

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Matemática A
12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto
2025/2026



Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Funções exponenciais e logarítmicas
(Matemática A 12.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do
Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
<https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/>

Data:

Lisboa, março de 2026



Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P, (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a

antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2024/2025 foram:

Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Hélder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe e Carla Damásio (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE desenvolveu um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.

O EduQA e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 A começar	Funções Função exponencial	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar função exponencial, como função do tipo $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+$ e as suas propriedades. • Identificar, em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d, a \in \mathbb{R}^+, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, monotonia e comportamento quando x tende para mais infinito e menos infinito. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 2 Resolução gráfica de problemas modelados por exponenciais	Função exponencial	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver, graficamente, equações envolvendo funções exponenciais em contexto de resolução de problemas. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

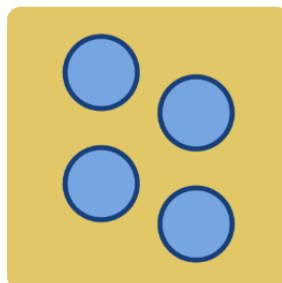
2	<p>Tarefa 3 Função inversa de uma função</p>	<p>Função inversa</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer as raízes de índice natural, nomeadamente, a radiciação de índice natural como inversa da potenciação de expoente natural. • Identificar funções invertíveis e não invertíveis, nomeadamente recorrendo aos gráficos das funções e ao “teste da reta horizontal” e à sua formulação algébrica, em casos simples. • Estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. 	<p>Trabalho a pares, com discussão final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	<p>Tarefa 4 Logaritmos</p>	<p>Função logarítmica</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial com a mesma base. • Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples. 	<p>Trabalho a pares, com discussão final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Raciocínio e lógica matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	<p>Tarefa 5 Função logarítmica</p>	<p>Função logarítmica</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento de funções com logaritmos. 	<p>Trabalho a pares, com discussão final em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

1	Tarefa 6 Propriedades e regras operatórias dos logaritmos	Função logarítmica	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Raciocínio e lógica matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 7 Equações com exponenciais e logaritmos	Função logarítmica	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente. 	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> • Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)
2	Coleção de problemas Exponenciais e logaritmos	Função exponencial Função inversa Função logarítmica	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente.. 	Trabalho em grupo	<ul style="list-style-type: none"> • Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Tarefa 1

A começar

Parte I - Círculos em “crescimento”



Esta tarefa será desenvolvida na plataforma Amplify Classroom.

Para tal deverás aceder a partir do url seguinte:

https://classroom.amplify.com/activity/692877480adbd11d8a17be21?utm_campaign=share&utm_content=activity&lang=pt-BR

Após completar a resolução da atividade “Círculos em Crescimento”, para cada uma das situações modeladas, responde às seguintes questões:

A função explorada na atividade **Amplify Classroom** admite como domínio o conjunto dos números inteiros positivos.

1. Se, em vez de restringirmos o expoente aos inteiros positivos, **admitirmos que o expoente pode ser qualquer número real x** , obtemos a **função cuja expressão é:**

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Faz uma representação gráfica da função encontrada no item anterior.



3. Apresenta o estudo de algumas das suas características, nomeadamente:

Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Monotonia	
Interseção com os eixos coordenados	

Parte II - Função exponencial de base $a \in R^+$

1. Representa, no mesmo referencial, os gráficos das funções $y_1 = 3^x$, $y_2 = 5^x$ e $y_3 = e^x$ (sendo e o número de Euler*).

 - 1.1. Identifica os pontos comuns dos gráficos das funções.
 - 1.2. Determina o valor de cada função para $x = 4$ e compara os resultados, tendo em consideração o crescimento das funções.
 - 1.3. Qual é a relação entre o valor da base e o crescimento de cada uma das funções?

*
O número de Euler, também conhecido como número de Neper, é um número irracional transcendente aproximadamente igual a 2,71828. Está associado a modelos matemáticos de crescimento (ou decrescimento) de populações ou capital em depósitos com juros compostos, entre outros.



2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos das funções $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $y_3 = e^{-x}$.

2.1. Os gráficos têm algum ponto em comum? Se sim, qual? Porquê?

2.2. Qual é a relação entre os gráficos das três funções?

2.3. O que acontece ao gráfico destas funções quando x assume valores muito grandes?

2.4. Representa graficamente a função $y_4 = 3^{-x}$ e compara com a representação gráfica de y_1 . Qual é a relação entre as expressões algébricas?

2.5. Estuda, com recurso à tecnologia, a família de funções do tipo

$y = a^x$, $0 < a < 1$, e regista, na tabela seguinte, algumas das suas características:

Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Monotonia	
Interseção com os eixos coordenados	



Parte III - Transformações dos gráficos

Considera a família de funções do tipo $g(x) = b \times a^{x-c} + d$, $a > 0$. Considera também a função definida por $f(x) = 2^x$ e P o ponto do gráfico de f de abcissa 3.

1. Determina as coordenadas do ponto P .
2. Completa a tabela seguinte onde se considera o transformado de P para cada uma das seguintes funções:

Funções	Expressão algébrica	Coordenadas do ponto transformado	Descrição da transformação
$f(x)$			
$f(x + 1)$			Translação horizontal segundo o vetor de coordenadas $(-1, 0)$ ou Dilatação vertical de razão 2
$f(x) - 4$			
$3 \times f(x)$		$(3, 24)$	
$3 \times f(-x)$			
$-f(x)$	-2^x		
$3 \times f(x + 1) - 4$			
	$-\frac{2}{3} \times 2^{x-1} + 5$		



Tarefa 1

A começar

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se iniciar o trabalho com funções exponenciais. Os alunos devem recordar as propriedades operatórias de potências e compreender de que forma as transformações de funções se refletem nos respetivos gráficos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Propriedades operatórias de potências e transformações de funções.

Materiais e recursos: Computador com acesso à Internet e calculadora gráfica.

