PROBABILIDADE

Matemática A

12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Probabilidade (Matemática A 12.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, fevereiro de 2026

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.
O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação (EduQA) e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - PROBABILIDADE

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos	**Fenómeno aleatório** Modelo de probabilidade acontecimentos União e interseção de acontecimentos	• Relembrar os conceitos: acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C). • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
1	Tarefa 2 Operações com acontecimentos	**Fenómeno aleatório** Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral	• Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). • Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; • Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

1	[Tarefa 3](#) Probabilidade frequencista	**Probabilidade** Probabilidade frequencista	• Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática • **Resolução de problemas, modelação e conexões**	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	[Tarefa 4](#) Mais operações com números complexos	**Probabilidade** Regra de Laplace	• Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática • **Resolução de problemas, modelação e conexões**	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	[Tarefa 5](#) Probabilidade da união de acontecimentos	**Probabilidade** Probabilidade da união de acontecimentos	• Relembrar os conceitos: acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; união e interseção de acontecimentos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

3	Coleção de problemas (I) Probabilidade	**Fenómeno aleatório** Modelo de probabilidade acontecimentos **Probabilidade** Probabilidade frequencista Regra de Laplace	• Resolver problemas variados que envolvem modelos de probabilidade.	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
1	Tarefa 6 Probabilidade condicionada	**Probabilidade condicionada** Definição Regra do produto	• Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$,se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou $P(A \cap B) = P(B) \times P(A\|B)$	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 7 O uso de óculos	**Probabilidade condicionada** Tabelas de contingência	• Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

2	Tarefa 8 Ora bolas!	**Probabilidade condicionada** Árvore de probabilidade	• Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 9 Ganha ou perde	**Probabilidade condicionada** Acontecimentos independentes	• Identificar que os acontecimentos A e B, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A\|B) = P(A)$ ou $P(B\|A) = P(B)$. • Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Coleção de problemas (II) Probabilidade condicionada	**Probabilidade condicionada** Regra do produto Tabelas de contingência Árvore de probabilidade Acontecimentos independentes	• Resolver problemas variados que envolvem o conceito de probabilidade condicionada.	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

1	Tarefa 10 Função massa de probabilidade	**Modelos de probabilidade em espaços finitos** Variáveis aleatórias (discretas) Função massa de probabilidade	• Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função. • Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. • Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática • **Resolução de** problemas, modelação e **conexões**	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
1	Tarefa 11 Esperança matemática	**Modelos de probabilidade em espaços finitos** Valor médio e desvio padrão populacional	• Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional. • Compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\overline{x}$ e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional σ e desvio padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. • Calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação Matemática • **Resolução de** problemas, modelação e **conexões**	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 12 Quantos pontos são marcados num jogo da NBA?	**Modelo Normal** Propriedades	• Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. • Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ. • Calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso **sistemático** à tecnologia • Comunicação Matemática • **Resolução de** problemas, modelação e **conexões**	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
3	Coleção de problemas (III) Modelos de probabilidade	**Modelos de probabilidade em espaços finitos** Função massa de probabilidade Valor médio e desvio padrão populacional **Modelo Normal** Propriedades	• Resolver problemas variados que envolvem o conceito de probabilidade condicionada.	Trabalho em grupo	• Resolução de **Problemas**, modelação e conexões • **Comunicação** Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Tarefa 1

Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos

Exemplo 1 - A favor ou contra a despenalização do aborto

Considera a experiência aleatória que consiste em perguntar a duas pessoas escolhidas ao acaso, de uma dada cidade, se são a favor ou contra a despenalização do aborto. Qualquer outra resposta é invalidada.

1. Dá exemplos de resultados que se possam obter ao realizar a experiência aleatória descrita.
2. Determina o espaço de resultados.
3. Escreve, em extensão, os seguintes acontecimentos:
   - A - uma das pessoas é contra
   - B - pelo menos uma das pessoas é contra
   - C - as duas pessoas são a favor
4. Relembrando que:
   "os acontecimentos constituídos por um único elemento do espaço de resultados são chamados de "**acontecimentos elementares**".
   Quais te parecem ser os acontecimentos elementares associados a este exemplo: "ser a favor ou contra a despenalização do aborto"?

Exemplo 2 - Lançamento de dois dados cúbicos equilibrados

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados cúbicos, de cores diferentes, equilibrados e verificar o número de pintas na face voltada para cima em cada um deles.

1. Determina o espaço de resultados (S).
2. Escreve, em extensão, os seguintes acontecimentos:
   - X - o número de pintas é igual nos dois dados;
   - Y - a soma das pintas é sete.
3. Apresenta exemplos de acontecimentos elementares, compostos, impossíveis e certos.

Tarefa 1

Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é introduzir os alunos no tema de Probabilidade. Pretende-se revisitar os conceitos trabalhados no 9.º ano no contexto de experiências aleatórias concretas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noções de probabilidades do 9.º ano.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
Relativamente à definição do espaço de resultados (ou espaço amostral) é importante esclarecer que podem ser definidos espaços de resultados cujos resultados não sejam equiprováveis, como no Exemplo 1 da tarefa, o espaço de resultados:
$S = \{\text{"}As\ duas\ pessoas\ são\ a\ favor\text{"},\ \text{"}As\ duas\ pessoas\ são\ contra\text{"},\ \text{"}As\ duas\ pessoas\ têm\ opiniões\ diferentes\text{"}\}$.
Esta opção tem a desvantagem de não permitir usar a contagem dos resultados elementares como o número de casos possíveis na determinação de probabilidades pela Lei de LaPlace.

Tarefa 2

Operações com acontecimentos

Exemplo 1 - As rádios X e Y

Seis amigos, a Ana, a Beatriz, o Carlos, o Daniel, o Eduardo e o Fernando responderam a um inquérito sobre as rádios X e Y.

Das respostas ao inquérito, sabe-se que:

- todos os rapazes ouvem a rádio X;
- dos rapazes, apenas o Carlos e o Daniel ouvem a rádio Y;
- a Beatriz ouve apenas a rádio Y;
- a Ana não ouve nenhuma das duas rádios.

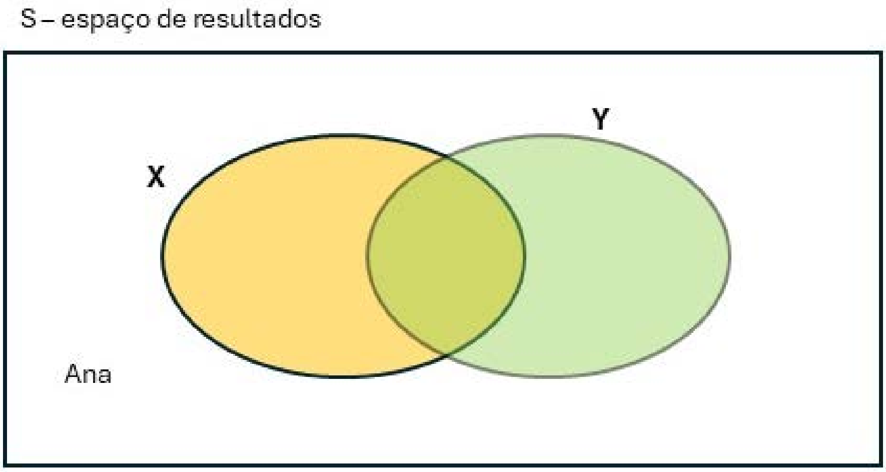
Considera a experiência aleatória que consiste em escolher um destes jovens ao acaso e registar as rádios que ouvem.

Considera os acontecimentos:

- X: "ouve a rádio X" ;
- Y: "ouve a rádio Y".

1. Define em extensão os seguintes acontecimentos:
   1.1. $X \cap Y$: "ouvir a rádio X e a rádio Y" (intersecção dos acontecimentos X e Y);
   1.2. $X \cup Y$: "ouvir a rádio X ou a rádio Y" (união ou reunião dos acontecimentos X e Y);
   1.3. $\overline{Y}$: "não ouvir a rádio Y" ($\overline{Y}$ diz-se o acontecimento contrário de Y);
   1.4. $X \backslash Y$: "ouvir a rádio X, mas não ouvir a rádio Y" (diferença entre os acontecimentos X e Y).

2. Tendo por base a informação dada, representa-a no seguinte diagrama de Venn:



Exemplo 2 - Lançamento de um dado cúbico equilibrado

Na experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado cúbico equilibrado e observar o número de pintas na face que fica voltada para cima, considera os acontecimentos

- D: "sair divisor de 5" ;
- I: "sair número ímpar" ;
- P: "sair número par".

1. Define em extensão os seguintes acontecimentos:
   1.1. $D \cap I$;
   1.2. $D \cup P$;
   1.3. $\overline{D}$;
   1.4. $D \backslash P$;
   1.5. $P \backslash \overline{D}$.

2. Apresenta exemplos de dois acontecimentos:
   2.1. disjuntos ou mutuamente exclusivos entre si;
   2.2. contrários ou complementares entre si.

Exemplo 3 - Uma experiência aleatória escolhida por ti

Define uma experiência aleatória à tua escolha e indica dois acontecimentos A e B, contidos no espaço amostral (S).

1. Caracteriza, no contexto da tua experiência aleatória, os acontecimentos seguintes:
   1.1. $\overline{A}$;
   1.2. $\overline{B}$;
   1.3. $A \cap B$;
   1.4. $A \cup B$;
   1.5. $A \backslash \overline{B}$.

2. Organiza a informação num diagrama de *Venn* ou numa tabela de contingência.

Tarefa 2

Operações com acontecimentos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo continuar a introduzir o tema Probabilidade, estabelecendo ligações com o que trabalharam ao longo do Ensino Básico. Pretende-se, ainda, que a comunicação escrita dos alunos evolua para um registo progressivamente mais abstrato e formal, recorrendo à utilização de operações com conjuntos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Operações com conjuntos.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
Na discussão do Exemplo 3 não é necessária, por questões de gestão do tempo letivo, a apresentação das experiências aleatórias de todos os grupos ou pares.

