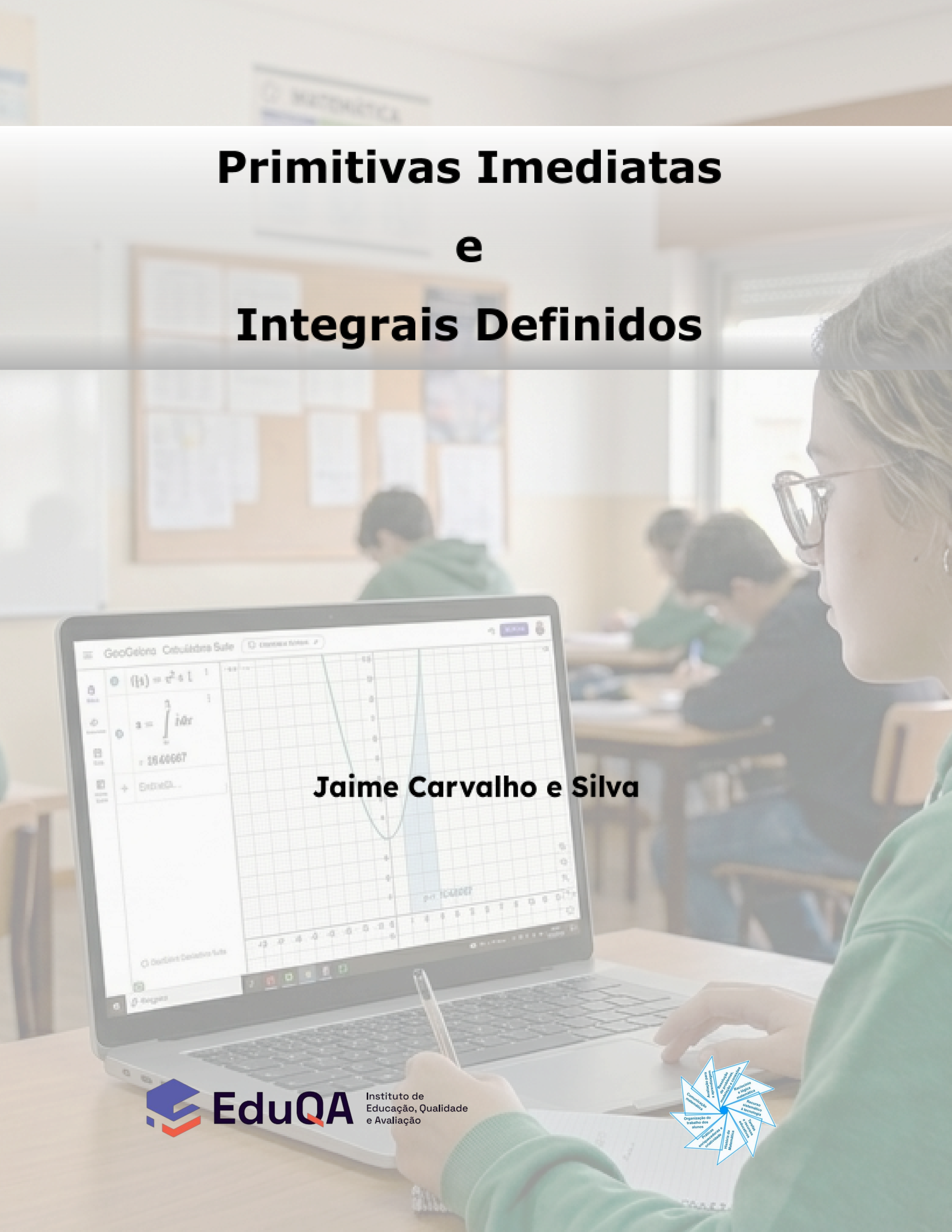

Primitivas Imediatas

e

Integrais Definidos

Jaime Carvalho e Silva

EduQA Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação

Ficha técnica

Título:

Primitivas Imediatas e Integrais Definidos

Autor:

Jaime Carvalho e Silva

Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação, Ministério da Educação

Data:

Lisboa, março de 2026

Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P. (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

As Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 12.º ano integram três temas opcionais, dos quais se prevê que apenas um deles se espera seja trabalhado em cada escola, ou, eventualmente, em cada turma. A escolha deve ter em conta o perfil e os interesses dos alunos, bem como os recursos disponíveis na escola. Os três temas são: Introdução à Inferência Estatística; Primitivas Imediatas e Integrais Definidos; e Matrizes.

O tema **Primitivas Imediatas e Integrais Definidos** constitui um tema com poucas tradições no currículo do Ensino Secundário em Portugal, o que motivou a elaboração desta brochura dedicada exclusivamente a esse tema. A sua criação surge no contexto das diversas atividades e iniciativas de apoio ao desenvolvimento do novo currículo, promovidas pelo **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)**.

O tema **Primitivas Imediatas e Integrais Definidos** apareceu pela primeira vez no programa experimental de Sebastião e Silva para o ensino da Matemática no Ensino Secundário nos anos 60 do século passado. Houve outras tentativas de o fazer posteriormente, mas todas foram prejudicadas pela extensão dos programas. Sebastião e Silva foi autor de manuais para apoiar essa experiência, que nunca foi avaliada devido ao seu falecimento prematuro. Foram propostos vários capítulos no programa experimental, desde Estatística e Probabilidade até Estruturas Algébricas e Álgebra Linear, mas nunca se concluiu quais seriam recomendáveis em função da experiência da época.

Sebastião e Silva, no “Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática”, faz várias considerações sobre o ensino do Cálculo Integral no Ensino Secundário. Começa por afirmar:

> *A análise infinitesimal é, sem dúvida, uma das mais belas e úteis criações do espírito, impondo-se quer pela elegância e fecundidade dos métodos, quer pela importância das aplicações. Mas é sobretudo no cálculo integral que estes aspectos adquirem vulto (ed. GEP, 1977, 2º e 3º vol., p. 79).*

Depois de citar longamente Poincaré e a ligação histórica entre a Matemática e a Física, Sebastião e Silva escreve:

> *É, portanto, útil que o ensino da análise não seja inteiramente dissociado do das ciências físico-naturais. Torna-se aqui bem evidente o facto a que diversas vezes temos aludido e que Poincaré deixou expresso em termos lapidares: a intuição precede geralmente a lógica, no processo de criação matemática. E o ensino deve respeitar esta ordem, se não quisermos abafar no aluno o espírito de pesquisa, obrigando-o a admirar passivamente (ou a detectar) uma construção acabada e perfeita (ed. GEP, 1977, 2º e 3º vol., p. 84).*

Sebastião e Silva assinala claramente que o ensino do Cálculo Integral no Ensino Secundário tem de ser moderado:

> *É claro que, dos elementos de cálculo integral, só podemos exigir, no ensino secundário, o quantum satis. Mas a escolha terá de ser muito criteriosa, para que não se esteja a fazer sementeira inútil ou, pior ainda, prejudicial. O objectivo é lançar algumas ideias mestras, de maneira que possam realmente germinar. (ed. GEP, 1977, 2º e 3º vol., p. 85).*

Sebastião e Silva refere-se diretamente ao interesse do estudo das primitivas imediatas:

> *Sucede até que os exercícios de primitivação, especialmente os de primitivação imediata, oferecem uma excelente oportunidade para que o aluno se possa aperfeiçoar nas técnicas de cálculo, que requerem uma certa iniciativa e um certo desembaraço, quando se trata de transformar uma dada expressão numa outra equivalente, adaptando-a ao fim em vista. (ed. GEP, 1977, 2º e 3º vol., p. 85).*

A proposta contida nas novas Aprendizagens Essenciais, homologadas em 13 de janeiro de 2023, é mais modesta que a de Sebastião e Silva, pois se destina a um intervalo temporal letivo de apenas 3 semanas, não estando prevista a discussão das chamadas somas de Riemann.