Notas para o professor:

A ligação apresentada na Parte I, não se destina ao trabalho direto com os alunos. Cada professor deverá criar uma conta na aplicação amplify, a turma correspondente e atribuir esta tarefa à turma (ou turmas) criada(s) para que os seus alunos possam desenvolver o trabalho proposto com a monitorização do professor. No último item da tarefa, o preenchimento da segunda linha da tabela pode depender da escolha que for considerada entre as duas transformações possíveis. A equivalência algébrica destas duas opções deverá ser reconhecida pelos alunos.



Tarefa 2

Resolução gráfica de problemas modelados por exponenciais

Problema 1: O Crescimento de bactérias

Um cientista está a desenvolver um estudo sobre a variação da população de um determinado tipo de bactérias. Observou que o número de bactérias **duplica a cada hora**. Inicialmente, o cientista registou a existência de **100 milhares de bactérias**.

1. Considerando como momento inicial ($t = 0$) o 1.º registo efetuado pelo cientista, preenche a tabela seguinte:

Tempo (em horas)	0	1	2	3	4
Nº de bactérias (em milhares)	100				

2. Escreve uma expressão, $n(t)$, que permite determinar o número de bactérias ao fim de t horas após o 1.º registo.
3. Determina $n(5,5)$ e $n(-\frac{1}{2})$ e interpreta os valores no contexto do problema.
4. Faz a representação gráfica dessa função .
5. Determina, graficamente, quanto tempo é necessário para que a população de bactérias atinja 1 milhão de bactérias. Apresenta o resultado em horas e minutos (arredondados às unidades).
Em cálculos intermédios utiliza arredondamentos às milésimas.
6. O que acontece à população de bactérias passado muito tempo desde o início da observação?



Problema 2: "O café que arrefece"

Registou-se a temperatura de um café a partir do momento em que este foi servido. Admite que a temperatura do café (T), em graus centígrados, ao fim de t minutos, é dada pela expressão: $T(t) = 20 + 60e^{-kt}$.

1. A que temperatura estava o café no momento em que foi servido?
2. Após 10 minutos o café estava a uma temperatura de 60°C .
 - 2.1. Determina o valor de k arredondado às centésimas.
 - 2.2. A que temperatura se encontra o café ao fim de 20 minutos.
 - 2.3. Faz uma representação gráfica da função.
 - 2.4. Quanto tempo é necessário esperar para que a temperatura do café seja metade da temperatura inicial?
 - 2.5. Para que valor tende a temperatura com o decorrer do tempo. Qual é o seu significado no contexto do problema?

Problema 3: "Dinheiro que cresce com o tempo"

Um investimento de 1000€ é aplicado a uma taxa de juro anual de 5% com uma capitalização anual.

1. Completa a tabela:

Tempo (em anos)	0	1	2	3	4
Montante (em euros)	1000				

2. Escreve a expressão que traduz o montante que resulta do investimento ao fim de t anos.
3. Utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora, determina ao fim de quantos anos é que o capital duplica?



Problema 4 : Crescimento e decrescimento de substâncias químicas

Num laboratório, estuda-se o comportamento de dois compostos químicos, A e B , ao longo do tempo (em horas), relativamente à sua concentração (em miligramas por litro, mg/L) numa determinada solução.

As funções que descrevem as concentrações, de cada um dos compostos químicos, são definidas por:

$$C_A(t) = 5 \times 2^{0,5t} \text{ e } C_B(t) = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5t}, \text{ com } t \geq 0.$$

1. Determina o valor de cada uma das concentrações no instante inicial.
2. Indica se cada uma das funções é crescente ou decrescente e interpreta o significado desse comportamento no contexto da situação problemática apresentada.
3. Alguma das funções assume valores negativos em algum instante? Interpreta os valores obtidos no contexto do problema.
4. Determina, algebricamente e graficamente, o instante t em que as duas concentrações são iguais.
5. Determina o comportamento das funções quando $t \rightarrow +\infty$. Explica o que esse comportamento revela sobre a evolução da concentração das substâncias A e B .



Tarefa 2

Resolução gráfica de problemas modelados por exponenciais

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se que os alunos se familiarizem com a forma como diferentes fenômenos podem ser descritos através modelos matemáticos envolvendo funções exponenciais. Em paralelo, o recurso à calculadora gráfica, para estudar modelos e a interpretação dos valores obtidos no contexto do problema em estudo, devem ser competências reforçadas, embora já tenham sido trabalhadas anteriormente.

Conhecimentos prévios dos alunos: Resolução gráfica de equações.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:

A linguagem matemática e a sua articulação com a linguagem natural, especialmente em contextos de modelação, devem ser promovidas para além da mera obtenção de respostas corretas às questões colocadas. O papel do professor deverá contemplar esta preocupação, formulando questões orientadoras e solicitando a produção de textos com níveis progressivos de rigor e precisão.

A utilização da calculadora gráfica, não constitui um fim em si mesmo, mas deve ser incentivada para que os alunos desenvolvam uma autonomia crescente no recurso a esta ferramenta, reconhecendo o seu potencial na exploração e interpretação de situações matemáticas.



Tarefa 3

Função inversa de uma função

Parte I

A Maria lançou o seguinte desafio ao Francisco:

“Pensei num número e elevei-o ao cubo. De seguida, subtraí 5 unidades, tendo obtido um determinado resultado. Qual foi o número em que pensei?”

1. Se o resultado for 22, qual foi o número que a Maria pensou? E se for 120?
2. Preenche a seguinte tabela:

Número pensado pela Maria	Número obtido
-5	
0	
6	
10	

3. Ajuda o Francisco a encontrar uma estratégia que lhe permita determinar o número pensado a partir do número obtido.
4. Preenche a tabela seguinte recorrendo à estratégia encontrada no item anterior.

Número obtido	Número pensado pela Maria
120	
-5	
211	
995	

5. Escreve uma expressão algébrica para cada uma das situações descritas (o desafio da Maria e a estratégia do Francisco).
6. Qual é a relação entre as duas situações?



Parte II

Considera a função real de variável real definida em \mathbb{R} por $g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$.