Tarefa 3

Probabilidade frequencista

1. Soma maior que 13

Num certo jogo, lançam-se três dados cúbicos equilibrados e ganha-se quando a soma das pintas das faces voltadas para cima é maior que 13.

Nota: Podes simular os lançamentos recorrendo à tua calculadora gráfica, gerando números inteiros aleatórios entre 1 e 6, por exemplo "`randint(1,6)+randint(1,6)+randint(1,6)`".

1.1. Realiza a experiência 20 vezes e determina a frequência relativa de sair soma maior que 13.

1.2. Considera todos os lançamentos efetuados pelo teu grupo e determina a frequência relativa de sair soma maior que 13.

1.3. Para que valor te parece que está a tender a frequência relativa deste acontecimento, à medida que aumenta o número de experiências?

1.4. Apresenta uma estimativa da probabilidade de ganhar.

2. Um dado cúbico

2.1. Considera o programa seguinte que simula o lançamento de um dado:

Dado.ipynb

Executa o programa várias vezes e tenta descobrir se o dado apresenta os resultados esperados.

2.2. Altera sucessivamente o programa anterior para que simule 100, 500 e 1000 lançamentos do dado. Executa o programa após cada alteração e regista o número de ocorrências de cada face. Compara os resultados com a resposta da alínea anterior.

2.3. Elabora uma pequena composição matemática, procurando responder às seguintes questões:

- Para que valor a frequência relativa da face 6 tende a estabilizar?
- A frequência relativa das outras faces tende para o mesmo valor?
- Para que valor te parece que a frequência relativa de cada face se está a aproximar?
- Que conclusão tiras sobre a relação entre frequência relativa e a probabilidade de cada face do dado?

Definição frequencista de probabilidade

Define-se probabilidade de um acontecimento A como sendo o valor obtido para a frequência relativa com que se observou A, num grande número de realizações independentes da experiência aleatória.

Tarefa 3

Probabilidade frequencista

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam que a frequência relativa de uma observação, obtida após um grande número de repetições independentes da experiência aleatória, é uma estimativa da probabilidade dessa observação. Além disso, os alunos devem compreender que a definição frequencista de probabilidade depende da realização de um número elevado de experiências.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecimentos elementares de programação em python.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet.

Notas para o professor:

Relativamente ao item 1., sugere-se que os alunos utilizem a calculadora gráfica para realizar simulações da experiência aleatória. Algumas calculadoras permitem automatizar este processo, incluindo a soma dos três números aleatórios num único comando, como por exemplo: `SumRandInt#(1,6,3)` ou `sum(RandInt(1,6,3)`.
Esta é uma alternativa viável, devendo o professor assegurar-se de que os alunos compreendem os parâmetros do comando e que estes estão devidamente ajustados à simulação pretendida.
Existem ainda outras alternativas como: recurso a dados reais; utilização de folha de cálculo; simulações disponíveis na Internet por exemplo: "https://www.google.com/search?q=lancar+tr%C3%AAs+dados&oq=lancar+tr%C3%AAs+dados".
Relativamente ao item 2., pretende-se que os alunos alterem apenas a linha do programa que define o número de lançamentos. A identificação das particularidades do dado, nomeadamente a não equiprobabilidade das faces, deve decorrer da análise dos resultados obtidos nas simulações e, só depois, da análise do código do programa.

No programa em Python surgem algumas linhas de código, cuja finalidade não é serem discutidas e analisadas com os alunos. Ainda assim, deixamos algumas notas explicativas para apoiar os professores na compreensão dessas linhas do código. O objetivo é que os docentes se sintam mais confortáveis ao utilizar o programa em aula, mesmo quando surgem elementos técnicos que ultrapassam o nível de complexidade previsto para os alunos.

Aqui fica alguma informação para um melhor esclarecimento:

- `resultado = choice(dado)`

  O comando "choice", importado da biblioteca "random" escolhe aleatoriamente um elemento da lista "dado".

- `freq[resultado - 1] += 1`

  O operador "-1" destina-se a ajustar a posição na lista "freq" com o número da face do dado (por exemplo, a face 3 do dado está na posição 2 da lista "freq", pois esta começa com a posição 0); e o operador "+=1" tem a função de acrescentar uma unidade à frequência do valor do dado sorteado na linha anterior.

Tarefa 4

Regra de Laplace

Recorda que: quando se puder admitir que os acontecimentos elementares, de uma dada experiência aleatória, são equiprováveis, calcula-se a probabilidade pela **Regra de Laplace** - de um acontecimento A e representa-se por $P(A)$, através do quociente:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ possíveis}$$

1. **Soma maior que 13**

   Num certo jogo, lançam-se três dados cúbicos equilibrados, e o jogador ganha quando a soma das pintas das faces voltadas para cima é maior que 13.

   1.1. O António afirma que existem 16 somas possíveis quando se lançam três dados, e que por isso, a probabilidade de ganhar neste jogo é $\frac{1}{16}$. O António terá razão? Explica porquê.

   1.2. Através do esboço de um diagrama em árvore ou outro esquema à tua escolha, conta o número de casos possíveis da experiência.

   Nota: pode ser útil recorrer às técnicas de contagem estudadas no 11.º ano.

   1.3. Conta o número de casos favoráveis ao acontecimento da soma das faces voltadas para cima ser maior que 13.

   1.4. Calcula a probabilidade do acontecimento da soma das pintas das faces voltadas para cima ser maior que 13, usando a regra de Laplace.

2. **Dados poliédricos equilibrados**

   2.1. Considera o programa seguinte que simula o lançamento de um dado:

   Dado.ipynb .

   Faz uma cópia do programa e altera o código para que simule o lançamento de um dado equilibrado com 4 faces, e depois com 8 faces. Apresenta o valor da probabilidade de cada face.

2.2. Qual é a definição de probabilidade que utilizaste no item anterior para obter os valores da probabilidade de cada face, depois de teres executado o programa em *Python*?

2.3. Determina o valor exato, na forma de fração, da probabilidade de cada face do dado de 4 e de 8 faces, e compara com as probabilidades obtidas no item 2.1..

Tarefa 4

Regra de Laplace

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa, pretende-se que os alunos relembrem a Regra de Laplace, trabalhada no ensino básico, e que comparem a probabilidade de um acontecimento calculada por este processo, com a obtida através da definição frequencista de probabilidade.

Conhecimentos prévios dos alunos: Definição frequencista de probabilidade.

Materiais e recursos: Calculadora e computador.

Notas para o professor:
Ao recordar a Regra de Laplace, poderá ser retomada a discussão sobre a contagem do número de casos possíveis, bem como a necessidade de garantir a equiprobabilidade dos casos para a determinação da probabilidade, quando se usa esta regra.
Também se propõe a discussão de diferentes estratégias para contar o número de casos possíveis ou favoráveis em situações em que a enumeração ou listagem completa é impossível ou muito difícil. O recurso a diagramas, tabelas ou listas parciais, que permitam descobrir padrões e regularidades, deve ser valorizado pelo professor como estratégias válidas de contagem. Naturalmente, o recurso às técnicas de contagem estudadas no 11.º ano também deve ser valorizado.
A comparação entre os valores de probabilidades obtidos pelo método frequentista e pela Regra de Laplace é outro aspeto importante. O professor deve realçar a validade do método frequencista, lembrando que, em muitos casos, é a única alternativa para calcular uma probabilidade.

Tarefa 5

Probabilidade da união de acontecimentos

1. No lançamento de um dado equilibrado com 12 faces, em que se regista o número da face que fica voltada para cima, considera os acontecimentos:

   - A: "sair um número múltiplo de 3";
   - B: "sair um número par":
   - C: "sair o número 5".

   1.1. Escreve em extensão os acontecimentos A, B e C e define o espaço de resultados da experiência aleatória.

   1.2. Qual é a probabilidade de A ? E de B ? E de C ?

   1.3. Qual é a probabilidade de $A \cup C$?

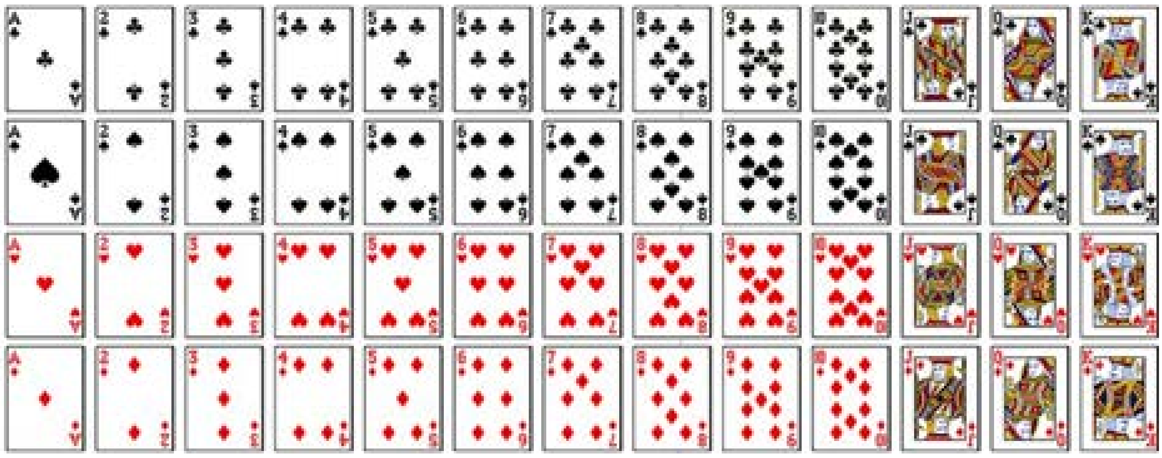
   1.4. Qual é a probabilidade de $A \cap C$?