O **GT DCPMES** é constituído pelos docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

Esta publicação não substitui outros elementos de estudo ou consulta; contudo, constitui uma referência de qualidade que poderá apoiar os professores de Matemática no aprofundamento dos seus conhecimentos sobre a natureza e finalidades dos programas, bem como sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas, incluindo a conceção e desenvolvimento de projetos. A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais, âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto diversificado de ferramentas matemáticas. Neste sentido, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e abordagens, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, promovendo o raciocínio dedutivo aliado ao uso da tecnologia.

A DGE tem vindo a desenvolver um processo sistemático e consistente de apoio aos professores de Matemática que iniciaram em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário. Este processo inclui, entre outras iniciativas: Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; edição de várias coletâneas de tarefas e outras brochuras; formação de professores formadores, criando uma rede nacional, que, localmente, apoia os colegas e dinamiza ações de formação em todas as escolas; uma base de dados de tarefas já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e organização de seminários a distância (*webinares*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo da escolaridade obrigatória responda às necessidades de todos os alunos, assegurando a sua formação matemática enquanto cidadãos. Essa formação deve proporcionar uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e acessível a todos, garantindo que os formalismos e os níveis de abstração sejam ajustados ao trabalho desenvolvido em cada tema. A matemática deve assumir-se como um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

Esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino secundário reconheçam a utilidade dos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino, quer como referências e instrumentos de reflexão, de auto-formação e de desenvolvimento profissional.

O EduQa e o GT DCPMES, continuarão a envidar esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, contamos com o profissionalismo empenhado, informado e consciente dos professores, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

Primitivas Imediatas e Integrais Definidos

As Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 12.º ano integram três temas opcionais, sendo que apenas um deles se espera seja trabalhado em cada escola, ou mesmo em cada turma. Para esta seleção os professores terão em conta o perfil e os interesses dos alunos e os recursos a que será possível ter acesso na escola. Os três temas são: Introdução à Inferência Estatística; Primitivas Imediatas e Integrais Definidos; e Matrizes.

No tema **Primitivas Imediatas e Integrais Definidos** o trabalho concentra-se na resolução de um problema básico: o cálculo da área da figura definida pelo gráfico de uma função contínua num intervalo e pelo eixo das abcissas. Note-se que a possibilidade do cálculo de áreas é muito aumentada neste tema relativamente ao que os alunos estudaram anteriormente, pois até aqui, foram trabalhadas apenas áreas limitadas por polígonos ou a áreas de círculos, podendo, assim, a partir de agora calcular uma multiplicidade de áreas de figuras, desde que seja possível defini-las a partir de funções contínuas. O cálculo integral é um método poderoso para resolver problemas em contextos tão diversos como o cálculo de áreas e volumes, o cálculo do comprimento de curvas, o cálculo da pressão exercida por líquidos, a determinação de probabilidades em modelos contínuos, o cálculo de centros de gravidade de figuras irregulares e a determinação do valor médio de uma função contínua num dado intervalo, entre outros.

Eis o nosso plano de trabalho:

1. Conhecer o processo de primitivação (antiderivação) como processo inverso da derivação.
2. Reconhecer o integral definido de uma função positiva como a área de uma região compreendida entre o gráfico da função num intervalo e o eixo das abcissas.
3. Conhecer e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a Fórmula de Barrow para calcular integrais definidos.

4. Calcular áreas de figuras definidas por funções contínuas e positivas usando a Fórmula de Barrow.
5. Provar e aplicar propriedades das primitivas (antiderivadas) generalizadas aos integrais.
6. Construir uma tabela de primitivas simples, envolvendo funções polinomiais, $\frac{1}{x}$, e^x, $sen\, x$ e $cos\, x$.
7. Usar exclusivamente primitivas baseadas em combinações lineares das funções apresentadas na tabela anteriormente referida .
8. Possível aprofundamento: teorema de Chasles.
9. A tecnologia no cálculo de primitivas e integrais.
10. Referências.

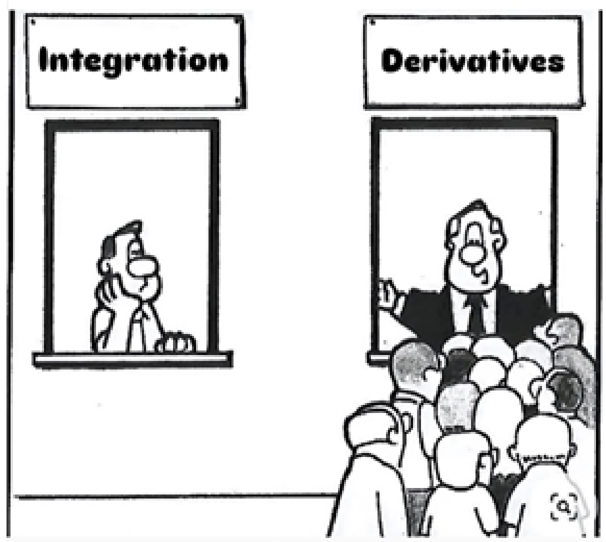

Figura 1 - that_math_kid (https://www.instagram.com/p/DKTw1mvOX3_/)

1. Antiderivação

O conceito matemático de **derivada**, um dos mais importantes de toda a matemática, é essencial para traduzir a maior ou menor rapidez com que, num determinado fenómeno, uma grandeza (distância, altura, área, volume, etc.) varia relativamente a outra (muitas vezes o tempo).

O cálculo integral trata de uma operação, chamada **integração** ou **primitivação**, que pode ser entendida, de certa forma, como a operação inversa da derivação. Por essa razão, a integração é também designada por **antiderivação**.

Suponhamos que se conhece a velocidade $v(t)$ dum móvel em função do tempo, $v(t) = f(t)$, e que se procura determinar o espaço $s(t)$ percorrido pelo móvel em função do tempo $s(t) = F(t)$. Como a velocidade é a derivada de $s(t)$ em relação *t*, pretende-se assim determinar uma função $F(t)$ cuja derivada seja $f(t)$. Isto é, como

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

precisamos de encontrar $F(t)$, se existir, tal que

$$\frac{dF}{dt} = f(t).$$

À função F chamaremos de **integral** (indefinido), ou **antiderivada**, ou **primitiva** de f.

Em muitas situações o que se conhece é uma derivada (taxa de variação) e pretende-se determinar a quantidade (função) original. Por exemplo:

DERIVADA	FUNÇÃO
Velocidade	Distância
Aceleração	Velocidade
Custo marginal	Custo
Taxa de crescimento	Tamanho da população
Taxa de variação	Quantidade

Pretendemos, em cada caso, conhecida uma função derivada, determinar a função desconhecida que lhe deu origem. Este procedimento chama-se **primitivação**, **integração** ou **antiderivação**.

> **<u>Definição</u>**
> Uma função F é denominada uma primitiva de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo o x em I.