1. Abre a aplicação da calculadora Suite do Geogebra e realiza as construções seguintes:
 - representa graficamente a função g ;
 - constrói a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$);
 - marca no gráfico da função g o ponto $A(a, g(a))$;
 - faz uma reflexão do ponto A em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (ponto A');
2. Visualiza as coordenadas do ponto A e do ponto A' . Que relação existe entre as coordenadas destes dois pontos?
3. Obtém o “rasto” do ponto A' , ativando o traçado geométrico e movimentando o ponto A com o seletor.
4. Representa, a partir da folha algébrica, o gráfico da função $y = Inversa(g(x))$. Que observas?
5. Resolve a equação $y = g(x)$ em ordem a x . Compara com a expressão da função inversa, obtida no ponto anterior.

Dada a função $f : A \rightarrow B$, chama-se **função inversa** de f à função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \text{ para todo } x \in A \text{ e } y \in B$$

Para discutir:

Será que todas as funções admitem função inversa?



Parte III

Desafio 1

Há países que usam para unidade de medida da temperatura o grau Celsius ($^{\circ}\text{C}$), enquanto outros usam o grau Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$).

A expressão seguinte permite converter $^{\circ}\text{F}$ em $^{\circ}\text{C}$:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

onde:

- F representa a temperatura em graus Fahrenheit;
- C representa a temperatura em graus Celsius.

1. Um português chega aos Estados Unidos da América e verifica que a temperatura no local em que se encontra é 23°F . Qual é a temperatura correspondente em $^{\circ}\text{C}$?
2. Um turista americano que visite Portugal tem de resolver o problema inverso, isto é, tem de converter em $^{\circ}\text{F}$ temperaturas obtidas em $^{\circ}\text{C}$.
 15°C a quantos $^{\circ}\text{F}$ correspondem ? E 22°C ?
3. Determina uma fórmula que exprime F em função de C .
4. Existe algum valor de temperatura comum às duas escalas (Fahrenheit e Celsius)?
5. Representa, no mesmo referencial o gráfico representativo das duas funções, C e F na janela $[-80, 80] \times [-60, 60]$. Qual é a relação entre os dois gráficos? Justifica.

Desafio 2

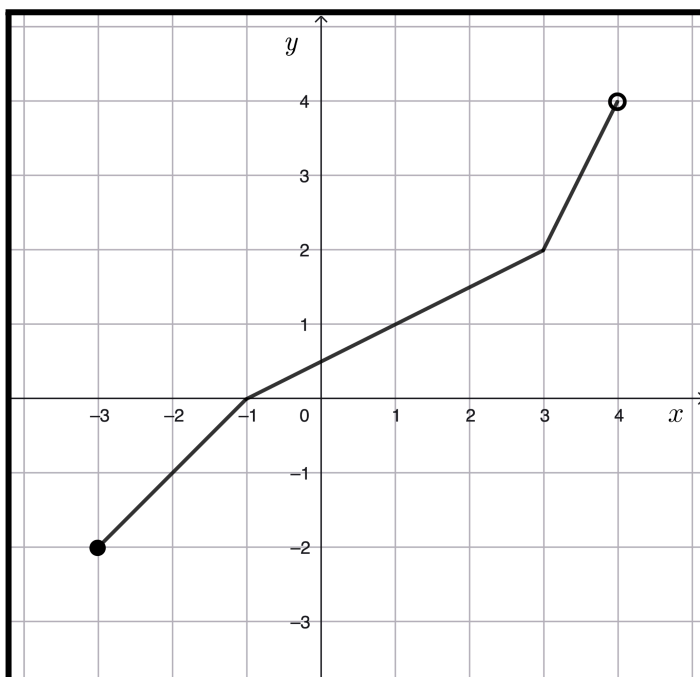
Considera a função h , real de variável real, definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por $h(x) = \frac{3}{x-2}$

1. Determina o contradomínio de h .
2. Determina as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos de h e de h^{-1} .
3. Determina, analiticamente, uma expressão de $h^{-1}(x)$.
4. Determina o domínio e o contradomínio de h^{-1} . Estabelece uma relação com o domínio e contradomínio de h .
5. Determina:
 - 5.1. $h^{-1}(1)$, sabendo que $h(5) = 1$,
 - 5.2. b , sabendo que $h(2a) = \frac{1}{2}$ e que $h^{-1}(b) = a$.



Desafio 3

Considera a função g representada graficamente no referencial da figura seguinte:



1. Qual é o D_g e o D'_g ?
2. Seja g^{-1} a função inversa de g , determina:
 - 2.1. $g^{-1}(-2)$;
 - 2.2. $g^{-1}(0)$.
3. Determina a solução da equação $7 + g^{-1}(x - 2) = 6$.
4. Determina as soluções da equação $g^{-1}(x) = g(x)$.
5. Desenha uma representação gráfica da função inversa de g .



Tarefa 3

Função inversa de uma função

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

O objetivo desta tarefa é proporcionar aos alunos o contacto com o conceito de função inversa, identificando gráficos e expressões algébricas de funções inversas. A identificação de funções que não admitem inversa, e nestes casos, a possibilidade de considerar restrições ao domínio que permitam obter a função inversa, deve ser discutida a partir de casos simples.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções polinomiais e racionais.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas para o professor:

A discussão sobre se todas as funções admitem função inversa, a fazer no final da Parte II da tarefa é uma boa oportunidade para valorizar o papel da comunicação matemática. Os alunos devem identificar bons exemplos de funções invertíveis, de funções não invertíveis e de restrições ao domínio que permitam inverter uma função. Caberá ao professor acompanhar a discussão ajudando os alunos a selecionar os melhores exemplos e a descrição das características relevantes de cada exemplo para ilustrar os conceitos que se considerem relevantes.

Contudo, não se pretende uma formalização algébrica de conceitos relevantes como a definição de função injetiva ou o formalismo associado à restrição da função a um subconjunto do domínio.



Tarefa 4

Logaritmos

Por vezes temos situações problemáticas com funções exponenciais em que conhecemos a sua imagem e pretendemos saber o respetivo objeto. Por exemplo, qual é o valor de x que é solução de cada uma destas equações?

- $2^x = 8$
- $3^x = 81$
- $10^x = 100000$
- $2^x = -4$

Considera, por exemplo, a primeira equação. Repara que está a ser pedido o número x a que se deve elevar 2 para obter 8. A esse número x chama-se logaritmo de 8 na base 2 e escreve-se $\log_2 8 = x$.