   1.5. Como relacionas as probabilidades de A , de C e de $A \cup C$? Justifica a tua resposta.

   1.6. Calcula a probabilidade de $A \cup B$ e a probabilidade de $A \cap B$.

   1.7. Como relacionas as probabilidades de A , de B e de $A \cup B$? Justifica a tua resposta.

2. Considera um baralho com 52 cartas, reproduzido na figura seguinte, e a experiência aleatória que consiste em selecionar ao acaso uma carta deste baralho .



Qual é a probabilidade de:

2.1. Sair uma copa?

2.2. Sair uma figura?

2.3. Sair uma figura ou uma copa?

2.4. Sair o ás de copas?

3. Sejam X e Y dois acontecimentos do mesmo espaço de resultados.

Indica, justificando o valor lógico das seguintes afirmações:

3.1. Se $P(X) = 0,25$ e $P(Y) = 0,5$, então $P(X \cup Y) = 0,75$.

3.2. Se $P(X) = 0,25$ e $P(Y) = 0,5$, então $P(X \cap Y) = 0,25$.

4. Numa determinada escola 120 alunos frequentam o 11.º ano. Considera os acontecimentos: (I) - ter positiva a Inglês, (F) - ter positiva a Filosofia e (M) - ter positiva a Matemática. Sabe-se ainda que:

   - 57 tiveram positiva a Matemática;
   - 49 tiveram positiva a Inglês;
   - 87 tiveram positiva a Filosofia;
   - 28 tiveram positiva a Matemática e Inglês;
   - 35 tiveram positiva a Matemática e Filosofia;
   - 30 tiveram positiva a Inglês e a Filosofia;
   - 15 tiveram positiva nas três disciplinas.

Escolhe-se um estudante ao acaso e regista-se a sua situação relativamente às classificações obtidas nestas disciplinas.

4.1. Constrói um diagrama de Venn, que represente o espaço de resultados associado à experiência aleatória e nele assinala os acontecimentos M, I e F.

4.2. Qual é a probabilidade de escolher um estudante e este ter pelo menos uma positiva?

Dado um espaço de resultados, sendo X e Y dois acontecimentos quaisquer, temos que:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

Tarefa 5

Probabilidade da união de acontecimentos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com o desenvolvimento desta tarefa, pretende-se que os alunos relembrem que a probabilidade da união de acontecimentos disjuntos é a soma das respetivas probabilidades. Pretende-se também que generalizem para dois acontecimentos quaisquer o cálculo da probabilidade da sua união.

Conhecimentos prévios dos alunos: Operações com acontecimentos, Acontecimentos disjuntos.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
Nesta tarefa, o cálculo da probabilidade da união de acontecimentos é abordado em contextos que incluem experiências aleatórias mais simples e mais complexas, bem como de forma abstrata, para acontecimentos de que não se conhece a experiência aleatória.
Pretende-se que os alunos se familiarizem gradualmente com diferentes contextos e utilizem diferentes representações, de modo que consigam fazer escolhas adequadas para cada problema.

Coleção de problemas (I)

Probabilidade

1. Das experiências seguintes, indica as que são experiências aleatórias.
   1.1. Atirar uma rolha de cortiça para um recipiente com água e observar se vai ao fundo.
   1.2. Extrair uma carta ao acaso, de um baralho e anotar o naipe e o número.
   1.3. Medir o tempo que demora de casa à escola.
   1.4. Escolher ao acaso um dos colegas da turma, e perguntar quantos irmãos tem.

2. Um dado cúbico equilibrado tem as faces coloridas, cada uma delas com uma só cor, verde ou vermelha. Ao fim de muitos lançamentos do dado e feito o registo da cor da face voltada para cima em cada lançamento, a frequência relativa da ocorrência de cada cor está a estabilizar em valores que não diferem mais do que uma centésima dos valores teóricos (exatos) de probabilidade.
   Estes valores, ao fim desses lançamentos, são os que se encontram na tabela seguinte.

Verde	Vermelho
0,342	0,658

   Quantas faces tem o dado com cada uma das cores? Explica a tua resposta.

3. Uma experiência aleatória repete-se sucessivamente, registando-se a frequência relativa de um acontecimento A.
   Sabe-se ainda que o valor teórico (exato) da probabilidade do acontecimento A é $0,25$.
   Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:
   3.1. "O registo da frequência relativa após 5000 realizações da experiência é mais próximo de $0,25$ do que o que foi feito ao fim de 100 realizações da experiência."
   3.2. "Se ao fim de 600 realizações da experiência ocorreram 180 resultados favoráveis ao acontecimento A, havia um desvio de 30 ocorrências face ao que, teoricamente, seria esperado, com impacto na diferença entre o valor

registado e $0,25$, mas realizando mais algumas experiências além dessas 600, se se mantiver a diferença de 30 ocorrências esse impacto é menor."

3.3. "Se ao fim de 1000 experiências o registo for de $0,216$, abaixo do valor exato, nas próximas 100 experiências vão verificar-se mais ocorrências do acontecimento A do que do acontecimento contrário ao de A."

4. Duas urnas A e B têm bolas azuis, vermelhas e pretas. Escolhe-se aleatoriamente uma urna e, de seguida, retira-se uma bola da urna.

4.1. Define o espaço amostral.

4.2. Indica, justificando, um acontecimento impossível e um acontecimento certo.

4.3. Considera os acontecimentos:

- A : "a urna escolhida é a A" ;
- B : "a bola extraída da urna B é vermelha" .

4.3.1. Comenta a afirmação: "Os acontecimentos A e B são incompatíveis mas não são contrários."

4.3.2. Indica um acontecimento contrário ao acontecimento A.

5. Uma urna contém 10 bolas indistinguíveis ao tacto, cinco de cor branca numeradas de 1 a 5 e cinco de cor preta numeradas de 6 a 10. Tira-se ao acaso uma bola da urna.

5.1. Define em linguagem corrente dois acontecimentos incompatíveis mas não contrários.

5.2. Considera os seguintes acontecimentos:

- A : "sair número par" ;
- B : "sair cor branca" ;
- C : "sair número superior a 4" .

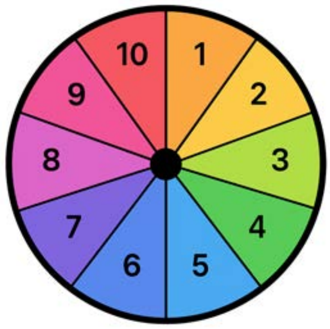
5.2.1. Classifica o acontecimento $B \cap C$ e escreve na forma de subconjunto do espaço de resultados o acontecimento $A \cup C$.

5.2.2. Calcula:

5.2.2.1. $P(A \cap C)$;

5.2.2.2. $P(A \cup B)$.

6. Num concurso é utilizada uma roleta que está dividida em 10 setores circulares, de igual amplitude, numerados de 1 a 10. Considera a experiência aleatória que consiste em fazer rodar a roleta e registar a pontuação obtida.



6.1. Define o espaço de resultados.

6.2. Relativamente a esta experiência, indica:

6.2.1. Um acontecimento impossível e um acontecimento certo;

6.2.2. Dois acontecimentos incompatíveis não contrários;

6.2.3. Dois acontecimentos contrários.

6.3. Considera agora que se roda a roleta duas vezes.
Determina a probabilidade de:

6.3.1. Sairem dois números primos;

6.3.2. A soma dos números saídos ser 15;

6.3.3. Sair pelo menos um número par.

7. Num saco há oito bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 8. Retira-se ao acaso uma bola do saco.
Considera os acontecimentos:

- A : "O número da bola não é múltiplo de 4" ;
- B : " O número da bola é par" ;
- C : " O número da bola é ímpar" .

7.1. Representa sob a forma de conjunto os acontecimentos seguintes:

7.1.1. $\overline{A} \cap B$;

7.1.2. $A \cup B$;

7.1.3. $\overline{A \cap B}$;

7.1.4. $C \backslash A$;

7.1.5. $B \backslash \overline{A}$.

7.2. Determina a probabilidade de cada um dos acontecimentos do item anterior.

8. Uma empresa que fabrica cofres atribui ao acaso um código secreto a cada cofre que vende.

Cada código é composto por seis algarismos dispostos por uma certa ordem.

Uma pessoa compra um cofre a essa empresa.

Determina a probabilidade de o respetivo código secreto ter:

8.1. os algarismos todos diferentes;

8.2. exatamente dois zeros;

8.3. pelo menos um zero.

9. Dentro de um frasco estão quatro esferas, de igual textura e tamanho, numeradas de 1 a 4, como mostra a figura ao lado.

Supõe que tiramos, ao acaso, duas esferas do frasco e registamos os seus números .

Considera as duas situações:

- a extração é feita sem reposição;
- a extração é feita com reposição.

Resolve os itens seguintes para cada uma das situações (com reposição e sem reposição).

9.1. Determina o espaço de resultados desta experiência.

9.2. Representa em extensão os seguintes acontecimentos:

- A : “a soma dos números das duas esferas é 5”;
- B: “o número da primeira esfera é superior ao número da segunda esfera”;
- C: “o número das duas esferas é diferente”.

9.3. Qual é a probabilidade dos acontecimentos A, B e C?

10. Numa aldeia decorre uma campanha de vacinação, realizada por duas equipas, destinada a todas as crianças com menos de 12 anos.

Uma das equipas aplica a vacina A e a outra aplica a vacina B.

Em determinada fase do processo, 70% das crianças já tinham sido vacinadas por, pelo menos, uma das equipas.

Sabe-se ainda que 50% das crianças da aldeia já tinham sido vacinadas com a vacina A e 30% com a vacina B.