Por exemplo, seja $f(x) = 2x$. Não será difícil concluir que uma primitiva será $F(x) = x^2$, a partir da nossa experiência anterior de cálculo de derivadas pois $\left(x^2\right)' = 2x$. Se for $f(x) = 2$ também não será difícil concluir que uma primitiva será $F(x) = 2x$ pois, novamente da nossa experiência anterior de cálculo de derivadas sabemos que $(2x)' = 2$.

Podemos ainda determinar antiderivadas mais complicadas com um raciocínio também simples. Por exemplo, se tivermos $f(x) = x^2$, poderá não ser imediato obter uma primitiva F de f pois só sabemos que $\left(x^3\right)' = 3x^2$ que não é exatamente o que pretendemos. Mas como sabemos que, se a for constante, $(af)' = af'$, então poderemos escrever que $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ e assim concluir que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma das primitivas pretendidas.

O problema novo que aparece com as antiderivadas é que voltando ao caso $f(x) = 2x$, sendo verdade que uma antiderivada será $F(x) = x^2$ também $G(x) = x^2 + 5$ será uma antiderivada de f, pois $\left(x^2 + 5\right)' = 2x$. Isto significa que a antiderivada não é única.

Sabemos (embora não seja provado aqui) que:

> **<u>Teorema 1</u>**
> Se F é uma primitiva de f num intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é
> $$F(x) + C$$
> onde C é uma constante real arbitrária.

Se representarmos a **primitiva** de f por Pf ou por $\int f(x)dx$, podemos escrever que:

$$Pf(x) = F(x) + C \quad \text{ou} \quad \int f(x)dx = F(x) + C, C\epsilon\mathbb{R}$$

Este teorema permite-nos ainda afirmar que, se duas funções têm a mesma derivada então diferem por uma constante.
Com esta clarificação, ficamos a saber que existe uma infinidade de primitivas para uma dada função. À primeira vista, isso poderia ser um problema complicado; Contudo, conhecemos o padrão que seguem todas essas primitivas.

Vejamos agora a interpretação geométrica de tal facto.

Consideremos que $F(x) = x^3 + C$ com C a tomar os valores 0, 1 e -2. Obtemos os gráficos seguintes:

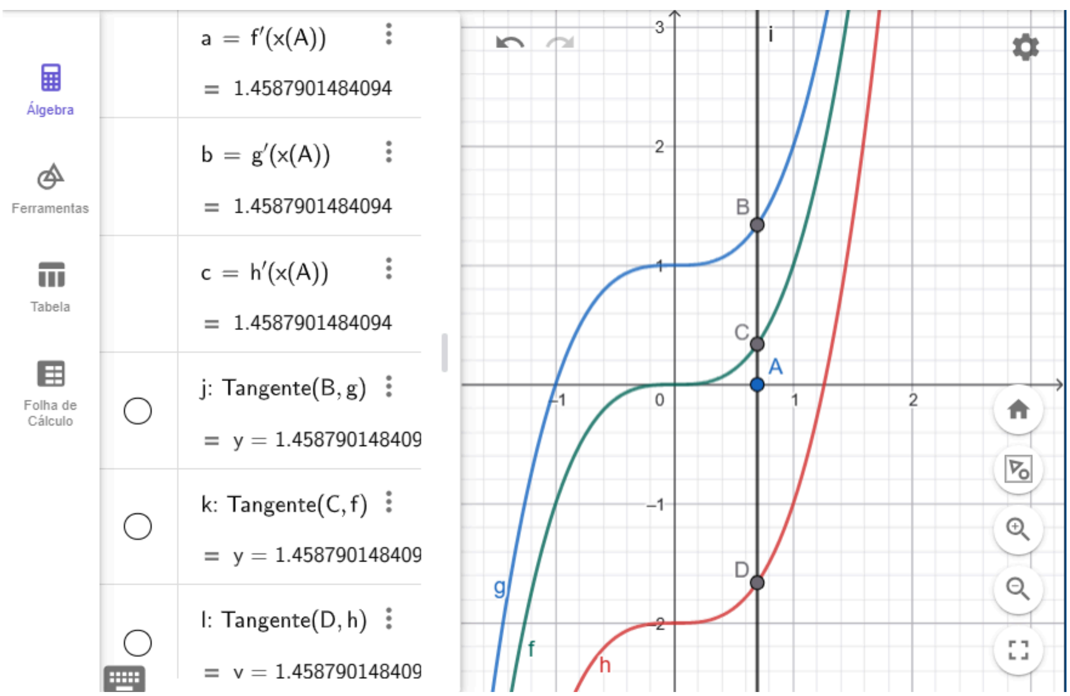

Figura 2 - https://www.geogebra.org/calculator/yavtjdka

Qualquer que seja a abcissa do ponto A as correspondentes ordenadas dos pontos B, C e D variam, mas as derivadas das funções nesses mesmos pontos mantêm-se constantes.
Isto significa que as tangentes em cada ponto B, C e D têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas. As funções são diferentes mas as tangentes, sendo paralelas, assumem o mesmo valor para o respetivo declive, como se pode observar na figura seguinte.

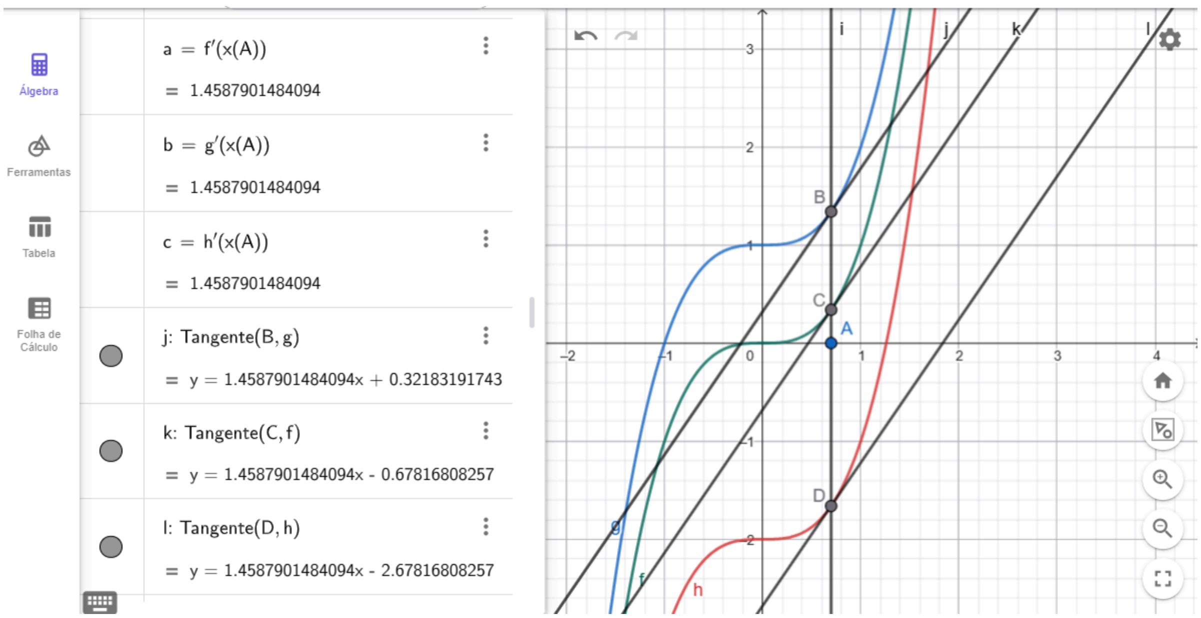

Figura 3 - https://www.geogebra.org/calculator/yavtjdkas

O mesmo se pode observar com $F(x) = x^2 + C$, com C a tomar, por exemplo, os valores 0, 2 e -1. Obtemos os gráficos seguintes:

