

# Matrizes para o Ensino Secundário

Susana Carreira

## Ficha técnica

**Título:**

Matrizes para o Ensino Secundário

**Autora:**

Susana Carreira

Pós-Graduação em Matemática para o Ensino – Universidade do Algarve,  
Faculdade de Ciências e Tecnologia

Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação, Ministério da Educação

**Data:**

Lisboa, março de 2026



## Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P. (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

No 12.º ano do programa da disciplina de Matemática A surgem três temas opcionais para que um deles seja trabalhado em cada escola, ou mesmo em cada turma, tendo em conta o perfil e os interesses dos alunos e os recursos a que será possível ter acesso.

O tema Matrizes constitui uma novidade no currículo do Ensino Secundário em Portugal, o que motivou a elaboração desta brochura dedicada exclusivamente a esse tema. A sua criação surge no contexto das diversas atividades e iniciativas de apoio ao desenvolvimento do novo currículo, promovidas pelo **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)**.

Embora inserida neste movimento de inovação curricular, a presente brochura foi desenvolvida por Susana Carreira, no âmbito das suas atividades letivas e formativas na Universidade do Algarve.

Como salienta o programa, as Matrizes representam uma das ferramentas mais poderosas concebidas pelo espírito humano. Apesar de terem surgido apenas no século XIX, constituem um instrumento essencial para resolver sistemas de milhares de equações com milhares de incógnitas, viabilizando, por exemplo, o sucesso das viagens espaciais. A sua relevância estende-se a áreas como o estudo de redes, a ciência dos dados e as tecnologias digitais, sendo indispensáveis na produção cinematográfica de animação, onde permitem representar as transformações geométricas que definem o movimento dos objetos e personagens. Conhecer matrizes é, portanto, entrar num mundo novo que originou ferramentas que todas as tecnologias digitais hoje utilizam profusamente.

A presente brochura, escrita por Susana Carreira, constitui um recurso importante ao tema opcional “Matrizes” do programa de Matemática A. Inclui os conceitos básicos, as operações com matrizes e aplicações às transformações geométricas abrangendo variações de tamanho (*scaling*), os cisalhamentos (*shearing*) e rotações no plano, enquadradas numa perspetiva mais ampla das transformações lineares. A publicação explora adequadamente a tecnologia, apresenta exemplos pertinentes, estabelece ligações entre matrizes e algumas das suas aplicações e propõe tarefas concretas para um trabalho com os alunos.

O **GT DCPMES** é constituído pelos docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

Esta publicação não substitui outros elementos de estudo ou consulta; contudo, constitui uma referência de qualidade que certamente apoiará os professores de Matemática no aprofundamento dos seus conhecimentos sobre a natureza e finalidades dos programas, bem como sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas, incluindo a conceção e desenvolvimento de projetos. A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais, âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto diversificado de ferramentas matemáticas. Neste sentido, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e abordagens, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, promovendo o raciocínio dedutivo aliado ao uso da tecnologia.

A DGE desenvolveu um processo sistemático e consistente de apoio aos professores de Matemática que iniciaram em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário. Este processo inclui, entre outras iniciativas: Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; edição de várias coletâneas de tarefas e outras brochuras; formação de professores formadores, criando uma rede nacional, que, localmente, apoia os colegas e dinamiza ações de formação em todas as escolas; uma base de dados de tarefas já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e organização de seminários a distância (*webinares*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo da escolaridade obrigatória responda às necessidades de todos os alunos, assegurando a sua formação matemática enquanto cidadãos. Essa formação deve proporcionar uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e acessível a

todos, garantido que os formalismos e os níveis de abstração sejam ajustados ao trabalho desenvolvido em cada tema. A matemática deve assumir-se como um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o raciocínio com vista à tomada de decisões e à seleção e implementação de estratégias.

Esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino secundário reconheçam a utilidade dos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino, quer como referências e instrumentos de reflexão, de auto-formação e de desenvolvimento profissional.

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação (EduQA) e o GT DCPMES, continuarão a envidar esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, contamos com o profissionalismo empenhado, informado e consciente dos professores, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva

Coordenador

# 1. MATRIZES DE NÚMEROS REAIS

## 1.1. Conceitos básicos

O termo *matriz* de números reais (ou simplesmente matriz) designa um conjunto de números reais dispostos em linhas e colunas (semelhante a uma tabela de dupla entrada), exibidos entre parêntesis retos. Normalmente, uma matriz é designada por uma letra maiúscula.

Um dos aspetos importantes de uma matriz é a forma organizada pela qual os números se dispõem nas linhas e colunas da matriz. Dizemos que uma matriz é de dimensão  $m \times n$  (ou do tipo  $m \times n$ ) quando tem  $m$  linhas e  $n$  colunas. Por vezes, a dimensão da matriz é indicada na sua designação, como por exemplo:  $A_{3 \times 2}$ . Trata-se de uma matriz  $A$  formada por 3 linhas e 2 colunas (o número de linhas primeiro), como a seguinte, por exemplo:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Os números que compõem a matriz são chamados elementos ou entradas da matriz. Para distinguirmos as diversas entradas de uma matriz, usamos a sua posição na matriz, determinada pelo número de linha (primeiro) e número de coluna (depois).

Assim, denota-se uma matriz por uma letra maiúscula e cada um dos seus elementos pela mesma letra minúscula e por dois índices, sendo o primeiro índice o número da linha e o segundo índice o número da coluna em que se encontra o elemento. Para uma matriz genérica  $A$  de dimensão  $m \times n$ , cada um dos seus elementos será designado por  $a_{ij}$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Diremos que duas matrizes da mesma dimensão,  $A_{m \times n}$  e  $B_{m \times n}$ , são iguais quando qualquer elemento da matriz  $A$  é igual ao elemento da matriz  $B$  que se encontra na mesma posição. Portanto, são iguais as entradas homólogas das matrizes  $A$  e  $B$ :

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m \text{ e cada } j = 1, 2, \dots, n.$$

De acordo com a sua dimensão, uma matriz pode classificar-se como:

- Matriz retangular (o número de linhas é diferente do número de colunas)
- Matriz quadrada (o número de linhas é igual ao número de colunas:  $M_{n \times n}$ )
- Matriz coluna ou vetor coluna (o número de colunas é igual a 1:  $M_{m \times 1}$ )
- Matriz linha ou vetor linha (o número de linhas é igual a 1:  $M_{1 \times n}$ )

## 1.2. Casos particulares de matrizes quadradas

Uma matriz quadrada de dimensão  $n \times n$  é também referida como matriz quadrada de ordem  $n$ . Numa matriz quadrada, os elementos tais que o seu número de linha é igual ao seu número de coluna, isto é, os elementos que ocupam as posições  $a_{ii}$ , formam a *diagonal principal* da matriz. Algumas matrizes quadradas recebem designações especiais:

- Matriz triangular superior (todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ )
- Matriz triangular inferior (todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ )
- Matriz diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ )
- Matriz escalar (matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  e  $a_{ii} = k$ )
- Matriz identidade (matriz escalar em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  e  $a_{ii} = 1$ )

## 1.3. Operações com matrizes

*Produto de uma matriz por um escalar*

Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  e  $k$  um escalar (número real). Define-se o produto da matriz pelo escalar como sendo a matriz  $kA$  de dimensão  $m \times n$  que se obtém multiplicando cada entrada da matriz  $A$  pelo escalar  $k$ :

$$(kA)_{m \times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ ka_{41} & ka_{42} & ka_{43} & \dots & ka_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Note-se que para o escalar  $k = -1$ , a matriz  $kA$  será representada por  $-A$ . As suas entradas são os valores simétricos das entradas da matriz  $A$ :

$$(-A)_{m \times n} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \dots & -a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

### Soma de matrizes

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes com a mesma dimensão  $m \times n$ . Define-se a soma das duas matrizes como sendo a matriz  $A + B$  de dimensão  $m \times n$  que se obtém adicionando cada entrada da matriz  $A$  à correspondente entrada da matriz  $B$  (isto é, adicionando os elementos homólogos das duas matrizes):

$$(A + B)_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & \dots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ a_{41} + b_{41} & a_{42} + b_{42} & a_{43} + b_{43} & \dots & a_{4n} + b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

De forma mais condensada, podemos escrever:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(A - B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Como já referido, duas matrizes  $A$  e  $B$  de igual dimensão são iguais quando os elementos homólogos das duas matrizes são iguais. Assim, a diferença entre duas matrizes iguais é uma matriz nula com a mesma dimensão (isto é, com todas as entradas iguais a zero).

## Produto de matrizes

Define-se o produto de uma linha de dimensão  $1 \times n$  por uma coluna de dimensão  $n \times 1$  ao número real que se obtém da seguinte forma:

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

Note-se que a operação efetuada corresponde ao produto interno de dois vetores com  $n$  coordenadas.

Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  e seja  $B$  uma matriz de dimensão  $n \times p$ . O produto da matriz  $A$  pela matriz  $B$  é uma matriz  $C$  de dimensão  $m \times p$  tal que o elemento  $c_{ij}$  é obtido, fazendo o produto da linha  $i$  da matriz  $A$  pela coluna  $j$  da matriz  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

De forma esquemática, poderá ilustrar-se o cálculo assim:

Diagram illustrating the calculation of an element in the product of two matrices:

Matrix  $A$  (size  $m \times n$ ) is multiplied by Matrix  $B$  (size  $n \times p$ ) to produce Matrix  $C$  (size  $m \times p$ ).

The element  $c_{ij}$  is calculated as the dot product of row  $i$  of  $A$  and column  $j$  of  $B$ .

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Note-se que o produto de duas matrizes só é possível quando **o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda**.

Exemplo do cálculo do produto de duas matrizes:

Consideremos as matrizes  $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Apresentam-se os cálculos para obter o produto da matriz  $A$  pela matriz  $B$ :

$$(AB)_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -2 + 0 - 4 & 2 + 0 - 1 & 0 + 0 - 1 & 2 + 0 + 0 \\ -1 - 6 + 4 & 1 - 6 + 1 & 0 - 9 + 1 & 1 - 9 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$



### Tarefa 1.1. Dosagens de medicamentos em pacientes hospitalizados



Imagem obtida de: [https://www.flaticon.com/free-icon/pills\\_822143](https://www.flaticon.com/free-icon/pills_822143) produzida por Freepik - Flaticon

Numa enfermaria de hospital estão a ser administrados três tipos de medicamentos (Med 1, Med 2, Med 3) a quatro pacientes (Pac 1, Pac 2, Pac 3, Pac 4), com as seguintes dosagens diárias (em mg):

	Pac 1	Pac 2	Pac 3	Pac 4
Med 1	10	40	30	20
Med 2	20	0	10	10
Med 3	30	0	0	20

1. Escreva a matriz  $A$  que representa a informação das dosagens diárias dos medicamentos tomadas pelos pacientes.
2. Qual é a dimensão (ou o tipo) da matriz  $A$ ?
3. O que representa cada uma das colunas da matriz  $A$ ? E o que significa cada uma das linhas da matriz  $A$ ?
4. Identifique os elementos  $a_{14}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$ . O que significa o valor de cada um desses elementos?
5. O que acontece se trocarmos as linhas pelas colunas na tabela dada? Escreva a matriz  $B$  que representa a informação assim organizada. Que relação tem essa matriz com a matriz  $A$ ?

Na sequência da monitorização do estado dos doentes, foi feito um ajustamento da terapêutica, com as seguintes indicações de aumento, manutenção ou redução das dosagens (em mg):

	Pac 1	Pac 2	Pac 3	Pac 4
Med 1	5	-10	-10	0
Med 2	0	10	-10	5
Med 3	-20	10	5	10

- Escreva a matriz  $B$  que representa as alterações das dosagens dos medicamentos para os vários pacientes.
- Obtenha a matriz  $C$  que representa as dosagens reajustadas dos medicamentos a administrar aos vários pacientes. Como se relaciona a matriz  $C$  com as matrizes  $A$  e  $B$ ?

Admita que os três medicamentos têm um custo idêntico de 0.60€ por miligrama, aproximadamente. Considere as dosagens diárias estabelecidas após o ajustamento feito à prescrição inicial.

- Obtenha matriz  $D$  que representa o custo da dosagem diária de cada medicamento para os vários pacientes.
- Indique os elementos  $d_{11}$ ,  $d_{24}$ ,  $d_{32}$ . O que significa cada um desses elementos?
- Como se relaciona a matriz  $D$  com a matriz  $C$ , obtida anteriormente?

Após o ajustamento das dosagens diárias a administrar, estima-se que o Paciente 1 fique internado 3 dias, o Paciente 2 fique 8 dias, o Paciente 3 fique 5 dias e o Paciente 4 fique 10 dias.

- Determine a quantidade total de cada medicamento que será necessária para o grupo de pacientes, enquanto decorre o internamento.
- Determine o custo total de cada medicamento que será administrado ao grupo de pacientes, enquanto decorre o internamento.
- Como poderá obter cada um dos resultados anteriores, recorrendo a matrizes? Explique o raciocínio.



## Tarefa 1.2. Vendas em loja de vestuário<sup>1</sup>



Imagem obtida de: [https://www.freepik.com/free-vector/fashionable-clothes-boutique-background-with-woman-fashion-symbols-flat-vector-illustration\\_34379091.htm](https://www.freepik.com/free-vector/fashionable-clothes-boutique-background-with-woman-fashion-symbols-flat-vector-illustration_34379091.htm) por Freepik

Considere as tabelas seguintes que registam as vendas efetuadas nos meses de Maio e Junho, numa loja de vestuário, considerando o tipo de peça e o tamanho (S, M, L).

	Vendas de Maio		
	S	M	L
<b>Blusas</b>	25	30	22
<b>Calças</b>	12	18	15
<b>Saias</b>	10	10	9
<b>Vestidos</b>	22	36	20

	Vendas de Junho		
	S	M	L
<b>Blusas</b>	24	15	20
<b>Calças</b>	16	21	10
<b>Saias</b>	6	12	5
<b>Vestidos</b>	11	25	12

<sup>1</sup> Adaptado de: Anton, H. & Busby, R. C. (2003). *Contemporary Linear Algebra*. John Wiley & Sons.

1. Escreva a matriz  $M$  que representa as quantidades de peças dos vários tipos e tamanhos, vendidas em Maio, e a matriz  $J$  que representa as quantidades de peças dos vários tipos e tamanhos, vendidas em Junho.
2. Obtenha a matriz  $M + J$ . O que significam as entradas dessa matriz?
3. Obtenha a matriz  $M - J$ . O que significam as entradas dessa matriz?
4. Obtenha uma matriz coluna  $U$ , de tal modo que o produto  $MU$  represente as quantidades, vendidas em Maio, dos vários tipos de peças de vestuário. Justifique o raciocínio.
5. Obtenha uma matriz linha  $V$ , de tal modo que o produto  $VM$  represente as quantidades, vendidas em Maio, dos vários tamanhos de vestuário (S, M, e L). Justifique o raciocínio.
6. Suponha que o preço médio de 1 blusa é 20€, o preço de umas calças é 30€, de uma saia é 25€ e de um vestido é 32€. Utilize matrizes para obter o rendimento obtido em cada tipo de peça no período de Maio-Junho. Justifique o seu raciocínio.



### Tarefa 1.3. Aluguer de automóveis



Imagem obtida de: <https://unblast.com/car-rent-vector-illustration-ai/> produzida por Unblast

Uma empresa de aluguer de automóveis opera em dois locais: Aeroporto e Centro da Cidade. A empresa oferece dois tipos de veículos: Económico e SUV. Para cada tipo de veículo pode ser aplicada uma tarifa base ou uma tarifa promocional. Têm-se os seguintes dados relativos a uma semana de negócio:

Veículos alugados diariamente (em média):

	<b>Económico (base)</b>	<b>Económico (pro)</b>	<b>SUV (base)</b>	<b>SUV (pro)</b>
<b>Aeroporto</b>	20	15	10	5
<b>Centro</b>	25	10	12	6

Tarifas aplicadas (em euros), por dia:

	<b>Tarifa base</b>	<b>Tarifa pro</b>
<b>Económico</b>	70	50
<b>SUV</b>	100	90

1. Utilizando matrizes, calcule a receita diária obtida por cada local da empresa.
2. Utilizando matrizes, calcule a receita semanal (7 dias) obtida por cada local.

A empresa de aluguer de automóveis quer projetar a sua receita para um período de 4 semanas, assumindo que a procura irá alterar-se de semana para semana. Preveem-se as seguintes alterações semanais nos alugueres, em qualquer das tarifas, por comparação com a semana base (Semana 1):

Semana 2: aumento de 20%

Semana 3: aumento de 40%

Semana 4: redução de 20%

3. Usando matrizes, calcule a receita prevista para cada local nas 4 semanas.

---

### *Propriedades das operações com matrizes*

Relativamente à soma de matrizes e ao produto de uma matriz por um escalar, são verificadas as propriedades seguintes.

Sendo  $A, B, C$  matrizes de dimensão  $m \times n$ , sendo  $O$  a matriz nula de dimensão  $m \times n$  e sendo  $\alpha$  e  $\beta$  números reais, tem-se:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Relativamente ao produto de matrizes, são verificadas as seguintes propriedades. Sendo  $A, B, C$  matrizes de dimensões tais que as operações indicadas sejam possíveis, sendo  $I$  a matriz identidade (de ordem necessária) e sendo  $\alpha$  um número real, tem-se:

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AI = IA = A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- Note-se que o produto de matrizes não é comutativo!

#### 1.4. Transposta de uma matriz

Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$ . A matriz transposta de  $A$  é uma matriz de dimensão  $n \times m$ , representada por  $A^T$ , cujos elementos  $a'_{ij}$  são tais que:

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

A matriz  $A^T$  obtém-se facilmente, escrevendo as linhas da matriz  $A$  como colunas da matriz  $A^T$  ou as colunas da matriz  $A$  como linhas da matriz  $A^T$ .

Algumas propriedades interessantes que envolvem a transposta de uma matriz são a seguir especificadas. Sendo  $A$  e  $B$  matrizes de dimensões tais que as operações indicadas sejam possíveis e sendo  $\alpha$  um número real, tem-se:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\alpha(A^T) = (\alpha A)^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$  (Nota: a matriz transposta do produto é o produto das matrizes transpostas pela ordem contrária)

Dada uma matriz quadrada  $A$ , pode acontecer que a transposta da matriz  $A$  seja igual à própria matriz  $A$ . Diz-se que uma matriz quadrada é *simétrica* quando se verifica a igualdade  $A = A^T$ .

Um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3 é o seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinando a transposta de  $A$ , tem-se a matriz quadrada de ordem 3:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz  $A$  é simétrica, pois satisfaz a igualdade  $A^T = A$ .

De forma simples, pode concluir-se que uma matriz quadrada  $A$  é uma matriz *simétrica* se e só se, para cada  $i$  e para cada  $j$ , é verificada a relação:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, n$$



### Desafios

i) No caso de uma matriz quadrada de ordem  $n$ , é possível efetuar os produtos  $AA$ ,  $AAA$ ,  $AAAA$ , etc. Tais produtos também se representam como potências, isto é,  $AA = A^2$ ,  $AAA = A^3$ ,  $AAAA = A^4$  e assim por diante.