Temos raciocínios semelhantes nas restantes equações. Na segunda, por exemplo, pede-se o número x a que se deve elevar 3 para obter 81, ou seja, x é o logaritmo de 81 na base 3, $x = \log_3 81$.

Chama-se logaritmo de um número positivo x na base a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), ao número y tal que $a^y = x$.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Nota:

O logaritmo que tem base 10 (logaritmo decimal) pode ser representado sem referência à base, ou seja $\log x$, em vez de $\log_{10} x$.

O logaritmo que tem base e (logaritmo natural) pode ser representado por \ln , em vez de $\log_e x$.

1. Relativamente às equações anteriormente apresentadas:
 - 1.1. Resolve-as, usando cálculo mental.
 - 1.2. Verifica se os teus conjuntos solução estão corretos, recorrendo à tecnologia.



2. Determina o valor exato das soluções das equações seguintes:

2.1. $2^x = 27$

2.2. $3^{x-1} = 32$

2.3. $e^x + 2 = 8$

3. Preenche as tabelas seguintes sem o auxílio de tecnologia. Recorre à tecnologia somente para verificar os teus resultados.

3.1.

x	16	100	$\frac{1}{3}$	1	125		64	0,1	
a	2		3	5		6	4		10
$\log_a x$		2			3	1		-1	4

3.2.

x	a	a^x	$\log_a a^x$
5	2		
3	10		
	3	81	
2		25	

Qual é a relação que podes estabelecer?

3.3.

x	a	$\log_a x$	$\frac{\log_a x}{a}$
	2	4	
9	3		
125	5		
	10	3	

Qual é a relação que podes estabelecer?



4. Escreve o número 5 na forma de um logaritmo de:
- 4.1. base 2 ;
- 4.2. base 10 .
5. Escreve o número 7 na forma de uma potência de:
- 5.1. base 4 ;
- 5.2. base e .
6. Completa as seguintes igualdades, sabendo que $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$\log_a a =$
$\log_a 1 =$
$\log_a a^x =$
$\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a x} =$

7. Os logaritmos surgiram nos séculos XVI e XVII como resposta às dificuldades que os matemáticos enfrentavam na realização de cálculos complicados, sobretudo em problemas de cálculo numérico, de astronomia e de navegação, entre outros.

Para o efeito, construíram as chamadas “tábuas de logaritmos”, tabelas onde constavam números e os seus logaritmos e a partir dessas tabelas conseguiam estabelecer a correspondência entre multiplicações e adições, e entre divisões e subtrações, transformando operações mais complexas em operações mais simples.

Considera a tabela seguinte:

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$\log_2 x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Recorrendo à tabela anterior e sem usares a calculadora determina o resultado das seguintes operações:

7.1. $4096 : 512$

7.2. 128×32



Tarefa 4

Logaritmos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, pretende-se que os alunos construam o conceito de logaritmo a partir da exploração de situações e da análise de regularidades, formulando a definição com base nas relações observadas entre potências e expoentes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Potências.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:

Pretende-se que os alunos compreendam a relação entre uma potência e um logaritmo, valorizando o cálculo mental para estabelecer relações em casos simples. Além disso, é importante que os professores discutam com os seus alunos os motivos pelos quais a base de um logaritmo terá que ser um número positivo e necessariamente diferente de 1.



Tarefa 5

Função logarítmica

Parte I

1. Abre aplicação da calculadora Suite do Geogebra e realiza sucessivamente as construções seguintes:

- Representa a função $f(x) = 2^x$.
- Representa a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).
- Marca um ponto A pertencente ao gráfico a função f .
- Representa A' o transformado do ponto A , na reflexão de eixo $y = x$.
- Ativa o traço do ponto A' e arrasta ponto A .
- Representa a função $h(x) = \log_2 x$.

Descreve a relação que existe entre os gráficos destas duas funções.

2. Considera as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. A partir da aplicação da calculadora Suite do Geogebra:

- 2.1. Representa graficamente as funções f e g .
- 2.2. Quais são as coordenadas do ponto onde os gráficos das funções se intersectam?
- 2.3. Representa a bissetriz dos quadrantes ímpares.
- 2.4. Escreve as expressões algébricas das funções inversas de f e de g , a que vamos chamar f^{-1} e g^{-1} .
- 2.5. Quais são as coordenadas do ponto onde se intersectam as funções f^{-1} e g^{-1} ?



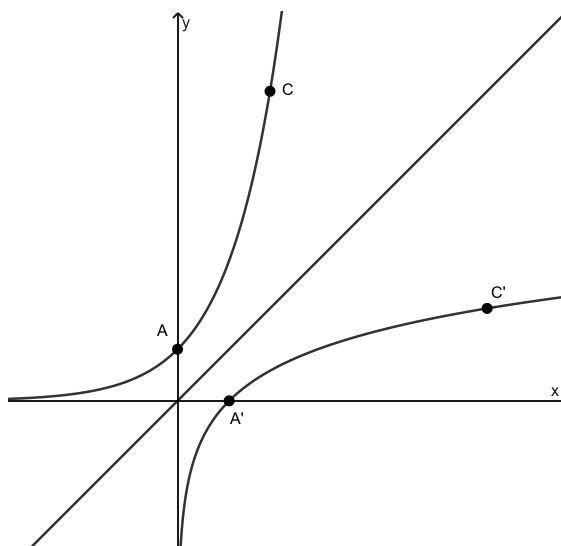
3. Estuda, com recurso à tecnologia, a família de funções do tipo $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, e $g(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$. Regista, na tabela seguinte, algumas das suas características:

	$f(x) = \log_a x$ $a > 1$	$g(x) = \log_a x$ $0 < a < 1$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Sinal		
Monotonia		
Interseção com os eixos coordenados		
Quando x se aproxima de 0, tanto quanto se queira, por valores superiores, para onde tende $f(x)$?		
Quando x assume valores muito grandes, tanto quanto se queira, para onde tende $f(x)$?		