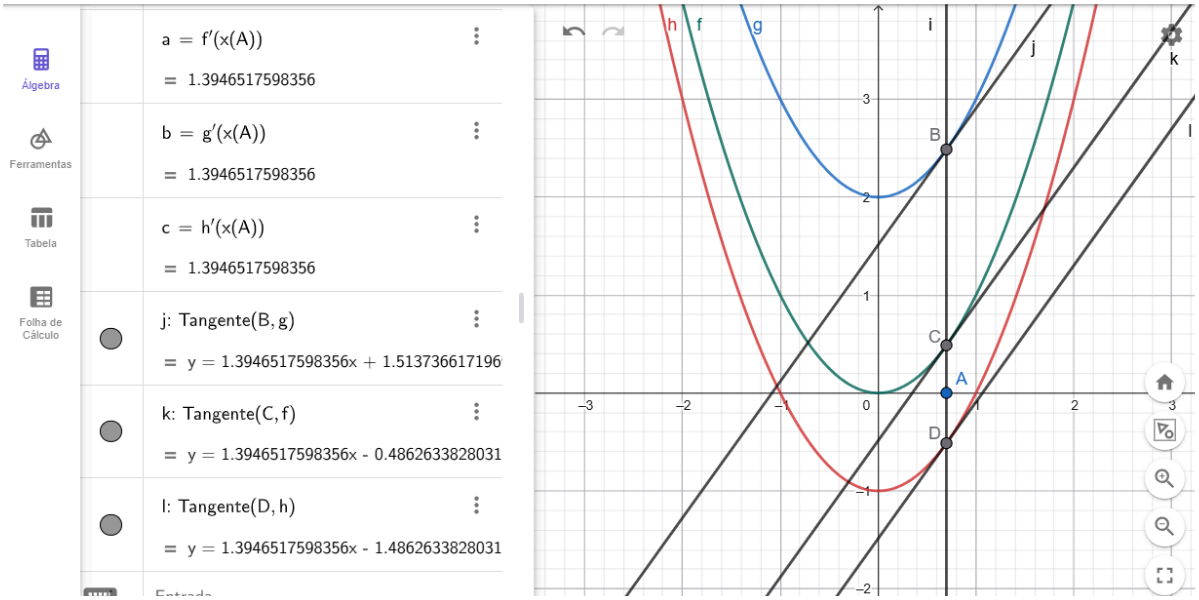

Figura 4 - https://www.geogebra.org/calculator/nunesj2n

Contudo, não basta o declive ser o mesmo num só ponto. Por exemplo, as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ têm a mesma derivada $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3x^2$, para $x = 0$, logo os declives das tangentes para $x = 0$ são iguais e portanto, as tangentes são paralelas, mas as duas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ são antiderivadas de $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3x^2$, respetivamente, e não diferem por uma constante.

Havendo uma infinidade de primitivas de uma função, para escolher a primitiva que interessa num problema particular, basta saber um valor particular dessa primitiva. Por exemplo, sendo $F(x) = x^2 + C$ a primitiva mais geral de $f(x) = 2x$, para saber qual é o valor que interessa ao problema basta saber, por exemplo, que $F(1) = 5$. Neste caso, como $F(1) = 1^2 + C$, terá de ser $5 = 1 + C$ e por isso será $C = 4$.

2. Integral definido como a área de uma região

Os alunos até ao momento apenas aprenderam a calcular áreas de um conjunto muito limitado de figuras, essencialmente aquelas que se reduzem a polígonos ou círculos. Historicamente a determinação de áreas de algumas outras figuras foi sendo feita lentamente e caso a caso. Talvez o trabalho mais notável seja o de Arquimedes de Siracusa (c. 287 – c. 212 a.C.) ao determinar a área de um segmento parabólico.
Um segmento parabólico é obtido a partir de uma parábola e uma reta, como mostra a figura 5.

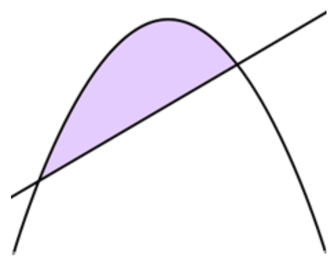

Figura 5- By en:User:Jim.belk (original); Pbroks13 (talk) (redraw) - http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Parabolic_Segment.png, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4303759

Para a determinação da área desta figura, Arquimedes escreveu um tratado chamado "Quadratura da Parábola". O método de Arquimedes baseia-se na ideia de aproximar essa área através da inscrição de triângulos inscritos no segmento parabólico.
Primeiro, Arquimedes inscreveu um triângulo dentro do segmento parabólico, escolhendo um vértice no ponto de tangência da parábola com uma paralela à reta que forma o segmento parabólico.
De seguida, observou que, nos espaços que permaneciam entre o triângulo inicial e a curva, era possível inscrever dois novos triângulos. Depois, repetiu o processo continuamente: em cada região sobrante, inscrevendo triângulos cada vez menores.
A área total do segmento parabólico pode então ser obtida somando as áreas de todos os triângulos . Claro está que tal soma é infinita, mas os matemáticos gregos já sabiam somar séries geométricas (aparece no Livro IX dos Elementos de Euclides) e Arquimedes aplica o seu método de exaustão para provar que a soma é $\frac{4}{3}$ da área do primeiro triângulo.

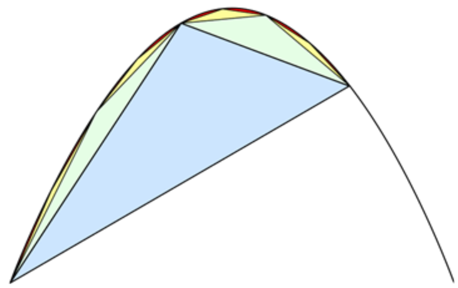

Figura 6 - By en:User:Jim.belk (original); Pbroks13 (talk) (redraw) - en:Image:Parabolic Segment Dissection.png, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4303892

A série geométrica usada foi

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{4}{3}.$$

Só com o desenvolvimento do cálculo integral, por Newton e Leibniz, foi possível ter um método geral para calcular áreas de uma grande quantidade de figuras, nomeadamente aquelas que são definidas por gráficos de funções contínuas. Curiosamente, o método baseia-se no uso de retângulos e não no uso de triângulos.

Considerando num referencial cartesiano xOy, uma função f contínua e não negativa num intervalo fechado $[a, b]$ (com $a < b$), a **área** da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f, na unidade quadrada associada à unidade de área desse referencial, representa-se por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

A expressão $\int_a^b f(x)dx$ designa-se por integral de f entre a e b, sendo que a é o limite inferior de integração e b é o limite superior de integração.

A Regra ou Fórmula de **Barrow** fornece um modo expedito de calcular o integral de uma função contínua não negativa num intervalo a partir da antiderivada da função. Se f está definida em $[a, b]$ (com $a < b$) , e F é uma primitiva qualquer de f no intervalo $[a, b]$, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Conforme vimos no parágrafo anterior, uma dada função que seja primitivável admite uma infinidade de primitivas. Contudo, na aplicação da fórmula de Barrow pode-se utilizar qualquer uma delas, uma vez que, estando em causa a diferença entre constantes arbitrárias iguais, independentemente do seu valor esta diferença anula-se. Este novo método aplica-se em todas as situações em que estamos em presença de funções contínuas, mesmo quando a área a determinar da região seja uma figura composta apenas por polígonos.

