

# NÚMEROS COMPLEXOS

Matemática A

12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026



## Ficha técnica

### **Título:**

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Números complexos (Matemática A 12.º ano)

### **Autoria e adaptação:**

Professores das turmas piloto de Matemática A

### **Revisão:**

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

### **Imagem da capa:**

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em <https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/>

### **Data:**

Lisboa, janeiro de 2026



# Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação

de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas foram:

Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe e Carla Damásio (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva  
*Coordenador*

## TEMA - NÚMEROS COMPLEXOS

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	<a href="#">Tarefa 1</a> Como surgiram os números complexos	<b>Números complexos na forma algébrica</b>  Unidade imaginária	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contextualizar historicamente a origem dos números complexos.</li> <li>• Identificar a unidade imaginária e o conjunto <math>\mathbb{C}</math> dos números complexos.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• História da Matemática</li> <li>• Resolução de Problemas, modelação e conexões</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)</li> </ul>
2	<a href="#">Tarefa 2</a> Equações sempre possíveis	<b>Números complexos na forma algébrica</b>  Unidade imaginária  Forma algébrica  Conjugado de um número complexo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver equações do 2.º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> <li>• Raciocínio e lógica Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>

3	<p><a href="#">Tarefa 3</a> Plano de Argand</p>	<p><b>Números complexos na forma algébrica</b></p> <p>Igualdade de complexos</p> <p>Operações elementares com números complexos na forma algébrica</p> <p>Representação de complexos no plano de Argand-Gauss</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica.</li> <li>• Efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação).</li> <li>• Representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar números complexos a partir das suas imagens geométricas.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tarefas e recursos educativos</li> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>
1	<p><a href="#">Tarefa 4</a> Mais operações com números complexos</p>	<p><b>Números complexos na forma algébrica</b></p> <p>Conjugado e módulo de um número complexo</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em <math>\mathbb{C}</math>.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> <li>• Raciocínio e lógica matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>
1	<p><a href="#">Tarefa 5</a> Divisão de números complexos e o produto por <math>i</math></p>	<p><b>Números complexos na forma algébrica</b></p> <p>Unidade imaginária</p> <p>Forma algébrica</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em <math>\mathbb{C}</math>.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)</li> </ul>

2	<a href="#">Tarefa 6</a> Números complexos na forma trigonométrica	<b>Números complexos na forma trigonométrica</b>  Forma trigonométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar números complexos na forma trigonométrica.</li> <li>• Estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas, modelação e conexões</li> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> <li>• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)</li> </ul>
2	<a href="#">Tarefa 7</a> Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica	<b>Números complexos na forma trigonométrica</b>  Operações com números complexos na forma trigonométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação e divisão).</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tarefas e recursos educativos</li> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>
1	<a href="#">Tarefa 8</a> Potenciação com números complexos na forma trigonométrica	<b>Números complexos na forma trigonométrica</b>  Operações com números complexos na forma trigonométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação e potenciação).</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>
1	<a href="#">Tarefa 9</a> Radiciação com números complexos na forma trigonométrica	<b>Números complexos na forma trigonométrica</b>  Operações com números complexos na forma trigonométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (radiciação).</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recurso sistemático à tecnologia</li> <li>• Comunicação Matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</li> </ul>

2	<p><a href="#">Tarefa 10</a> Resolver equações em <math>\mathbb{C}</math></p>	<p><b>Números complexos na forma algébrica</b></p> <p>Igualdade de complexos</p> <p><b>Números complexos na forma trigonométrica</b></p> <p>Operações com números complexos na forma trigonométrica</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica.</li> <li>• Estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica.</li> <li>• Resolver equações simples em <math>\mathbb{C}</math>.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas</li> <li>• Raciocínio e lógica matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> </ul>
2	<p><a href="#">Tarefa 11</a> Conjuntos de pontos e condições</p>	<p><b>Números complexos na forma trigonométrica</b></p> <p>Conjuntos definidos por condições na variável complexa</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caracterizar domínios planos através de condições na variável complexa e vice-versa.</li> </ul>	Trabalho a pares, com discussão final em turma	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</li> </ul>
3	<p><a href="#">Coleção de problemas</a> Números complexos</p>	<p><b>Números complexos na forma algébrica</b></p> <p>Operações elementares com números complexos na forma algébrica</p> <p><b>Números complexos na forma trigonométrica</b></p> <p>Operações com números complexos na forma trigonométrica</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver problemas variados que envolvem números complexos.</li> </ul>	Trabalho em grupo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de Problemas, modelação e conexões</li> <li>• Comunicação Matemática</li> <li>• Avaliação para a aprendizagem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</li> <li>• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)</li> </ul>

## Tarefa 1

### Como surgiram os números complexos

Em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou, em 1545, na sua obra *Ars Magna*, uma fórmula que permite obter uma solução real para equações do terceiro grau da forma

$$x^3 + px + q = 0$$



em função dos números reais  $p$  e  $q$ , a saber:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Fórmula de Cardano

1. Usa a fórmula de Cardano para determinar uma solução, para cada uma das equações seguintes.
  - 1.1.  $x^3 - 3x - 2 = 0$
  - 1.2.  $x^3 - 15x - 4 = 0$
2. Tal como Cardano, ao determinar a solução da equação do item 1.2. chegaste a uma expressão que envolve raízes quadradas de números negativos. À primeira vista, isto poderia sugerir que a equação não tem soluções. No entanto, Cardano sabia que esta equação tinha uma solução e, por isso, decidiu avançar, assumindo provisoriamente a existência da raiz quadrada de um número negativo.

Faz como Cardano e, na calculadora gráfica, em modo “Complexo” determina  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ .

No resultado obtido na calculadora o símbolo “ $i$ ” representa  $\sqrt{-1}$  a que vamos chamar “*unidade imaginária*”.

Mostra, considerando válidas as propriedades da multiplicação e adição, que  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ , ou seja, se aceitarmos que existe a raiz quadrada de números negativos,  $2 + \sqrt{-1}$  é raiz cúbica de  $2 + \sqrt{-121}$ .

*Apesar de nos cálculos intermédios se passar pela utilização de números que não eram reais, a fórmula de Cardano volta a funcionar, apesar de o mesmo não considerar a existência da raiz quadrada de números negativos, apenas as utilizava*



como um artifício formal de cálculo, que apesar de absurdo, lhe permitia obter soluções reais corretas.

O primeiro grande avanço no que se refere ao trabalho com números complexos deve-se a Rafael Bombelli. Bombelli teve a ousadia de operar com quantidades imaginárias, estabelecendo no seu livro “L’Algebra” regras para a adição, a multiplicação e a divisão de números que envolviam a raiz quadrada de números negativos.

Na realidade, na resolução de 2.1., também o fizeste, para mostrar que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}, \text{ ou seja, } (2 + i)^3 = 2 + 11i \text{ com } i = \sqrt{-1}.$$

A introdução da notação  $i$  deve-se a Leonhard Euler (Século XVII).

O número  $i$  designa-se por unidade imaginária e é tal que  $i^2 = -1$ .

Os números  $2 + i$  e  $2 - i$  que admitimos existirem para que a fórmula de Cardano funcione na equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  são da forma  $a + bi$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais.

Um número,  $z$ , que pode ser escrito na forma  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , designa-se por número complexo.

O número  $a$  designa-se por **parte real** de  $z$  e o número  $b$ , designa-se por **parte imaginária** de  $z$ , e representam-se por  $Re(z)$  e  $Im(z)$ , respetivamente.