Nesta fase do processo, indica qual a percentagem de crianças da aldeia que tinham sido vacinadas:

10.1. Com os dois tipos de vacinas;

10.2. Apenas com a vacina tipo B .

11. Duas equipas de basquetebol, A e B, disputam um torneio.
A equipa vencedora será a primeira a ganhar dois jogos consecutivos, num máximo de quatro jogos.

11.1. Constrói um diagrama de árvore e determina o número de elementos do espaço amostral.

11.2. Considera os acontecimentos:

- P : "A equipa A vence o torneio"
- Q : "São efetuados pelo menos 3 jogos"
- T : "A equipa B vence o torneio"

11.2.1. Indica o número de elementos dos acontecimentos:

11.2.1.1. $P \cap Q$;

11.2.1.2. $P \backslash Q$.

11.2.2. Os acontecimentos P e T são contrários? Justifica a tua resposta.

12. Numa turma de 22 alunos, sabe-se que 14 praticam natação, 10 futebol e 4 não praticam nenhuma destas modalidades. Considera a experiência que consiste em escolher um aluno da turma, ao acaso, e registar as modalidades desportivas que pratica.
Sejam N e F os acontecimentos:

- N : "Pratica natação" ;
- F : "Pratica futebol" .

Determina a probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos:

12.1. $N \cap F$;

12.2. $N \cup F$;

12.3. $\overline{N}$;

12.4. $N \backslash F$;

12.5. $F \backslash N$;

12.6. $N \cap \overline{F}$.

13. Numa vila com 2000 habitantes existem dois jornais semanários: o Mensageiro e o Viajante. Sabe-se que, dos habitantes dessa vila, 1200 lêem o Mensageiro (M), 700 lêem o Viajante (V) e 400 lêem ambos.

Qual é a probabilidade de um habitante dessa vila, inquirido ao acaso:

13.1. ler o Mensageiro ou o Viajante?

13.2. não ler qualquer destes semanários?

13.3. ler apenas o Mensageiro?

13.4. ler só um destes semanários?

14. Numa dada região há três emissoras de rádio: a rádio Jovem, a rádio Moderna e a rádio Alegria.

55% dos habitantes ouvem a rádio Jovem, 38% ouvem a rádio Moderna e 33% a rádio Alegria. 15% ouvem as emissoras Jovem e Moderna, 11% Jovem e Alegria, 9% Moderna e Alegria e 4% ouvem as três emissoras.

Sejam os acontecimentos:

- A : "ouvir a rádio Alegria";
- J : "ouvir a rádio Jovem";
- M: "ouvir a rádio Moderna".

14.1. Calcula a probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos:

14.1.1. $A \cup J \cup M$;

14.1.2. $A \setminus (M \cup J)$;

14.2. Que percentagem de pessoas não ouve rádio?

15. Nas "caixas" de e-mail da marca Selo Digital, os utilizadores devem introduzir um código para aceder ao correio. Esse código é formado por 5 letras seguidas de 3 algarismos, considerando o alfabeto com 23 letras.

15.1. Escolhendo um código ao acaso, qual é a probabilidade de este não ter caracteres repetidos.

15.2. Quantos códigos é possível atribuir com exatamente duas letras iguais?

Coleção de problemas (I)

Probabilidade

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Fenómeno aleatório. Modelo de probabilidade de acontecimentos. Probabilidade frequencista. Regra de Laplace.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:

O trabalho a realizar por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos continuem a desenvolver este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas durante o tempo disponibilizado pelo professor, essa diferença não compromete o objetivo essencial da tarefa.

Tarefa 6

Probabilidade condicionada

Parte I - Mudar as regras do jogo

Num baralho com 40 cartas, um jogador “pouco honesto” marcou, no verso, os quatro ases e as figuras do naipe de copas e de ouros.

1. Um jogador, que não sabe que as cartas estão marcadas, tira, para trunfo, a carta de cima do baralho.
   Qual é a probabilidade dessa carta de trunfo ser rei?

2. Extraindo-se uma carta ao acaso, qual é a probabilidade de:
   - sair um rei marcado?
   - sair uma carta marcada?

   Quando chegou a sua vez de dar as cartas, o jogador que as marcou tirou para trunfo a carta de cima, pois reparou que estava marcada.
   Qual é a probabilidade de que tire um rei?

   No item 2., obtiveste três valores, resultantes do cálculo de três probabilidades. Consegues relacioná-los através de uma igualdade?

> Se considerarmos os acontecimentos
> - R : “sair rei” ;
> - M : “sair uma carta marcada”;
>
> define-se a probabilidade condicionada “sair rei, sabendo que saiu uma carta marcada”, e representa-se por $P(R \mid M)$, como sendo $\frac{P(R \cap M)}{P(M)}$.

3. No jogo seguinte, outro jogador tirou para trunfo a carta de baixo porque viu, dissimuladamente, que é do naipe de copas.
   Qual é a probabilidade de que essa carta seja um rei?

   E, novamente, se pensares no baralho todo, qual é a probabilidade de:
   - sair o rei de copas?
   - sair uma carta de copas?

Consegues, novamente, conjeturar alguma relação entre os três valores da probabilidade que encontraste no item 3.?
Na tua conjetura, pensaste quais são os acontecimentos dos quais estás a calcular a probabilidade?

Parte II - Café, sobremesa ou ambos?

Consideremos a experiência aleatória que consiste em observar se, após a refeição, os clientes de um determinado restaurante pedem ou não sobremesa e se pedem ou não café.

Os dados registados revelam que 57% dos clientes pedem sobremesa, 65% pedem café e 25% pedem sobremesa e café.

Escolhendo, ao acaso, um cliente desse restaurante, calcula a probabilidade de:

1. pedir café ou sobremesa;
2. pedir café sabendo que pediu sobremesa;
3. pedir sobremesa sabendo que pediu café;
4. não pedir café nem sobremesa.

Tarefa 6

Probabilidade condicionada

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa pretende-se que, a partir da interpretação das situações e das questões formuladas, os alunos compreendam o conceito de probabilidade condicionada. Pretende-se, também, que relacionem as probabilidades determinadas, de modo a obter uma igualdade para definir e calcular a probabilidade condicionada.

Conhecimentos prévios dos alunos: Lei de Laplace e operações com conjuntos.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:

Durante a realização da tarefa é natural que a relação entre as probabilidades possa ser descrita tanto na forma $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ como na forma $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$.

Na discussão final, o professor deve valorizar as duas representações, assegurando que os alunos compreendem que são equivalentes. Caso uma das formas não resulte do trabalho dos alunos, caberá ao professor alertar para a outra forma, equivalente, de relacionar as probabilidades.

Poderá ser sugerido aos alunos, ou introduzido na discussão final, a representação dos acontecimentos através de um diagrama de Venn, com o objetivo de enfatizar a redução do universo a um subconjunto que represente o acontecimento condicionante.

Tarefa 7

O uso de óculos

Parte I

Segundo os resultados de um estudo[1] TGI Marktest, de julho de 2019, “dois em cada três portugueses usam óculos graduados”, o que corresponde a 67,3% dos residentes no Continente com 15 ou mais anos de idade. Este valor tem vindo a aumentar nos últimos anos. Relativamente ao uso de óculos de sol, o estudo[2] TGI Marktest, referente a 2020, indica que 55,1% dos portugueses com 15 ou mais anos de idade usam óculos de sol.

Sabendo que a utilização de óculos graduados tende a ser mais elevada entre profissionais cujo trabalho exige esforço visual continuado — como é o caso de médicos e professores — decidiu-se estudar a frequência do uso de óculos graduados e/ou de sol entre estes profissionais, num universo de 120 sujeitos: 70 professores e 50 médicos. Na tabela seguinte estão apresentados os resultados do inquérito realizado:

	Usa apenas óculos graduados	Usa apenas óculos de sol	Usa ambos	Não usa nenhuns	Total
Professores	24	8	28	10	70
Médicos	12	4	28	6	50
Total	36	12	56	16	120

1. Se escolheres aleatoriamente um profissional do estudo, qual é a probabilidade de:
   1.1. Usar óculos graduados (apenas graduados ou de ambos os tipos)?
   1.2. Ser médico e usar óculos de sol (apenas de sol ou de ambos os tipos)?

2. Se escolheres aleatoriamente um professor, qual é a probabilidade de:
   2.1. Não usar óculos de nenhum tipo?
   2.2. Usar apenas óculos graduados?

---
[1] https://www.marktest.com/wap/a/n/id~25ab.aspx
[2] https://www.marktest.com/wap/a/n/id~2798.aspx

3. Foi também perguntado aos que usam óculos de ambos os tipos se os usam sobretudo por motivos profissionais (necessidade no trabalho) ou pessoais. De entre os 56 inquiridos que usam ambos os tipos de óculos, 32 dizem fazê-lo por motivos profissionais (18 professores; 14 médicos) e os restantes por motivos pessoais.
   3.1. Escolhendo ao acaso um utilizador de ambos os tipos de óculos, qual é a probabilidade de ser professor e usar os óculos por necessidade profissional?
   3.2. Se um médico afirmar usar ambos os tipos de óculos, qual é a probabilidade de o fazer por motivos profissionais?

4. Interpreta os resultados: O que sugerem os dados sobre a relação entre o uso de óculos e os motivos profissionais?
   Comenta, com base nos dados, o impacto das necessidades profissionais na escolha de óculos (graduados e de sol).

Parte II

O João frequenta a Escola Secundária da cidade próxima do local onde vive. Diariamente, só tem duas possibilidades, de utilizar transportes públicos, para se deslocar até à escola: de comboio ou de autocarro.
Como prefere o autocarro, 60% das vezes escolhe esse meio de transporte.
A probabilidade de chegar atrasado às aulas é 22% e a probabilidade de ir de autocarro e chegar atrasado é 12%.