Encontre uma matriz  $A$  quadrada de ordem 2, não nula, de tal modo que a matriz  $A^2$  seja uma matriz com todas as entradas nulas. Explique o seu raciocínio. Haverá mais do que uma solução para este problema?

ii) Encontre duas matrizes quadradas, da mesma ordem,  $A$  e  $B$ , tais que:  $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$ .

Em que condições será válida a igualdade  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ? Justifique.

iii) Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  e seja  $B$  uma matriz de dimensão  $n \times p$ .

Suponha que as duas primeiras colunas,  $b_1$  e  $b_2$ , da matriz  $B$  são iguais. O que pode dizer sobre as colunas da matriz  $AB$ ? Justifique.

Suponha que a terceira coluna da matriz  $B$  é igual à soma das duas primeiras colunas, isto é,  $b_3 = b_1 + b_2$ . O que pode dizer sobre a terceira coluna da matriz  $AB$ ? Justifique.

Suponha que a segunda coluna da matriz  $B$  é composta por zeros. O que pode dizer sobre a segunda coluna da matriz  $AB$ ? Justifique.

---

## 1.5. Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , dizemos que a matriz  $A$  é *invertível* (ou regular) se existe uma matriz quadrada  $B$ , da mesma ordem, tal que:

$$AB = BA = I_n$$

A matriz  $B$ , caso exista, designa-se por *inversa* da matriz  $A$  e representa-se por  $A^{-1}$ .

Se uma matriz quadrada de ordem  $n$  não admite inversa, a matriz diz-se *não invertível* (ou singular).

Consideremos, como exemplo, as matrizes  $A$  e  $B$ , de ordem 2, e verifiquemos que  $A$  e  $B$  são inversas uma da outra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando o produto  $AB$ , obtém-se:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3 & 1 - 1 \\ -12 + 12 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o produto  $BA$ , obtém-se:

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3 & 4 - 4 \\ -3 + 3 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nestas condições, podemos afirmar que  $A$  e  $B$  são invertíveis e tem-se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

É possível demonstrar que sendo  $A$  uma matriz invertível, então  $A$  tem uma e uma só inversa, razão pela qual podemos dizer que existe a matriz inversa de  $A$ .

Dada uma matriz de ordem  $n$ , não é imediato concluir se a matriz é ou não invertível. No entanto, existem casos de matrizes singulares que podem ser prontamente identificados. Assim, uma matriz quadrada que contenha pelo menos uma linha de zeros é uma matriz singular. Da mesma forma, uma matriz quadrada que contenha pelo menos uma coluna de zeros é uma matriz singular. Como corolário, podemos afirmar uma matriz quadrada nula é uma matriz não invertível.

Vejamos o seguinte exemplo, em que a matriz  $A_{2 \times 2}$  tem uma linha de zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se  $A$  fosse invertível, então existiria uma matriz  $B_{2 \times 2}$  tal que  $AB = BA = I_2$ . Mas tal é impossível porque a matriz  $AB$  nunca será igual à matriz identidade. Note-se que

o elemento da matriz  $AB$  que se encontra na 2ª linha e 2ª coluna é igual a 0 e, portanto, diferente de 1.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{11} + 4b_{21} & 2b_{12} + 4b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, tomemos uma matriz  $A_{2 \times 2}$ , que contém uma coluna de zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

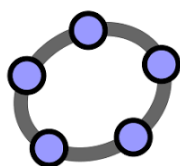
Se  $A$  fosse invertível, então existiria uma matriz  $B_{2 \times 2}$  tal que  $AB = BA = I_2$ . Mas tal é impossível porque a matriz  $BA$  nunca será igual à matriz identidade. Note-se que o elemento da matriz  $BA$  que se encontra na 1ª linha e 1ª coluna é igual a 0 e, portanto, diferente de 1.

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2b_{11} + 5b_{12} \\ 0 & 2b_{21} + 5b_{22} \end{bmatrix}$$

No caso particular das matrizes quadradas de ordem 2, usaremos o seguinte critério<sup>2</sup> para determinar se a matriz é ou não invertível.

A matriz quadrada  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  é invertível se e só se:  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ .

O processo de obtenção da matriz inversa de uma matriz quadrada (invertível) será apresentado adiante. Iremos, para já, recorrer ao GeoGebra como ferramenta algébrica que disponibiliza um conjunto de comandos para operar com matrizes. Em particular, utilizaremos o comando **MatrizInversa(<Matriz>)**.



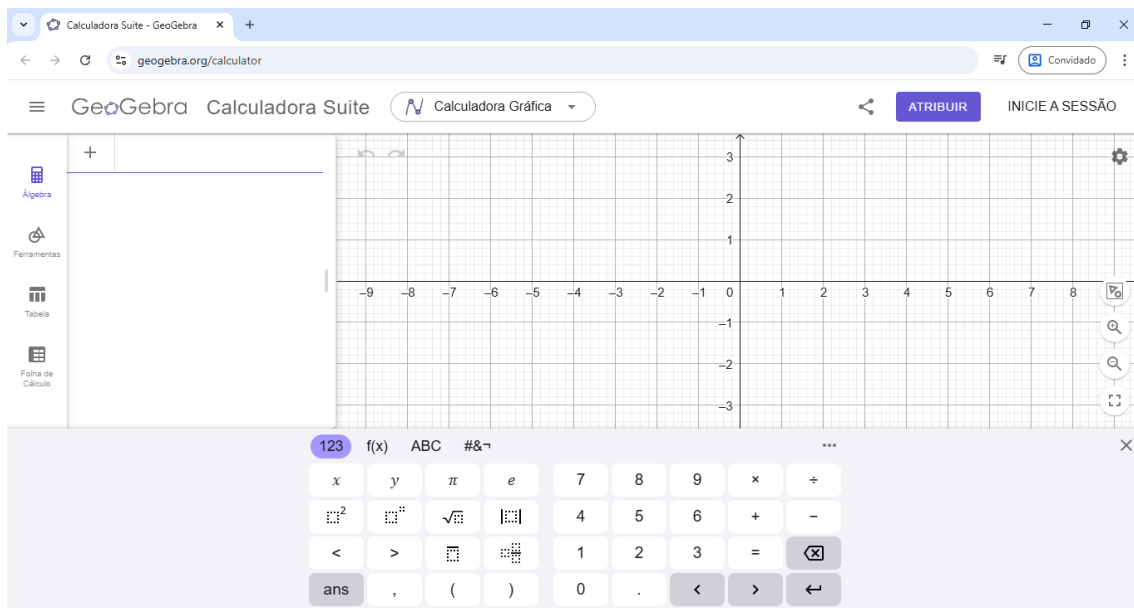
### Atividade prática com tecnologia

Abrindo a Calculadora Gráfica do GeoGebra Suite

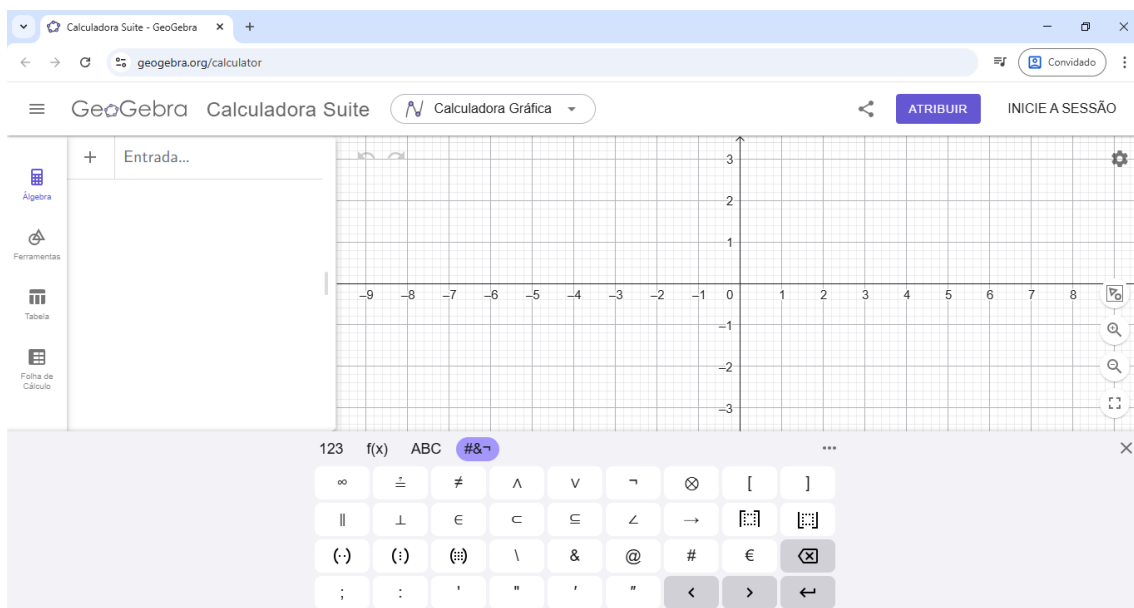
(<https://www.geogebra.org/calculator>) teremos uma janela de trabalho como mostra a figura seguinte:

---

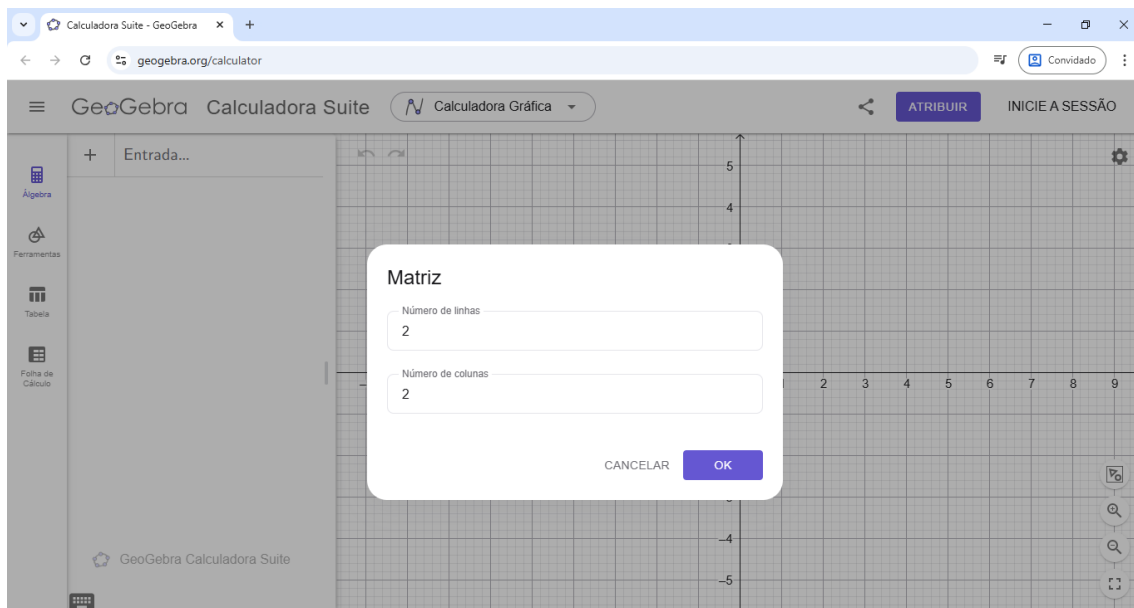
<sup>2</sup> No caso da matriz de ordem 2, a expressão  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  dá o valor do *determinante* da matriz,  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Embora a definição do determinante de uma matriz quadrada não seja objeto do nosso estudo, tem-se que uma matriz quadrada de ordem  $n$  é invertível se e só se o valor do seu determinante é diferente de zero.



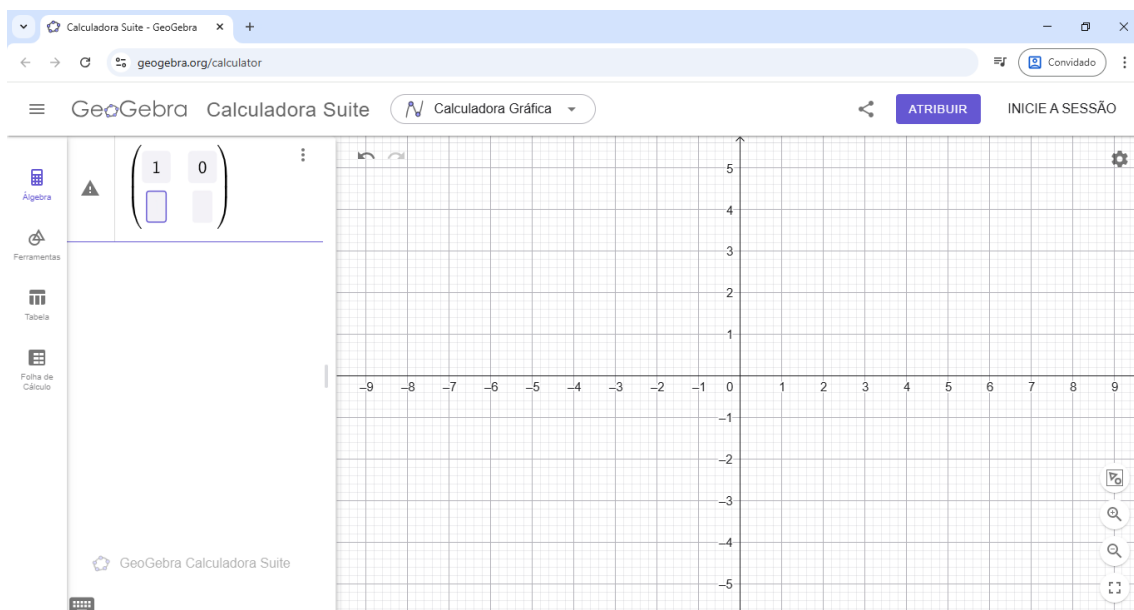
Se o nosso objetivo for criar uma matriz de ordem 2, devemos, no teclado virtual selecionar a opção do teclado para caracteres especiais, e depois o botão de matrizes, como se indica na figura seguinte:



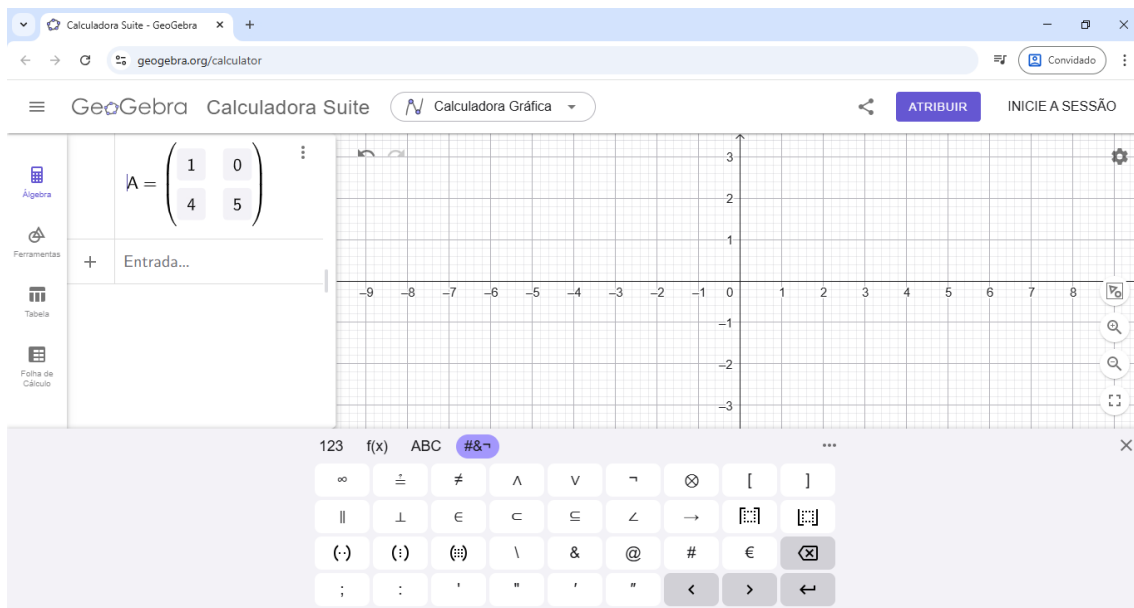
Desta forma, será apresentada uma janela para selecionar a dimensão da matriz, onde devemos inserir o número de linhas e de colunas.



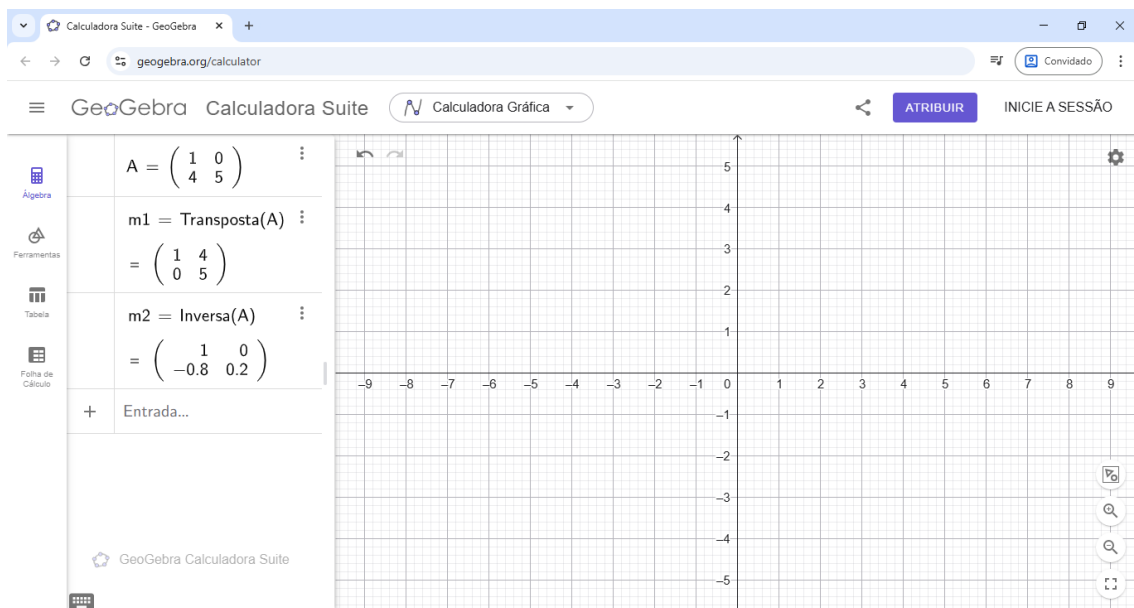
Após a definição da dimensão da matriz, esta surgirá na janela algébrica com espaços para preencher para cada elemento da matriz:



Após fazermos o preenchimento de todos os elementos, a matriz surge automaticamente com a designação "m1", que poderemos renomear, por exemplo, com o nome A.



Para obter o resultado de operações com a matriz, devemos escrever a instrução correspondente na folha algébrica, “Transposta(A)” para obter a matriz Transposta de A e “Inversa(A)” para obter a matriz inversa de A.