Consideremos o seguinte exemplo. Seja f a função definida em $[-\ 2,\ 3]$ por

$$f(x) = x\ +\ 3$$

A região do plano delimitada pelo gráfico de f, as retas verticais $x\ =\ 2$, $x\ =\ 3$ e o eixo $0x$ está esboçada na figura 7.

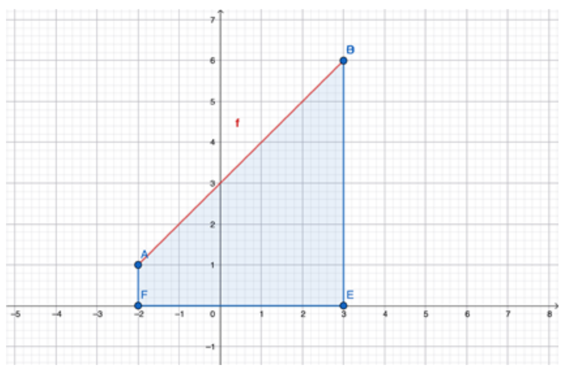

Figura 7 - https://www.geogebra.org/calculator/zczmpyrj

Como se trata de uma figura poligonal, sabemos como determinar facilmente a sua área, pois, a figura é composta por um triângulo e um retângulo. A medida da área será pois igual a $1\ \times\ 5\ +\frac{5\times5}{2} =\ 5\ +\frac{25}{2} = \frac{35}{2}$.

Esta área também pode ser calculada usando o novo método. A área será então dada por:

$$A\ = \int_{-2}^{3} f(x)dx\ = \int_{-2}^{3} (x\ +\ 3)dx$$

Mas o integral pode ser calculado pela fórmula de Barrow, sabendo que uma primitiva de $f(x) = x + 3$ será $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$, como:

$$\int_{-2}^{3} (x + 3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{2}x^2 + 3x\Big|_{x=3} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\Big|_{x=-2}\right) = \frac{27}{2} + \frac{8}{2} = \frac{35}{2}$$

Assim, conseguimos confirmar que o novo método fornece os mesmos resultados que o método clássico (ainda que não tenhamos provado).

3. Calcular integrais definidos

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral engloba a fórmula de Barrow:

<u>Teorema Fundamental do Cálculo Integral</u>

Seja f uma função contínua num intervalo definida em $[a, b]$ (com $a < b$).

Temos que:

a) f tem sempre primitiva;

b) se F é uma primitiva qualquer de f no intervalo $[a, b]$, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

A aplicação do Teorema Fundamental resume-se a encontrar uma primitiva da função contínua dada no intervalo $[a, b]$. O Teorema garante que a primitiva existe sempre mas não indica como fazer o seu cálculo. Na realidade o seu cálculo pode ser extremamente complicado e até impossível de fazer, se usarmos apenas funções elementares conhecidas e não recorrermos a somas infinitas de funções.

Por exemplo:

$$\int_1^3 (x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=3} - \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

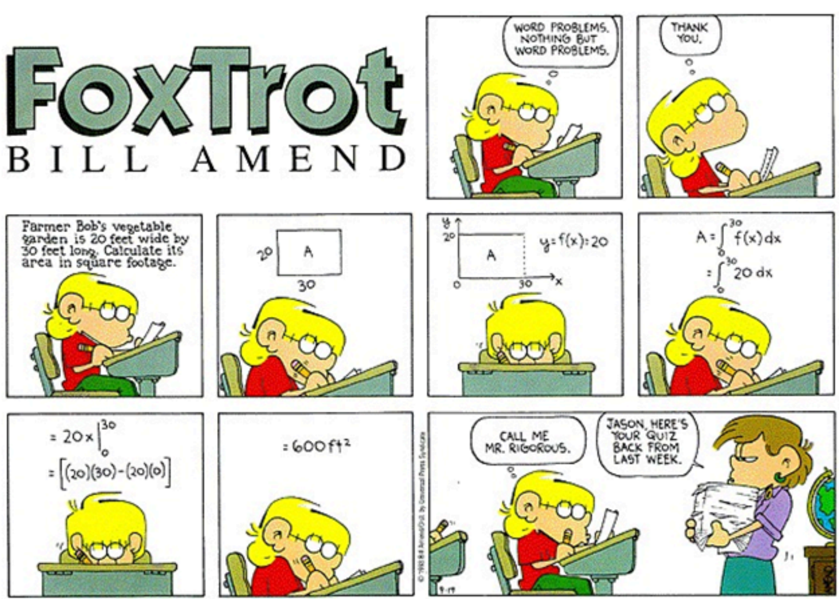

Figura 8 - Cartoon obtido a partir de https://mathematicalmysteries.org/integral-calculus/

4. Calcular áreas de figuras usando a Fórmula de Barrow

Vamos usar este Teorema para fazer o cálculo da área de um segmento de parábola.

Para simplificar os cálculos vamos considerar a função $f(x) = -x^2 + 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

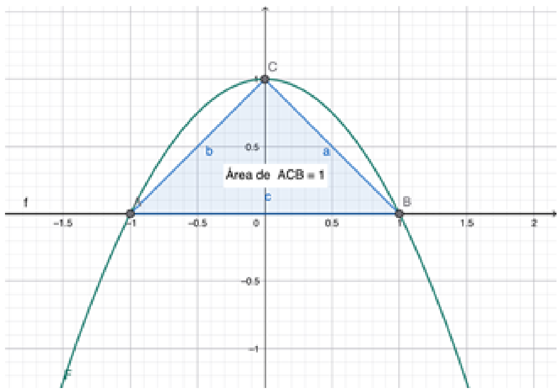

Figura 9 - https://www.geogebra.org/calculator/quayuyy9

Segundo a descoberta de Arquimedes, a área compreendida entre a parábola e o eixo Ox deve ser $\frac{4}{3}$ da área do triângulo e portanto no nosso caso será exatamente $\frac{4}{3}$, pois a área do triângulo é 1. Vamos verificar este resultado usando o cálculo integral.

Assim, temos:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{-x^3}{3} + x\Big|_{x=1} - \left(\frac{-x^3}{3} + x\Big|_{x=-1}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

como se esperava.

5. Provar e aplicar propriedades das primitivas generalizadas aos integrais

As primitivas e os integrais têm várias propriedades que podem ser muito úteis no cálculo de áreas.

> **Propriedade 2**
>
> Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Seja k uma constante real qualquer. Temos que a primitiva do produto da constante k pela função f é igual ao produto da constante k pela primitiva da função f (a menos de uma constante). Ou seja:
>
> $$P(kf(x)) = kP(f(x)) + C \text{ ou } \int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C, C\epsilon\mathbb{R} .$$

Demonstração:

Para demonstrar esta propriedade basta observar que ambas as funções têm a mesma derivada. Se for $P(kf(x)) = G(x)$ então, por definição de primitiva, $G'(x) = kf(x)$. Por outro lado, se for $kP(f(x)) + C = H(x)$, temos:

$$H'(x) = (kP(f(x)) + C)' = (kP(f(x)))' + C' = k(P(f(x)))'$$

pelas propriedades da derivação. Logo, vem que:

$$H'(x) = k(P(f(x)))' = kf(x).$$

Assim G e H têm a mesma derivada, logo pelo Teorema 1, diferem por uma constante, como queríamos provar.