1. Completa a tabela seguinte:

	O João chega atrasado	O João não chega atrasado	Total
O João vai de autocarro	0,12		0,6
O João vai de comboio			0,4
Total	0,22	0,78	1

2. Determina a probabilidade de o João:
   2.1. chegar atrasado sabendo que foi de autocarro;
   2.2. não chegar atrasado e não ir de autocarro;
   2.3. chegar atrasado ou ir de autocarro;
   2.4. ir de autocarro dado que chegou atrasado.

Tarefa 7

O uso de óculos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, pretende-se que os alunos reconheçam a vantagem de organizar a informação em tabelas de contingência. Apesar desta forma de organização não ter vantagens apenas em contextos relacionados com o cálculo de probabilidades condicionadas, é importante proporcionar aos alunos a oportunidade de reconhecer a eficácia desta forma de organização dos dados, bem como o seu potencial enquanto ferramenta de comunicação e de visualização, neste contexto.

Conhecimentos prévios dos alunos: Probabilidade condicionada.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:

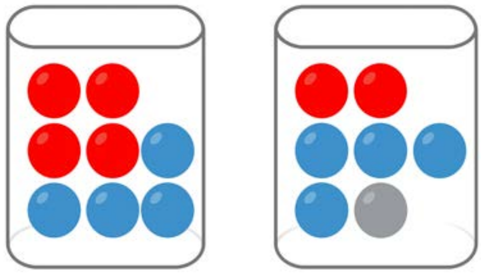
Após a análise dos dois problemas, o professor poderá sugerir a organização de uma tabela com dois acontecimentos quaisquer, de forma a identificar as probabilidades associadas a cada célula. Esta abordagem facilita a possibilidade de estabelecer várias relações entre as probabilidades, em situações que envolvam de dois acontecimentos (e os respetivos complementares), numa experiência aleatória.

Tarefa 8

Ora bolas!

Parte I

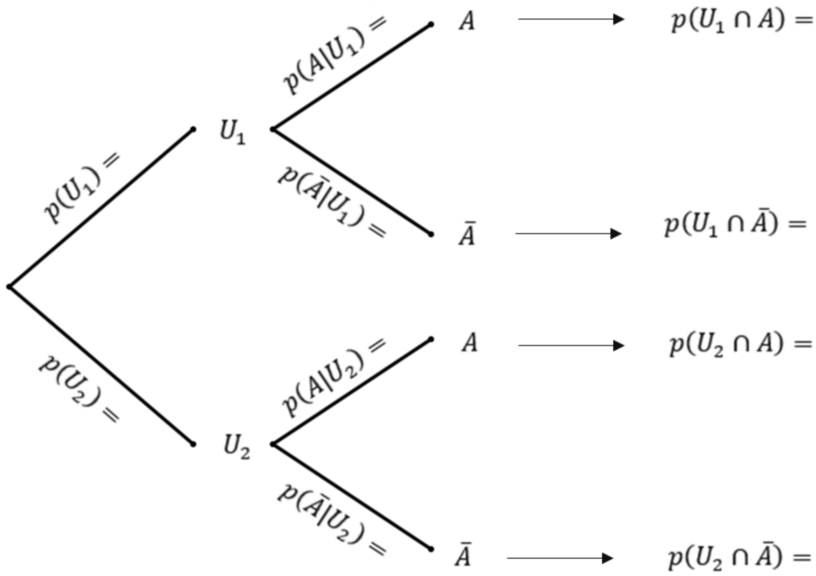
Temos duas urnas. A urna 1 com quatro bolas vermelhas e quatro bolas azuis e a urna 2 com duas bolas vermelhas, quatro bolas azuis e uma bola cinzenta, como se ilustra na imagem ao lado.



Lançamos um dado cúbico; se sair face 3, extraímos uma bola da urna 1; se não sair face 3, extraímos uma bola da urna 2.

1. Qual é a probabilidade de:
   1.1. sair bola azul, sabendo que saiu da urna 1?
   1.2. sair bola azul, sabendo que saiu da urna 2?

2. Queremos, agora, calcular a probabilidade de sair bola azul.
   Para isso vamos esquematizar a experiência através de uma árvore de probabilidade.
   Consideremos os acontecimentos:
   - U_1 : "extrair bola da urna 1" ;
   - U_2 : - "extrair bola da urna 2" ;
   - A : "extrair bola azul" .



Qual é a probabilidade de sair bola azul?

Parte II

Três máquinas, A, B e C, que produzem parafusos, asseguram, respetivamente, 15%, 30% e 55% da produção total.

A percentagem de parafusos defeituosos fabricados pelas máquinas A, B e C é de 2%, 5% e 6%, respetivamente.

Supõe que se juntam os parafusos fabricados pelas três máquinas e que se extrai aleatoriamente um parafuso.

Seja D o acontecimento "sair parafuso defeituoso".

1. Qual é a probabilidade de o parafuso ser defeituoso sabendo que foi feito pela máquina B?

2. Mostra que $P(D \cap B) = 0,015$ onde B é o acontecimento "sair parafuso fabricado pela máquina B".

3. Preenche a tabela seguinte.

	Máq. A	Máq. B	Máq. C	Total
D				
$\overline{D}$				
Total	0,15	0,3	0,55	1

4. Se for extraído um parafuso defeituoso, qual é a probabilidade de ter sido fabricado pela máquina C?

Tarefa 8

Ora bolas!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com o desenvolvimento desta tarefa, pretende-se que os alunos reconheçam a vantagem de organizar a informação em árvores de probabilidade. Apesar desta forma de organização não ter vantagens apenas em contextos relativos ao cálculo de probabilidades condicionadas, é fundamental proporcionar aos alunos a oportunidade de reconhecer a eficácia desta forma de organização dos dados, bem como o seu potencial enquanto ferramenta de comunicação e visualização, neste contexto.

Conhecimentos prévios dos alunos: Probabilidade condicionada.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
Após a análise dos dois problemas, o professor poderá sugerir a construção de uma árvore de probabilidade com dois acontecimentos quaisquer, de forma a identificar as probabilidades associadas a cada ramo, incluindo as probabilidades condicionadas. Esta forma facilita a possibilidade de estabelecer várias relações entre as probabilidades em situações que envolvam acontecimentos que ocorrem em sequência numa experiência aleatória.
Na discussão final, deve ficar claro que, em problemas com mais do que dois acontecimentos (e respectivos contrários) a representação em tabela deixa de ser adequada para representar a informação, sendo a representação em árvore a ferramenta mais eficaz neste contexto.

Tarefa 9

Ganha ou perde

Parte I[3]

Uma turma de alunos do 12.º ano, no âmbito do estudo do tema Probabilidade, foi desafiada pela professora a desenvolver um trabalho de grupo que versasse este tópico.

Um dos grupos de alunos considerou que seria uma boa oportunidade para testar, junto dos colegas das outras turmas do 12.º ano, um jogo de computador que tinham desenvolvido na disciplina de Aplicações Informáticas. Este jogo não deve envolver estratégia, dependendo somente da "sorte" do jogador.

Formalização da questão

O grupo de alunos de Aplicações de Informática desenvolveu um jogo de computador e pretende averiguar se o resultado, "Ganha" ou "Perde", está relacionado com o sexo do jogador (Masculino ou Feminino). Será que as raparigas têm mais habilidade do que os rapazes, para jogar o jogo? Ou será ao contrário? Ou ainda, os resultados serão independentes do sexo? Para responder a estas questões, decidiram proceder à recolha da informação necessária junto dos colegas.

Planeamento da recolha de dados

O grupo de alunos responsável pelo trabalho organizou a recolha de dados junto de 100 colegas do 12.º ano, combinando o dia para a apresentação do jogo. A cada aluno foi pedido que, após jogar uma única vez, assinalasse com um X na seguinte tabela a situação verificada:

	Ganha	Perde
Masculino		
Feminino		

[3] Tarefa adaptada de ActivALEA 32 - Independência de acontecimentos e probabilidade condicionada

Apresentação dos dados recolhidos

Após todos os alunos terem assinalado a sua situação, o grupo responsável do estudo sintetizou as respostas dos colegas, obtendo a seguinte tabela:

	Ganha	Perde	Total
Masculino	12	28	40
Feminino	18	42	60
Total	30	70	100

1. Escolhendo, ao acaso, um de entre os 100 que jogaram o jogo, qual é a probabilidade de este ser do sexo feminino?

2. Escolhendo, ao acaso, um de entre os 100 que jogaram o jogo, qual é a probabilidade de este ganhar o jogo?

3. Escolhendo, ao acaso, um aluno do sexo masculino, qual é a probabilidade de este:
   3.1. ter perdido o jogo?
   3.2. ter ganho o jogo?

4. Escolhendo, ao acaso, um aluno do sexo feminino, qual é a probabilidade de este:
   4.1. ter perdido o jogo?
   4.2. ter ganho o jogo?

5. Compara a probabilidade de, escolhendo ao acaso, um de entre os 100 que jogaram o jogo, este ganhar o jogo com a probablidade de, escolhendo ao acaso, um aluno do sexo masculino, este ganhar o jogo.

6. Compara a probabilidade de, escolhendo ao acaso, um de entre os 100 que jogaram o jogo, este ser do sexo masculino com a probabilidade de, escolhendo ao acaso, um dos que ganhou o jogo, este ser masculino.

7. O que concluis das comparações que realizaste nas perguntas 5. e 6.?

Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. dizem-se independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, quando:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ou} \quad P(B|A) = P(B)$$

8. Noutro ano de escolaridade, as respostas recolhidas foram:

	Ganha	Perde	Total
Masculino	11	29	40
Feminino	19	41	60
Total	30	70	100

Averigua se o facto de um aluno ganhar é independente de ser masculino ou feminino, neste ano de escolaridade.