Parte II

1. No referencial da figura seguinte está representada a reta $y = x$, a função $f(x) = e^x$ e a sua função inversa.

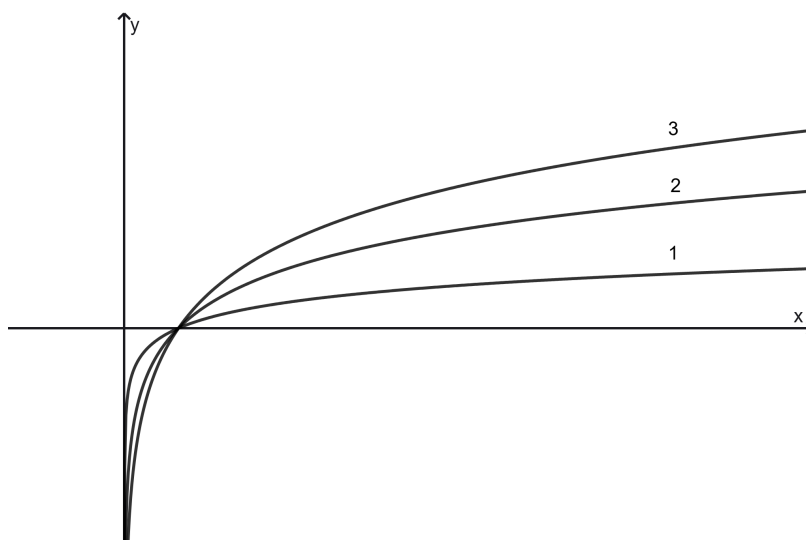


Os pontos A e C pertencem ao gráfico da função f e A' e C' são as suas imagens, respetivamente, pela reflexão de eixo $y = x$.

Sabendo que a ordenada do ponto C é 6, determina as coordenadas dos quatro pontos.

2. No referencial da figura seguinte estão representadas as seguintes funções:

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \ln x \quad \text{e} \quad h(x) = \log x$$



Os gráficos estão numerados de 1 a 3.

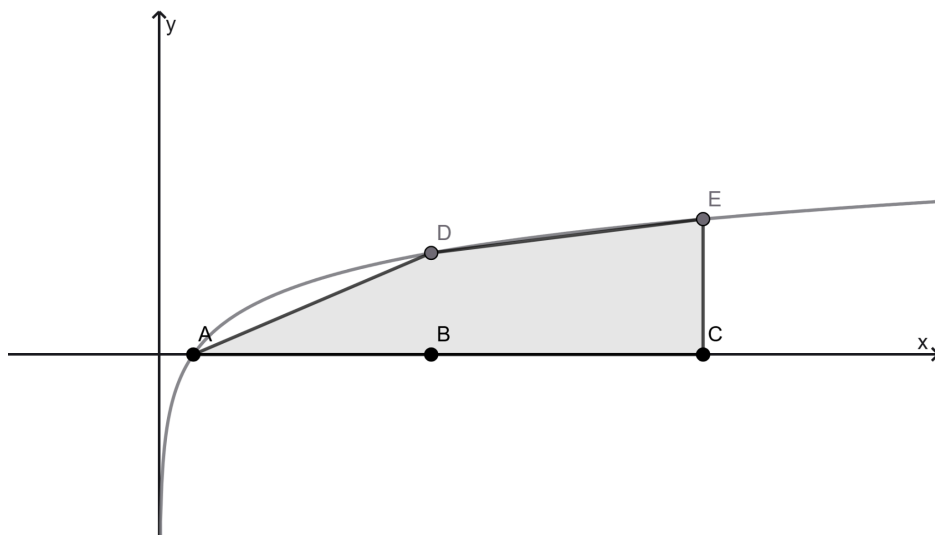
Estabelece a correspondência de cada função com a respetiva representação gráfica.



3. No referencial da figura está representado o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Sabe-se que:

- a abscissa do ponto A é o zero da função f ;
- os pontos B e C têm coordenadas $(8, 0)$ e $(16, 0)$, respectivamente;
- os pontos D e E pertencem ao gráfico da função f e têm a mesma abscissa que os pontos B e C , respectivamente;
- $[ADEC]$ é um quadrilátero.



Determina a área do quadrilátero $[ADEC]$.



Tarefa 5

Função logarítmica

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com o desenvolvimento desta tarefa, pretende-se que os alunos se familiarizem com os gráficos de funções definidas por logaritmos. Devem compreender de que forma a base do logaritmo influencia a monotonia da função e identificar as principais características destas famílias de funções.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função inversa e função exponencial.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

Notas para o professor:

Para além de compreenderem o conceito de função logarítmica e saberem representá-la graficamente, os alunos deverão ser capazes de aplicar estas funções na resolução de problemas em diversos contextos.

Reforça-se que o professor deve incentivar o uso da calculadora gráfica (ou outra tecnologia) para apoiar a visualização e comparar rapidamente gráficos com bases diferentes.

O professor deve preferencialmente apresentar situações reais onde a função logarítmica surge naturalmente, como escalas (pH, Richter, nível sonoro), tempos de reação, entre outros, e incentivar a interpretação dos resultados e a verificação de plausibilidade.

Sempre que se proporcionar, deve ser incentivada a linguagem matemática adequada, orientando os alunos para explicarem por palavras suas o que observam nos gráficos, verbalizando relações e interpretando resultados.



Tarefa 6

Propriedades e regras operatórias dos logaritmos

1.

1.1. Recorrendo à calculadora, se necessário, completa a tabela:

a	x	y	$\log_a x + \log_a y$	$\log_a(xy)$
2	8	4		
3	9	16		
10	1000	100		
e	4	2		

1.2. Compara os resultados obtidos nas duas últimas colunas e formula a conjectura de uma propriedade operatória dos logaritmos.

1.3. Exprime em função de $\ln 2$ e/ou de $\ln 3$ cada um dos seguintes valores:

- a) $\ln 6$
- b) $\ln 9$
- c) $\ln 12$

2.

2.1. Recorrendo à calculadora, se necessário, completa a tabela:

a	x	y	$\log_a x - \log_a y$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$
2	2	4		
3	9	3		
e	21	3		
10	3	10		
e	1	3		

2.2. Compara os resultados obtidos nas duas últimas colunas e formula a conjectura de uma propriedade operatória dos logaritmos.