Propriedade 3

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Temos que a primitiva da soma das funções f e g é igual à soma das primitivas das funções f e g (a menos de uma constante). Ou seja:

$$P(f(x) + g(x)) = P(f(x)) + P(g(x)) + C .$$

ou

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C, C \in \mathbb{R} .$$

A demonstração é idêntica à da propriedade anterior.

Propriedade 4

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Seja k uma constante real qualquer. Temos que o integral entre a e b do produto da constante k pela função f é igual ao produto da constante k pelo integral entre a e b da função f. Ou seja:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

Demonstração:

Para demonstrar esta propriedade basta usar a fórmula de Barrow. Sendo f uma função contínua então tem primitiva. Seja $[Pf(x)]$ uma primitiva de f no intervalo dado. Temos que:

$$[Pkf(x)] = k[Pf(x)]$$

pela propriedade 2. Logo, vem que:

$$\int_a^b kf(x)dx = [kPf(x)]\Big|_a^b = k[Pf(x)]\Big|_a^b$$

e ainda que:

$$k\int_a^b f(x)dx = k[Pf(x)]|_a^b$$

Logo, temos:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Propriedade 5</u>

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Temos que o integral entre a e b da soma das funções f e g é igual à soma dos integrais entre a e b das funções f e g. Ou seja:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

A demonstração é idêntica à da propriedade anterior.

Vamos aplicar estas propriedades em dois exemplos.

<u>Exemplo 1</u>

Aplicando as propriedades 2 e 3, temos que:

$$\int\left(-5x^2 + 7x + 2\right)dx = \int\left(-5x^2\right)dx + \int(7x)dx + \int(2)dx =$$

$$= -5\int\left(x^2\right)dx + 7\int(x)dx + \int(2)dx =$$

$$= -5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Exemplo 2

Para calcular o integral

$$\int_1^2 \left(x^3 + x^2\right)^2 dx$$

devemos primeiro desenvolver o quadrado do binómio:

$$\int_1^2 \left(x^3 + x^2\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^6 + 2x^5 + x^4\right) dx$$

Agora aplicamos a propriedade 5. Temos que:

$$\int_1^2 \left(x^3 + x^2\right)^2 dx = \int_1^2 x^6 dx + \int_1^2 2x^5 dx + \int_1^2 x^4 dx =$$

$$= \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 + \left[2\frac{x^6}{6}\right]_1^2 + \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7} + \frac{2^6}{3} - \frac{1^6}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} =$$

$$= \frac{127}{7} + \frac{63}{3} + \frac{231}{5}$$

6. Construir uma tabela de primitivas simples

Para facilitar o cálculo de primitivas poderemos elaborar uma tabela que poderá ser consultada sempre que for necessário e assim agilizar o cálculo.

Vamos então preencher a tabela seguinte:

Função	Primitiva
k	
$x^n, n \neq -1$	
e^x	
$a^x, a > 0, a \neq 1$	
$\frac{1}{x}, x > 0$	
$\frac{1}{x \ln a}, x > 0$	
$sen(x)$	
$cos(x)$	
$tg(x)$	

De acordo com a definição de primitiva teremos de encontrar as funções cujas derivadas sejam as funções pretendidas, ou seja, teremos de preencher a tabela seguinte:

Função	Derivada
	k
	$x^n, n \neq -1$
	e^x
	$a^x, a > 0, a \neq 1$
	$\frac{1}{x}, x > 0$
	$\frac{1}{x \ln a}, x > 0$
	$sen(x)$
	$cos(x)$
	$tg(x)$

A partir da nossa experiência anterior com o cálculo das derivadas, e das regras de derivação, poderemos facilmente concluir que esta última tabela deve ser:

Função	Derivada
kx	k
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}, n \neq -1$	$x^n, n \neq -1$
e^x	e^x
$\frac{1}{ln\, a}a^x, a > 0, a \neq 1$	$a^x, a > 0, a \neq 1$
$ln\, x, x > 0$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$log_a x, x > 0$	$\frac{1}{x\, ln\, a}, x > 0$
$-\ cos(x)$	$sen(x)$
$sen(x)$	$cos(x)$
$\frac{-1}{cos^2(x)}$	$tg(x)$

Estando esta tabela preenchida, basta trocar as duas colunas para obter a tabela de primitivas, sem esquecer a constante arbitrária, que teremos de considerar de acordo com o Teorema 1:

Função	Primitiva
k	$kx + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{ln\, a}a^x + C, a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$ln\, x + C, x > 0$
$\frac{1}{x\, ln\, a}, x > 0$	$log_a x + C, x > 0$
$sen(x)$	$-\ cos(x) + C$
$cos(x)$	$sen(x) + C$
$tg(x)$	$\frac{-1}{cos^2(x)} + C$

Estas primitivas são frequentemente consideradas como **Primitivas Imediatas**, visto decorrerem imediatamente das derivadas conhecidas, sendo quase automática a obtenção da tabela destas primitivas.

Combinando estas tabelas com as propriedades 2 e 3 poderemos já calcular primitivas de um grande número de funções.

Exemplo 3

Para determinar a primitiva de

$$cos(x) + \frac{1}{2x}, \text{ com } x > 0$$

Poderemos começar por aplicar as propriedades 2 e 3:

$$P\left(cos(x) + \frac{1}{2x}\right) = Pcos(x) + \frac{1}{2}P\frac{1}{x}$$

Portanto, recorrendo à tabela que construímos, obtemos:

$$P\left(cos(x) + \frac{1}{2x}\right) = sen(x) + \frac{1}{2}ln(x) + C$$

Poderemos sempre verificar se o nosso resultado é correto através da derivação do resultado, ou seja, mostrando que:

$$\left(sen(x) + \frac{1}{2}ln(x) + C\right)' = cos(x) + \frac{1}{2x}$$

7. Usando combinações lineares de funções

As propriedades do parágrafo anterior não só alargam o lote de funções que já conseguimos primitivar, como permitem aplicações ao cálculo de áreas mais interessantes.

Suponhamos que pretendemos calcular a área limitada pela figura compreendida entre os gráficos de $f(x) = 3 + x$ e $g(x) = 2x^2$.

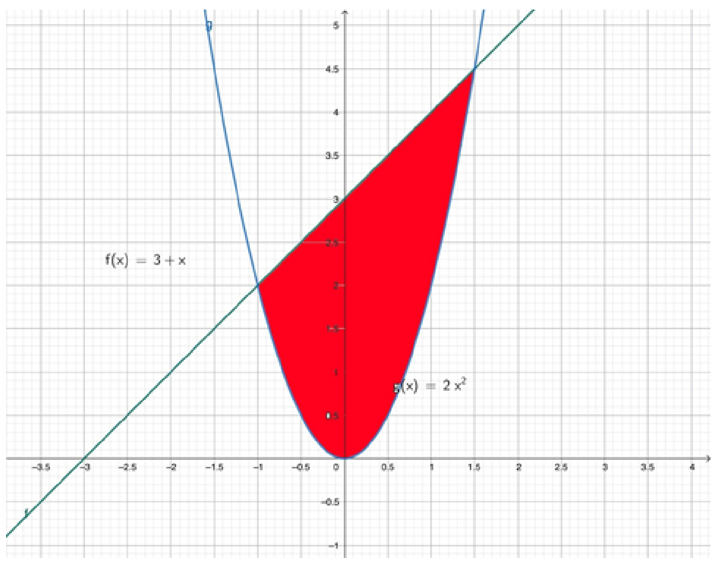

Figura 10

Para calcular esta área basta observar que a área da figura a vermelho é a diferença entre a área sob a curva de f e acima do eixo $0x$, entre a reta $x = -1$ e a reta $x = 1,5$ e a área sob a curva de g e acima do eixo $0x$, entre as mesmas retas.