Se  $Im(z) = 0$ ,  $z$  é um número real e se  $Re(z) = 0$ ,  $z$  é um imaginário puro.

3. Na sequência do trabalho de Bombelli, usando esta definição e as propriedades da adição e da multiplicação que já conheces, efetua as seguintes operações, e apresenta o resultado na forma  $a + bi$ . Escreve também a parte real e a parte imaginária de cada um dos números complexos na forma  $a + bi$ , que resultaram das operações efetuadas :

3.1.  $(2 - 10i) + (3 + 4i)$

3.2.  $(3 + i) + 4i$



3.3.  $(2 + 3i) \times (5 - i)$

3.4.  $i \times (5 - 2i)$

3.5.  $(3 - 10i) - (3 + 4i)$

3.6.  $(4 - 3i) \times (4 + 3i)$

4. Preenche o seguinte quadro:

$\times$	1	- 1	$i$	- $i$
1				
- 1				
$i$				
- $i$				



# Tarefa 1

## Como surgiram os números complexos

### Notas pedagógicas para a ação do professor

#### Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se introduzir o conceito de número complexo, bem como da unidade imaginária. A abordagem segue um contexto histórico semelhante ao que esteve na origem do surgimento dos números complexos, enfatizando o carácter utilitário da sua utilização. Sugere-se, ainda, a introdução progressiva da calculadora gráfica para a realização de cálculos com números complexos.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Operações com expressões polinomiais.

**Materiais e recursos:** Calculadora gráfica.

#### Notas para o professor:

É importante que os alunos não fiquem com a ideia de que nos números complexos os cálculos envolvem sempre a complexidade que assumem nesta tarefa. O professor deve referir de forma clara que se trata de uma abordagem histórica, e que as evoluções posteriores permitirão uma formalização mais simples dos cálculos com números complexos.

Relativamente à fórmula de Cardano, o professor deve informar que, à data, os matemáticos já conseguiam transformar todas as equações do 3.º grau na forma apresentada pelo Cardano.

O modo de apresentação dos números complexos varia consoante a calculadora, podendo surgir como “ $a+bi$ ” ou “ $r\theta$ ” em algumas, “retangular” ou “polar” noutras, ou ainda “cartesiana” ou “exponencial”.

O professor deve assegurar-se que os alunos sabem configurar corretamente a sua calculadora para trabalhar com os números complexos. Por exemplo, no item 3. a calculadora deve apresentar os números complexos na forma “ $a+bi$ ”.



## Tarefa 2

### Equações sempre possíveis

No 10.º ano estudaste as equações quadráticas (equações polinomiais do segundo grau) e a fórmula resolvente que te permite calcular as suas soluções reais, quando existem:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos aceder a um programa, em Python, que aplica esta fórmula a qualquer equação deste tipo em [Fórmula resolvente.ipynb](#).



1. Utiliza o programa para verificares quais são as raízes do polinómio  $P(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ .
2. Escreve um polinómio de grau 2 que tenha como raízes  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 2$ , e escreve-o na forma de um polinómio reduzido para que seja possível confirmar as raízes recorrendo ao programa dado.
3. Considera agora que as raízes do polinómio podem não ser números reais.
  - 3.1. Escreve um polinómio de grau 2, na forma reduzida, que tenha como raízes  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 1 - i$ .
  - 3.2. O programa apresentado não considera válidas as soluções da equação que não sejam números reais.
    - 3.2.1. Altera o programa, para que, no caso das soluções serem complexas, estas sejam apresentadas.
    - 3.2.2. Escreve um polinómio de grau 2, na forma reduzida, que tenha como raízes  $z_1 = 2 - i$  e  $z_2 = 2 + i$  e usa o programa que modificaste para verificar o resultado.



3.3. Considera a representação gráfica da função de domínio  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ .  
Como o gráfico da função não interseca o eixo das abcissas, a equação  $f(x) = 0$  não tem soluções reais.

3.3.1. Utiliza o programa que modificaste para determinar as soluções complexas.

3.3.2. Resolve a equação  $f(x) = 0$ , recorrendo a procedimentos exclusivamente algébricos para obter as soluções.

3.4. Explica porque razão se  $m + ni$  é solução de uma equação de segundo grau, com coeficientes reais, então a outra solução é  $m - ni$ .

Os números complexos  $m + ni$  e  $m - ni$ , com  $m, n \in \mathbb{R}$ , dizem-se conjugados um do outro.

O conjugado do número complexo  $z$  representa-se por  $\bar{z}$ .



## Tarefa 2

### Equações sempre possíveis

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se que os alunos recordem a fórmula resolvente para equações do segundo grau e adequem o conceito de equações impossíveis em  $\mathbb{R}$ , passando a considerar a existência de soluções complexas. Como as soluções das equações do segundo grau são sempre números complexos conjugados, esta é uma oportunidade para introduzir este conceito e a respetiva notação. Pretende-se, ainda, que os alunos utilizem o programa anteriormente construído para a resolução de equações quadráticas, introduzindo as alterações necessárias para contemplar a existência e o reconhecimento de soluções complexas.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Fórmula resolvente para equações do segundo grau e unidade imaginária.

**Materiais e recursos:** Computador ou calculadora com recurso à linguagem Python.

##### Notas para o professor:

Na discussão do trabalho dos alunos, o professor deve garantir que o conceito anteriormente estudado de “equação impossível”, no contexto das equações polinomiais do segundo grau, se reporta ao universo dos números reais e que a introdução da unidade imaginária permite considerar as soluções complexas de equações quadráticas.

O trabalho com a linguagem de programação deve centrar-se na identificação das diferenças entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos, e não nas questões técnicas da programação, como a formatação das soluções ou a inclusão de bibliotecas que resolvam automaticamente equações com soluções complexas, sem considerar a identificação de binómios com discriminantes negativos.

A noção de números complexos conjugados e a respetiva notação devem ser abordados, aproveitando-se a oportunidade, mas sem constituir o foco principal desta tarefa. Haverá outras ocasiões no futuro para retomar este tópico, com explicações mais aprofundadas e abordagens mais sustentadas.



## Tarefa 3

### Plano de Argand

#### Igualdade de números complexos

Dois números complexos são iguais quando as partes reais são iguais e as partes imaginárias também são iguais:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

1. Determina os números reais  $x$  e  $y$  de modo que:

1.1.  $x + 3i = 2 - 2yi$

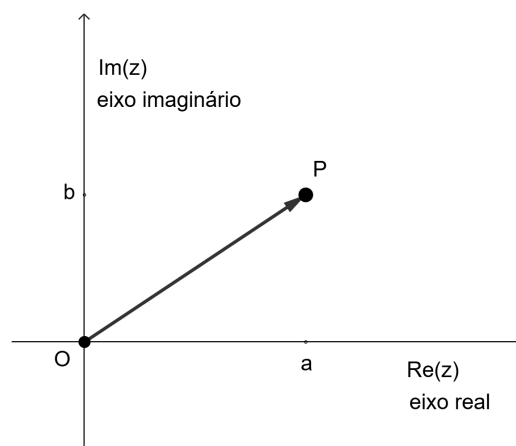
1.2.  $2x - yi = 5i$

1.3.  $4x - i = y + xi$

#### Plano de Argand

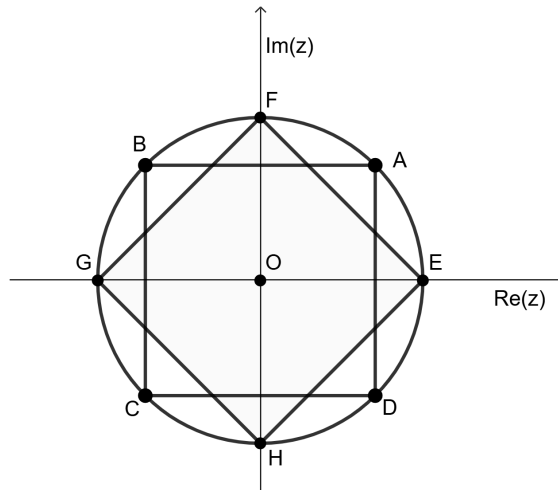
A cada número complexo  $z = a + bi$  corresponde um e um só ponto  $P$ , de coordenadas  $(a, b)$ , denominado afixo do número complexo, bem como um e um só vetor  $\vec{OP}$ , também de coordenadas  $(a, b)$ .