2.3. Exprime em função de $\ln 2$ e/ou de $\ln 3$ cada um dos seguintes valores:

a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

c) $\ln(1,5)$

d) $\ln\left(\frac{1}{12}\right)$

3.

3.1. Compara o valor das expressões:

a) $2\log_2 6$ com $\log_2 36$

b) $4\log_2 2$ com $\log_2(2^4)$

c) $\log(5^4)$ com $4\log 5$

d) $\ln 8$ com $\ln 2$

e) $\log 81$ com $\log 3$

3.2. Compara os resultados obtidos em 3.1. e formula a conjectura de uma propriedade operatória dos logaritmos de potências.

3.3. Escreve as seguintes expressões na forma $k\log_a b$:

a) $\log_5 3^6$

b) $\log_3 8^{\frac{1}{4}}$

c) $\log_5 16$

4.

4.1. Recorrendo à calculadora, compara os valores das expressões em cada uma das situações:

a) $\log_2 5$ com $\frac{\log 5}{\log 2}$

b) $\log_3 81$ com $\frac{\ln 81}{\ln 3}$

c) $\log_2 7$ com $\frac{\log 7}{\log 2}$

4.2. Compara os resultados obtidos em 4.1, e formula a conjectura da propriedade que permite mudar a base de um logaritmo, obtendo uma expressão equivalente em qualquer base.



- 4.3. Para demonstrar a conjectura anterior, segue as etapas seguintes:
- I. Escreve a igualdade $y = \log_a x$ em ordem a x ;
 - II. Aplica logaritmos de base 10 (ou outra base) a ambos os membros da igualdade obtida em I;
 - III. Aplica a propriedade do logaritmo da potência (trabalhada no item 3.);
 - IV. Resolve a igualdade anterior em ordem a y .

QUADRO RESUMO :

Propriedades operatórias dos logaritmos: $(x, y \in R^+ ; a, b \in R^+ \setminus \{1\} ; p \in R)$	
Logaritmo do produto	$\log_a(xy) = \underline{\hspace{2cm}}$
Logaritmo do quociente	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
Logaritmo da potência	$\log_a(x^p) = \underline{\hspace{2cm}}$
Mudança de base (de a para b)	$\log_a x = \underline{\hspace{2cm}}$

5. Calcula o valor de cada expressão aplicando as propriedades, sem recurso à calculadora:
- 5.1. $\log_2 \frac{16\sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}$
 - 5.2. $\log(0,00002 \times 50)$
 - 5.3. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \log_2(0,5)$
 - 5.4. $\ln\sqrt{e} + 2 \ln(3e) - \ln(9)$
6. Seja x um número real positivo, simplifica a expressão: $e^{4 \ln x} - 10^{2 \log x}$.
7. Sabendo que $\log_2 a = \frac{1}{5}$, qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?



Tarefa 6

Propriedades e regras operatórias dos logaritmos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos sistematizem as regras operatórias dos logaritmos. Os alunos devem compreender a complementaridade destas regras com as regras operatórias das potências, cabendo ao professor conduzir a discussão final da tarefa com a intencionalidade de explorar esta correspondência.

Conhecimentos prévios dos alunos: Definição de logaritmo.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:

No desenvolvimento desta tarefa é recomendado que os alunos utilizem a calculadora gráfica, nomeadamente a função que permite o cálculo de um logaritmo em qualquer base. O recurso à calculadora e a obtenção de valores aproximados deve ser entendido como uma forma de estabelecer as relações algébricas que se pretendem sistematizar.

Relativamente à regra da mudança de base, a sua abordagem pode ser enquadrada no contexto da tecnologia disponível até há pouco tempo, quando ainda não era possível calcular o logaritmo de um número numa base qualquer. Pode observar-se que, ainda hoje, o acesso direto nos teclados das calculadoras atuais se limita apenas aos logaritmos nas bases e e 10.



Tarefa 7

Equações com exponenciais e logaritmos

1. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações, sem recorrer à calculadora.

1.1. $2^x = 8$

1.2. $e^x = 1$

1.3. $3^x = \frac{1}{9}$

1.4. $e^{x+1} = e^3$

1.5. $3^x - 3^{x-1} = 18$

1.6. $5^{2x} = 100$

1.7. $4^{x+1} = 2^{3x}$

1.8. $2^x + 2^{x+1} = 48$

1.9. $2^{2x} - 2^{x+1} = 8$

1.10. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

1.11. $5^x - 5^{1-x} = 6$

1.12. $3^x - 12 + 27 \times 3^{-x} = 0$

2. Resolva, em \mathbb{R} , as equações com logaritmos, sem recorrer à calculadora.

2.1. $\log_2(x) = 5$

2.2. $\log x = 2$

2.3. $\ln x = 0$

2.4. $\ln(x + 4) = \ln(2x)$

2.5. $\log_4(x + 1) = \frac{1}{2}$

2.6. $\log_2(x^2 - 1) = 3$

2.7. $\log_{\frac{1}{3}}(-x^2 + 4x) = -1$

2.8. $\ln x - \ln 2 = 3$

2.9. $\log_7 x - \log_7(x - 1) = 1$

2.10. $2 \times \log_2 x - \log_2(x - 3) = 4$

2.11. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 3$

2.12. $3\log_2 x - \log_2(4x) = 1$



3. O número de bactérias existentes numa colónia, ao fim de t horas, é dado pelo modelo:

$$N(t) = 800 \times 2^{0,5t},$$

em que $N(t)$ representa o número de bactérias ao fim de t horas.

- 3.1. Determina o número de bactérias existente ao fim de 4 horas.
- 3.2. Determina, através de processos analíticos, o instante em que o número de bactérias é 6400.
- 3.3. Justifica se o número de bactérias ultrapassa 10000 antes de decorridas 8 horas desde o início do crescimento.
- 3.4. Verifica que $\frac{N(t+10)}{N(t)}$ é constante. Determina o valor dessa constante e interpreta esse valor, no contexto da situação descrita.
4. O nível sonoro, N , medido em decibéis (dB), é dado pela expressão:

$$N = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

onde I representa a intensidade do som e I_0 a intensidade de referência.