Assim, a área da figura a vermelho será dada por:

$$\int_{-1}^{1,5} (2 + x)dx - \left(\int_{-1}^{1,5} 2x^2 dx\right)$$

Também, pela propriedade 5, poderíamos considerar que, na realidade, a área será o integral da diferença das duas funções:

$$\int_{-1}^{1,5}\left[(2 + x) - 2x^2\right]dx$$

Esta abordagem será mais vantajosa quando, antes de efetuar o cálculo do integral, for possível simplificar a função a integrar. O cálculo de qualquer dos integrais aqui presentes pode ser efetuado com as propriedades já estudadas.

Suponhamos agora que pretendemos calcular a área limitada pela figura compreendida entre os gráficos de $f(x) = 2 + cos(x)$ e $g(x) = 4x^2$.

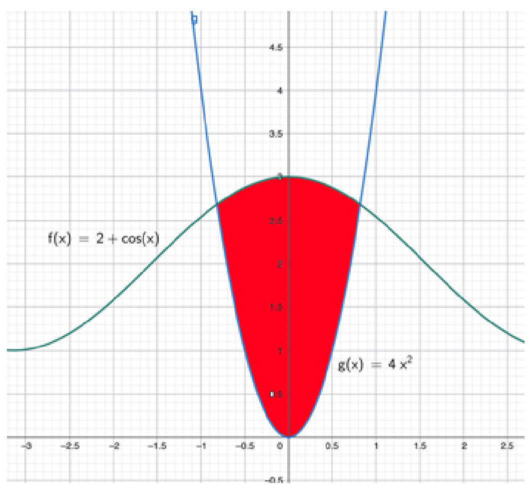

Figura 11

Para calcular esta área basta observar igualmente que a área da figura a vermelho é a diferença entre a área sob o gráfico de f e sob o gráfico de g, entre a abcissa da interseção das duas curvas à esquerda e à direita. O problema está em estabelecer quais são as abcissas dos pontos de interseção das duas curvas. Para isso teremos de resolver a equação:

$$2 + cos(x) = 4x^2$$

Como não é possível obter um valor exato das soluções desta equação, teremos de recorrer a um método que permita obter um valor aproximado das soluções, como o método de Newton-Raphson. Obteremos assim as soluções a_1 e a_2 e poderemos calcular um valor aproximado da área pretendida através do integral:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(2 + cos(x) - 4x^2\right) dx$$

8. Possível aprofundamento

Seja f a função definida em $[-\ 2,\ 3]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & se -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & se -1 > x > 1 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} & se\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

A região do plano delimitada pelo gráfico de f, as retas verticais $x =-\ 2$, $x\ =\ 3$ e o eixo Ox está esboçada na figura 12.

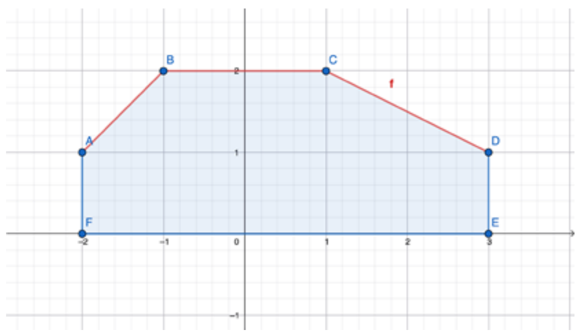

Figura 12 - https://www.geogebra.org/calculator/nudbrsjh

Para calcular esta área precisamos de calcular um integral como o seguinte:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx$$

Como a função é definida por ramos, será interessante conhecer um resultado que permita separar o integral por intervalos de modo a efetuar um cálculo mais simples em cada intervalo.

<u>Teorema de Chasles</u>

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Seja c um ponto no interior do intervalo $[a, b]$. Temos que:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx\ = \int_{a}^{c} f(x)dx\ + \int_{c}^{b} f(x)dx\ .$$

O matemático francês Michel Chasles (1793-1880) foi um matemático notável no campo da Geometria tendo mesmo sido apelidado de "Imperador da Geometria". Foi eleito para a Academia das Ciências de Paris em 1851 e para a inglesa Royal Society em 1854. Descobriu muitos resultados em Geometria, nomeadamente o seguinte, sobre cónicas: "Considerem que existem cinco cónicas (elipses, parábolas ou hipérboles) num plano; existem 3.264 cónicas tangentes a estas cinco (estas cónicas podem ser reais ou complexas)".

Uma história curiosa associada a este matemático tem a ver com o seu interesse por documentos históricos. Acreditou na veracidade de documentos atribuídos a Leibniz, Bernoulli, Galileu ou Pascal e pagou elevadas somas a um falsário para os obter. Quando se descobriu que eram falsos, resignou-se exceto no caso das cartas de Pascal que provariam que ele teria descoberto a Lei da Atração Universal antes de Newton.

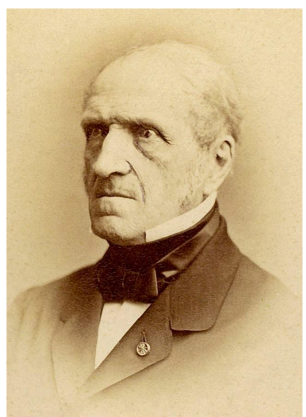

Figura 13 - Michel Chasles (1793-1880)

O Teorema de Chasles permite calcular a área da figura 12, do seguinte modo:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x + 3)dx + \int_{-1}^{1} 2dx + \int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{-1} + [2x]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - 3 - (2 - 6) + 2 - (-2) + \left(-\frac{9}{4} + \frac{15}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - 3 + 4 + 4 + \frac{21}{4} - \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} + 8 =$$

$$= \frac{17}{2}$$

Podemos verificar a correção do nosso resultado calculando geometricamente a área, o que é possível neste caso pois a figura é composta por polígonos.

9. A tecnologia no cálculo de primitivas e integrais

Existe software que nos permite calcular tanto primitivas como integrais definidos, para obter tanto valores exatos como aproximados.

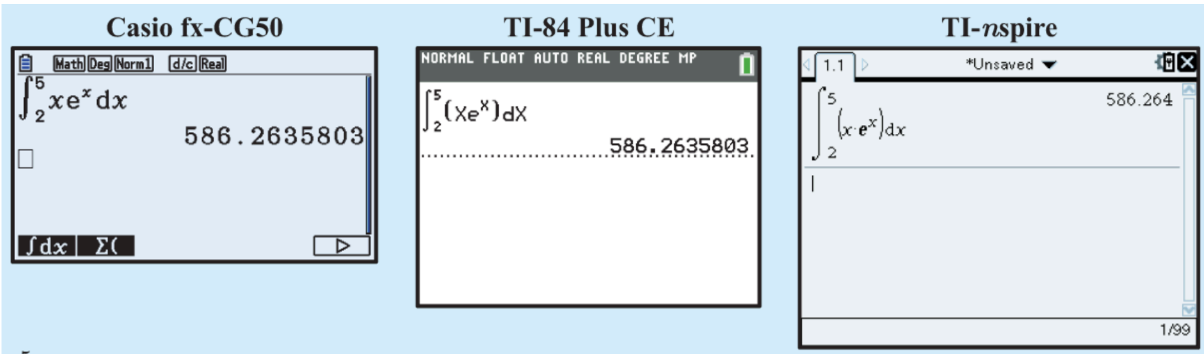

Figura 14 - Imagem de Haese, M. et al. (2019). Mathematics - Applications and Interpretation HL 2 (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.