Chama-se Plano de Argand ao plano em que se representam os afixos dos números complexos, onde se considera um referencial ortonormado, com a origem  $O$  e dois eixos, chamados eixo real e eixo imaginário.



2. Na figura seguinte, estão representados dois quadrados inscritos na mesma circunferência e sabe-se que o ponto  $A$  tem de coordenadas  $(1, 1)$ .

Escreve os números complexos, na forma  $a + bi$ , que correspondem aos vértices dos dois quadrados.



3. Abre o Geogebra e considera um referencial no Plano de Argand.

- 3.1. Representa na Vista Algébrica o número complexo  $z_1 = 2 + 3i$ , o ponto  $A$  de coordenadas  $(2, 3)$  e o vetor  $v$  de coordenadas  $(2, 3)$  com origem na origem do referencial. Observa as representações na Vista 2D.
- 3.2. Representa o simétrico do vetor  $v$  e escreve o número complexo que corresponde a esse vetor. Esse número complexo chama-se simétrico de  $z_1$  e designa-se por  $-z_1$ .

Os números complexos  $a + bi$  e  $-a - bi$ , dizem-se simétricos um do outro. O simétrico do número complexo  $z$  representa-se por  $-z$ .

- 3.3. Escreve os simétricos dos seguintes números complexos, representa-os no Geogebra e identifica uma transformação geométrica que permite obter o afixo de  $-z$  a partir de  $z$ :

3.3.1.  $z = 2 - i$

3.3.2.  $z = -5 - 3i$

3.3.3.  $z = 4i$



3.4. Representa na Vista Algébrica o número complexo  $z_2 = 5 + i$  e o vetor  $\vec{u}$  que lhe corresponde.

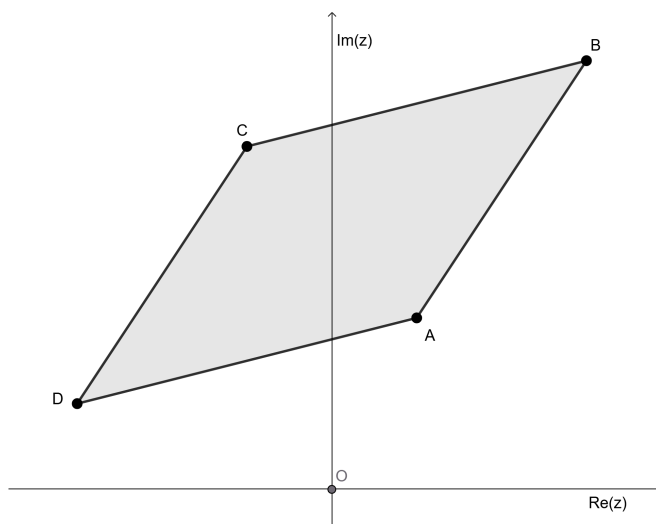
3.5. Determina algebricamente  $z_1 + z_2$ .

3.6. Representa geometricamente  $\vec{v} + \vec{u}$  e escreve o número complexo que corresponde a esse vetor soma.

4. Considera o paralelogramo  $[ABCD]$  da figura seguinte, no Plano de Argand, em que  $A, B, C$  e  $D$  são os afijos dos números complexos  $z_A, z_B, z_C$  e  $z_D$ .

Sabe-se que  $z_A = 1 + 2i, z_C = -1 + 4i$  e  $z_D = -3 + i$ .

Determina o número complexo  $z_B$ .



5. Abre o Geogebra e considera um referencial no Plano de Argand.

5.1. Representa na Vista Algébrica o número complexo  $z_1 = 4 + i$ .

5.2. Representa geometricamente os seguintes números complexos:

$$z_2 = 3 \times z_1 \quad z_3 = i \times z_1 \quad z_4 = -2 \times z_1 \quad z_5 = -i \times z_1 \quad z_6 = \overline{z_1}$$

5.3. Caracteriza as transformações que permitem obter cada um dos afijos de  $z_2, z_3, z_4, z_5$  e  $z_6$  como imagem do afixo de  $z_1$ .

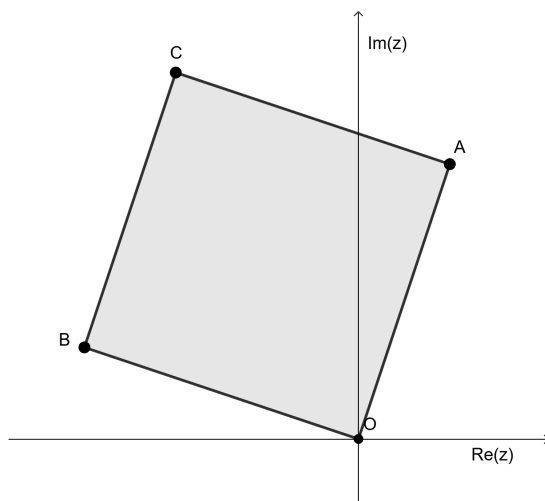
5.4. Explica que transformação permite obter o afixo de  $ki \times z$  ( $k \neq 0$ ) a partir do afixo de um número complexo  $z$ .



6. Na figura seguinte, está representado no plano de Argand o quadrado  $[ABCO]$ , em que  $A$ ,  $B$  e  $C$ , são os afixos dos números complexos  $z_A$ ,  $z_B$  e  $z_C$ .

Sabe-se que  $z_A = 1 + 3i$ .

Determina  $z_B$  e  $z_C$ , e explica como procedeste.



## Tarefa 3

### Plano de Argand

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Com esta tarefa, pretende-se que os alunos ganhem familiaridade com os números complexos escritos na forma algébrica, bem como com a sua representação no plano de Argand. São introduzidos termos e conceitos, como a soma, o simétrico, a diferença e o produto de números complexos, associados à respetiva representação geométrica.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Números complexos escritos na forma algébrica. Soma de vetores.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

**Notas para o professor:**

À semelhança da tarefa anterior, os conceitos apresentados devem visar uma familiarização gradual com os números complexos. É importante que os conceitos sejam revisitados com frequência nas aulas seguintes, em contextos diversificados, funcionando esta abordagem como uma primeira referência.

No que respeita às operações, os alunos devem ser conduzidos a estabelecer paralelismos com as operações com números reais, valorizando as semelhanças nos conceitos e processos associados.

O recurso ao GeoGebra para fazer a representação de números complexos no plano de Argand, visa criar um contexto dinâmico propício ao estabelecimento de conjeturas e generalizações. Os alunos devem ser incentivados a validar essas conjeturas recorrendo a representações geométricas dos números complexos.



## Tarefa 4

### Mais operações com números complexos

1. Representa no plano complexo o número complexo  $z = 3 + 4i$ .

Calcula a distância do afixo de  $z$  à origem.