Podemos agora alterar as entradas da matriz A e indagar o que ocorre, quando:

- i) A matriz A é uma matriz diagonal.
- ii) A matriz A é uma matriz escalar.
- iii) A matriz A tem uma única entrada igual a 0.
- iv) Uma das linhas (colunas) da matriz A é múltipla da outra linha (coluna).



## Tarefa 1.4. Invertibilidade de matrizes



Imagem obtida de: [https://www.flaticon.com/br/icone-gratis/u-turno\\_18034396](https://www.flaticon.com/br/icone-gratis/u-turno_18034396) criada por Muhammad Atho'

Use o GeoGebra para estabelecer uma conjectura relativamente a cada uma das seguintes matrizes.

1. Para que valores de  $a$  será invertível a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$ ?
2. Para que valores de  $a$  será invertível a matriz  $A = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ ?
3. Para que valores de  $a$  será invertível a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & a+2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ ?

---

### *Propriedades das operações envolvendo a matriz inversa*

Sendo  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ , invertíveis, e sendo  $k$  um escalar não nulo, verificam-se as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (Nota: a matriz inversa do produto é o produto das matrizes inversas pela ordem contrária)

### **1.6. Matrizes elementares e o cálculo da matriz inversa**

Chamamos *matriz elementar* a uma matriz quadrada que resulta da aplicação de uma única *operação elementar* sobre as linhas da matriz identidade. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são as seguintes:

- Troca entre duas linhas
- Multiplicação de uma linha por um escalar  $\alpha \neq 0$
- Soma de um múltiplo de uma linha com outra linha

No caso das matrizes quadradas de  $2 \times 2$ , temos as seguintes matrizes elementares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos olhar para uma matriz elementar como uma matriz que provoca o efeito de executar uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz  $A_{m \times n}$ . De facto, sendo  $E_{m \times m}$  uma matriz elementar resultante de uma certa operação elementar sobre as linhas da identidade  $I_m$ , então o produto  $EA$  será uma matriz de dimensão  $m \times n$  igual à matriz obtida quando se aplica a mesma operação elementar sobre as linhas da matriz  $A$ . O exemplo seguinte ilustra esta afirmação.

Consideremos a matriz  $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ .

Seja  $E$  a matriz elementar de ordem 2 que resulta de somar à linha 2 o resultado da multiplicação da linha 1 pelo número 4 (a operação elementar pode ser abreviada assim:  $4L_1 + L_2 \rightarrow L_2$  ou  $L'_2 = 4L_1 + L_2$ ). A matriz elementar será, então:

$$E_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dado que se efetuou a operação elementar } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto  $EA$ , tem-se:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como se verifica, a multiplicação de  $A$  pela matriz elementar, **à esquerda de  $A$** , leva à matriz que resulta da mesma operação elementar efetuada sobre as linhas da matriz  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{4L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

É importante assinalar que toda a matriz elementar de ordem  $n$  é uma matriz invertível e que a inversa de uma matriz elementar é também uma matriz elementar. Ao mesmo tempo, tem-se que toda a matriz  $A$  de ordem  $n$ , invertível, pode ser transformada na matriz  $I_n$  por meio de um número finito de operações elementares sobre a matriz  $A$ . Estes dois resultados irão permitir chegar a um método para o cálculo da matriz inversa de  $A$ .

Retomando o exemplo anterior, iremos transformar a matriz  $A$ , efetuando operações elementares sobre linhas, nas sucessivas matrizes, com o objetivo de chegar à matriz  $I_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{4L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_2 + L_1 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se observa, foram realizadas três operações elementares sobre a matriz  $A$ . O resultado destas operações elementares pode ser obtido, multiplicando a matriz  $A$ , *sempre à esquerda*, pela correspondente matriz elementar, como se segue:

$$E_3 E_2 E_1 A = I_2$$

Assim, representando as matrizes elementares, tem-se:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma mais geral, o que aqui concluímos é válido para qualquer matriz  $A_{n \times n}$  invertível. Uma matriz de ordem  $n$ , invertível, pode ser transformada na matriz  $I_n$  por meio de operações elementares sobre linhas e é garantida a existência de uma sequência<sup>3</sup> de matrizes elementares correspondentes,  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , tais que:

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n$$

Como foi dito antes, toda a matriz elementar é invertível pelo que o produto de matrizes elementares é também invertível. Da igualdade anterior retira-se que a matriz  $A$  é a inversa do produto de matrizes elementares, ou seja, é igual a  $(E_k \dots E_2 E_1)^{-1}$ .

$$(E_k \dots E_2 E_1) A = I_n \Leftrightarrow A = (E_k \dots E_2 E_1)^{-1}$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Assim, a matriz  $A$  pode ser obtida como um produto de matrizes elementares (correspondentes a operações elementares sobre a matriz identidade). Note-se que tais matrizes elementares resultam das operações elementares inversas das operações que levam a matriz  $A$  a transformar-se na matriz  $I_n$ . As operações elementares e as respectivas inversas são resumidas na tabela seguinte:

Operação elementar	Operação elementar inversa
Troca da linha $i$ com a linha $j$	Troca da linha $j$ com a linha $i$
Multiplicação da linha $i$ por $\alpha \neq 0$	Multiplicação da linha $i$ por $\frac{1}{\alpha}$
Soma da linha $i$ multiplicada por $\alpha$ com a linha $j$	Soma da linha $i$ multiplicada por $-\alpha$ com a linha $j$

Retomando o exemplo anterior, iremos verificar que se pode obter a matriz  $A$  como um produto de matrizes elementares. Para isso, representamos as operações

---

<sup>3</sup> Note-se que a sequência de matrizes elementares não é única, uma vez que existem diferentes possibilidades de aplicação das operações elementares sobre as linhas de uma matriz de modo a chegar à matriz identidade.

inversas (que se efetuam sobre a matriz identidade) por baixo das operações que são realizadas sobre a matriz  $A$ .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xrightarrow{4L_1+L_2 \rightarrow L_2} & \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2} & \xrightarrow{2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \xleftarrow{-4L_1+L_2 \rightarrow L_2} & \xleftarrow{-2L_2 \rightarrow L_2} & \xleftarrow{-2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \end{array} \end{array}$$

Deste modo, podemos obter a matriz  $A$  como um produto de matrizes elementares:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} I_2$$

Isto é:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Finalmente, veremos que a matriz  $A^{-1}$  pode ser também obtida como um produto de matrizes elementares (correspondentes a operações elementares sobre a matriz identidade). De facto, tem-se:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Logo, fazendo a inversa em cada um dos membros da igualdade:

$$A^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1})^{-1}$$

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 = (E_k \dots E_2 E_1) I_n$$

Isto mostra que as operações elementares que transformam a matriz  $A$  na matriz identidade são as mesmas operações que transformam a matriz identidade na matriz  $A^{-1}$ . Portanto, na prática, para obtermos a matriz inversa de  $A$ , aplicando operações elementares, utilizamos um processo que executa simultaneamente as operações elementares sobre a matriz  $A$  e sobre a matriz identidade. Criamos, para o efeito, uma *matriz ampliada* da matriz  $A$ , representada por  $[A|I_n]$ , que se constrói, acrescentando as colunas da matriz identidade às colunas da matriz  $A$ . Então aplicamos operações elementares sobre a matriz ampliada até que do lado esquerdo se tenha a matriz identidade. As mesmas operações irão converter o lado direito da matriz ampliada na matriz  $A^{-1}$ , isto é, chegaremos a uma matriz com a forma  $[I_n|A^{-1}]$ . Vejamos a concretização do método, retomando o exemplo anterior.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -4 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{4L_1+L_2 \rightarrow L_2} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & 4 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ & & & & \xrightarrow{2L_2+L_1 \rightarrow L_1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -3 & -1 \\ 0 & 1 & | & -2 & -1/2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Está assim encontrada a inversa:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1/2 \end{bmatrix}$ .



## Tarefa 1.5. Produtos de matrizes elementares



Imagem obtida de: <https://www.vecteezy.com/free-photos/communication>

1. Sabe-se que foi usada a seguinte sequência de operações elementares para transformar uma matriz  $A$ , de ordem 2, na matriz  $I_2$ :

$$\begin{aligned}L_1 &\leftrightarrow L_2 \\3L_1 + L_2 &\rightarrow L_2 \\-\frac{1}{3}L_2 &\rightarrow L_2 \\-L_2 + L_1 &\rightarrow L_1\end{aligned}$$

- 1.1. Encontre a matriz  $A$ , efetuando transformações elementares sobre a matriz identidade.
- 1.2. Exprima a matriz  $A$  como um produto de matrizes elementares.

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ .

- 2.1. Encontre duas matrizes elementares,  $E_1$  e  $E_2$ , tais que:  $E_1E_2A = I_2$ .
- 2.2. Escreva a matriz  $A$  como produto de duas matrizes elementares.
- 2.3. Obtenha a matriz inversa de  $A$ , utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada,  $[A|I_2]$ .
- 2.4. Escreva a matriz  $A^{-1}$  como produto de duas matrizes elementares.



## 2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

### 2.1. Conceitos básicos

Vamos agora dar atenção ao estudo de certas funções definidas entre espaços euclidianos. Chamamos espaço euclidiano a um espaço vetorial real, de dimensão finita, munido de um produto interno. Consideraremos, em particular, o caso dos espaços euclidianos  $n$ -dimensionais,  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), munidos do produto interno usual ou euclidiano, em que se define a norma euclidiana.

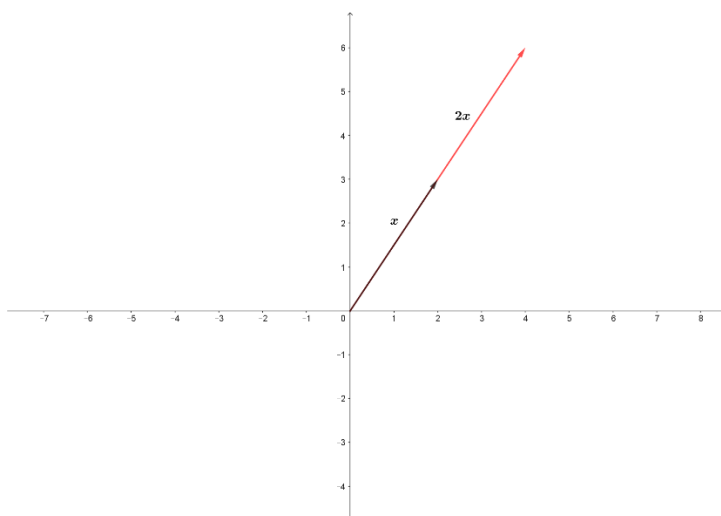
Ao falarmos de *transformação* entre espaços euclidianos, estamos a referir-nos a uma função de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^m$  em que cada vetor  $x$  do espaço  $\mathbb{R}^n$  tem como imagem um e um só vetor  $w$  do espaço  $\mathbb{R}^m$ . Em geral, as transformações são representadas por letras maiúsculas. Um exemplo simples de uma transformação  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}^2$  é a função que multiplica cada vetor do plano pelo escalar (número real) 2. A respetiva imagem será um vetor do plano com a mesma direção e o mesmo sentido e o dobro do comprimento:

$$T(x) = 2x$$

Sendo  $x$  um vetor de  $\mathbb{R}^2$ , podemos escrever  $x = (x_1, x_2)$ , considerando as coordenadas cartesianas do vetor. Assim, a transformação  $T$  pode ser representada da seguinte forma:

$$T(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$$

Na figura, pode observar-se a imagem do vetor  $x = (2,3)$ , por meio da transformação anterior, que é o vetor  $2x = (4,6)$ .



Interessa-nos, agora, introduzir uma classe de transformações que se designam por *transformações matriciais*. Uma transformação matricial está associada a uma determinada matriz  $A$  e, como tal, é geralmente designada por  $T_A$ .

Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  e seja  $x$  um vetor coluna (matriz coluna) de  $\mathbb{R}^n$ , então o produto  $Ax$  é um vetor coluna de  $\mathbb{R}^m$ . Assim, define-se a transformação matricial associada à matriz  $A_{m \times n}$  da seguinte forma:

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$T_A(x) = Ax$$

No caso em que a matriz  $A$  é quadrada de ordem  $n$ , então a transformação matricial transforma vetores de  $\mathbb{R}^n$  em vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Nesse caso, a transformação matricial designa-se por *operador* sobre  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2. Definição de transformação linear

Define-se uma *transformação linear* como sendo uma transformação que satisfaz duas condições: homogeneidade e aditividade. Assim, diz-se que  $T$  é uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  quando, para quaisquer vetores  $u$  e  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  e qualquer escalar  $k$ , se verifica:

$$\text{i) } T(ku) = kT(u) \quad (\text{homogeneidade})$$

$$\text{ii) } T(u + v) = T(u) + T(v) \quad (\text{aditividade})$$

Quando a transformação linear é de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , recebe o nome de *operador linear* sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Vejamos, como exemplo, o operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$  dado por:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

São verificadas as duas condições da definição, como se mostra a seguir, para quaisquer vetores  $u$  e  $v$  de  $\mathbb{R}^2$  e qualquer escalar  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} T(ku) &= T(ku_1, ku_2) = (ku_1 + ku_2, ku_1 - ku_2) = (k(u_1 + u_2), k(u_1 - u_2)) = \\ &= k(u_1 + u_2, u_1 - u_2) = kT(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1 + v_1 + u_2 + v_2, u_1 + v_1 - u_2 - v_2) = \\ &= (u_1 + u_2, u_1 - u_2) + (v_1 + v_2, v_1 - v_2) = T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Uma importante propriedade de qualquer transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  é o facto de transformar o vetor nulo de  $\mathbb{R}^n$  no vetor nulo de  $\mathbb{R}^m$ , isto é, sendo  $T$  uma transformação linear, tem-se:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Existe uma relação fundamental entre as transformações matriciais e as transformações lineares. De facto, toda a transformação matricial é uma transformação linear e, reciprocamente, qualquer transformação linear  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  pode ser associada, de forma única, a uma transformação matricial  $T_A$ . Por outras

palavras, dada uma transformação linear  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  existe uma única matriz  $A_{m \times n}$  tal que  $T(x) = Ax$ .

Veremos como obter a matriz  $A_{m \times n}$  de uma transformação linear e usaremos, como exemplo, o caso da transformação linear considerada anteriormente. Para isso, importa recordar que as coordenadas cartesianas de um vetor de  $\mathbb{R}^n$  são as componentes desse vetor, expresso na base canónica, que é uma base ortonormada, como se sabe. A base canónica do espaço  $\mathbb{R}^n$  é formada pelos vetores:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Os mesmos vetores podem ser escritos como vetores colunas, isto é:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diremos, então, que a matriz canónica (ou standard),  $A_{m \times n}$ , de uma transformação linear  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  é a matriz cujas colunas são as imagens dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , expressas na base canónica de  $\mathbb{R}^m$ . Tem-se, pois:

$$A_{m \times n} = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n)]$$

Assim, retomando o exemplo da transformação linear de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , dada pela expressão algébrica  $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ , podemos obter facilmente a transformação matricial associada. Iremos calcular as imagens  $T(e_1)$  e  $T(e_2)$  e escrevê-las como colunas da matriz  $A_{2 \times 2}$ .

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1 + 0, 1 - 0) = (1, 1)$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1) = (1, -1)$$

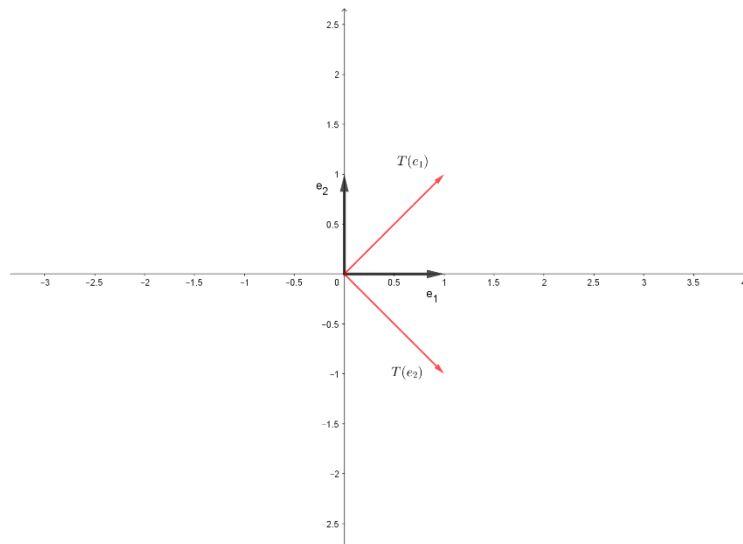
Então, obtemos a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e a transformação matricial fica definida:

$$T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$T_A(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Na figura seguinte está exemplificada a transformação matricial anterior, onde se representam os vetores da base canónica,  $e_1$  e  $e_2$ , e os respetivos transformados.



Como se espera, a transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  dada por  $T_0(x) = 0x = 0$ , que transforma qualquer vetor de  $\mathbb{R}^n$  no vetor nulo de  $\mathbb{R}^m$ , está associada à matriz nula de dimensão  $m \times n$ . A essa transformação dá-se o nome de transformação linear nula.

É de salientar que uma transformação linear  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  fica completamente determinada se forem conhecidas as imagens dos vetores de uma base de  $\mathbb{R}^n$ .

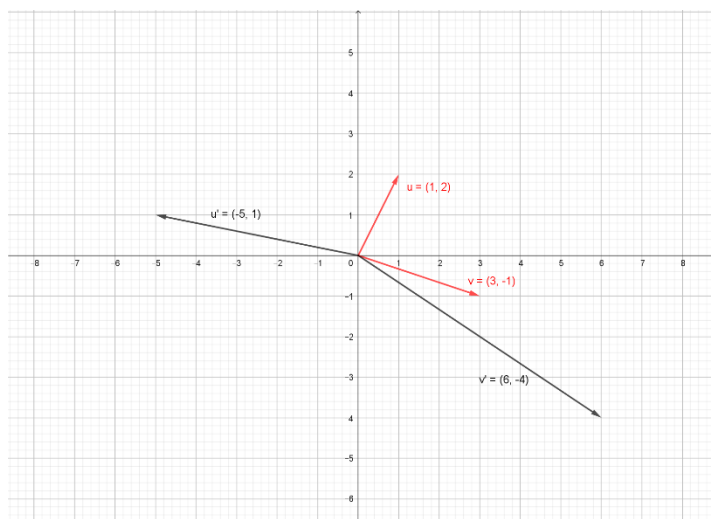
Consideremos então o caso de uma transformação linear  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , em que se conhecem os transformados de dois vetores não colineares de  $\mathbb{R}^2$ . Com essa informação, como se poderá encontrar a matriz canónica da transformação linear (bem como a sua expressão algébrica)? Começemos por recordar que quaisquer dois vetores não colineares de  $\mathbb{R}^2$  formam uma base. Como já referido, garante-se que a transformação linear fica univocamente definida se conhecermos as imagens dos vetores de uma base do espaço de partida.

