, que é definido num grafo conexo, é um circuito que passa em todas as arestas uma única vez.

Grafo de Euler - É um grafo no qual é possível definir um ou mais circuitos de Euler.

Teorema de Euler - Um grafo conexo é um grafo de Euler se, e só se, é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

Observação:

- Se um grafo conexo tiver todos os vértices de grau par então admite pelo menos um circuito de Euler.
- Se um grafo conexo tiver no máximo dois vértices de grau ímpar, então admite pelo menos um caminho de Euler

Eulerizar um grafo - Consiste em duplicar arestas já existentes (entre vértices adjacentes) com o objetivo de ficar com um grafo conexo em que todos os vértices tenham grau par. A melhor eulerização é a que acrescenta o menor número de arestas.

Observação:

Caso apenas se pretenda percorrer todas as arestas, com um número mínimo de duplicações de arestas, sem ter de voltar ao ponto de partida, teremos de procurar ficar com apenas dois vértices de grau ímpar.

GLOSSÁRIO

Tarefas 6 e 7

Percurso de Hamilton - Percorre todos os vértices de um grafo conexo sem passar em nenhum mais do que uma vez. Caso o percurso seja fechado, temos um ciclo denominado por ciclo de Hamilton.

Circuito Hamiltoniano - É um caminho que percorre todos os vértices de um grafo conexo uma única vez, começando e terminando no mesmo vértice (único que se repete).
Num grafo, chama-se circuito de Hamilton (ou hamiltoniano) a um caminho que começa e acaba no mesmo vértice, passando por todos os vértices e não mais do que uma vez por cada um deles.
Um grafo que admite um circuito hamiltoniano é chamado um grafo de Hamilton ou um grafo hamiltoniano.

Peso - um número que se associa a cada aresta de um grafo: pode representar distâncias, custo, tempo, etc.

Grafo ponderado (ou grafo pesado) - Grafo em que a cada aresta se associa um valor numérico, que se designa por peso da aresta.

Algoritmo da cidade mais próxima ou algoritmo do vizinho mais próximo
Escolhe-se um vértice para ponto de partida; a partir deste, escolhe-se a aresta com menor peso que faça a ligação com um dos vértices adjacentes ainda não visitado, e assim sucessivamente até regressar ao ponto de partida, quando se esgotarem todos os vértices não visitados.

1. Definir o vértice de partida;
2. A partir do vértice inicial, escolher a aresta incidente com menor peso (se houver mais do que uma hipótese, escolher aleatoriamente);
3. Continuar a construir o ciclo, partindo de um vértice para outro ainda não visitado, sempre pela aresta de menor peso. Repetir este passo até que todos os vértices tenham sido visitados;
4. Unir o último vértice visitado ao vértice inicial.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas ou algoritmo das arestas classificadas

Ordenam-se as arestas por ordem crescente dos pesos; em seguida, escolhemos sucessivamente a aresta com menor peso, atendendo a que não pode haver três arestas incidentes no mesmo vértice nem se podem formar circuitos enquanto houver vértices por visitar.

1. Escolher a aresta (ou uma das arestas) com menor peso;
2. Escolher de entre as arestas que restam a de menor peso, tendo em conta as seguintes restrições;
   - não permitir que 3 arestas incidam num mesmo vértice;
   - não permitir que se formem quaisquer ciclos que não incluam todos os vértices;
3. Repetir o passo anterior até que todos os vértices estejam incluídos;
4. Fechar o circuito.

GLOSSÁRIO

Tarefas 6 e 7

Árvore - grafo conexo que não possui qualquer circuito.

Árvore geradora ou abrangente - um subgrafo de um grafo conexo que tem todos os vértices desse grafo e é uma árvore.

Árvore abrangente mínima - árvore em que a soma dos pesos das arestas é mínima.

Algoritmo de Kruskal - as arestas do grafo, conexo, vão-se unindo por ordem crescente dos pesos, desde que não se formem circuitos e que se garanta que no final todos os vértices estão na árvore.

Algoritmo de Prim:

- começa-se num vértice qualquer do grafo original (conexo),
- seleciona-se a aresta com menor peso nesse vértice;
- em cada passo seguinte, observam-se as arestas que saem de qualquer vértice já alcançado para um vértice não incluído na árvore. Escolhemos a que tem menor peso (e que não forme circuito).
- termina-se quando todos os vértices do grafo fizerem parte da árvore.

Caminho crítico - Percurso representado por uma sequência de tarefas (representadas por vértices) e que corresponde ao maior somatório dos pesos dos vértices que o compõem. Permite calcular o tempo mínimo na realização de um conjunto de tarefas.