Parte II

1. Sejam A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, dois acontecimentos independentes.

   1.1. Tendo em conta a definição de probabilidade condicionada, completa

   $P(A|B) = \frac{\dots}{\dots}$

   1.2. Como relacionas os valores de $P(A \cap B)$, $P(A)$ e $P(B)$?

Se A e B são dois acontecimentos independentes, então temos que: $P(A \cap B) = \dots\dots \times \dots\dots$

2. Seja A o acontecimento impossível e B tal que $P(B) > 0$.

   Qual é o valor de $P(A)$? E de $P(A|B)$? Será que A e B são independentes?

3. Consideremos a experiência aleatória "lançar três moedas equilibradas e anotar as faces que ficam voltadas para cima".

   Seja A o acontecimento "saiu a face euro na primeira moeda".

   Seja B o acontecimento "saiu a face euro na terceira moeda".

   Averigua se os acontecimentos A e B são independentes.

4. A Beatriz tem 10 filmes em vídeo, 8 dos quais são coloridos.

   A Maria tem 9 filmes em vídeo, dos quais 3 são a preto e branco.

   4.1. Se pedir a cada uma delas um filme emprestado e elas o escolherem ao acaso, qual é a probabilidade de os dois serem a cores?

   4.2. Obterias a mesma resposta se multiplicasses a probabilidade da escolha da Beatriz ser a cores pela probabilidade da escolha da Maria ser a cores?

   4.3. O que podes concluir sobre os dois acontecimentos?

5. Dois atiradores, M e R, atiram simultaneamente para um alvo.

   A probabilidade de cada um acertar no alvo é $0,7$ e $0,6$, respetivamente.

   Qual é a probabilidade de:

   5.1. o alvo ser atingido apenas pelo atirador M ?

   5.2. o alvo ser atingido apenas por um dos atiradores?

   5.3. o alvo ser atingido?

6. Se dois acontecimentos forem incompatíveis (ou mutuamente exclusivos) e nenhum deles for o acontecimento impossível, os acontecimentos são independentes?

Tarefa 9

Ganha ou perde

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com o conceito de acontecimentos independentes e formalizar a relação entre as respetivas probabilidades, recorrendo a probabilidades condicionadas e também à probabilidade da interseção de conjuntos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Probabilidade condicionada e probabilidade da interseção.

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
Na discussão final sobre acontecimentos independentes poderá ser útil recordar a construção de uma árvore de probabilidade para dois acontecimentos sequenciais e independentes. Este exercício permite compreender como a independência dos acontecimentos influencia na construção da árvore de probabilidade e nos cálculos associados. Ao representar os ramos com as probabilidades condicionadas, observa-se que, em situações de independência, a probabilidade de um acontecimento não se altera em função do outro. Esta abordagem ajuda a consolidar a noção de independência e a aplicar corretamente a regra do produto em contextos práticos.

Coleção de problemas (II)

Probabilidade condicionada

1. Numa turma, cada aluno tem apenas uma calculadora gráfica. Sabe-se que:
   - apenas metade dos alunos trouxe calculadora para a aula;
   - seis em cada dez alunos que trouxeram a calculadora para a aula têm a marca XPTO;
   - dois em cada dez alunos que se esqueceram da calculadora têm a marca XPTO.

   1.1. Escolhe-se, aleatoriamente, um aluno que se sabe ter uma calculadora da marca XPTO.
   Qual é a probabilidade de ele não ter trazido a calculadora para a sala de aula? Apresenta o resultado sob a forma de percentagem.

   1.2. Admite que a turma tem 30 alunos no total.
   Escolhendo 2 desses alunos ao acaso, determina a probabilidade de apenas 1 ter trazido a calculadora da marca XPTO.

2. Considera duas caixas, A e B, com bolachas indistinguíveis ao tato. A caixa A contém seis bolachas de manteiga e três de chocolate e a caixa B contém quatro de manteiga e cinco de chocolate.
   Escolhe-se a caixa A ou B mediante o lançamento de um dado cúbico equilibrado, verificando o número de pintas que se encontram na face que está voltada para cima.
   Se sair, no dado, um número de pintas múltiplo de três, escolhe-se a caixa A, caso contrário, escolhe-se a caixa B. Em seguida retira-se, ao acaso, uma bolacha da caixa escolhida.
   Determine a probabilidade de a caixa escolhida ser a A, sabendo que a bolacha retirada é de manteiga.
   Apresenta o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

3. Numa prateleira de um bar encontram-se 20 garrafas, sendo algumas de água mineral.

Além disso, algumas das garrafas da prateleira têm a capacidade de 1 litro.

Escolhe-se aleatoriamente uma garrafa da prateleira.

Considera os seguintes acontecimentos:

- X: «a garrafa escolhida contém apenas água mineral» ;
- Y: «a capacidade da garrafa escolhida é de um litro».

Sabe-se que $P(X) = \frac{1}{5}$ e $P(Y|X) = \frac{1}{4}$.

Quantas garrafas de água mineral com capacidade de um litro existem na prateleira ?

(A) Uma (B) Duas (C) Três (D) Quatro

4. Na festa de aniversário da Maria foram convidadas várias pessoas, adultos e crianças. Sabe-se que, dos convidados:

- 20% são crianças;
- das crianças convidadas que estão na festa, um quarto são rapazes;
- dos adultos presentes, 40% são do sexo feminino.

4.1. Escolhe-se, aleatoriamente, uma pessoa do sexo feminino.
Qual é a probabilidade de essa pessoa ser uma criança ?
Apresenta o resultado sob a forma de percentagem com aproximação às décimas.

4.2. Admite que foram convidadas 30 pessoas (excluindo a Maria). Foram escolhidas ao acaso três dessas pessoas para entregar a prenda à Maria.
Sabe-se que o grupo escolhido já tem duas crianças.
Qual é a probabilidade do outro convidado ser um adulto?
Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível.

5. Um turista espanhol vai visitar uma região do nosso país: o Algarve ou a Madeira.

   Sabe-se que:

   - a probabilidade de o turista visitar o Algarve é 80%;
   - se o turista visitar o Algarve, a probabilidade de ficar satisfeito é 60%;
   - a probabilidade do turista ficar satisfeito caso visite a Madeira é 70%.

   Supõe que o turista voltou para o seu país satisfeito.

   Qual é a probabilidade de ter visitado a Madeira?

   Apresenta o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. De um baralho de cartas incompleto sabe-se que:

   - 25% das cartas são figuras;
   - metade das cartas são de naipe vermelho;
   - de entre as cartas de naipe vermelho, a terça parte são figuras.

   Escolhendo aleatoriamente uma carta do baralho, qual é a probabilidade de a carta escolhida não ser carta de cor vermelha nem ser uma figura?

   Apresenta o resultado em forma de fracção irredutível.

7. Considera A e B dois acontecimentos independentes associados a uma experiência aleatória.

   Sabe-se que $P(A) = \frac{1}{6}$ e que $P(AUB) = \frac{1}{5}$.

   Qual é o valor de $P(B|A)$?

   (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{25}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{1}{5}$

8. Em relação aos professores de uma escola, sabe-se que:

   - 12% dos professores pertence ao departamento de Ciências;
   - um em cada seis professores da escola usa bata nas aulas;
   - dois em cada três professores do departamento de Ciências usa bata nas aulas.

   Mostra que “usar bata na aula” e “ser professor de Ciências” não são acontecimentos independentes.

9. Numa empresa sabe-se que:
   - 40% dos funcionários são mulheres;
   - dos funcionários do sexo feminino um em cada cinco são licenciados;
   - entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são homens.

   Escolhe-se, ao acaso, um funcionário desta empresa.

   9.1. Qual é a probabilidade de não ser licenciado ou não ser do sexo feminino? Apresenta o resultado na forma de percentagem.

   9.2. Os acontecimentos: "O funcionário é homem" e "O funcionário é licenciado" são independentes? Justifica.

10. Uma caixa contém 31 bolas pretas e algumas bolas brancas.
    Extraem-se, ao acaso, uma de cada vez, duas bolas da caixa.
    Considera os acontecimentos:
    - P: "A 1.ª bola retirada é preta" ;
    - B: "A 2.ª bola retirada é branca" .

    Sabe-se que $P(B|P) = \frac{1}{2}$.
    Quantas bolas brancas se encontravam inicialmente na caixa?
    Numa pequena composição, justifica a tua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|P) = \frac{1}{2}$ no contexto da situação descrita.

11. Considera duas turmas:
    - Turma A – constituída por 25 alunos, 15 raparigas e 10 rapazes;
    - Turma B – constituída por 30 alunos, 18 raparigas e 12 rapazes.

    Extrai-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 40 cartas (10 de cada naipe).
    Se a carta retirada for uma copa, escolhe-se uma pessoa da turma A, caso contrário, escolhe-se uma pessoa da turma B.
    Considera os acontecimentos:
    - X: "A carta retirada é do naipe de copas" ;
    - Y: "A pessoa escolhida é do sexo feminino" .

    Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, indica o valor de $P(Y|X)$, justificando a resposta com uma pequena composição. Começa por interpretar o significado de $P(Y|X)$, no contexto da situação descrita, fazendo referência:
    - à lei de Laplace;
    - ao número de casos possíveis;
    - ao número de casos favoráveis.

Coleção de problemas (II)

Probabilidade condicionada

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Interpretar e organizar informação.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:

O trabalho a realizar por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. Eventualmente o professor poderá sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam continuar o desenvolvimento deste trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não conseguirem resolver todas as propostas durante o tempo disponibilizado pelo professor, essa diferença não compromete o objetivo essencial da tarefa.