Vejam os o exemplo da transformação linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Na figura seguinte podem ser visualizados os vetores que são objeto da transformação (a vermelho) e os respetivos vetores transformados (a preto).

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$



Verifica-se facilmente que os vetores a vermelho são não colineares, logo formam uma base de vetores do plano ou  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos designar os vetores que são objeto da transformação por  $u$  e  $v$ , sendo  $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Designemos ainda as imagens ou transformados por  $u'$  e  $v'$ , sendo  $u' = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $v' = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ . Pretendemos encontrar a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  que satisfaça as seguintes igualdades simultâneas:

$$A \cdot u = u', \text{ ou seja, } A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot v = v', \text{ ou seja, } A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Das igualdades anteriores, depois de efetuada a multiplicação de matrizes no membro da esquerda, resulta um sistema de 4 equações lineares a 4 incógnitas (que será possível e determinado):

$$\begin{cases} a + 2c = -5 \\ b + 2d = 1 \\ 3a - c = 6 \\ 3b - d = -4 \end{cases}$$

Note-se que, reordenando as equações, teremos as primeiras duas equações só com duas variáveis e as duas seguintes também só com duas variáveis:

$$\begin{cases} a + 2c = -5 \\ b + 2d = 1 \\ 3a - c = 6 \\ 3b - d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = -5 \\ 3a - c = 6 \\ b + 2d = 1 \\ 3b - d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Conclui-se, assim, que  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  é a matriz canónica da transformação linear<sup>4</sup>.

Dada a matriz, facilmente se obtém a expressão algébrica:

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

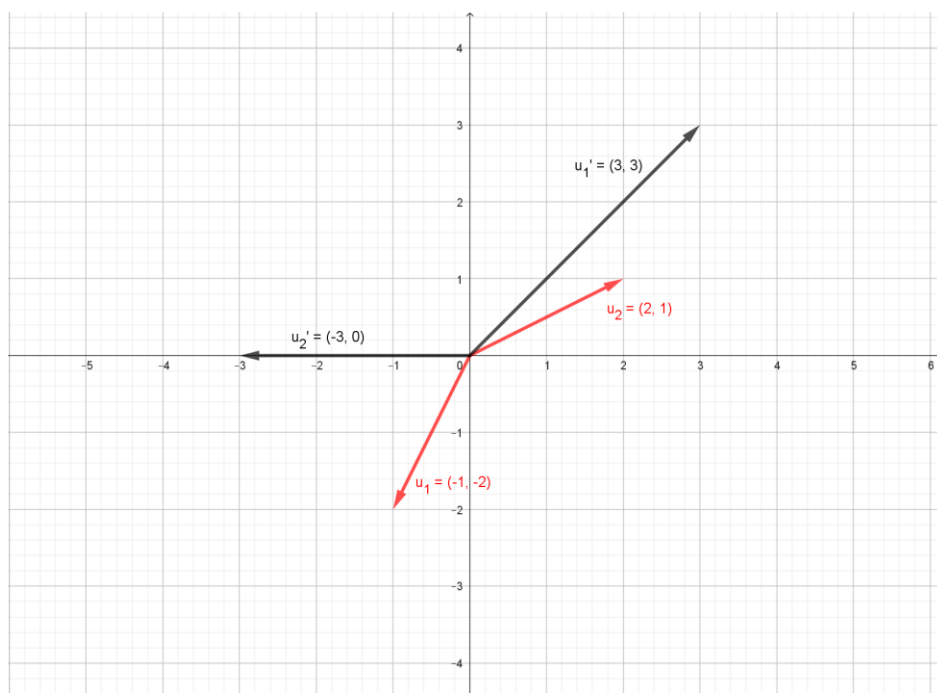
que pode ainda ser representada na forma seguinte:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, -x_1 + x_2)$$



### Tarefa 2.1. Obtenção da matriz de uma transformação linear

Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que transforma os vetores  $u_1$  e  $u_2$  nos vetores  $u'_1$  e  $u'_2$ , respetivamente, representados na figura seguinte.



<sup>4</sup> Nos dois vídeos disponíveis nos endereços indicados, poderão observar-se dois processos diferentes para obter a matriz de uma transformação linear, conhecidas as imagens dos vetores de uma base:

<https://www.youtube.com/watch?v=eFSia5OkMj4>

<https://www.youtube.com/watch?v=R2gwiqAaOdw>

1. Obtenha a representação matricial da transformação linear  $T$ .
2. Como se podem descrever os vetores do plano que são transformados, por meio de  $T$ , nos vetores colineares com o vetor  $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ? Confirme a sua resposta, utilizando o GeoGebra.

---

### 2.3. Composição de transformações lineares

Existem muitas situações em que se aplicam sequencialmente várias transformações lineares, cada uma delas transformando as imagens da sua antecessora. Estamos, pois, a falar da composição de transformações lineares.

Pode-se demonstrar que a composição de duas transformações lineares é uma transformação linear, ou seja, dadas duas transformações lineares,  $T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $T_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , a composta,  $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , é também uma transformação linear.

Associado a este resultado, está outro, igualmente importante, que diz respeito à matriz canónica da transformação linear composta.

Sendo  $A$  a matriz canónica de tipo  $m \times n$ , associada à transformação  $T_1$ , e  $B$  a matriz canónica de tipo  $p \times m$ , associada à transformação  $T_2$ , então a matriz  $BA$ , de tipo  $p \times n$ , é a matriz canónica associada à transformação composta  $T_2 \circ T_1$ . Por outras palavras, pode dizer-se, simplesmente:

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$

Veremos um exemplo concreto da composição de duas transformações lineares. Considerem-se, para isso, as transformações lineares seguintes de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ :

$$T_1(x_1, x_2) = (4x_1 - x_2, -x_1 - 5x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1 + x_2)$$

Vamos obter as matrizes canónicas, que representaremos por  $A$  e  $B$ , respetivamente:

Calculamos  $T_1(1,0) = (4, -1)$  e  $T_1(0,1) = (-1, -5)$ .

Logo:  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

Calculamos  $T_2(1,0) = (1, 2)$  e  $T_2(0,1) = (0, 1)$ .

Logo:  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Determinamos, agora, a expressão da transformação composta  $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Tal expressão será dada por:

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(x_1, x_2) &= T_2(T_1(x_1, x_2)) = T_2(4x_1 - x_2, -x_1 - 5x_2) = \\ &= (4x_1 - x_2, 8x_1 - 2x_2 - x_1 - 5x_2) = (4x_1 - x_2, 7x_1 - 7x_2)\end{aligned}$$

A matriz associada à transformação linear composta, que designaremos por  $C$ , obtém-se de forma análoga às anteriores:

$$(T_2 \circ T_1)(1,0) = (4,7) \text{ e } (T_2 \circ T_1)(0,1) = (-1, -7).$$

$$\text{Logo: } C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos confirmar o que se disse anteriormente acerca da matriz canónica da transformação linear composta, fazendo o produto  $BA$ :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Com efeito, a matriz  $BA$  é a matriz canónica associada à matriz da transformação linear composta  $T_2 \circ T_1$  (ou seja,  $T_B \circ T_A = T_{BA}$ ).

## 2.4. Invertibilidade de operadores lineares

Dando particular atenção aos operadores lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , analisaremos em seguida o que se pode afirmar sobre um operador linear quando este é uma transformação *bijetiva*.

É claro que nem todos os operadores lineares são transformações bijetivas, como se pode constatar facilmente, pensando no exemplo do operador linear nulo. Porém, há uma característica interessante dos operadores lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  que pode ser expressa da seguinte forma: qualquer operador linear sobre  $\mathbb{R}^n$  ou é uma transformação bijetiva ou nem é injetiva nem sobrejetiva.

São equivalentes as seguintes afirmações relativas a um operador linear  $T_A$  sobre  $\mathbb{R}^n$  que se diz invertível:

- A matriz  $A_{n \times n}$  pode ser transformada na matriz  $I_n$  por meio de operações elementares sobre linhas.
- A matriz  $A_{n \times n}$  pode ser expressa como produto de matrizes elementares.
- A matriz  $A_{n \times n}$  é invertível.
- $T_A$  é uma transformação injetiva.
- $T_A$  é uma transformação sobrejetiva.
- Existe um único operador linear  $T_A^{-1}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que:  
 $(T_A^{-1} \circ T_A)(x) = (T_A \circ T_A^{-1})(x) = x$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$ .

A matriz canónica do operador inverso,  $T_A^{-1}$ , é a inversa da matriz  $A$ , ou seja, podemos escrever tal relação, abreviadamente:

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$$

## 2.5. Operadores lineares e transformações geométricas

A generalidade das aplicações informáticas com que lidamos no nosso dia-a-dia utiliza a computação gráfica<sup>5</sup>. Por isso, aprender uma linguagem de computador inclui, regra geral, aprender a construir e a utilizar gráficos bidimensionais ou 2D.

Teremos agora oportunidade de explorar um pouco da matemática básica utilizada para manipular e exibir imagens gráficas, nomeadamente, como modelos aramados (*wire-framed models*). Esse tipo de imagem gráfica é composto por uma série de pontos, um conjunto de segmentos e/ou curvas que os unem, e informação sobre como preencher regiões fechadas delimitadas pelas linhas e/ou curvas. Frequentemente, as linhas curvas são aproximadas por pequenos segmentos de reta e uma figura fica definida matematicamente por uma lista de pontos. Entre os símbolos gráficos 2D mais simples estão as letras utilizadas para visualização no ecrã. Algumas letras são armazenadas como modelos aramados; as que contêm partes curvas são armazenadas mediante o recurso a fórmulas matemáticas adicionais para descrever as curvas.

Para adquirir maior familiaridade com a relação entre transformações lineares e matrizes<sup>6</sup>, iremos construir as matrizes canónicas de algumas das mais comuns transformações lineares, que têm um significado geométrico e a que também chamamos transformações geométricas.

Para tanto, será criado um catálogo<sup>7</sup> de operadores lineares sobre  $\mathbb{R}^2$ , dando destaque ao tipo de matriz associada e ao efeito geométrico do operador linear, utilizando como exemplo um modelo aramado da letra A.

### 2.5.1. Rotação de centro na origem por um dado ângulo

Seja  $\theta$  um ângulo dado e consideremos o operador  $T$  que faz a rotação com centro na origem e amplitude  $\theta$  de cada vetor  $x$  do plano.

Começemos por observar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . No exemplo da figura foi tomado  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

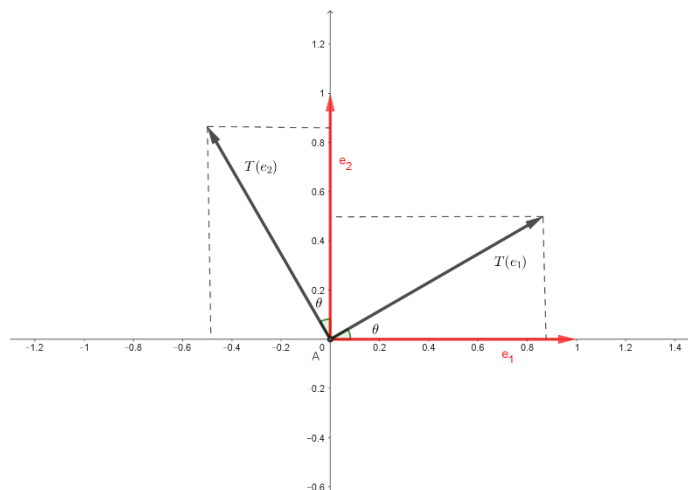
---

<sup>5</sup> Para uma introdução e informação adicional acerca de alguns dos aspetos matemáticos da computação gráfica, sugere-se o site de Harlen Batagelo e Bruno Marques, Universidade Federal do ABC, Brasil. Disponível em: <https://www.brunodorta.com.br/cg/>

<sup>6</sup> Recomenda-se o visionamento do vídeo seguinte acerca do significado geométrico de alguns operadores lineares: <https://www.youtube.com/watch?v=kYB8lZa5AuE>

<sup>7</sup> A ideia de um catálogo de operadores lineares é sugerida e concretizada em: Johnston, N. (2021). *Introduction to Linear and Matrix Algebra*. Springer.

Note-se que optámos, aqui, por não abordar as projeções ortogonais sobre um eixo mas incluímos os cisalhamentos.



Como se sabe, recorrendo à trigonometria, teremos:

$$T(e_1) = (\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{ e } T(e_2) = (-\text{sen } \theta, \cos \theta).$$

Assim sendo, a matriz canónica deste operador linear será:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

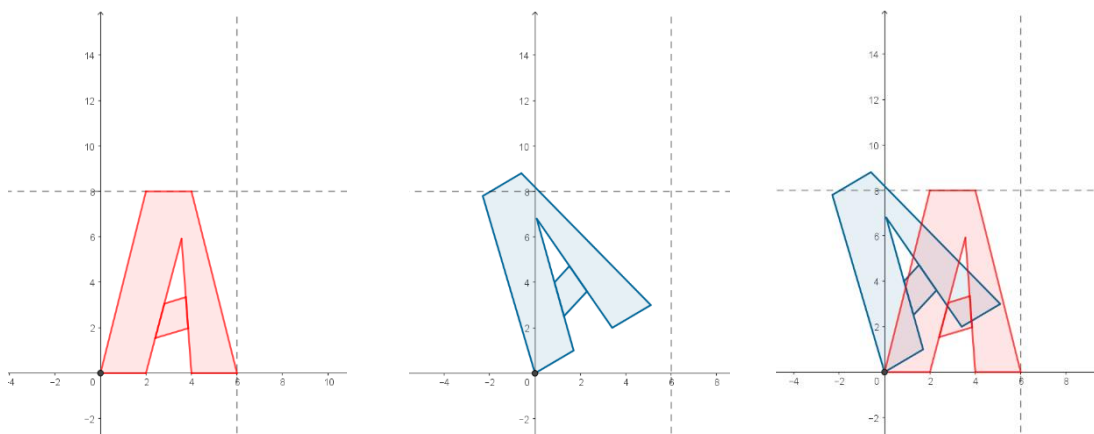
A expressão algébrica do operador linear, obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \text{sen } \theta \\ x_1 \text{sen } \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se como expressão do operador rotação de centro na origem e amplitude  $\theta$ :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \text{sen } \theta, x_1 \text{sen } \theta + x_2 \cos \theta)$$

Vejamos o efeito sobre a letra A, considerando um ângulo  $\theta$  de amplitude  $\frac{\pi}{6}$ . Estão representados: o objeto original (a vermelho), depois o seu transformado por meio da rotação (a azul) e a seguir os dois em simultâneo.



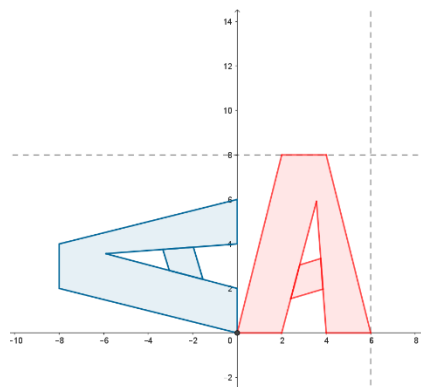
Alguns casos particulares de rotações em torno da origem correspondem aos ângulos  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  (e aos que resultam da sua soma com um múltiplo inteiro de  $2\pi$ ).

No caso da rotação de amplitude  $\theta = 0$ , é claro que estaremos perante o operador identidade.

Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , a matriz do operador linear será a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

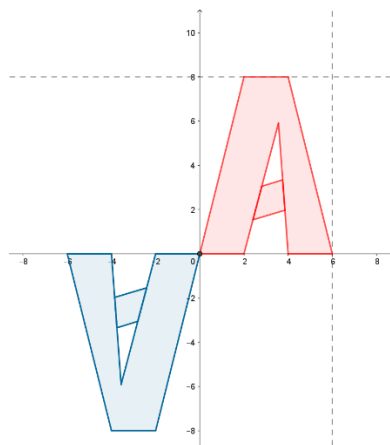
A transformação terá o efeito sobre a letra A representado na figura:



Para  $\theta = \pi$ , a matriz do operador linear será a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

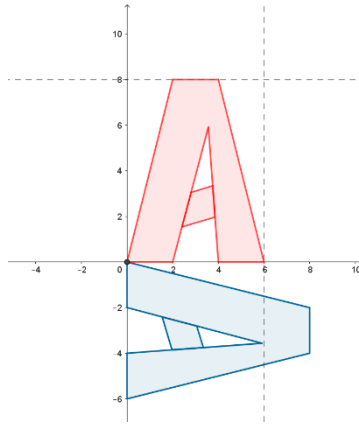
A transformação terá o efeito sobre a letra A representado na figura:



Por último, no caso de  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , a matriz do operador linear será a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teremos, neste caso, a seguinte transformação da letra A:



### 2.5.2. Reflexão relativamente a um eixo ou Simetria axial

Consideraremos agora um operador linear que faz uma reflexão dos vetores do plano relativamente a um eixo que passa pela origem. Este operador pode também ser chamado de simetria axial. Embora o eixo de simetria possa ser qualquer reta que passa pela origem, iremos aqui apenas considerar os casos dos dois eixos coordenados e da bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ).

Começemos por analisar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .

1) Simetria relativamente ao eixo dos  $xx$

Tem-se  $T(e_1) = (1,0)$  e  $T(e_2) = (0,-1)$ . Assim sendo, obtém-se a seguinte a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear, será a seguinte:

$$T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

2) Simetria relativamente ao eixo dos  $yy$

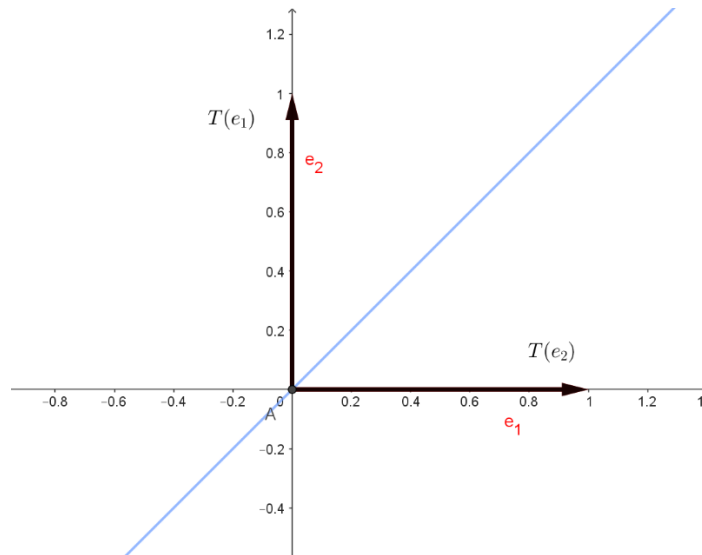
Tem-se  $T(e_1) = (-1,0)$  e  $T(e_2) = (0,1)$ . Assim sendo, tem-se a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear, será a seguinte:

$$T(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

3) Simetria relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ):



Como mostra a figura anterior, tem-se  $T(e_1) = (0,1)$  e  $T(e_2) = (1,0)$ . Assim sendo, resulta a matriz canónica deste operador linear:

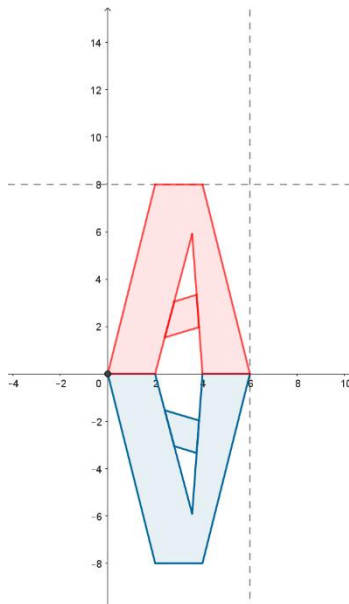
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear será a seguinte:

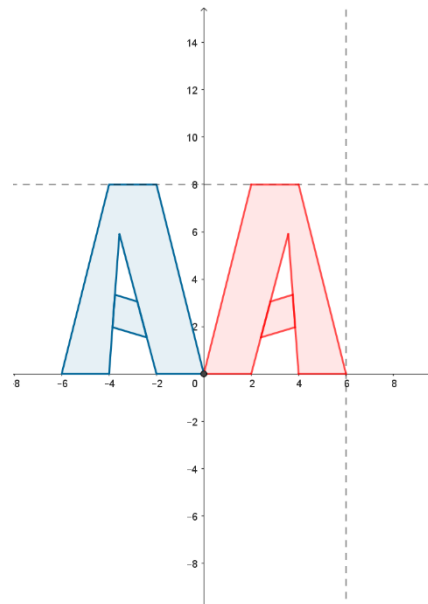
$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

Vejamos o efeito sobre a letra A, das simetrias axiais aqui consideradas.

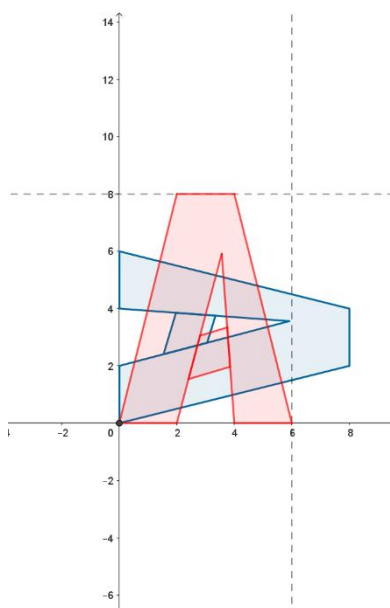
**Simetria relativamente ao eixo dos xx**



**Simetria relativamente ao eixo dos yy**



### Simetria relativamente ao eixo $y = x$



### 2.5.3. Mudança de escala

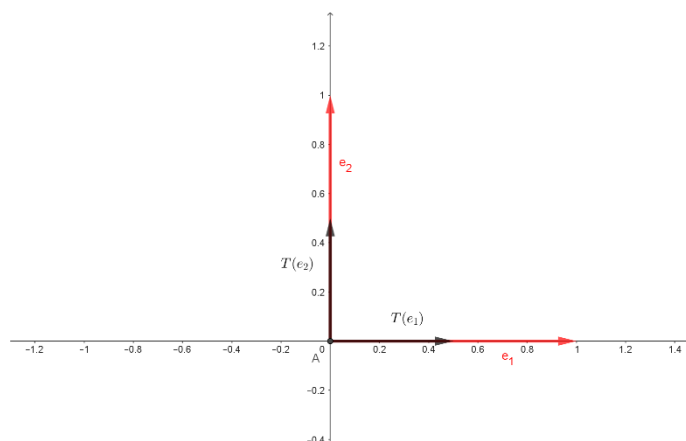
A mudança de escala é um tipo de transformação linear que faz com que um objeto aumente ou diminua de tamanho de acordo com fatores de escala aplicados às coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ . Assim, falamos de *mudança de escala uniforme* por um fator  $k$  ( $k > 0$ ) quando ambas as coordenadas são alteradas pelo mesmo fator; dizemos que há uma *mudança de escala não uniforme* por um fator  $k$  ( $k > 0$ ) se apenas uma das coordenadas é alterada pelo fator de escala.

Na mudança de escala uniforme, distinguiremos 2 casos (se  $k = 1$  teremos o operador identidade e a escala não se altera):

1)  $0 < k < 1$

Diremos que se trata de uma *redução uniforme* por um fator  $k$ .

Começemos por observar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , em que se usou o fator  $k = 1/2$ .



Teremos então  $T(e_1) = (k, 0)$  e  $T(e_2) = (0, k)$ .

Assim, a matriz canónica deste operador linear será:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

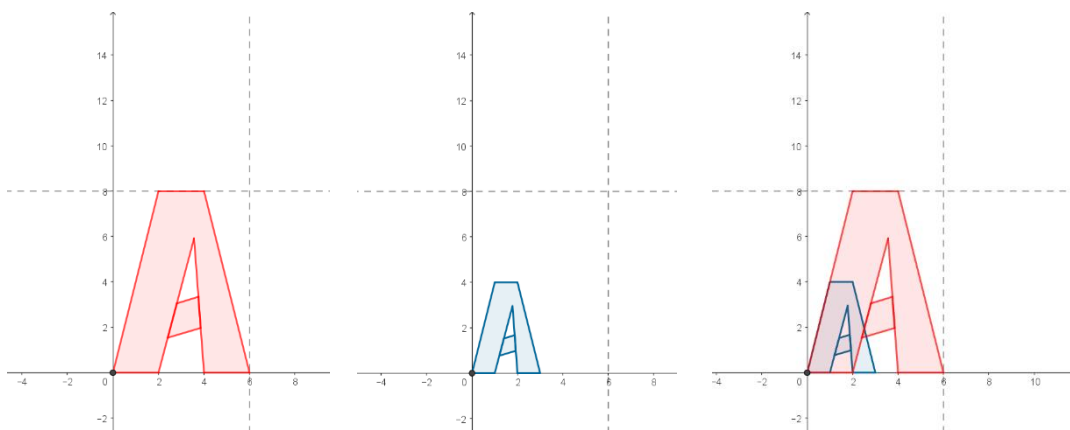
A expressão algébrica do operador linear obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}$$

Por fim, tem-se como expressão do operador de redução uniforme:

$$T(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2), \quad \text{com } 0 < k < 1$$

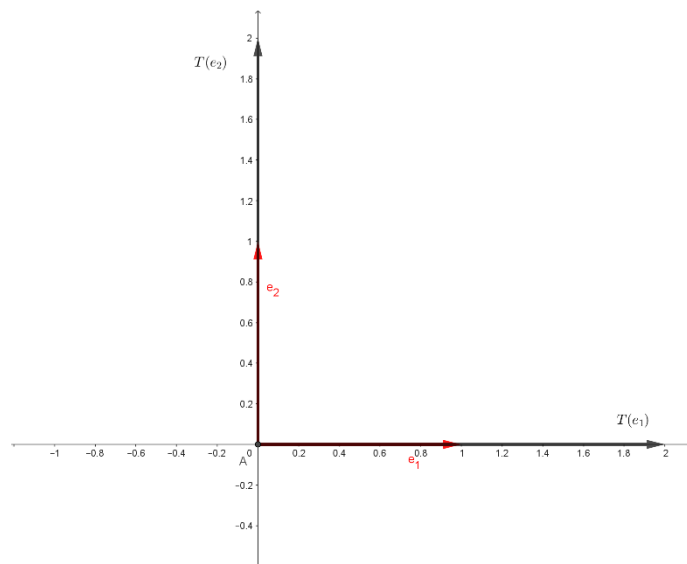
Vejamos o respetivo efeito sobre a letra A, representando o objeto original, depois o seu transformado por meio da redução ( $k = 1/2$ ) e a seguir os dois, em simultâneo.



2)  $k > 1$

Diremos que se trata de uma *ampliação uniforme* por um fator  $k$ .

Começemos por observar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , em que se usou o fator  $k = 2$ .



Teremos, então,  $T(e_1) = (k, 0)$  e  $T(e_2) = (0, k)$ .

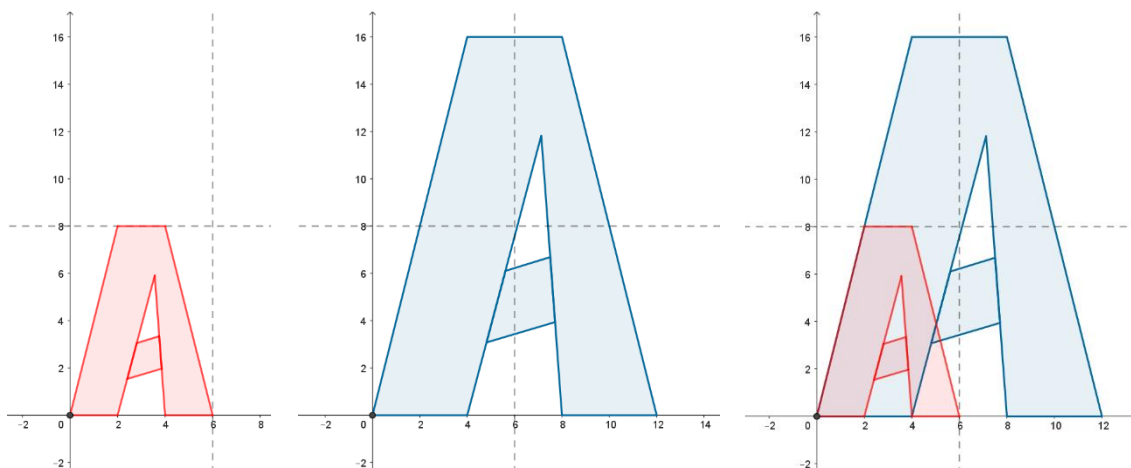
Assim, a matriz canónica deste operador linear será análoga à do caso anterior:

$$A = \begin{bmatrix} k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k \end{bmatrix}$$

A expressão do operador de ampliação uniforme é também idêntica à anterior:

$$T(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2), \quad \text{com } k > 1$$

Vejam os respetivos efeitos sobre a letra A, representando o objeto original, depois o seu transformado por meio da ampliação ( $k = 2$ ) e a seguir os dois, em simultâneo.



Consideremos agora o caso de um operador linear que aplica uma mudança de escala não uniforme. Nesse caso, haverá uma contração ou uma expansão de apenas uma das coordenadas, ou seja, uma alteração da escala apenas segundo a direção de um dos eixos coordenados (e, conseqüentemente, uma deformação).

Assim, na mudança de escala não uniforme, distinguiremos 2 casos (para  $k = 1$ , teremos o operador identidade):

### 1) Mudança de escala na direção do eixo dos $xx$ por um fator $k$

Neste caso, o fator de escala é aplicado na coordenada  $x_1$ . Se tomarmos  $0 < k < 1$ , estaremos na situação de compressão horizontal e se tomarmos  $k > 1$ , estaremos na situação de expansão horizontal.

Será, então,  $T(e_1) = (k, 0)$  e  $T(e_2) = (0, 1)$ .

Assim sendo, tem-se a seguinte a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

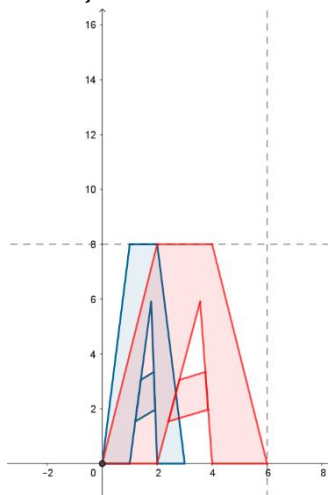
Segue-se a expressão do operador de mudança de escala na direção do eixo dos  $xx$ :

$$T(x_1, x_2) = (kx_1, x_2)$$

Veremos a seguir o efeito sobre a letra A da mudança de escala na direção horizontal, em que ilustraremos os diferentes casos, conforme os valores de  $k$ .

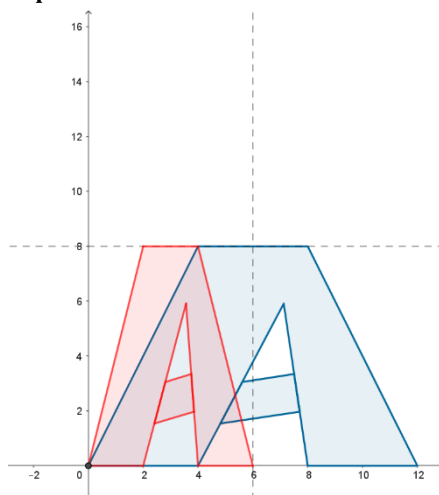
$0 < k < 1$

**Contração horizontal**



$k > 1$

**Expansão horizontal**



### 1) Mudança de escala na direção do eixo dos $yy$ por um fator $k$

Neste caso, o fator de escala é aplicado na coordenada  $x_2$ . Se tomarmos  $0 < k < 1$ , estaremos na situação de compressão vertical e se tomarmos  $k > 1$ , estaremos na situação de expansão vertical (para  $k = 1$ , teremos o operador identidade).

Será, então,  $T(e_1) = (1, 0)$  e  $T(e_2) = (0, k)$ .

Assim sendo, tem-se a seguinte a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}$$

Segue-se a expressão do operador de mudança de escala na direção do eixo dos  $yy$ :

$$T(x_1, x_2) = (x_1, kx_2)$$

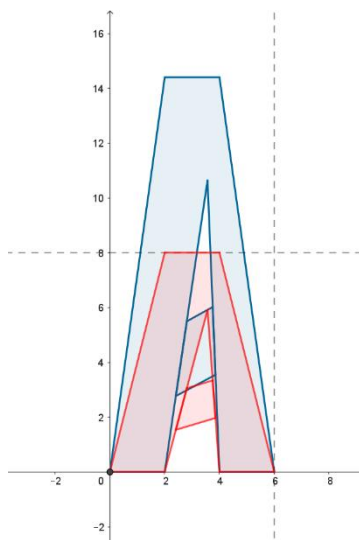
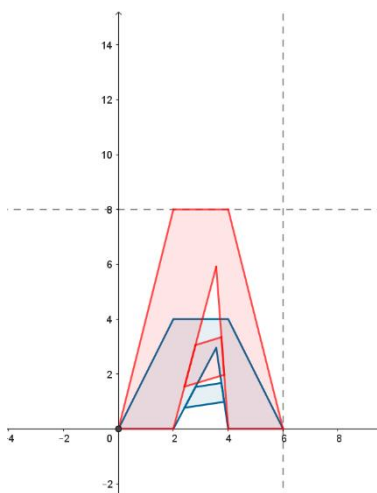
Veremos a seguir o efeito sobre a letra A da mudança de escala na direção vertical, em que ilustraremos diferentes casos, conforme os valores de  $k$ .

$$0 < k < 1$$

$$k > 1$$

**Contração vertical**

**Expansão vertical**



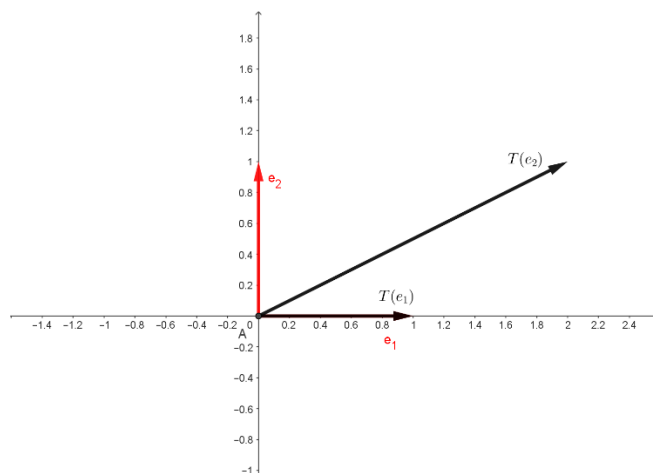
#### 2.5.4. Cisalhamento

O cisalhamento é um tipo de operador linear que “inclina” um vetor segundo a direção horizontal ou segundo a direção vertical, por um certo fator, que se designa por fator de cisalhamento. Este operador transforma retângulos em paralelogramos. A transformação realizada por um cisalhamento consiste em adicionar a uma das coordenadas do vetor um múltiplo da outra coordenada.

Distinguiremos os casos do cisalhamento horizontal e do cisalhamento vertical. Como veremos, o cisalhamento horizontal não altera a altura de um objeto (mantém-se a ordenada do vetor) e o cisalhamento vertical não altera a largura do objeto (mantém-se a abcissa do vetor).

### 1) Cisalhamento horizontal (na direção do eixo dos $xx$ ) por um fator $k$

Começemos por observar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , em que se usou um fator  $k = 2$  de cisalhamento horizontal.



Como se pode observar na figura anterior, a imagem do vetor  $e_1$  é igual a  $e_1$ , mas a imagem do vetor  $e_2$  mostra que a abcissa sofreu um acréscimo ( $k$  vezes o valor da coordenada  $x_2$ ) e que a ordenada não se alterou.

Será, então,  $T(e_1) = (1, 0)$  e  $T(e_2) = (k, 1)$ .

Assim sendo, tem-se a seguinte a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & k \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & k \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + kx_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

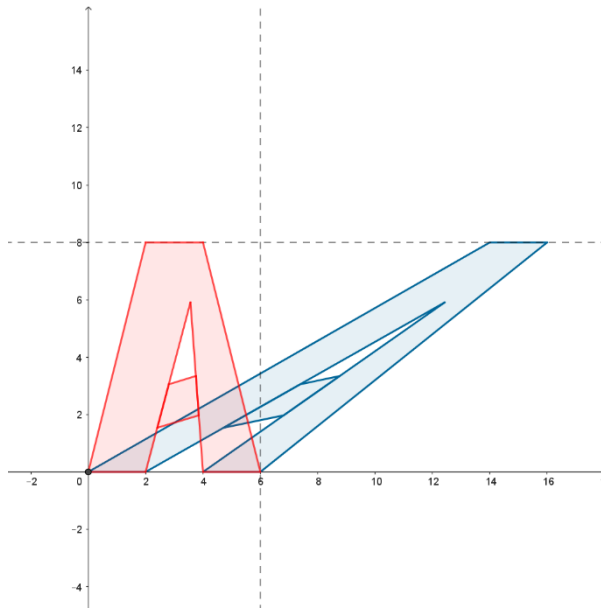
Portanto, tem-se como expressão do operador de cisalhamento horizontal:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, x_2)$$

Veremos a seguir o efeito sobre a letra A de operadores de cisalhamento horizontal, em que ilustraremos os casos de  $k > 0$  e  $k < 0$ .