Esta distância designa-se por “módulo de  $z$ ” e representa-se por  $|z|$ .

2. Calcula o valor de  $|z|$ , sabendo que:

2.1.  $z = 2 - i$

2.2.  $z = -4i$

2.3.  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. Recorre à tua calculadora gráfica para calculares o valor de  $|3 + 4i|$ .

Nota: Poderá ser necessário ajustar as definições para permitir cálculos com números complexos.

4. Usando a calculadora gráfica, em particular as opções relativas a números complexos, calcula:

4.1.  $Re(3 + 4i)$

4.2.  $Im(3 + 4i)$

- 4.3. Usa estas operações com números complexos diferentes e explica o que representa  $Re(z)$  e  $Im(z)$ , relativamente ao afixo de  $z$ .

Se  $z$  é um número complexo, tal que  $z = a + bi$ , então:

- $-z = -a - bi$ ;
- $\bar{z} = a - bi$ .

Estes números, obtidos a partir do número  $z$  são designados por simétrico e conjugado do número  $z$ , respetivamente.



5. Abre a aplicação <https://www.geogebra.org/m/mkvbjfmr> no teu telemóvel ou computador e altera a posição do ponto  $P$ .

Considera que o ponto  $P$  é o afixo de um número complexo  $w$ .

- 5.1. Escreve qual dos pontos é o afixo de:

5.1.1.  $-w$

5.1.2.  $\overline{w}$

5.1.3.  $Re(w)$

5.1.4.  $Im(w)$

5.1.5.  $iw$

5.1.6.  $w + i$

- 5.2. Na aplicação do GeoGebra, colocando o afixo de  $w$  sobre os eixos, e identificando os pontos que se sobrepõem, podemos verificar que

$$\text{se } Im(w) = 0 \text{ então } \overline{w} = w.$$

Procede de forma análoga e indica o valor lógico das afirmações seguintes:

5.2.1. Se  $Re(w) = 0$  então  $\overline{w} = -w$ .

5.2.2. Se  $Im(w) = 0$  então  $iw = Re(w)$ .

5.2.3.  $|\overline{w}| = |w|$



## Tarefa 4

### Mais operações com números complexos

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Nesta tarefa, pretende-se que os alunos continuem a ganhar familiaridade com os números complexos, bem como com a sua representação na forma algébrica, a respetiva representação no plano de Argand, e, ainda, com a utilização da calculadora gráfica para realizar operações simples.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Forma algébrica dos números complexos e representação no plano de Argand.

**Materiais e recursos:** Calculadora gráfica e telemóvel.

##### Notas para o professor:

A identificação das operações com números complexos e a sua representação no plano de Argand devem continuar a ser trabalhados, de modo a proporcionar aos alunos uma familiarização com este novo conceito.

A possibilidade de explorar a representação de diversos números complexos no plano de Argand, bem como a relação entre eles, tem como objetivo levar os alunos a formular conjeturas e generalizações. No final da tarefa, propõe-se que os alunos analisem e tentem justificar afirmações relativas a qualquer número complexo.

Poderá ainda ser sugerido aos alunos, que estabeleçam novas relações a partir das experiências realizadas, usando a notação adequada.



## Tarefa 5

### Divisão de números complexos e o produto por $i$

#### Parte I

1. Preenche o quadro seguinte, considerando os números complexos  $z_1 = 3$ ;

$$z_2 = -2i; z_3 = 1 - 2i \text{ e } z_4 = 1 + 2i.$$

$\times$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$z_1$				
$z_2$				
$z_3$				
$z_4$				

2. Mostra que  $z \times \bar{z}$  é um número real, qualquer que seja o número complexo  $z$ . E o que podes afirmar sobre  $z + \bar{z}$ ?

3. Calcula os seguintes quocientes, apresentando o resultado na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ :

3.1.  $\frac{z_3}{z_1}$ ;

3.2.  $\frac{z_3}{z_2}$  (sugestão: multiplica o denominador e o numerador por  $i$  de forma a obteres um denominador real).

3.3.  $\frac{z_3}{z_4}$  (sugestão: multiplica o denominador e o numerador pelo conjugado do denominador de forma a obteres um denominador real).

4. Determina na forma algébrica:

4.1.  $\frac{3-i}{4-3i}$

4.2.  $5i \times \frac{2+2i}{-1-2i}$



## Parte II

1. Representa na folha algébrica do GeoGebra o número complexo  $w = 1 + 3i$ .
2. Na folha algébrica calcula:
  - $i \times w$
  - $i \times i \times w$
  - $i^3 \times w$
3. Descreve a posição relativa dos afixos dos quatro números complexos.
4. Altera a posição do afixo de  $w$  e verifica se a posição relativa dos quatro números complexos é igual à verificada no item anterior.
5. Descreve o afixo de  $i \times w$  como uma transformação geométrica do afixo de  $w$ .
6. Identifica a posição do afixo de  $i^4 \times w$  relativamente ao afixo de  $w$ .
7. Calcula o valor de  $i$ ,  $i^2$ ,  $i^3$  e  $i^4$ .
8. Associa, através de uma seta, cada um dos números complexos da coluna da esquerda ao número complexo igual da coluna da direita.

$i^4 w$	$w$
$i^{40} w$	$i w$
$i^{401} w$	$i^2 w$
$i^{3999} w$	$i^3 w$
$i^{30} w$	
$i^{19} w$	

9. Escreve na forma algébrica, o resultado das seguintes operações com números complexos:

9.1.  $i^{2025} \times (2 - 3i)$

9.2.  $\frac{i-4}{i^{1999}} + 4i$



## Tarefa 5

### Divisão de números complexos e o produto por $i$

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Após a realização desta tarefa, os alunos devem conhecer a regularidade associada às potências de  $i$  e serem capazes de simplificar potências de qualquer expoente. Além disso, é fundamental que reconheçam o significado geométrico dessa regularidade, em particular, que consigam explicar o que significa, no plano de Argand, multiplicar um número complexo por  $i$ .

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Unidade imaginária e produto de números complexos escritos na forma algébrica.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

##### Notas para o professor:

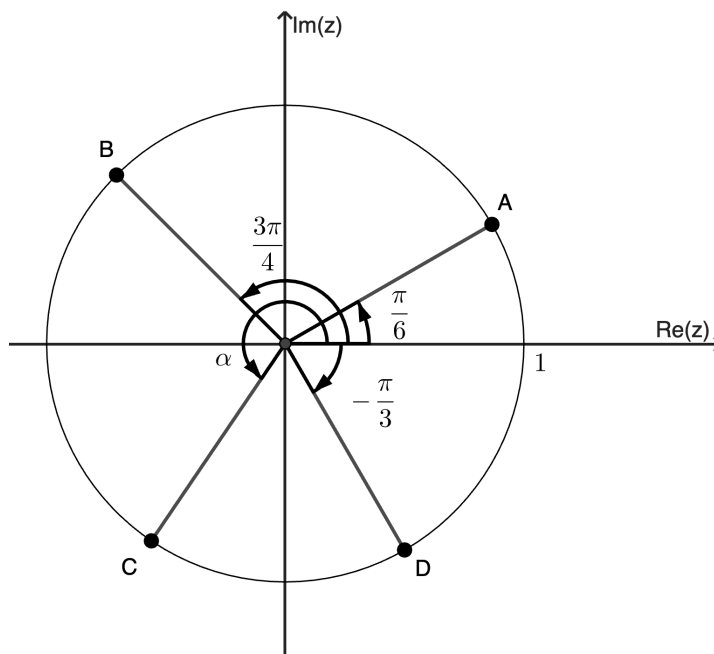
Na sequência das tarefas anteriores, pretende-se que, com a introdução das potências de  $i$ , sejam estabelecidas conexões com os elementos dos números complexos já estudados, valorizando a interpretação geométrica dos procedimentos algébricos. É importante que esta abordagem seja feita com rigor e complexidade progressivos, de modo a consolidar a compreensão dos conceitos.