- 4.1. Determina o nível sonoro correspondente a uma intensidade 100 vezes superior à intensidade de referência.
- 4.2. Determina, através de processos analíticos, o valor da intensidade I , em função de I_0 , quando o nível sonoro é 30 dB .
- 4.3. Verifica se um som com nível sonoro de 15 dB tem uma intensidade superior a 30 vezes a intensidade de referência.



5. A quantidade de uma substância radioativa presente numa amostra é dada por:

$$Q(t) = Q_0 \times e^{-0,3t},$$

onde $Q(t)$ representa a quantidade da substância, em gramas, ao fim de t dias. Sabe-se que, no instante inicial, a quantidade da substância radioativa é 200 g .

Nota: Apresenta, sempre que necessário, os resultados arredondados às unidades.

- 5.1. Determina a quantidade da substância radioativa existente ao fim de 5 dias.
- 5.2. Determina, através de processo analíticos, o número de dias necessários para que a quantidade da substância radioativa seja inferior a 50 g .
- 5.3. Justifica se, ao fim de 10 dias, a quantidade da substância radioativa é inferior a 20 g .



Tarefa 7

Equações com exponenciais e logaritmos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa pretende-se que os alunos resolvam equações e problemas com recurso às propriedades trabalhadas nas tarefas anteriores, com um formalismo e procedimentos algébricos progressivamente mais exigentes. Pretende-se também que as funções com logaritmos possam ser trabalhadas em contextos de modelação.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regras operatórias de logaritmos e exponenciais.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:

A resolução de equações com logaritmos é uma oportunidade para esclarecer os procedimentos algébricos associados aos logaritmos, como, por exemplo, o domínio das expressões, muito relevante na determinação dos conjuntos solução. A calculadora gráfica pode ser um auxiliar importante para ilustrar que soluções de equações que ocorrem no cálculo algébrico não são observadas na resolução gráfica, e assim, compreender que os domínios das expressões com logaritmos presentes nas equações são um elemento importante a ter em conta na sua resolução algébrica.



Coleção de problemas

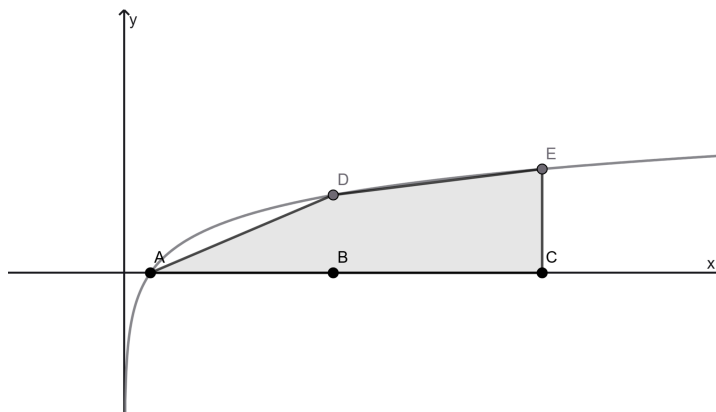
Exponenciais e logaritmos

1. No referencial da figura seguinte está representado o gráfico da função

$$f(x) = \log_2 x.$$

Sabe-se que:

- a abscissa do ponto A é o zero da função f ;
- o ponto C tem coordenadas $(16, 0)$;
- o ponto D é um ponto móvel do gráfico de f , cuja abscissa, x , está entre a abscissa do ponto A e a do ponto E , inclusive;
- os pontos D e E pertencem ao gráfico da função f e têm a mesma abscissa que os pontos B e C , respetivamente;
- $[ADEC]$ é um polígono convexo, composto pelo triângulo $[ADB]$ e pelo trapézio $[DBEC]$.



- 1.1. Mostra, utilizando as propriedades dos logaritmos, que a área do triângulo $[ADB]$ pode ser dada pela expressão: $A(x) = (x - 1)\log_2 \sqrt{x}$ e indica que valores x pode tomar.
- 1.2. Determina $A(16)$ e faz a interpretação geométrica no contexto do problema.
- 1.3. Determina, utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora, a abscissa do ponto D para que a área do triângulo $[ADB]$ seja 20 u. a.

Na tua resposta:

- apresenta uma condição que te permita resolver o problema;
- representa, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinala o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução da condição;
- Indica, com aproximação às décimas, a abscissa do ponto D .



2. Considera as funções reais de variável real, definidas por

$$f(x) = \ln(ex^2) ; g(x) = \ln(3x + 4) + 1 \text{ e } h(x) = 2\ln(x) + 1.$$

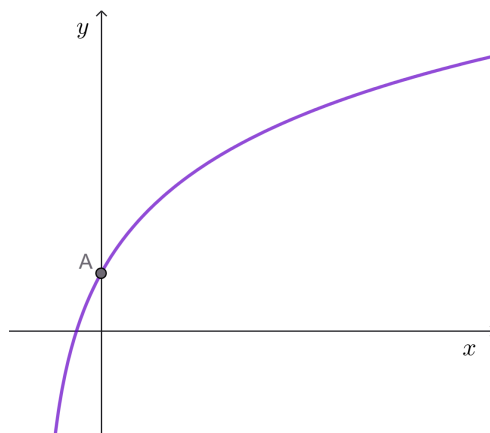
2.1. Comenta a afirmação: “As funções f e h são iguais”.

Sugestão: utiliza a representação gráfica das duas funções para fundamentar o teu comentário.

2.2. Resolve, analiticamente, a equação $f(x) = g(x)$.

2.3. Determina as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de g e h .

3. Considera a função $f(x) = 2 \log_3(x + 1) + 1$, de domínio $] - 1, + \infty[$ representada no gráfico da imagem seguinte:



Sabe-se que:

- B é o ponto de interseção da função inversa de f , f^{-1} , com o eixo das abcissas;
- C e D são os pontos de interseção da função f com a sua função inversa, f^{-1} .

3.1. Determina as coordenadas do ponto de interseção da função f com o eixo das ordenadas, ponto A . Qual é o zero da função f^{-1} ?

3.2. Indica a equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

3.3. O polígono $[ABCD]$ tem lados iguais? Quais?

3.4. Determina, utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora, as coordenadas de C e D com aproximação às centésimas.