Tarefa 10

Função massa de probabilidade

Quando se lança um dado cúbico equilibrado, existem seis valores possíveis do número de pintas da face voltada para cima, todos com igual probabilidade, o que pode ser expresso pela tabela seguinte, onde se considera que:

- X é a variável aleatória que designa o número de pintas da face do cubo que fica voltada para cima no lançamento do dado;
- x_i representa, para cada valor de i, os i valores diferentes que a variável X pode assumir (neste caso $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) ;
- $P(X = x_i)$ é a probabilidade associada a cada um dos valores x_i .

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A tabela representa a **distribuição de probabilidades** da variável aleatória X a que se dá o nome de **função massa de probabilidade** (**f.m.p.**) de X.
Numa f.m.p. de uma variável aleatória, a soma de todas as probabilidades é sempre igual a 1.

1. Constrói uma tabela para a f.m.p. da variável aleatória Y, relativa à soma das pintas observada no lançamento de dois dados cúbicos equilibrados.

   Sugestão: Começa por usar uma tabela de dupla entrada para registar todas as somas possíveis.

2. Na folha de cálculo 3 Dados estão registados todos os casos possíveis para o lançamento de três dados, a respetiva soma e a f.m.p. da variável aleatória Z, relativa à soma das pintas observada no lançamento de três dados cúbicos equilibrados.

   Confirma que a distribuição de probabilidades que obtiveste, satisfaz a condição para ser a f.m.p.da variável aleatória Z e obtém a sua representação gráfica.

3. Repara que para o lançamento de três dados, as somas 3 e 18 são igualmente prováveis, ou seja, $P(Z = 3) = P(Z = 18)$, e também $P(Z = 4) = P(Z = 17)$, tal como $P(Z = 5) = P(Z = 16)$ e assim sucessivamente, pelo que dizemos que a distribuição é simétrica.

   3.1. Considerando o lançamento de 6 dados, apresenta, justificando, duas somas com a mesma probabilidade.

   3.2. Qual é a soma mais provável de ocorrer no lançamento de 7 dados? Explica a tua resposta.

4. Constrói uma tabela para a f.m.p. da variável aleatória W, relativa ao produto das pintas das faces voltadas para cima, observadas no lançamento de dois dados cúbicos equilibrados. Esta distribuição é simétrica? Justifica.

5. Considera uma variável aleatória X, cuja função massa de probabilidade é dada pela tabela seguinte.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{k}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{k}{4}$

Qual é o valor de k ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame - 2009, 1.ª fase (adaptado)

6. Num saco encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3. Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.
Seja X a variável aleatória «*produto dos números saídos*».
Para um certo valor de k, tem-se que $P(X = k) = \frac{1}{2}$.
Qual é o valor de k ?

(A) 6 (B) 2 (C) 3 (D) 0

Exame - 2018, 1.ª fase

Tarefa 10

Função massa de probabilidade

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é introduzir os conceitos de variável aleatória e da respetiva função massa de probabilidade correspondente, como uma forma de organizar as probabilidades associadas a uma experiência aleatória de modo a possibilitar uma análise global e a criar condições para a compreensão de modelos de probabilidade.

Conhecimentos prévios dos alunos: Organização de dados em tabelas de contingência.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso à Internet.

Notas para o professor:
Na discussão do item 2. os alunos devem ser convidados a fazer previsões sobre a representação gráfica de distribuições de probabilidade semelhantes, por exemplo, a da soma das pintas ao lançar quatro dados. A construção da tabela da função massa de probabilidade para este caso pode ser proposta como atividade complementar, ou aos grupos de alunos que resolvam a tarefa mais rapidamente.
Na discussão do item 3. é importante que os alunos compreendam que é possível inferir relações entre probabilidades de acontecimentos, mesmo sem calcular explicitamente esses valores. Devem ainda perceber que podem fazer previsões sobre o modelo de probabilidade associado à experiência aleatória, com base na simetria presente no modelo em estudo.

Tarefa 11

Esperança matemática

Na banca do mercado de Natal, os alunos do 12.º ano decidiram que fosse proposto um jogo para angariar dinheiro para a viagem de finalistas.
Entre as várias opções apresentadas, foi escolhido o seguinte jogo:

> Cada jogador paga 5€ para lançar dois dados cúbicos e equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6, registando os números saídos nas faces que ficarem voltadas para cima.
>
> - Se sair o mesmo número em ambos os dados, o jogador recebe 12 €
> - Se sair o número 6 apenas num dos dados, o jogador recebe 8 €
> - Nos restantes casos, o jogador não recebe qualquer valor.

1. Alguns alunos receiam que o jogo possa gerar prejuízo e não contribuir para a angariação de fundos. Será que têm razão?

2. Num conjunto de 360 jogadas qual é o lucro (ou prejuízo) que se espera que a banca de Natal recolha, com este jogo? Qual é o valor médio de cada jogada?

3. Define os valores da variável aleatória X: "Valor ganho pela banca, em cada jogada efetuada" e determina a respetiva f.m.p. .

4. Tenta relacionar os valores encontrados com o valor médio de cada jogada.

> Dada uma uma variável aleatória X com n valores possíveis - x_i, com $i \in \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, temos que:
>
> - o valor médio da variável aleatória, também designado por esperança matemática da variável aleatória é:
>
> $$\mu_X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$
>
> onde $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, com $i \in \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$.
>
> - o desvio padrão da variável aleatória X , é:
>
> $$\sigma_X = \sqrt{(x_1 - \mu_X)^2 p_1 + (x_2 - \mu_X)^2 p_2 + ... + (x_n - \mu_X)^2 p_n}$$

5. Calcula o desvio padrão do valor ganho pela banca de Natal, em cada jogada.

Tarefa 11

Esperança matemática

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
É objetivo desta tarefa que os alunos compreendam que o valor médio de uma f.m.p. depende dos valores da variável e das probabilidades que lhe estão associadas. Devem também compreender que o valor médio não é necessariamente um valor da variável aleatória e que este permite prever o resultado global esperado para um grande número de realizações da experiência aleatória.

Conhecimentos prévios dos alunos: Média e desvio padrão.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

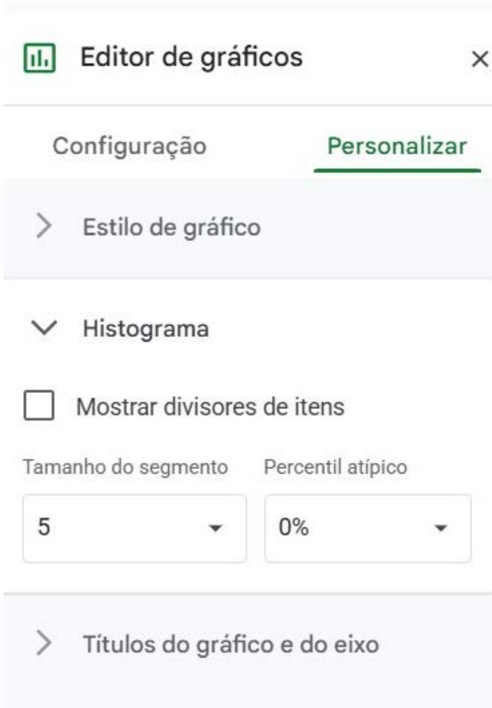
Notas para o professor:
Após a compreensão dos conceitos de valor médio e desvio padrão populacional da variável aleatória, é importante que o professor sugira aos alunos o recurso às potencialidades da calculadora gráfica para fazer estes cálculos, garantindo eficácia e fiabilidade.

Tarefa 12

Quantos pontos são marcados num jogo da NBA?

Na folha de cálculo games estão os dados relativos a todos os jogos da NBA entre 2004 e 2022 (o ficheiro foi obtido na Internet em https://www.kaggle.com/datasets/alpesh98/nba-stats-regular-season-2324?select=team_games). Cada linha da tabela contém os dados de um jogo. Nas colunas “PTS_home” e “PTS_away” estão o número de pontos da equipa que joga em casa e da equipa visitante, respetivamente, para cada um dos jogos.

1. Faz uma cópia do ficheiro e:
   1.1. Numa nova coluna (por exemplo na coluna L) calcula a soma dos pontos obtidos pelas duas equipas, em cada jogo.
   1.2. para o número total de pontos:
      1.2.1. calcula a média e o desvio-padrão;
      1.2.2. constrói o histograma das frequências absolutas desta distribuição com classes de amplitude 10.



   Sugestão:
   - selecionar a coluna das pontuações totais e inserir gráfico;
   - mudar o tipo de gráfico para histograma;
   - na personalização do gráfico, na opção “Histograma”, altera o “tamanho do segmento” para 10 (comandos do Google Sheets).

2. Reajusta o histograma anterior, utilizando classes com amplitude de 5 pontos, depois de 2 pontos e, por fim, de 1 ponto.
   O que observas relativamente aos histogramas visualizados?
   - São simétricos?
   - Qual é o eixo de simetria?
   - Como descreverias a forma sugerida pela representação gráfica da distribuição?

3. Considera a variável aleatória X: "Número de pontos marcados num jogo da NBA" e determina as probabilidades seguintes :

   3.1. $P(X > \overline{x})$ ($\overline{x}$ é a média desta amostra - jogos da NBA entre 2004 e 2022)

   Sugestão: usar a fórmula =CONTAR.SE(L:L,">204"), em que a coluna L (a nova coluna criada em 1.1.) tem o número total de pontos em cada jogo e 204 é a média calculada em 1.2.1.

   3.2. $P(X > \overline{x} + s)$ (s é o desvio padrão desta amostra)

   3.3. $P(\overline{x} - s < X < \overline{x} + s)$

   Sugestão: usar a fórmula =CONTAR.SE(L:L,">181")-CONTAR.SE(L:L,">227"), em que 181 e 227 são $\overline{x} - s$ e $\overline{x} + s$, respetivamente.