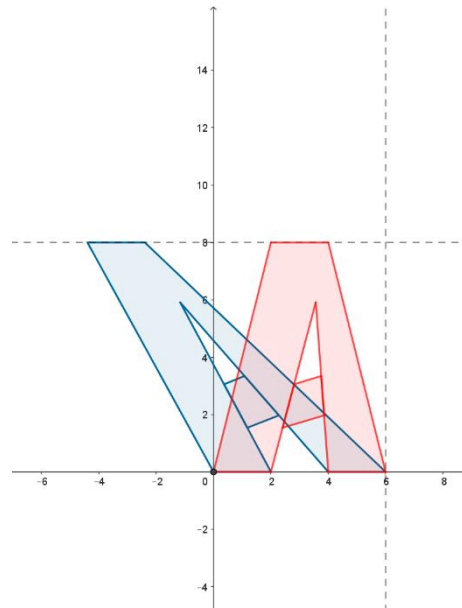
$k > 0$

Cisalhamento horizontal



$k < 0$

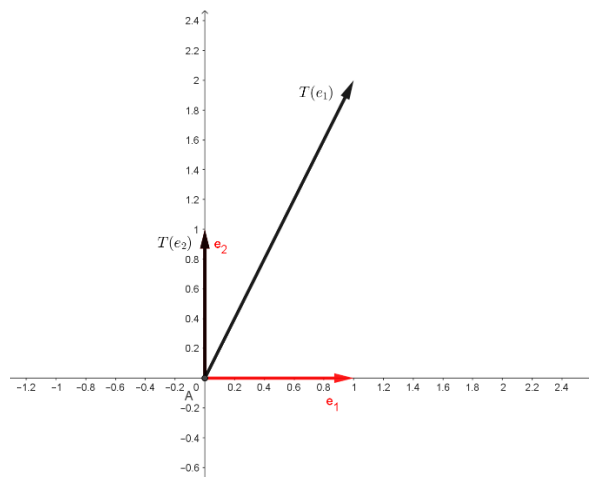
Cisalhamento horizontal



2) Cisalhamento vertical (na direção do eixo dos  $Y$ ) por um fator  $k$

Começamos por observar os transformados dos vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , em que se usou um fator  $k = 2$  de cisalhamento vertical.

Como se pode ver na figura seguinte, a imagem do vetor  $e_2$  é igual a  $e_2$ , mas a imagem do vetor  $e_1$  mostra que a abcissa não se alterou e que a ordenada sofreu um acréscimo ( $k$  vezes o valor da coordenada  $x_1$ ).



Será, então,  $T(e_1) = (1, k)$  e  $T(e_2) = (0, 1)$ .

Assim sendo, tem-se a seguinte a matriz canónica deste operador linear:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

A expressão algébrica do operador linear obtém-se pelo produto matricial:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

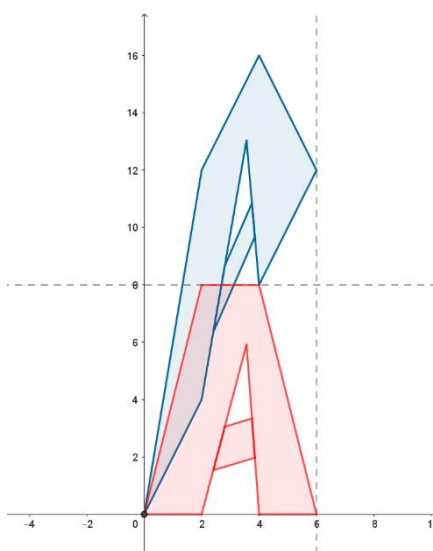
Portanto, tem-se como expressão do operador de cisalhamento na direção vertical:

$$T(x_1, x_2) = (x_1, kx_1 + x_2)$$

Veremos a seguir o efeito sobre a letra A de operadores de cisalhamento vertical, em que ilustraremos os casos de  $k > 0$  e  $k < 0$ .

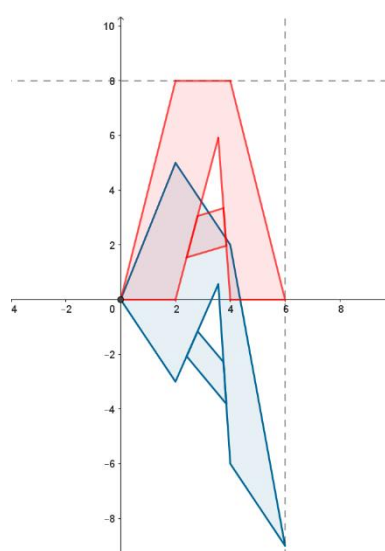
$k > 0$

**Cisalhamento vertical**



$k < 0$

**Cisalhamento vertical**



### 2.5.5. Algumas notas sobre os operadores lineares

Salientam-se agora algumas conclusões que, do ponto de vista geométrico, podem ser extraídas acerca dos operadores lineares acima apresentados.

Uma primeira nota refere-se ao efeito que os operadores considerados produzem sobre os ângulos e sobre as normas dos vetores. Reconhecemos que as rotações e as reflexões relativamente a um eixo preservam os ângulos e as normas. As mudanças de escala uniformes preservam os ângulos, mas não preservam as normas. Por último, as mudanças de escala não uniformes e os cisalhamentos não preservam os ângulos nem preservam as normas.

Um operador linear  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preserva a norma, isto é, tal que  $\|T(x)\| = \|x\|$ , é chamado de *operador ortogonal* ou *isometria*. Pode demonstrar-se que um operador linear que preserva a norma também preserva os ângulos. A matriz  $A$  de um operador ortogonal verifica a condição  $A^{-1} = A^T$ . Qualquer matriz

quadrada que satisfaz essa condição (a inversa é igual à transposta) é chamada de *matriz ortogonal*.

A seguinte tabela faz uma sùmula das principais caraterísticas dos operadores lineares considerados atrás.

Operador linear sobre $\mathbb{R}^2$	Invertível	Preserva a norma	Preserva os ângulos	Ortogonal	Matriz
Identidade	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotação (de centro na origem e amplitude $\theta$ )	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Simetria axial (relativamente aos eixos coordenados e à reta $y = x$ )	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Mudança de escala uniforme ( $k > 0 \wedge k \neq 1$ )	<b>X</b>		<b>X</b>		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Mudança de escala não uniforme ( $k > 0 \wedge k \neq 1$ )	<b>X</b>				$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Cisalhamento ( $k \neq 0$ )	<b>X</b>				$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$



## Tarefa 2.2. Reconhecer a geometria dos operadores lineares



Imagem obtida de [https://br.freepik.com/vetores-gratis/ilustracao-de-digitalizacao-de-reconhecimento-ocular\\_2632393.htm](https://br.freepik.com/vetores-gratis/ilustracao-de-digitalizacao-de-reconhecimento-ocular_2632393.htm)

1. Descreva o efeito geométrico do operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$  definido por cada uma das matrizes seguintes. Observe o resultado da transformação, utilizando o *applet* disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pDU4peV5>

a)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Obtenha a matriz canónica de cada um dos operadores lineares sobre  $\mathbb{R}^2$  que efetua a transformação geométrica indicada:

a) Cisalhamento na direção do eixo dos  $xx$  pelo fator  $-1$

b) Ampliação uniforme, pelo fator 2

c) Compressão na direção do eixo dos  $yy$  pelo fator  $\frac{1}{10}$

d) Dilatação na direção do eixo dos  $yy$  pelo fator  $\frac{5}{2}$

e) Cisalhamento na direção do eixo dos  $yy$  pelo fator  $-\frac{1}{2}$

f) Reflexão relativamente ao eixo dos  $xx$

3. Obtenha a matriz canónica da composição dos operadores lineares descritos em 2, considerando que a sequência começa na (a) e termina na (f).

## 2.6. Fatorização de operadores lineares

Começemos por recordar alguns dos resultados que foram tratados na secção 1.6 relativamente à expressão de uma matriz quadrada invertível como produto de matrizes elementares da mesma ordem.

Verificámos que toda a matriz quadrada invertível pode ser obtida como produto de uma sequência finita de matrizes elementares. Sobre as matrizes elementares de ordem 2, sabemos que podem ser dos tipos a seguir indicados (com  $\alpha \neq 0$ ):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Tipo 1**      **Tipo 2**      **Tipo 3**      **Tipo 4**      **Tipo 5**

Analisando agora o efeito geométrico sobre um vetor do plano de cada um destes tipos de matrizes elementares, temos:

**Tipo 1:** representa uma reflexão relativamente ao eixo  $y = x$

**Tipo 2:** representa uma compressão/expansão horizontal (para  $\alpha > 0$ )

**Tipo 3:** representa uma compressão/expansão vertical (para  $\alpha > 0$ )

**Tipo 4:** representa um cisalhamento vertical (na direção do eixo dos  $yy$ )

**Tipo 5:** representa um cisalhamento horizontal (na direção do eixo dos  $xx$ )

Note-se ainda que nas matrizes elementares de Tipo 2 e Tipo 3, se  $\alpha < 0$ , poderemos escrever  $\alpha$  como o produto de  $-1$  por uma constante positiva  $\beta > 0$ , isto é, as matrizes poderão ser escritas na forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

Dessa forma, poderão ser fatorizadas como se segue:

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Assim, uma matriz de Tipo 2, com  $\alpha < 0$ , representa uma compressão/expansão horizontal seguida de uma reflexão relativamente ao eixo dos  $yy$ ; analogamente, uma matriz de Tipo 3, com  $\alpha < 0$ , representa uma compressão/expansão vertical seguida de uma reflexão relativamente ao eixo dos  $xx$ .

Estamos agora em condições de enunciar um resultado interessante sobre a decomposição de qualquer operador linear invertível sobre  $\mathbb{R}^2$ . Sabemos já que qualquer matriz invertível de ordem 2 se pode expressar como produto de uma sequência de matrizes elementares de ordem 2. Vimos também que cada uma das matrizes elementares de ordem 2 tem um efeito geométrico sobre os vetores de  $\mathbb{R}^2$ .

Portanto, podemos concluir o seguinte resultado:

Qualquer operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$  invertível pode ser obtido como uma composição de cisalhamentos, mudanças de escala e reflexões relativamente aos eixos coordenados e à reta  $y = x$ .

Muitas vezes, o efeito geométrico de um operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$  pode ser compreendido com mais clareza se desagregarmos diversas transformações geométricas que o operador linear está a executar de uma só vez, isto é, se exprimirmos o operador linear como uma composição de transformações mais simples cujos efeitos geométricos são conhecidos. Uma forma eficaz de alcançar essa decomposição é a factorização da matriz do operador linear como produto de matrizes elementares de ordem 2.

Vejamos o seguinte exemplo em que conhecemos a matriz do operador linear e pretendemos descrever os efeitos geométricos que o operador produz num objeto. Em particular, veremos como a silhueta de um pássaro pode ser alterada e ficar mais parecida com a silhueta de um rato!

Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$  a matriz de um operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Começemos por transformar a matriz  $A$  até obtermos a identidade de ordem 2, realizando operações elementares sobre as linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-0.4L_1+L_2 \rightarrow L_2]{\xrightarrow{0.4L_1+L_2 \rightarrow L_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2]{\xrightarrow{2L_2 \rightarrow L_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2L_2+L_1 \rightarrow L_1]{\xrightarrow{2L_2+L_1 \rightarrow L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

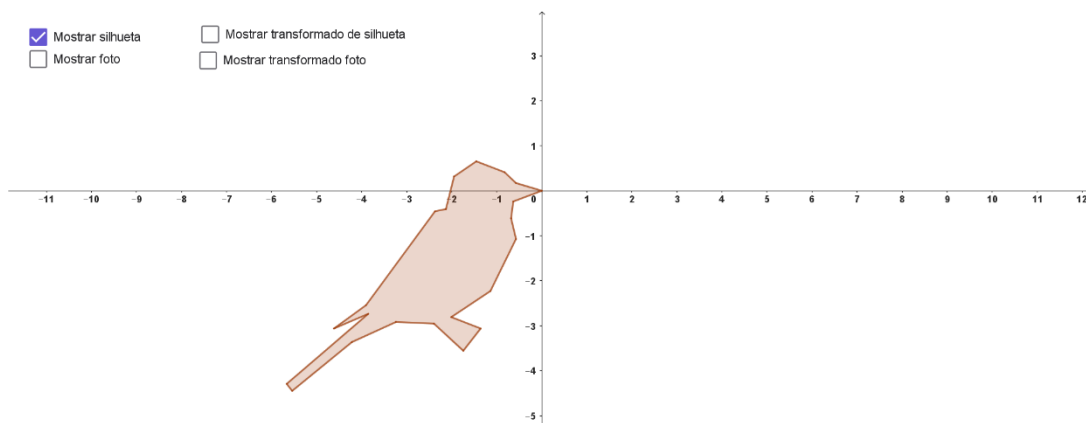
Deste modo, e considerando a ordem da multiplicação, à esquerda, das matrizes elementares, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

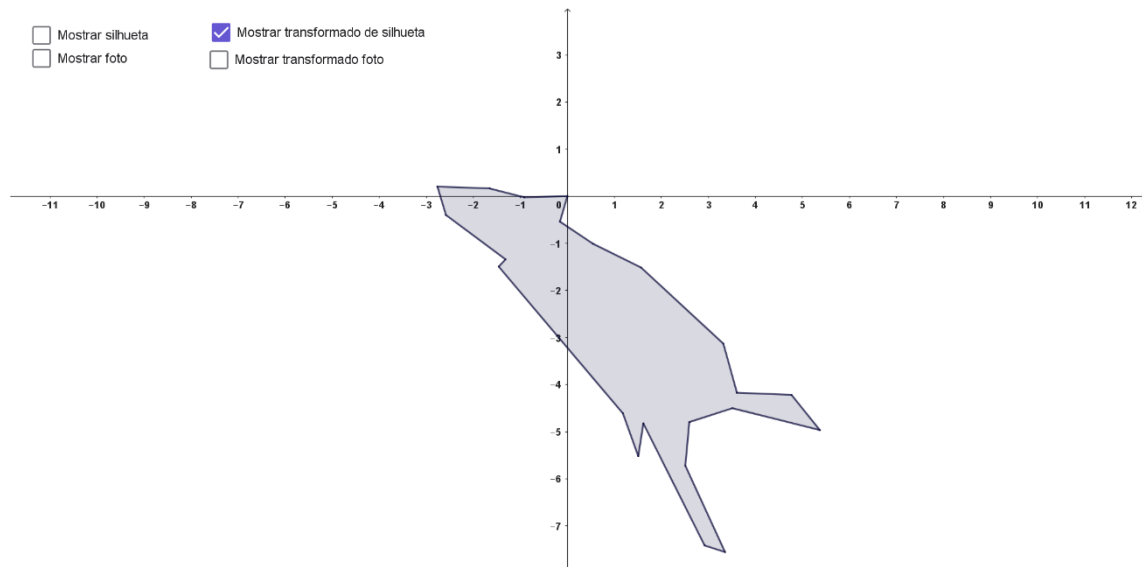
Concluimos, assim, que o operador linear pode ser obtido como a composição de um cisalhamento na direção horizontal, pelo fator  $-2$ , uma mudança de escala não uniforme, que é uma ampliação na direção do eixo dos  $yy$ , pelo fator 2, e um cisalhamento na direção vertical, pelo fator 0.4.

Ilustraremos o efeito geométrico do operador linear e também o efeito sequencial dos operadores que formam a composição.

No GeoGebra foi criado um polígono (estrutura aramada) que representa a silhueta de um pássaro (de cor castanha), conforme figura seguinte.

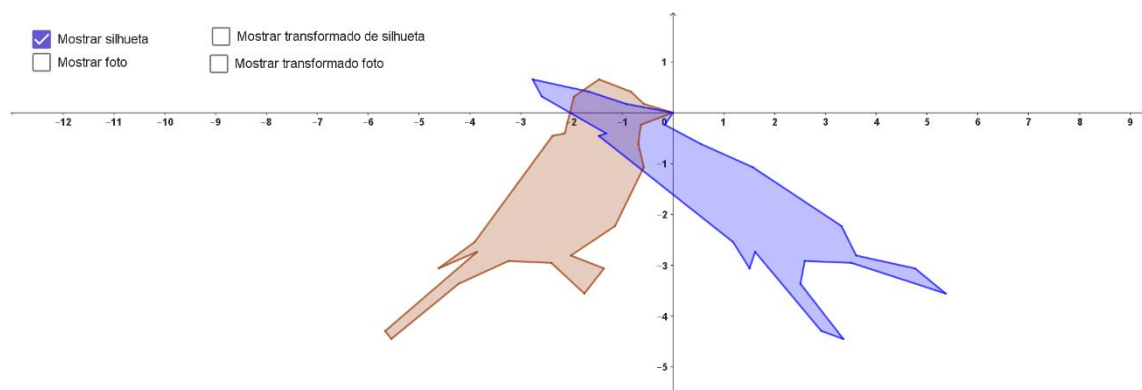


Foi aplicada a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$  ao polígono e obtida a imagem por meio do operador linear  $T_A$ , representada a cinzento. Ver figura seguinte.

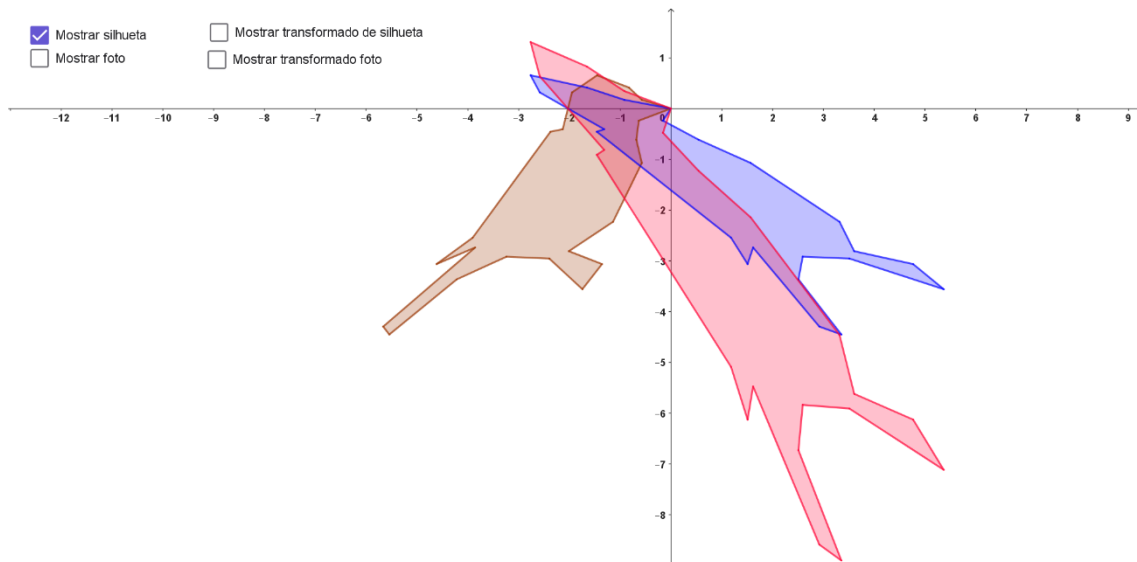


Vejamos agora o efeito da sequência de transformações lineares descritas atrás.