## Tarefa 6

### Números complexos na forma trigonométrica

1. Na figura seguinte, estão representados, no plano de Argand, a circunferência de raio 1 e os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , afixos dos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$  respetivamente.



Escreve os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ , na forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Abre um ficheiro Geogebra e representa, na folha algébrica, o número complexo  $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$  e na folha gráfica a circunferência,  $C_1$ , de centro na origem e que contém o ponto  $A$ , afixo de  $z_1$ .
- 2.1. Determina, o módulo de  $z_1$  e o ângulo,  $\theta$  em radianos, que a semirreta  $\hat{O}A$  faz com o semieixo real positivo.
- 2.2. O que representa  $|z_1|$  na circunferência  $C_1$ ?
- 2.3. Como podes representar o número complexo  $z_1$ , na forma algébrica, mas em função de  $|z_1|$  e  $\theta$ ?
- 2.4. Sabendo que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , escreve outra representação para o complexo  $z_1$ .



3. Escreve os números complexos  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$  e  $z_3 = 2i$  com uma representação semelhante à que utilizaste no item 2.4.

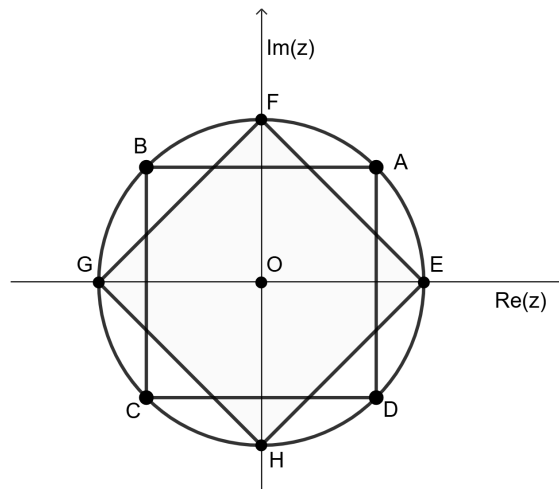
Qualquer número complexo  $z \neq 0$  pode ser representado na forma  $z = |z|e^{i\theta}$ , em que  $\theta \in \mathbb{R}$  é a amplitude de um ângulo de lado origem no semieixo real positivo e lado extremidade  $\vec{OZ}$ , em que  $Z$  é o afixo do número complexo  $z$ .

A representação de um número complexo  $z \neq 0$  na forma  $z = |z|e^{i\theta}$  designa-se por **forma trigonométrica** de  $z$ , em que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Se  $\theta \in ] - \pi, \pi]$  designa-se por argumento principal de  $z$  e representa-se por  $Arg(z)$ .

4. Na figura seguinte, estão representados dois quadrados,  $[ABCD]$  e  $[FGHI]$ , inscritos na mesma circunferência e sabe-se que o ponto  $A$ , tem coordenadas  $(1, 1)$ .

Escreve os números complexos, na forma trigonométrica, cujos afixos correspondem aos vértices dos dois quadrados.



5. Escreve na forma algébrica os seguintes números complexos:

5.1.  $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

5.2.  $3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5.3.  $e^{-i\frac{\pi}{4}}$



6. Escreve na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

6.1.  $3i$

6.2.  $1 + i$

6.3.  $-1 - \sqrt{3}i$

6.4.  $-2\sqrt{3} + 2i$

Sugestão: Começa por representar geometricamente, no plano complexo, o número complexo, determina o seu módulo e, considerando  $\theta$  como um argumento de  $z$ , utiliza a tangente para determinar o valor de  $\theta$ .

### Igualdade de complexos na forma trigonométrica

Dados dois complexos  $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$  tem-se que:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

7. Considera o número complexo  $z = 2e^{i\frac{7\pi}{3}}$ .

Quais dos seguintes números complexos são iguais a  $z$ ? Justifica.

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}; z_3 = 2e^{i(-\frac{5\pi}{3})}; z_4 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}; z_5 = -2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

8. Considera os números complexos  $z_1 = \rho e^{i(3\theta)}$  e  $z_2 = 3e^{i\pi}$ , com  $\rho$  e  $\theta$  números reais

Sabe-se que  $z_1 = z_2$ .

8.1. Determina o valor de  $\rho$  e os valores de  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .

8.2. Apresenta mais dois valores possíveis para  $\theta$ .



## Tarefa 6

### Números complexos na forma trigonométrica

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com a representação de números complexos na forma trigonométrica, introduzindo os elementos relevantes dessa representação e o respetivo significado geométrico. É fundamental estabelecer, para cada número complexo, a relação entre a sua forma algébrica, a correspondente representação trigonométrica e a respetiva representação geométrica no plano de Argand.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Forma algébrica dos números complexos.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

##### Notas para o professor:

Na resolução da questão 1., relativamente ao número complexo cujo afixo é o ponto  $C$ , pretende-se que os alunos escrevam o respetivo argumento em função de  $\alpha$ . Na eventualidade de revelarem dificuldades, o professor deve esclarecer o objetivo, mas sem indicar explicitamente a resposta aos alunos, mantendo assim a proposta desafiadora.

Na questão 2.4. o número de Euler surge, provavelmente pela primeira vez, para alguns alunos. É recomendável que seja feita uma breve contextualização, indicando que se trata de um número irracional, cujo valor pode ser observado na calculadora gráfica, e que será de utilização frequente em outros temas a estudar no 12.º ano.

Relativamente ao item 6., o professor pode sugerir a representação do triângulo retângulo, que facilita a identificação e a respetiva determinação da tangente.



## Tarefa 7

### Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica

1. Representa geometricamente, no Geogebra, os seguintes números complexos:

1.1.  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

1.2.  $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

1.3.  $z_3 = z_1 \times z_2$

1.4.  $z_4 = z_3 \times z_1$

1.5.  $z_5 = z_3 \times z_2$

1.6. Observa os afixos dos números complexos  $z_3$ ,  $z_4$  e  $z_5$  obtidos e conjectura quais os valores dos seus argumentos.

1.7. Se pretendesses obter um afixo de um novo número complexo, com argumento igual a  $\frac{3\pi}{2}$ , como resultado de uma multiplicação, quais destes números escolherias como fatores? e para obter o argumento  $2\pi$ ?

2. Representa no Geogebra os seguintes números complexos:

2.1.  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.2.  $z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{2}}$

2.3.  $z_3 = 3 e^{i\frac{\pi}{2}}$

2.4.  $z_4 = z_1 \times z_2$

2.5.  $z_5 = z_2 \times z_3$

2.6. Considera os afixos dos números complexos  $z_4$  e  $z_5$  e conjectura sobre quais serão os valores dos seus módulos.

2.7. Se pretendesses obter um afixo de um novo número complexo, com o módulo igual a 6, como resultado de uma multiplicação, quais destes números escolherias como fatores? E para um número complexo com o módulo igual a 12?



3. Representa geometricamente, no Geogebra, os seguintes números complexos:

3.1.  $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{4}}$

3.2.  $z_2 = 6 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3.3.  $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$

3.4.  $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$

3.5. Considera os afixos dos números complexos  $z_3$  e  $z_4$ , os respectivos módulos e os seus argumentos. Conjetura uma regra para dividir números complexos, escritos na forma trigonométrica.