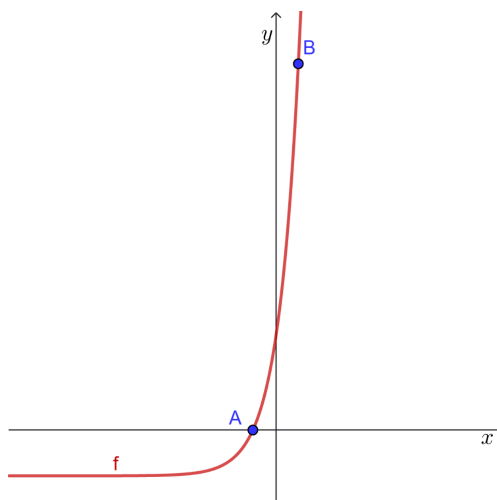
3.5. Calcula o perímetro do polígono $[ABCD]$. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

3.6. Determina a expressão algébrica de f^{-1} .



4. Na figura está representada uma função f da família de funções definidas por $y = k \times 3^{px} - 2$; ($k, p \in \mathbb{R}$).

Sabe-se que os pontos $A(-1, 0)$ e $B(1, 16)$ pertencem ao gráfico de f .



- 4.1. Determina os valores de k e de p .
- 4.2. Verifica se 4 pertence ao contradomínio de f . E - 2?
- 4.3. Seja S o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq \frac{1}{10}(x + 1)^3$.

Sabe-se que $S = [a, -1]$. Recorre à calculadora gráfica e determina o valor de a arredondado às centésimas.

5. Considera a função real de variável real definida algebricamente pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x-1} + 1.$$

Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima;
- B e C são dois pontos do gráfico de f com o valor da ordenada igual a 1, 2 e tais que $[BC]$ é paralelo ao eixo Ox .

Utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora determina a área do triângulo $[ABC]$, apresenta o resultado com aproximação às décimas.

Sugestão:

Na tua resolução percorre as seguintes etapas:

- Faz a representação do(s) gráfico(s) que consideras necessário(s);
- Marca o(s) ponto(s) relevante(s) (A , B e C);
- Determina a área pedida.



6. O pH de uma solução aquosa é dado por

$$pH = -\log_{10}[H^+],$$

onde $[H^+]$ representa a concentração de íons hidrogénio, em mol/L .

Considera duas soluções aquosas, A e B, tais que:

- a solução A tem pH igual a 3;
- a solução B tem pH igual a 5.

- 6.1. Determina a concentração de íons hidrogénio em cada uma das soluções.
- 6.2. Compara as concentrações das duas soluções, indicando quantas vezes a concentração da solução A é superior (ou inferior) à da solução B.
- 6.3. Explica, com base nos resultados obtidos, por que motivo se diz que a escala do pH é uma escala logarítmica.

7. O nível sonoro N , medido em decibéis (dB), é dado por

$$N = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

em que I representa a intensidade do som e I_0 é uma intensidade de referência.

Considera dois sons, X e Y , com intensidades I_X e I_Y , tais que:

- o som X tem nível sonoro de 40 dB ;
- o som Y tem nível sonoro de 70 dB .

- 7.1. Indica quantas vezes o som Y é mais intenso do que o som X .
- 7.2. Se a intensidade do som duplicar é de esperar que aconteça o mesmo com o nível sonoro? Justifica.

8. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^3} \times b^2\right)$?

(A) $\frac{13}{2}$

(B) $\frac{15}{2}$

(C) $\frac{19}{2}$

(D) $\frac{21}{2}$

Exame - 2023 Ép. especial



9. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$.

A que é igual o produto desses dois números?

- (A) 2 (B) 3 (C) 8 (D) 9

Exame - 2020 2.ª Fase

10. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$.

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$.

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

- (A) 0,7 (B) 1,4 (C) - 0,7 (D) - 1,4

Exame - 2019 1.ª Fase

11. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$.

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_a(a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

- (A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

Exame - 2013 2.ª Fase

12. Um vírus atacou os frangos de um aviário.

Admite que x dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por

$$f(x) = \frac{200}{1+3 \times 2^{3-0.1x}}$$

(considere que $x = 0$ corresponde ao instante em que o vírus foi detetado).

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados.

Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior.

Quantos dias tinham passado?

Teste Intermédio 12.º ano - 13.03.2012



13. O paracetamol é um fármaco indicado quer para aliviar as dores leves e moderadas, quer para controlar a febre.

Admita que a concentração de paracetamol, em miligramas por litro de sangue, t horas após a administração de uma determinada dose terapêutica de paracetamol, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 125 (e^{-0,2t} - e^{-t}), \text{ com } t > 0$$

Admita ainda que, para produzir efeito terapêutico significativo, a concentração de paracetamol tem de ser superior a 15 miligramas por litro de sangue.

Determine, recorrendo à calculadora, durante quanto tempo, após a administração da referida dose terapêutica, o paracetamol produz efeito terapêutico significativo.

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma condição que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução da condição;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s) arredondada(s) às milésimas.

Exame - 2025, Ép.. especial



14. Admita que, nos primeiros quinze minutos de uma reação química entre duas substâncias, a massa, m , de uma das substâncias, medida em gramas, é dada, t minutos após o início da reação, por

$$m(t) = \frac{1764}{1 - 0,16e^{-0,42t}}, \text{ com } 0 \leq t \leq 15$$

No primeiro minuto da reação, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a, 3a]$, a massa dessa substância diminui 5%.

Determine, recorrendo à calculadora, a amplitude desse intervalo.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com arredondamento ao segundo.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

Exame - 2024, Ép. especial

15. Seja f a função definida em $] - \infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

- 15.1. A equação $f(x) = 2x + 1$ tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k > 0$.

- 15.2. Seja h a função definida em $] - \infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$. Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1} , função inversa de h ?

- (A) $e^x - 1$ (B) $1 - e^x$ (C) $\ln(e^x - 1)$ (D) $\ln(1 - e^x)$

Exame - 2020 1.ª Fase



Coleção de problemas

Exponenciais e logaritmos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema “funções”.

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:

O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.