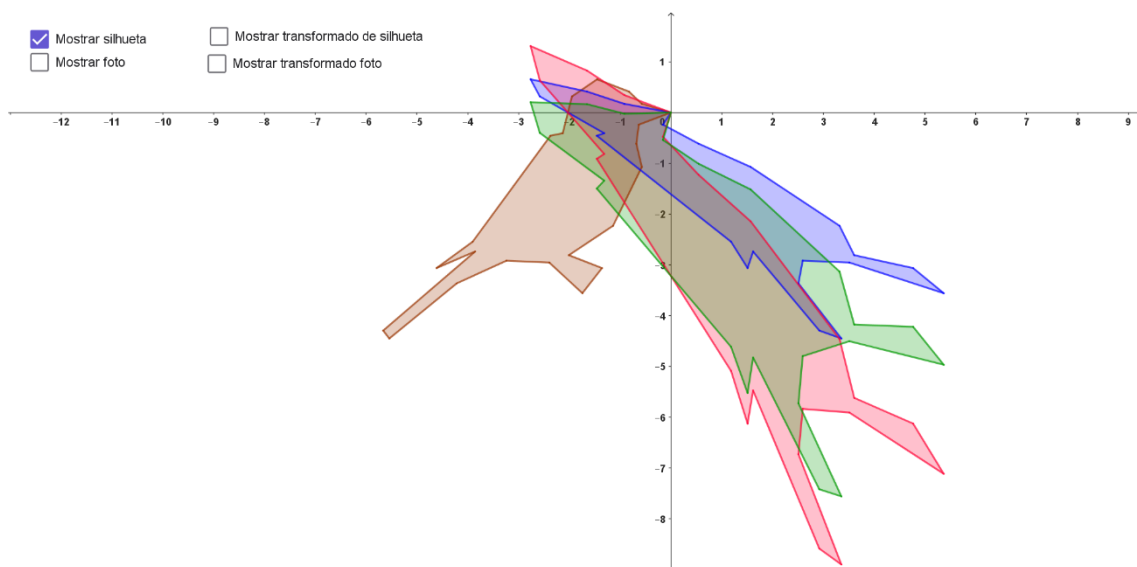
1º operador (aplicado ao polígono original): cisalhamento na direção horizontal, pelo fator  $-2$ . O transformado está colorido a azul, conforme figura seguinte.



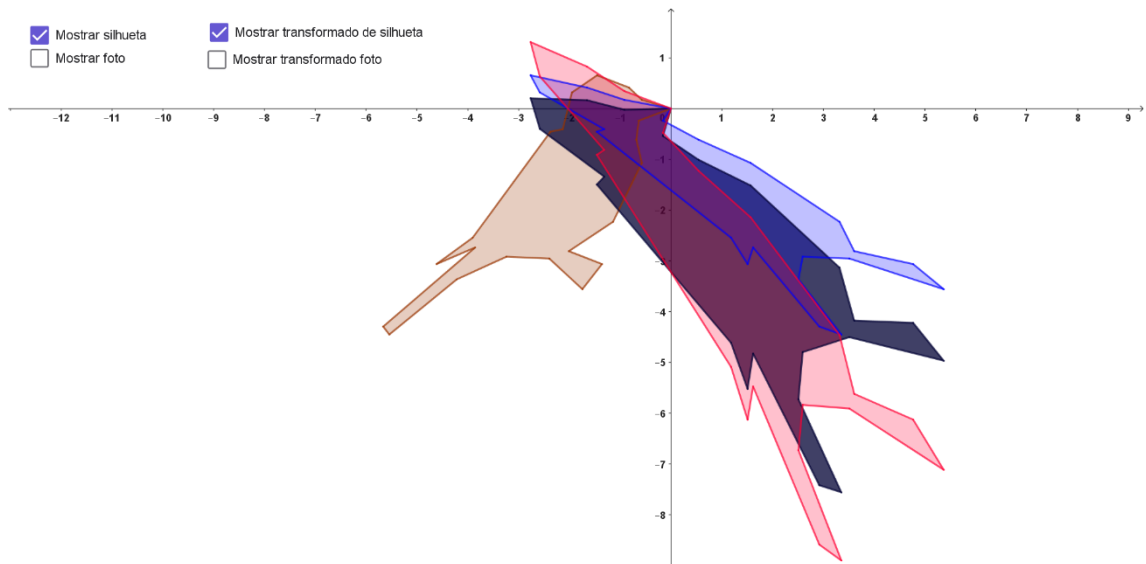
2º operador (aplicado ao polígono transformado anterior): mudança de escala não uniforme – expansão segundo o eixo dos  $yy$ , pelo fator 2. O transformado está colorido a vermelho. Ver figura seguinte.



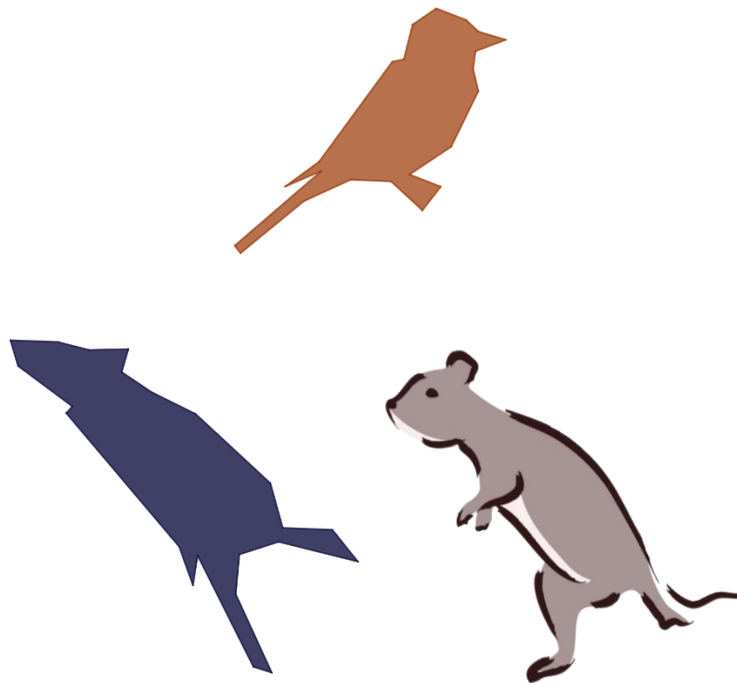
3º operador (aplicado ao polígono transformado anterior): cisalhamento na direção vertical, pelo fator 0.4. O transformado está colorido a verde, conforme figura seguinte.

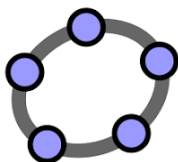


E, por fim, a imagem da composição dos 3 operadores lineares que é igual ao operador linear  $T_A$ , a cor cinzenta, podendo verificar-se que coincide com a imagem encontrada anteriormente, colorida a verde.



Podemos agora comparar as duas silhuetas (original e transformada pela matriz  $A$ ) e notar que a silhueta do pássaro ficou bastante deformada, a ponto de se assemelhar mais à silhueta de um rato, em pé nas patas traseiras...





## Atividade prática com tecnologia



Imagem obtida de: <https://stockcake.com/i/child-s-house-drawing-578763-1131524>

1. Na janela gráfica do GeoGebra, construa um modelo aramado de uma “casinha” colorida, que tenha porta e janelas, utilizando, para isso, vários polígonos. Crie uma lista que inclua todos os polígonos que compõem a casinha. Para o efeito, na linha de entrada digite **entre chavetas** os nomes de todos os polígonos, separados por vírgulas, tal como estão designados na janela de álgebra. Clique em ENTER. Irá surgir na janela de álgebra a lista que ficou criada.

Na figura seguinte este processo está exemplificado. Foram construídos dois polígonos: um quadrilátero com o nome q1 e um triângulo com o nome t1. Foi digitada na linha de comandos a expressão **{q1,t1}**, seguida de ENTER.

GeoGebra Calculadora Suite

Algebra

- E = (3, 8)
- t1 = Polígono(D, C, E) = 9
- c1 = SegmentodeReta(E, D, t1) = 4.2426406871193
- d1 = SegmentodeReta(C, E, t1) = 4.2426406871193
- e = SegmentodeReta(D, C, t1) = 6
- l1 = {q1, t1} = {30, 9}

Entrada... {q1,t1}

GeoGebra Calculadora Suite

Chuva de tarde 10:37 05/02/2026

O resultado foi a obtenção de uma lista na janela de álgebra, que apareceu com o nome I1, contendo entre chavetas os valores das áreas dos polígonos da lista. Usando a lista, podemos executar uma transformação matricial simultaneamente sobre todos os polígonos que compõem a casinha. Para isso escreve-se o nome da lista no lugar do objeto, quando se utiliza o comando **AplicarMatriz**.

2. Aplique à “casinha” uma transformação matricial  $T_A$ , definindo uma matriz  $A$  tal que os seus elementos sejam todos diferentes. Descreva o efeito geométrico do seu operador matricial, explicitando-o como composição de várias transformações geométricas.
3. Aplique a sequência das transformações lineares que formam a composição obtida e verifique que a imagem final é a mesma que a imagem obtida pela transformação  $T_A$ .

---

## 2.7. Propriedades geométricas dos operadores lineares sobre $\mathbb{R}^2$

Ainda a propósito dos operadores lineares sobre  $\mathbb{R}^2$ , são de destacar as seguintes propriedades verificadas pelos operadores lineares invertíveis. Estas propriedades ajudam a compreender o resultado da transformação de regiões limitadas por linhas poligonais por meio de tais operadores.

Sendo  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear **invertível**, são verificadas as seguintes propriedades das imagens por meio de  $T$ :

- A imagem de uma reta é uma reta.
- A imagem de uma reta que passa pela origem é uma reta que passa pela origem.
- Duas retas paralelas são transformadas em retas paralelas.
- A imagem de um segmento de reta que une dois pontos é um segmento de reta que une as imagens desses dois pontos.

Apresentamos aqui uma breve demonstração de cada uma das propriedades anteriores.

- 1) Recordemos que uma reta pode ser definida pela sua equação vetorial, conhecidos um dos seus pontos e um vetor diretor.

Seja a reta  $r$  definida por  $x = x_p + ku$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ), em que  $x_p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$  é um ponto da reta e  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  é um vetor diretor ( $u \neq 0$ ). Então, sendo  $T$  um operador linear, tem-se:

$$T(x) = T(x_p + ku) = T(x_p) + kT(u)$$

Sabendo que  $u \neq 0$ , então  $T(u) \neq 0$  dado que  $T$  é invertível. Isto é verdade porque qualquer transformação linear transforma o vetor nulo do espaço de partida no vetor nulo do espaço de chegada, ou seja,  $T(0) = 0$ . Pelo facto de  $T$  ser uma transformação linear invertível, sabe-se que é bijetiva, o que equivale a dizer que o único vetor com imagem igual a 0 é o vetor nulo. Assim, a imagem da reta  $r$  será a reta  $s$ , cujo vetor diretor é o vetor, não nulo,  $T(u)$ :

$$x' = T(x_p) + kT(u), \quad k \in \mathbb{R}$$

- 2) Sendo  $r$  uma reta que passa pela origem, tem a seguinte equação vetorial, em que  $u \neq 0$ :

$$x = ku, \quad k \in \mathbb{R}$$

Dado que  $T$  é uma aplicação linear, fica:

$$T(x) = T(ku) = kT(u)$$

Sabendo que  $T(u) \neq 0$ , como vimos no ponto anterior, então a imagem da reta  $r$  será uma reta  $s$  que passa pela origem e tem a direção do vetor não nulo,  $T(u)$ :

$$x' = kT(u), \quad k \in \mathbb{R}$$

- 3) Se duas retas  $r$  e  $t$  são paralelas, então os respetivos vetores diretores,  $u$  e  $v$ , são colineares. Logo existe um escalar  $\alpha$ , não nulo, tal que  $v = \alpha u$ . Como vimos antes, as retas transformadas terão os vetores  $T(u)$  e  $T(v)$ , respetivamente, como vetores diretores.

A imagem da reta  $r$  terá a equação vetorial:

$$x' = T(x_p) + kT(u), \quad k \in \mathbb{R}$$

A imagem da reta  $t$  terá a equação vetorial:

$$x' = T(x_q) + kT(v) = T(x_q) + kT(\alpha u) = T(x_q) + \alpha kT(u), \quad \alpha k \in \mathbb{R}$$

Portanto, as retas transformadas são paralelas porque têm o mesmo vetor diretor.

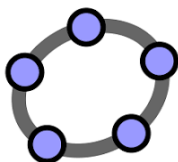
- 4) O segmento de reta definido pelos pontos  $x_p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$  e  $x_q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$  tem o vetor diretor  $u = \overrightarrow{PQ}$ , sendo  $u = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix}$ . A equação do segmento de reta é a seguinte:

$$x = x_p + ku, \quad k \in [0, 1].$$

Aplicando a transformação linear  $T$ , obtém-se:

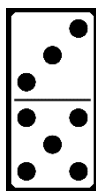
$$x' = T(x) = T(x_p) + kT(u), \quad k \in [0, 1]$$

A equação anterior descreve o segmento de reta limitado pelos pontos  $T(x_p)$  e  $T(x_q)$ .



### Atividade prática com tecnologia

Investigue o efeito geométrico dos operadores de cisalhamento horizontal e vertical quando aplicados a retas no plano. Para o efeito, faça a construção geométrica da pedra de dominó 3-5, como a da imagem seguinte. A face da pedra de dominó tem a forma de um retângulo dividido em dois quadrados iguais. Sugere-se que construa o retângulo como um polígono rígido. Este deverá deslocar-se no plano sem se alterar. Poderá representar os círculos (as pintas) por pontos. Note que estes se posicionam sobre as diagonais de cada quadrado. É importante que trace as diagonais dos quadrados e que marque os pontos sobre as diagonais, podendo depois esconder os segmentos.



Uma vez concluída a construção da pedra de dominó terá de aplicar uma matriz de cisalhamento vertical e uma matriz de cisalhamento horizontal ao conjunto de todos os objetos que compõem a pedra de dominó. Use seletores que permitam alterar a matriz e o fator de cisalhamento.

Investigue as seguintes situações:

1) Cisalhamento horizontal por um fator positivo:

i) Se a pedra estiver contida num dos quadrantes, como se posiciona o seu transformado, conforme o quadrante em que a pedra se situa? Analise os casos em que a aresta da base ou a aresta do topo está sobre o eixo das abcissas. Explique o que observou, usando matrizes e vetores.

ii) Se a pedra estiver centrada na origem, como se posiciona o seu transformado?

2) Cisalhamento horizontal por um fator negativo:

i) Se a pedra estiver contida num dos quadrantes, como se posiciona o seu transformado, conforme o quadrante em que a pedra se situa? Analise os casos em que a aresta da base ou a aresta do topo está sobre o eixo das abcissas. Explique o que observou, usando matrizes e vetores.

ii) Se a pedra estiver centrada na origem, como se posiciona o seu transformado?

3) Cisalhamento vertical por um fator positivo:

i) Se a pedra estiver contida num dos quadrantes, como se posiciona o seu transformado, conforme o quadrante em que a pedra se situa? Analise os casos em que a aresta esquerda ou a aresta direita está sobre o eixo das ordenadas. Explique o que observou, usando matrizes e vetores.

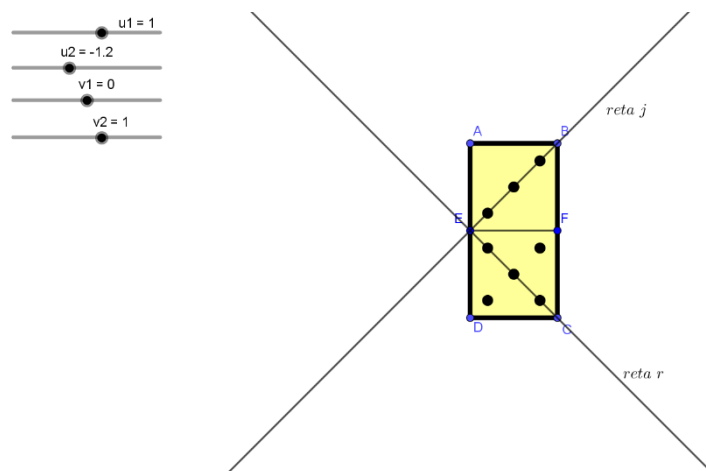
ii) Se a pedra estiver centrada na origem, como se posiciona o seu transformado?

4) Cisalhamento vertical por um fator negativo:

i) Se a pedra estiver contida num dos quadrantes, como se posiciona o seu transformado, conforme o quadrante em que a pedra se situa? Analise os casos em que a aresta esquerda ou a aresta direita está sobre o eixo das ordenadas. Explique o que observou, usando matrizes e vetores.

ii) Se a pedra estiver centrada na origem, como se posiciona o seu transformado?

5) Trace a reta  $j$  que passa pelas três pintas do quadrado superior (do número 3). A reta  $j$  irá conter uma diagonal desse quadrado. Trace a reta  $r$ , perpendicular à anterior, contendo três pintas do quadrado inferior (do número 5). A reta  $r$  irá conter uma diagonal desse quadrado, perpendicular à diagonal do primeiro (ver figura seguinte).



i) Determine um vetor diretor e o declive da reta  $j$ .

ii) Determine um vetor diretor e o declive da reta  $r$ .

6) Para o caso de um cisalhamento horizontal:

i) Obtenha um vetor diretor e o declive da reta  $j'$ , transformada da reta  $j$ , em função do fator de cisalhamento. Como se relacionam os dois declives?

ii) Para cada fator de cisalhamento horizontal, escreva a equação reduzida da reta  $j'$ , supondo que a ordenada na origem da reta  $j$  é igual a  $b$ . Compare com a equação reduzida da reta  $j$ . O que conclui?

iii) Mostre que, independentemente do fator de cisalhamento horizontal, as retas  $j$  e  $j'$  irão interseccionar-se num ponto que está sobre o eixo dos  $xx$ .

7) Para o caso de um cisalhamento vertical:

i) Obtenha um vetor diretor e o declive da reta  $j'$ , transformada da reta  $j$ , em função do fator de cisalhamento. Como se relacionam os dois declives?

ii) Para cada fator de cisalhamento vertical, escreva a equação reduzida da reta  $j'$ , supondo que a ordenada na origem da reta  $j$  é igual a  $b$ . Compare com a equação reduzida da reta  $j$ . O que conclui?

iii) Mostre que, independentemente do fator de cisalhamento vertical, as retas  $j$  e  $j'$  irão interseccionar-se num ponto que está sobre o eixo dos  $yy$ .

8) Faça um estudo idêntico ao das questões 6) e 7), considerando a reta  $r$  e a sua transformada,  $r'$ .