3.6. Utiliza o tua regra para determinar  $\frac{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2e^{i\pi}}$ .

**Produto e quociente de números complexos na forma trigonométrica**

Dados dois números complexos  $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ , tem-se:

$$z_1 \times z_2 = |z_1| \times |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

4. Considera os números complexos:

$$z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = -2\sqrt{3} + 2i \quad \text{e} \quad z_3 = -2i$$

Calcula, apresentando o resultado na forma trigonométrica:

4.1.  $z_1 \times z_3$

4.2.  $z_2 \times \overline{z_1}$

4.3.  $\frac{z_1}{z_3}$

4.4.  $\frac{-z_1}{i z_2}$



## Tarefa 7

### Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Nesta tarefa pretende-se que os alunos determinem o produto e o quociente de números complexos escritos na forma trigonométrica.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Forma trigonometria de um número complexo.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

##### Notas para o professor:

Caso os alunos obtenham a expressão do produto de dois números complexos, recorrendo ao produto de potências com base igual, o professor deve validar esta abordagem. No entanto, é importante ser explorada a interpretação geométrica, destacando a soma dos argumentos dos números complexos.

Relativamente ao quociente de dois números complexos, também é válida a abordagem dependente do quociente de potências com base igual, sendo recomendável analisar a interpretação geométrica correspondente à diferença dos argumentos.



## Tarefa 8

### Potenciação com números complexos na forma trigonométrica

1. Abre uma página do Geogebra e representa o seguinte número complexo:

$$z_1 = \left( e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^a$$

- 1.1. Configura o seletor  $a$  de modo a tomar os valores inteiros de 1 a 12.
- 1.2. Ativa, nas configurações, o traço do ponto obtido.
- 1.3. Percorre todos os valores do seletor e observa os pontos representados.
- 1.4. O que observas relativamente aos argumentos e aos módulos dos números complexos que correspondem a esses pontos?

2. Representa agora o número complexo:

$$z_2 = \left( 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^a$$

- 2.1. Calcula, no Geogebra, o valor de  $|z_2|$ .
- 2.2. Configura o seletor  $a$  de modo a tomar os valores inteiros de 1 a 15.
- 2.3. Ativa, nas configurações, o traço do ponto obtido.
- 2.4. Percorre todos os valores do seletor e observa todos os pontos representados.
- 2.5. O que observas relativamente aos argumentos e aos módulos dos números complexos que correspondem a esses pontos?

#### Potência de expoente natural de um número complexo

Dado um número complexo  $z = |z| e^{i\theta}$  e  $n \in N$ , tem-se:

$$z^n = \left( |z| e^{i\theta} \right)^n = |z|^n e^{in\theta}$$

3. Calcula, apresentando o resultado na forma algébrica.

3.1.  $\left( 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)^5$

3.2.  $(1 - \sqrt{3}i)^9$

3.3.  $\left( \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{-i} \right)^7$



4. Considera os números complexos:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{e} \quad z_2 = -1 - i$$

4.1. Determina, na forma trigonométrica, o valor da seguinte expressão:

$$\frac{z_2 + 2i^{25}}{z_1^5}$$

4.2. Determina o menor valor natural de  $n$  para o qual  $(\overline{z_1} \times z_2)^n$  é um número real negativo.

5. Determina  $\alpha \in ]0, 2\pi]$  de tal modo que o afixo de  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \times (2e^{i\alpha})^4$  pertença à bissetriz do terceiro quadrante.



## Tarefa 8

### Potenciação com números complexos na forma trigonométrica

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

A tarefa tem como objetivo que os alunos compreendam o cálculo de um número complexo escrito na forma trigonométrica, que resulta de uma potência de expoente natural. Para além dos procedimentos algébricos, os alunos devem interpretar geometricamente o significado da multiplicação sucessiva do número complexo, identificando as diferenças resultantes de considerar números complexos com módulos iguais ou superiores a 1.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Forma trigonométrica de um número complexo. Produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

##### Notas para o professor:

Quando se consideram produtos de números complexos com um módulo superior a 1, a visualização dos pontos gerados, dispostos sobre uma espiral, pode ser difícil, pelo que o professor deverá alertar para a necessidade de se manipular a janela de visualização, recorrendo ao “zoom” da janela gráfica do GeoGebra.

O professor pode sugerir aos alunos, na sequência da resolução da questão 2. que considerem as potências de números complexos que verifiquem a condição  $0 < |z| < 1$ . Esta discussão pode também ser oportuna na discussão final do trabalho desenvolvido em grupo.

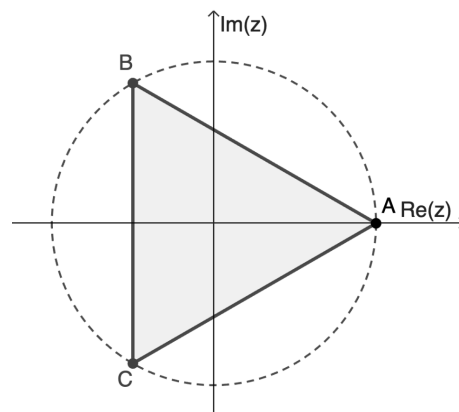


## Tarefa 9

### Radiciação com números complexos na forma trigonométrica

1. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero  $[ABC]$  centrado na origem.

O vértice  $A$  é o afixo do número complexo  $z_1 = 2$ . Os vértices  $B$  e  $C$  são os afixos dos números complexos  $z_2$  e  $z_3$ , respetivamente.



- 1.1. Escreve na forma trigonométrica  $z_2$  e  $z_3$ .
- 1.2. Mostra que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são raízes cúbicas de 8, ou seja, são soluções da equação  $z^3 = 8$ .
- 1.3. Escreve o número 8 na forma trigonométrica e considera  $z = |z|e^{i\theta}$ .

Justifica que se  $z^3 = 8$  então  $|z| = \sqrt[3]{8}$  e  $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Recorda que, dados dois números complexos,  $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ ,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- 1.4. Abre um ficheiro Geogebra, representa o número complexo  $z_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$  e configura seletor,  $k$ , de modo a tomar os valores inteiros de  $-5$  a  $10$ .  
Ativa o traço do ponto obtido, percorre todos os valores de  $k$  e observa os pontos que vais obtendo, sucessivamente.  
Quantos pontos distintos obténs? Qual é a razão de se obterem apenas esses pontos? Como classificas o polígono cujos vértices são esses pontos?
- 1.5. Mostra que para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $(z_k)^3 = 8$ .



2. Determina todas as soluções complexas da equação  $z^3 = 27i$ .
- começa por escrever  $27i$  na forma trigonométrica;
  - considera  $z = |z|e^{i\theta}$  e escreve  $z^3$  na forma trigonométrica;
  - determina  $|z|$  e  $\theta$  de modo que  $z^3 = 27i$ , (com  $27i$  representado na forma trigonométrica);
  - obtém todas as soluções distintas da equação.

3. Considera um número complexo  $w = |w|e^{i\theta}$ .

Determina na forma trigonométrica, as soluções da equação  $z^3 = w$ , começando por considerar  $z = |z|e^{i\alpha}$ .

4. Determina, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas dos números complexos:

4.1.  $64e^{i\frac{5\pi}{12}}$

4.2.  $-1 + \sqrt{3}i$

5. No plano complexo, o afixo do número complexo  $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$  é um vértice de um quadrado de centro na origem.