Um software gratuito muito popular é o ***Symbolab*** que, não só calcula primitivas e integrais, como explica os passos necessários até chegar à solução. Um exemplo pode ser observado na figura 15:

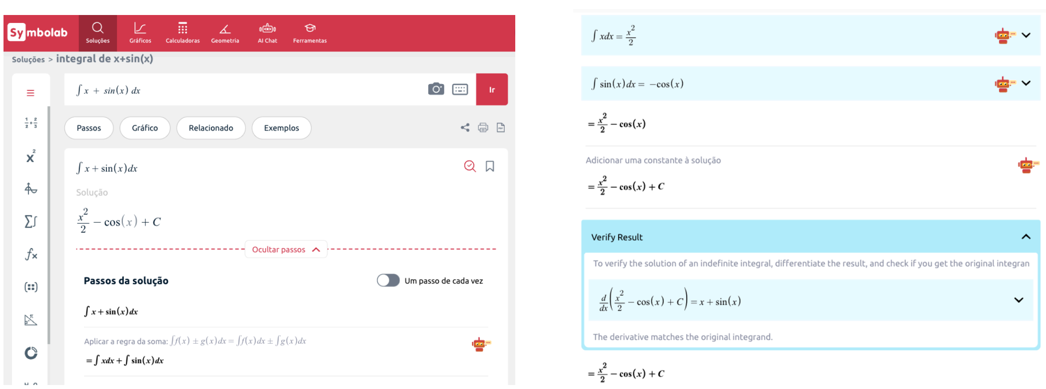

Figura 15 - https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cint%20x%20%2Bsin%5Cleft(x%5Cright)?or=input

Este software pode ser uma grande ajuda quando os alunos estão a estudar primitivas e integrais. Coloca-se contudo a questão de saber se este e outros softwares conseguem calcular todas as primitivas. Por um lado, o cálculo pode ser extremamente complicado e o software não o conseguir fazer em tempo útil. Por outro lado o seu cálculo pode até ser impossível de fazer, se usarmos apenas funções elementares conhecidas e não recorrermos a somas infinitas de funções. Vejamos o que o software ***Symbolab*** responde quando lhe pedimos para calcular

$$\int \frac{sinx}{x} dx$$

que parece ser uma primitiva simples.

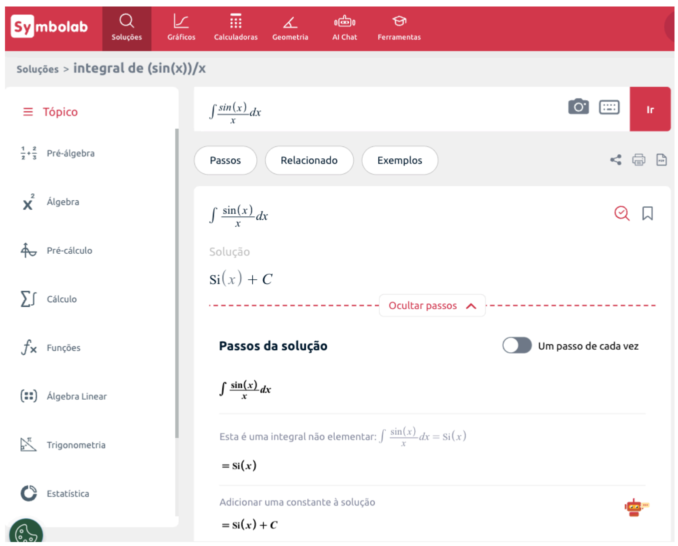

Figura 16 - https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cint%20%5Cfrac%7Bsin%5Cleft(x%5Cright)%7D%7Bx%7D?or=input

O software responde com a introdução de uma função não elementar chamada **Seno Integral**. Foi provado que a função $\frac{sin(x)}{x}$ não tem primitiva em termos de funções elementares conhecidas e sem recorrer a somas infinitas de funções. A função **Seno Integral** é definida exatamente como o integral seguinte:

$$Si(x) = \int \frac{sinx}{x} dx$$

Poderemos experimentar outras funções para perceber melhor quais as que o software consegue calcular e quais não parece conseguir. Outro exemplo aparece na figura 17.

Figura 17 - https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cint%20sin%5Cleft(x%2Bx%5E%7B2%7D%2Bx%5E%7B3%7D%5Cright)dx?or=input

Para esta função o software responde mesmo que não a consegue calcular. Poderemos tentar com outro software mais sofisticado, como o ***Wolfram Alpha***, como aparece na figura 18.

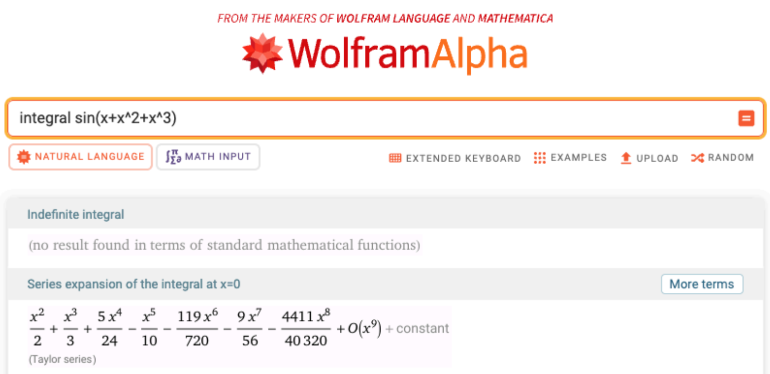

Figura 18 - https://www.wolframalpha.com/input?i=integral+%28sin%28x%2Bx%5E2%2Bx%5E3%29%29

Neste caso, o software escolheu logo avançar para o cálculo de somas infinitas de funções polinomiais por, segundo alega, não ter encontrado um resultado usando funções usuais.

Existem outros softwares gratuitos e de fácil utilização capazes de efetuar cálculos numéricos e simbólicos de integrais, como por exemplo, o Geogebra, o Desmos, o simulador da calculadora Numworks, o Photomat, o Maple Calculator e o Maxima (este último software é permitido nos exames na Finlândia).

Estas experiências mostram que o mundo do cálculo de primitivas é muito vasto e com muitos desafios interessantes (e até surpreendentes) pela nossa frente.

10. Referências

Apostol, T. (1999). Cálculo Volume 1 - Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear. Barcelona: Reverté.

Devlin, K. (2002). Matemática - A ciência dos padrões. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. et al. (2000). História da Matemática, Universidade Aberta.

Haese, M. et al. (2019). Mathematics - Analysis and Approaches HL 2 (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). Mathematics - Applications and Interpretation HL 2 (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). Mathematics - core topics HL (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. et al (1997). Cálculo – volume 1. Rio de Janeiro: LTC editora.

Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. Revue MathémaTICE, nº 75. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414

Pina, H. (2010). Métodos Numéricos, Lisboa: Escolar Editora.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). Compêndio de Matemática (3 volumes). Lisboa: GEP.

SESAMATH - Manuel Maths 1re - Programme 2019. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019

SESAMATH - Manuel Maths 2de - Programme 2019. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019

SESAMATH - Manuel Maths Terminale - Spécialité - Édition 2020. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020