## Bibliografia e Referências

- Anton, H., & Busby, R. C. (2003). *Contemporary Linear Algebra*. John Wiley & Sons.
- Anton, H., & Rorres, C. (2012). *Álgebra linear com aplicações*. (10ª edição). Bookman.
- Batagelo, H., & Marques, B. (2021). *MCTA008-17 Computação Gráfica*. Universidade Federal do ABC. Brasil. <https://www.brunodorta.com.br/cg/>
- Carvalho, E. (2023). *ECT2202 - Álgebra Linear*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Brasil. <https://pessoal.ect.ufrn.br/~elton.carvalho/AL/aulas/index.html>
- Casselmann, B. (2005). *Mathematical Illustrations: A Manual of Geometry and PostScript*. (Edição online). <https://personal.math.ubc.ca/~cass/graphics/manual/>
- Dunn, F., & Parbery, I. (2011). *3D Math Primer for Graphics and Game Development*. (Edição online). CRC Press. <https://gamemath.com/>
- Eck, D. J. (2016). *Introduction to Computer Graphics*. (Edição online). <http://math.hws.edu/graphicsbook>
- Fernandes, A. S. (2019). *Fontes Paramétricas e Fontes Interpoladas: O renascimento de fontes dinâmicas e a sua utilização no design gráfico*. (Dissertação de Mestrado em Design de Comunicação). Escola Superior de Artes e Design. <http://hdl.handle.net/10400.26/31205>
- Johnston, N. (2021). *Introduction to Linear and Matrix Algebra*. Springer.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and its Applications*, (5ª edição). Pearson.
- Leon, S. J. (2010). *Linear Algebra with Applications*, (8ª edição). Pearson.
- Manssour, I. H., & Cohen, M. (2006). Introdução à Computação Gráfica. *Revista de Informática Teórica e Aplicada - RITA*, 13(2), 43-68. Disponível em: <https://www.inf.pucrs.br/manssour/Publicacoes/TutorialSib2006.pdf>
- Margalit, D., & Rabinoff, J. (2019). *Interactive Linear Algebra*. (EBook). Georgia Institute of Technology. <https://textbooks.math.gatech.edu/ila/ila.pdf>
- Monteiro, A. (2001). *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. McGraw-Hill.
- Steinbruch, A., & Winterle, P. (1987). *Álgebra Linear*. McGraw-Hill.

## ANEXOS – Propostas de Trabalhos Finais

### I - Trabalho de Grupo

#### Transformações matriciais e tipografia com recurso ao GeoGebra

##### Objetivo

**Criar um ficheiro GeoGebra** em que serão executadas transformações matriciais aplicadas a algumas letras do alfabeto, explorando a ligação entre a álgebra linear, a tipografia e a computação gráfica.

##### Descrição da tarefa

Propõe-se que desenvolvam um ficheiro GeoGebra em que se apliquem transformações lineares a algumas letras do alfabeto, permitindo a criação de versões **em itálico** de letras padrão. Construam as letras do nome de uma pessoa, que tenha pelo menos 4 letras e que inclua a letra I (se possível, escolham o nome de um membro do vosso grupo). As letras deverão ser construídas com as ferramentas do GeoGebra e dispostas de modo a formarem o nome da pessoa. Implementem uma matriz de transformação de cisalhamento para obter as letras do nome em itálico. Criem controlos deslizantes para mudar o grau de inclinação do itálico das letras (fator de cisalhamento). Apresentem o nome com as letras originais e o nome com as letras transformadas na visualização gráfica do GeoGebra.

Poderão ainda criar uma matriz de mudança de escala ou uma matriz de rotação e fazer a composição de várias transformações lineares. Copiem a vossa versão preferida da imagem das letras do nome e utilizem essa imagem para produzir um cartão de parabéns personalizado. Segue-se um exemplo ilustrativo:



O trabalho deverá demonstrar o recurso a operações com matrizes, transformações lineares e conceitos básicos de computação gráfica, utilizando as capacidades do GeoGebra.

Informações adicionais sobre o itálico na tipografia podem ser consultadas aqui: <https://clube.design/tipografia-basica-2-estilos-tipograficos/>

**Produtos:**

Os produtos a apresentar são os seguintes:

**1. Um breve relatório (3-5 páginas), onde descrevam:**

- A matemática envolvida nas transformações utilizadas no GeoGebra.
- O modo como a alteração de parâmetros afeta o formato das letras (podem utilizar capturas de ecrã ou imagens exportadas das letras transformadas)
- A comparação entre as letras geradas em itálico e as letras iniciais.

Deverá ser incluído um breve guia do utilizador, explicando como interagir com as construções feitas no GeoGebra.

Deverá ser incluída a bibliografia e fontes consultadas.

**2. O ficheiro GeoGebra (.ggb).****3. O ficheiro do cartão de parabéns personalizado (no formato que preferirem: Word, PPoint, ou outro).****Critérios de avaliação:**

Implementação correta das operações e transformações matriciais no GeoGebra.

Qualidade visual e clareza das transformações das letras.

Profundidade da fundamentação e explicação matemática dos resultados.

Criatividade no design de letras e na combinação de transformações, bem como no design do cartão de parabéns personalizado.

Apresentação geral e facilidade de utilização do ficheiro GeoGebra.

**Recursos sugeridos:**

<https://ensina.rtp.pt/artigo/italico-criacao-de-um-mestre-tipografo/>

[https://home.uevora.pt/~fc/cg/#\\_gr%C3%A1ficos\\_2d](https://home.uevora.pt/~fc/cg/#_gr%C3%A1ficos_2d)

<https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/31205>

<https://www.andacademy.com/resources/blog/graphic-design/what-is-typography/>

## II - Trabalho de Grupo

### Ecrã de abertura de um jogo de corridas de automóveis: Zoom parcial e zoom de câmara com matrizes

#### Objetivo

Criar um applet no GeoGebra que utilize transformações matriciais aplicadas a diferentes objetos, explorando a ligação entre a álgebra linear e a computação gráfica para simular o efeito de zoom-in / zoom-out em determinados objetos de interesse e o chamado zoom de câmara.

#### Descrição da tarefa

Construir, no GeoGebra, um applet que represente o ecrã de abertura de um jogo de corridas de automóveis, que contenha:

- uma cena de fundo (por exemplo, imagem de uma pista de corridas),
- um carro desportivo (usar uma imagem existente para inserir no GeoGebra ou construir o carro com pontos e segmentos no GeoGebra)
- o nome do jogo (por exemplo, "GO ZOOM", ou outro à escolha), em que as letras serão construídas no GeoGebra por meio de polígonos.

Criar animações que executem três tipos de zoom, todos implementados com matrizes de mudança de escala uniforme:

1. zoom in/out do carro,
2. zoom in/out do nome do jogo,
3. zoom in/out de toda a cena (fundo + carro + nome), simulando o chamado zoom de câmara.

Propõe-se que desenvolvam um applet no GeoGebra que aplique vários operadores lineares de mudança de escala uniforme, usando matrizes, para que seja visível a diferença entre fazer zoom (in/out) num objeto de uma cena e fazer zoom (in/out) em todo o espaço do objeto.

Sugere-se a utilização de duas Folhas 2D na construção a efetuar no GeoGebra. Em cada uma delas deverão aparecer os mesmos elementos: imagem do fundo, carro e nome do jogo. Numa das folhas serão executadas mudanças de escala independentes sobre o carro e sobre o nome (sem alterar o fundo). Na outra folha será executada uma única mudança de escala sobre os três elementos em conjunto.

É importante a criação de listas para agrupar os elementos que serão transformados pela mesma matriz. Sugere-se ainda a utilização de controlos deslizantes (seletores) para variar o fator de escala que irá ser utilizado em cada uma das matrizes a aplicar. Os

controlos deslizantes permitem a animação do ponto móvel sobre o seletor, dando a possibilidade de visualizar os efeitos de zoom (in/out) de forma automática.

O vosso projeto deverá demonstrar o recurso a operações com matrizes, transformações lineares e conceitos básicos de computação gráfica, utilizando as capacidades do GeoGebra. Informações adicionais sobre o efeito de zoom na computação gráfica podem ser encontradas aqui: <https://www.gksander.com/posts/math-of-zooming-in>

## **Produtos**

Os produtos a apresentar são os seguintes:

1. Um breve relatório (4-6 páginas), onde descrevam:

- A matemática envolvida nas construções feitas no GeoGebra.
- O modo como a variação dos parâmetros definidos afeta o tamanho e a posição dos objetos transformados (podem utilizar capturas de ecrã ou imagens exportadas do GeoGebra).
- A comparação entre os dois tipos de zoom simulados.

Deverão incluir um breve guia do utilizador explicando como interagir com o applet.

Deverão incluir bibliografia e fontes consultadas.

2. O ficheiro do *applet* GeoGebra (.ggb).

## **Critérios de avaliação:**

Implementação correta das transformações matriciais no GeoGebra.

Qualidade visual e clareza das transformações efetuadas.

Fundamentação e explicação matemática correta dos objetivos e dos resultados.

Criatividade no design do ecrã do jogo e na aplicação das transformações, bem como nos efeitos visuais produzidos.

Apresentação geral e facilidade de utilização do applet GeoGebra.

## **Recursos sugeridos:**

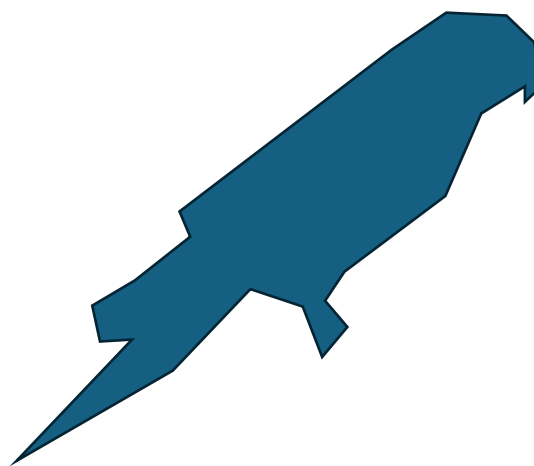
<https://www.gksander.com/posts/math-of-zooming-in>

<https://www.inf.pucrs.br/manssour/Publicacoes/TutorialSib2006.pdf>

<http://math.hws.edu/graphicsbook>

### III - Trabalho Individual: Propostas

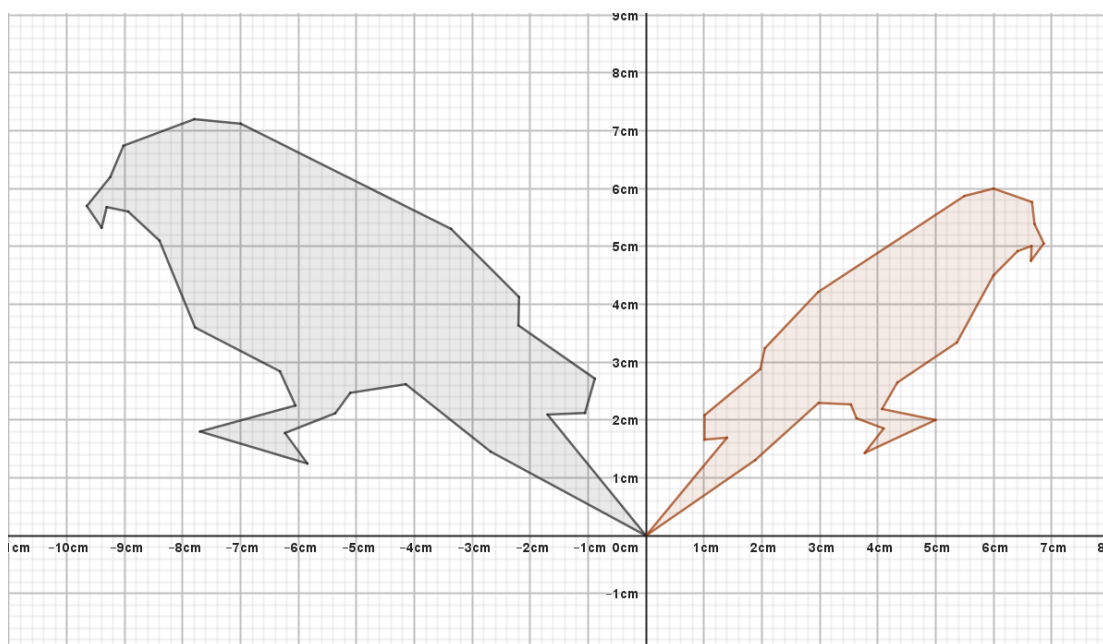
#### Proposta 1



Papagaio australiano, *Alisterus scapularis* © Toby Austin [eBird S28489762](#) [Macaulay Library ML 35139181](#)

No seu trabalho individual, irá utilizar a **foto do pássaro** que lhe coube em sorteio (ver tabela do sorteio no ficheiro “Sorteio do trabalho individual”). A foto do referido pássaro, cujos créditos são atribuídos ao autor, foi obtida em <https://www.macaulaylibrary.org/>. Indica-se o nome do pássaro em português e também o respetivo nome científico. Poderá consultar várias informações sobre esta espécie ao seguir a ligação contida em Macaulay Library, que se encontra na legenda. Ao lado da foto, pode ver-se uma **silhueta** do pássaro, criada por meio de uma linha poligonal fechada.

O seu trabalho individual deverá ser realizado com recurso ao GeoGebra, utilizando o ficheiro com o nome “Passaro22B.ggb”. O objetivo é obter a matriz do operador linear que transforma a silhueta original do pássaro numa nova silhueta, de acordo com a figura da página seguinte (silhueta original a cor; silhueta transformada a preto). Os elementos da matriz pretendida são números do intervalo  $[-3, 3]$ . A figura seguinte foi exportada do GeoGebra e está em escala.



**Produtos:**

Elabore um breve relatório escrito do seu trabalho, explicando o raciocínio efetuado para chegar à matriz de transformação linear pretendida. Apresente um ficheiro GeoGebra em que mostre a confirmação da sua solução. Para isso, aplique a matriz que encontrou e obtenha o transformado da silhueta original e também o transformado da foto original. Finalmente, faça uma descrição sucinta do efeito que a transformação linear produziu no seu pássaro, tendo em conta a geometria dos operadores lineares no plano.

## Proposta 2



Blue Morpho (Morpho Azul). <https://www.chicagobotanic.org/butterflies/species/blue-morpho>

No seu trabalho individual, irá utilizar a **foto da borboleta** que lhe coube em sorteio, de um conjunto de borboletas disponíveis no ficheiro “Coleção de Borboletas” (**ver tabela do sorteio**). As fotos das borboletas foram obtidas no site do Jardim Botânico de Chicago (<https://www.chicagobotanic.org/butterflies/species>). Seguindo o link que encontra junto à foto da borboleta, poderá consultar várias informações sobre aquela espécie de borboleta (em Inglês).

O trabalho deverá ser realizado com recurso ao GeoGebra. Pretende-se que utilize o GeoGebra para representar o contorno da borboleta por meio de um **polígono** no plano e que aplique uma matriz de transformação linear a esse polígono. O polígono original e o polígono transformado, que poderão ser diferenciados por cor, irão constituir o elemento gerador de um padrão. Esse elemento gerador deverá ser repetido numa grelha 3×3 (tipo papel de parede), como se fosse uma amostra do desenho de um papel de parede. A construção no GeoGebra deverá permitir alterar essa amostra, variando a matriz de transformação linear, bem como a abertura da grelha.

**Nota:** se desejar, poderá criar um elemento gerador do padrão que contenha mais do que um polígono transformado, usando, para o efeito, mais do que uma matriz de transformação linear.

## Produtos:

1. Um breve relatório escrito do seu trabalho (4-6 páginas), que inclua:
  - a) a imagem original da borboleta que utilizou, uma imagem da sua amostra final de papel de parede, copiada do GeoGebra, bem como a indicação da matriz de transformação linear aplicada;
  - b) uma explicação do processo seguido para criar a amostra de papel de parede no GeoGebra;
  - c) uma descrição do efeito que a transformação linear produziu na borboleta original, tendo em conta a geometria dos operadores lineares;
  - d) uma análise da forma como a matriz controla a simetria e a estrutura do padrão;
  - e) uma reflexão sobre como esta atividade pode ser usada em sala de aula com alunos do ensino secundário para estudar matrizes e transformações lineares;
  - f) referências bibliográficas, sites consultados, uso de ferramentas de IA Gen.
2. Um ficheiro GeoGebra com a construção realizada para criar a sua amostra de papel de parede.

Seguem-se algumas indicações/sugestões específicas para o trabalho a realizar no GeoGebra.

- i. Na janela 2D do GeoGebra, inserir a imagem original da sua borboleta que se encontra no ficheiro “Coleção de Borboletas”, usando “Inserir Imagem”. Ajustar a posição e a dimensão da imagem no plano XOY.
- ii. Usar a ferramenta “Polígono” ou “Polígono Rígido”. Marcar sucessivamente os vértices do polígono sobre o contorno da borboleta e, no final, clicar novamente no 1º vértice (para fechar o polígono).
- iii. Criar seletores para as entradas de uma matriz quadrada de ordem 2. Definir a matriz, digitando, por exemplo,  $M = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$ .
- iv. Aplicar a matriz ao polígono para obter o transformado do contorno da borboleta. Na linha de comandos, usar `AplicarMatriz(<Matriz>,<Objeto>)`.
- v. Criar seletores, i, j, para definir os intervalos e a direção da grelha. Definir os vetores (i,0) e (0,j).
- vi. Usar a ferramenta “Translação por um Vetor” para fazer a translação dos dois polígonos (inicial e transformado), de modo a obter um padrão de 3x3 (tipo papel de parede).

## Índice

1. MATRIZES DE NÚMEROS REAIS.....	1
1.1. Conceitos básicos.....	1
1.2. Casos particulares de matrizes quadradas .....	2
1.3. Operações com matrizes .....	2
Tarefa 1.1. Dosagens de medicamentos em pacientes hospitalizados .....	5
Tarefa 1.2. Vendas em loja de vestuário .....	7
Tarefa 1.3. Aluguer de automóveis .....	8
1.4. Transposta de uma matriz.....	10
Desafios .....	11
1.5. Matriz inversa .....	12
Atividade prática com tecnologia.....	13
Tarefa 1.4. Invertibilidade de matrizes .....	17
1.6. Matrizes elementares e o cálculo da matriz inversa .....	17
Tarefa 1.5. Produtos de matrizes elementares .....	21
2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES .....	22
2.1. Conceitos básicos.....	22
2.2. Definição de transformação linear .....	23
Tarefa 2.1. Obtenção da matriz de uma transformação linear .....	27
2.3. Composição de transformações lineares.....	28
2.4. Invertibilidade de operadores lineares .....	29
2.5. Operadores lineares e transformações geométricas .....	30
Tarefa 2.2. Reconhecer a geometria dos operadores lineares.....	43
2.6. Fatorização de operadores lineares .....	44
Atividade prática com tecnologia.....	50
2.7. Propriedades geométricas dos operadores lineares sobre $\mathbb{R}^2$ .....	51
Atividade prática com tecnologia.....	53
Bibliografia e Referências.....	56
ANEXOS – Propostas de Trabalhos Finais.....	57
I - Trabalho de Grupo.....	57
II - Trabalho de Grupo .....	59
III - Trabalho Individual: Propostas .....	61