5.1. Determina os afixos dos restantes vértices do quadrado.

5.2. Mostra que os números complexos, cujos afixos são vértices do quadrado, são raízes quartas do mesmo número complexo, e determina esse número.

6. Mostra que as raízes quartas de um número complexo  $w = |w|e^{i\theta}$ , são os números complexos da forma  $z_k = \sqrt[4]{|w|}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{4})}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Dado um número natural  $n \geq 1$  e um número complexo, não nulo,  $w = |w|e^{i\theta}$  a equação  $z^n = w$  tem exatamente as  $n$  soluções,  $z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , que se designam raízes de índice  $n$  de  $w$ .

7. Determina na forma trigonométrica:

7.1. as raízes quartas de  $-1$ ;

7.2. as raízes cúbicas de  $64i$ ;

7.3. as raízes quadradas de  $-1 + i$ ;

7.4. as raízes quartas de  $-16e^{i\frac{\pi}{4}}$ .



## Tarefa 9

### Radiciação com números complexos na forma trigonométrica

#### Notas pedagógicas para a ação do professor

##### Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com os números complexos que são raízes de índice  $n$  de um número complexo, nomeadamente, o número de raízes, o módulo de cada uma e a relação entre os respetivos argumentos .

Pretende-se, ainda, que as relações anteriores permitam clarificar a posição relativa dos afixos das raízes de índice  $n$  de um número complexo.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Forma trigonométrica de um número complexo. Potência de um número complexo escrito na forma trigonométrica.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

##### Notas para o professor:

Na questão 1.4. o professor deve assegurar-se que os alunos consideram apenas valores inteiros no seletor, clarificando, se necessário a necessidade de escolher o valor 1 para o incremento.



## Tarefa 10

### Resolver equações em $\mathbb{C}$

1. Para um certo valor de  $k$  real, sabe-se que  $1 + i$  é uma solução da equação

$$x^2 - kx + k = 0. \text{ Qual é o valor de } k?$$

2. Resolva em  $\mathbb{C}$  as seguintes equações:

2.1.  $2z^2 + 2z + 5 = 0$

2.2.  $z^3 - iz^2 + 4z - 4i = 0$ , (sabendo que  $i$  é uma das soluções).

2.3.  $z^2 = \operatorname{Re}(z)$

2.4.  $z^3 = i^{18} + i^{19} + i^{20}$

2.5.  $z^3 + z = 0$

2.6.  $z^4 - \bar{z} = 0$

2.7.  $(1 - i)z^4 = 2i$

3. Considera dois números  $x$  e  $y$  cuja soma é igual a 8 e o produto igual a 25.

3.1. Mostra que não existem dois números naturais cuja soma seja 8 e o produto 25.

3.2. Determina  $x$  e  $y$ .

4. Considera o número complexo  $z_1 = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

4.1. Mostra que  $z_1$  é solução da equação  $\bar{z} = -iz$ .

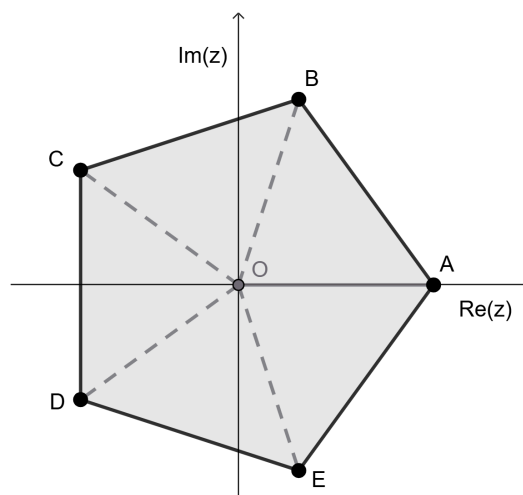
4.2. Determina a área do polígono cujos vértices são as representações geométricas, no plano de Argand, das raízes quartas de  $z_1$ .



5. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um pentágono regular centrado na origem.

Sabe-se que o ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, 0)$ .

- 5.1. Determina, na forma trigonométrica, os números complexos cujos afixos são os restantes vértices do pentágono.
- 5.2. Escreve uma equação em  $\mathbb{C}$  cujas soluções sejam os números complexos encontrados no item anterior.
- 5.3. Seja  $z_D$  o número complexo que tem o ponto  $D$  como afixo. Apresenta, na forma trigonométrica, um número complexo  $w$  de módulo igual a 1, tal que  $z_D \times w = 2$ .



## Tarefa 10

Resolver equações em  $\mathbb{C}$

### Notas pedagógicas para a ação do professor

#### Resumo:

O objetivo desta tarefa é proporcionar aos alunos oportunidades de aplicar procedimentos algébricos, já utilizados com números reais, no contexto da resolução de equações, envolvendo agora números complexos. A igualdade de números complexos, escritos na forma algébrica e na forma trigonométrica, deve ser mobilizada para a resolução das equações.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Igualdade de números complexos escritos na forma algébrica e na forma trigonométrica. Regra de Ruffini.

**Materiais e recursos:** Calculadora gráfica.

#### Notas para o professor:

Embora se pretenda que os alunos desenvolvam um trabalho predominantemente algébrico, sempre que for adequado, o professor deve incentivar ou recordar a possibilidade de testar a solução recorrendo à calculadora gráfica.

No item 3.1., uma forma de demonstrar que não existem números naturais que satisfaçam as condições definidas consiste em recorrer a uma tabela para analisar todos os pares de números naturais cuja soma seja 8. Este processo pode tornar-se ainda mais eficaz se, previamente, forem identificados os números naturais cujo produto é 25.



## Tarefa 11

### Conjuntos de pontos e condições

1. Considera a tabela seguinte.

Em cada linha da tabela escreve um X nas células (quadrículas) em que o número complexo dessa linha é solução da condição da respetiva coluna.

	$Re(z) > 0$	$Im(z) > 0$	$ z  < 3$	$-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < \frac{\pi}{6}$	$Re(z) > Im(z) \wedge  z  < 3$
$3 - i$					
$2e^{i\frac{6\pi}{7}}$					
$5i$					
$5e^{i\frac{7\pi}{10}}$					

2. Considera em  $\mathbb{C}$  a condição  $|z - 4i| = 5$ .

- 2.1. Justifica que os números complexos  $9i$ ;  $-i$ ;  $5 + 4i$  e  $-3$  verificam a condição apresentada.
- 2.2. Representa no GeoGebra os afijos dos números complexos anteriores, e descreve o lugar geométrico definido pela condição.

Nota: pode ser útil representar mais pontos que pertençam ao mesmo lugar geométrico, por exemplo:  $-4 + 7i$ ;  $3 + 8i$  ou  $3$ .

Dados dois números complexos  $z_A$  e  $z_B$ , cujos afijos são os pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente, a distância entre  $A$  e  $B$  é dada por  $|z_A - z_B|$ .

$$\overline{AB} = |z_A - z_B|.$$

3. Descreve o lugar geométrico do conjunto dos afijos dos números complexos definidos pela condição  $|z - (2 - 3i)| \leq 2$ .



4. Lembra que a mediatriz de um segmento de reta é o conjunto de pontos equidistantes dos extremos do segmento de reta.

Considera, no plano complexo, o segmento de reta cujos extremos são os afixos de  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 2i$ .

- 4.1. Justifica que o afixo de  $-2 - 7i$  pertence à mediatriz do segmento de reta indicado.

- 4.2. Escreve três números complexos (diferentes do anterior), cujos afixos sejam equidistantes dos afixos de  $z_1$  e  $z_2$ .

Nota: pode ser útil recorrer ao GeoGebra, representar os afixos de  $z_1$  e  $z_2$  e obter a mediatriz definida por estes pontos.

- 4.3. Escreve uma condição, em  $\mathbb{C}$ , que defina a mediatriz do segmento de reta indicado.

5. Representa no plano complexo, o conjunto dos pontos definidos pela condição:

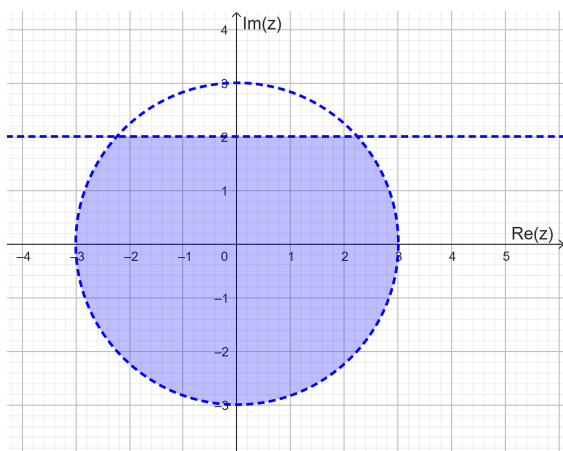
5.1.  $Re(z) = 1$

5.2.  $Im(z) \leq -2$

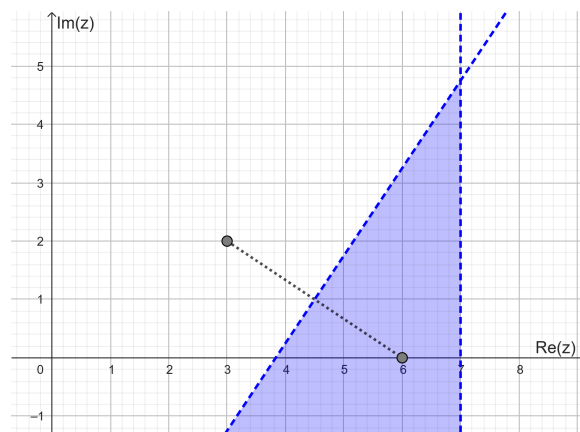
5.3.  $Re(z) > 3 \wedge Re(z) < 5$

6. Define por uma condição o conjunto de números complexos, cujos afixos se situam nas regiões sombreadas em cada figura.

6.1.



6.2.



7. Representa, no plano de Argand, as regiões definidas pelas condições seguintes:

7.1.  $\operatorname{Re}(z) > -2 \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{4}$

7.2.  $|z - i| \geq 1 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

7.3.  $|z + 2i| \geq |z + 2|$

7.4.  $\operatorname{Arg}(z - (1 + i)) = -\frac{\pi}{4}$

8. Indica, justificando, se o número complexo  $2\pi e^{i\frac{10\pi}{7}}$  verifica a condição

$$\operatorname{Im}(z) > -6 \wedge \pi \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{2}.$$



# Tarefa 11

## Conjuntos de pontos e condições

### Notas pedagógicas para a ação do professor

#### Resumo:

O objetivo desta tarefa é proporcionar aos alunos a compreensão de que uma condição definida com números complexos, pode representar um conjunto de pontos do plano de Argand. As características do lugar geométrico dependem da condição algébrica definida. Os alunos devem compreender, também, o conceito de distância entre os afijos de dois números complexos e comparar com a distância entre dois pontos no plano, estabelecida a partir das suas coordenadas.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Números complexos representados na forma algébrica e na forma trigonométrica.

**Materiais e recursos:** Computador ou telemóvel com acesso à Internet ou com o GeoGebra instalado.

#### Notas para o professor:

A representação geométrica deve basear-se essencialmente em esboços, alertando os alunos para as características essenciais de cada lugar geométrico, que o esboço deve enfatizar.

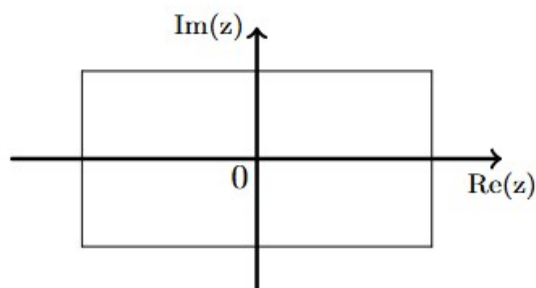
Estabelecer comparações com lugares geométricos definidos a partir de coordenadas cartesianas de pontos do espaço pode ajudar os alunos a compreender que algumas expressões algébricas já foram estudadas, permitindo identificar diversas semelhanças. Por outro lado, é igualmente importante que os alunos identifiquem lugares geométricos distintos dos estudados no 10.º ano, nomeadamente aqueles que são definidos a partir do argumento de um número complexo.



## Coleção de problemas

### Números complexos

1. Na figura ao lado está representado um retângulo de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados. Seja  $z$  um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do retângulo.



Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do retângulo?

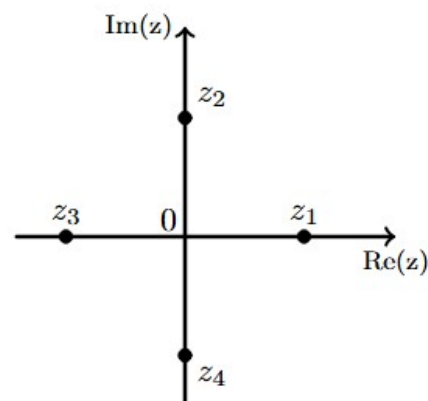
- (A)  $z^{-1}$                       (B)  $\bar{z}$                       (C)  $z^2$                       (D)  $2z$

Exame - 2002, 2.ª Fase (adaptado)

2. Seja  $w$  um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Seja  $\bar{w}$  o conjugado de  $w$ .

Na figura ao lado estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos:  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$ .



Qual deles pode ser igual a  $\frac{w}{\bar{w}}$  ?

- (A)  $z_1$                       (B)  $z_2$                       (C)  $z_3$                       (D)  $z_4$

Exame - 2001, 1.ª Fase - 1.ª Chamada

3. Em  $\mathbb{C}$ , considere os números complexos:  $z_1 = -6 + 3i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ .

Sem recorrer à calculadora, determine  $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2}$ , apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Exame - 2004, 1.ª Fase



4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a equação  $z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6$ .

Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.

Apresente o resultado na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Exame - 2022, 1.ª Fase

5. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\sqrt{2}$

(D) 1

Exame - 2017, 1.ª Fase

6. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15}$ .

Escreva o complexo  $-\frac{1}{2} \times \bar{z}$  na forma trigonométrica.

Exame - 2018, 2.ª Fase

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número

$$z = \frac{5ai^{15}}{1-2i} + \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que  $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 1$ .

Determine  $z$  na forma trigonométrica.

Exame - 2025, 2.ª Fase

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, os números complexos

$$z_1 = 2i^{19} \text{ e } z_2 = \frac{-3+i}{1+i}.$$

Seja  $w = -\sqrt{2}ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

Determine o valor de  $k$  para o qual o afixo de  $w$  é equidistante do afixo de  $z_1$  e do afixo de  $z_2$ .

Exame - 2025, 1.ª Fase



# Coleção de problemas

## Números complexos

### Notas pedagógicas para a ação do professor

**Resumo:**

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

**Conhecimentos prévios dos alunos:** Interpretar e organizar informação. Conceitos estudados no tema números complexos.

**Materiais e recursos:** Internet e calculadora.

**Notas para o professor:**

O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.