   3.4. $P(\overline{x} - 2s < X < \overline{x} + 2s)$

   3.5. $P(\overline{x} - 3s < X < \overline{x} + 3s)$

   3.6. $P(X > 250)$

4. Vamos agora representar o "Modelo Normal" associado a todos os jogos da NBA, assumindo este conjunto de jogos como uma amostra representativa da população.

   4.1. Na folha de cálculo cria uma coluna para:

   - os valores agrupados das pontuações em classes de amplitude 10 (sugestão: obtém o primeiro valor como o mínimo da coluna das pontuações e os restantes somando dez unidades ao valor anterior, até ultrapassar o valor máximo das pontuações, para obter classes de amplitude 10);
   - a frequência relativa de cada classe (sugestão: usa a fórmula =CONTAR.SE.S(L:L, ">=" & U2, L:L, "<" & U3)/26087 em que a coluna L é a coluna que contém todas as pontuações e U2 e U3 são os limites inferior e superior da classe de pontuações cuja frequência se pretende determinar, e 26087 é o número total de jogos);
   - o valor associado ao modelo normal para cada classe (sugestão: usa a fórmula =DIST.NORM((U2+U3)/2,M2,M5,FALSO)*10, em que U2 e U3 são os limites inferior e superior da classe de pontuações, M2 o valor da média; N2, o valor do desvio padrão, a indicação "FALSO" indica que a probabilidade não deve ser cumulativa e 10 representa a amplitude da classe);
   - seleciona as duas colunas (frequência relativa e modelo normal) e cria um gráfico; altera o tipo de gráfico para "Gráfico combinado").

4.2. Usa novas colunas para obteres um gráfico idêntico ao anterior, mas com classes de amplitude 2. Compara os dois gráficos e descreve a relação entre os histogramas (a azul) e a curva da distribuição normal (a vermelho).

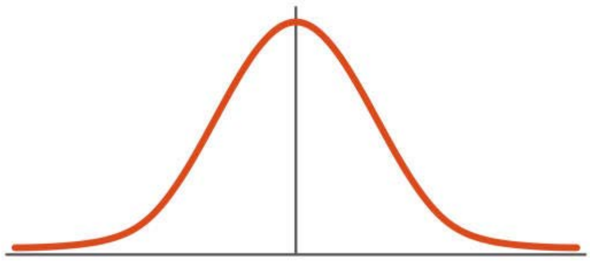
5. Representa na tua calculadora gráfica a distribuição normal, com os valores da média e desvio padrão calculados.

6. Determina, na calculadora gráfica, as probabilidades recorrendo ao modelo normal desta população, correspondentes às calculadas no item 3., para a amostra. Compara cada par de valores e estabelece uma conjetura.

7. Usa a calculadora gráfica para determinar em quantos jogos é esperado que a pontuação se situe entre 200 e 240.

8. A distribuição normal é caracterizada pelo valor médio (μ) e desvio padrão (σ) da população que representa. Na apliqueta https://www.geogebra.org/m/ebzkzruc faz variar os valores de μ e σ e explica a influência de cada um dos parâmetros na representação da distribuição.

A distribuição normal, também conhecida por distribuição de Gauss, é uma distribuição de probabilidade associada a variáveis contínuas. O denominado “modelo normal” corresponde a uma família de distribuições, cada uma delas caraterizada pelos respectivos valor médio (μ) e desvio padrão (σ) . Para cada par de valores destes parâmetros obtém-se uma distribuição normal distinta, cuja função densidade de probabilidade tem o seguinte aspecto:



Tarefa 12

Quantos pontos são marcados num jogo da NBA?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com esta tarefa, pretende-se que os alunos compreendam o modelo normal e a noção de distribuição de probabilidade de uma variável contínua.

Conhecimentos prévios dos alunos: Média, desvio padrão, organização de dados e Histograma.

Materiais e recursos: Computador com acesso à internet e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
É expectável que os alunos revelem algumas dificuldades ao comparar os dados da amostra (discretos) com o modelo teórico (contínuo). Essas dificuldades poderão vir a manifestar-se, por exemplo, na valorização da falta de simetria dos histogramas observados ou na sobrevalorização das diferenças entre os valores aproximados obtidos a partir dos dados da amostra e os valores calculados a partir do modelo normal. Caberá ao professor orientar a discussão no sentido de levar os alunos a compreender que uma variável contínua e uma distribuição perfeitamente simétrica são abstrações teóricas. Importa evidenciar que, embora o modelo teórico não descreva com total exatidão os dados observados, constitui, ainda assim, uma boa aproximação aos dados.
Poderão surgir algumas dificuldades na utilização da calculadora gráfica para determinar probabilidades associadas a uma distribuição normal. Nesta situação, caberá ao professor indicar e clarificar os procedimentos adequados, de acordo com o modelo de calculadora utilizado pelos alunos.
As indicações relativas à utilização da folha de cálculo apresentadas nesta tarefa dizem respeito às Folhas de Cálculo do Google Suite. Caso se recorra a outras aplicações, como por exemplo o Excel, será necessário ajustar as instruções específicas constantes no enunciado da tarefa.
A seguir, apresenta-se uma folha de cálculo com uma proposta do trabalho realizado para responder aos quatro primeiros itens da tarefa: games - Resolução.

Coleção de problemas (III)

Modelos de probabilidade

1. A tabela seguinte apresenta a função massa de probabilidade de uma dada variável aleatória X.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,6	0,05	0,15

Determina:

1.1. $P(X = 2)$;

1.2. $P(X > 2)$;

1.3. $P(X \leq 3)$.

2. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se o número da face que fica voltada para cima.
Seja Y o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos.
Constrói a tabela que define a função massa de probabilidade da variável aleatória Y ?

3. Admita que, numa certa empresa, a variável "altura dos trabalhadores" segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 175 cm.
Escolhe-se, ao acaso, um trabalhador dessa empresa.
Relativamente a esse trabalhador, a probabilidade de que a sua altura se encontre entre os 175 cm e os 180 cm é de, aproximadamente:

(A) 0,34 se o desvio-padrão for de 10 cm

(B) 0,34 se o desvio-padrão for de 5 cm

(C) 0,475 se o desvio-padrão for de 5 cm

(D) 0,475 se o desvio-padrão for de 10 cm

4. A seguinte tabela representa a função massa de probabilidade de uma dada variável aleatória X.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	a	0,2	0,2	b	0,2	c

Sabe-se que $P(X \leq 2) = 0,35$ e que $P(X > 4) = 0,30$.

Determina a média e o desvio padrão da variável aleatória X.

5. Considera que o consumo de água na Escola Secundária de Sobral de Cima segue uma distribuição normal em que o valor médio é 400 litros e o desvio padrão é de 30 litros.

   Usando uma calculadora, determina a probabilidade de o consumo de água, em certo dia:

   5.1. estar compreendido entre 100 e 450 litros;

   5.2. não ultrapassar 500 litros;

   5.3. ser superior a 400 litros.

6. Num jogo de basquetebol há exatamente dois resultados possíveis: vitória ou derrota (se o jogo terminar empatado no tempo regulamentar são jogados prolongamentos até desempatar o jogo).

   Em cada jogo, a probabilidade da equipa Estrelas da Avenida ganhar é de 40%.

   6.1. Se o Estrelas da Avenida disputar 4 jogos num torneio de basquetebol, qual é a probabilidade de ganhar exatamente 2 jogos?

   6.2. Constrói a tabela da função massa de probabilidade, em que X: "nº de vitórias do Estrelas da Avenida nos 4 jogos".

7. Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição dos alunos, por idade e sexo, numa turma do 12.º ano da Escola Secundária Luís de Albuquerque.

$12^{\text{º}}\ Q$	16 anos	17 anos
rapazes	6	8
raparigas	5	7

   Para formar uma comissão que vai preparar um baile de finalistas, vão ser sorteados três rapazes e duas raparigas desta turma.

   7.1. Qual é a probabilidade de a comissão ficar constituída apenas por jovens de 16 anos?

   Apresenta o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

7.2. Admite agora que já estão sorteados quatro dos cinco jovens que vão constituir a comissão: os três rapazes e uma rapariga, a qual tem 16 anos de idade.

Para a comissão ficar completa, falta, portanto, escolher aleatoriamente uma rapariga. Seja X a variável aleatória: número de raparigas de 17 anos que a comissão vai incluir.

Constrói a tabela da função massa de probabilidade da variável X .

Apresenta as probabilidades na forma de fração.[4]

8. Uma caixa contém cinco bolas brancas e três bolas pretas, indistinguíveis ao tato. Tiram-se, ao acaso e de uma só vez, três bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória que representa o número de bolas brancas tiradas na extração das três bolas.

Define a função massa de probabilidade de X e calcula o valor médio.

9. O António tem, no bolso, sete moedas, das quais três são de 1 euro e quatro são de 50 cêntimos.

O António retira, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do bolso.

9.1. Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo António.

Constrói a tabela da função massa de probabilidade da variável X , apresentando as probabilidades na forma de fração irredutível.

9.2. Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o António informou o seu amigo José que elas eram iguais. O José apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros.

Qual é a probabilidade de o José ganhar a aposta?

Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível.

10. Uma caixa tem seis bolas, indistinguíveis ao tato: uma bola com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e três bolas com o número 2 (dois).

Considera a experiência que consiste em retirar, ao acaso e de uma só vez, duas bolas da caixa.

[4] Os exercícios do 1 ao 7 foram adaptados de propostas do manual NeuAleph - 12.º ano

10.1. Seja X a variável aleatória: "produto dos números inscritos nas duas bolas". Constrói a tabela da função massa de probabilidade da variável X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

10.2. Sejam A e B os acontecimentos:

- A: "os números saídos são diferentes" ;
- B: "a soma dos números saídos é igual a 2" .

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

Justifica a tua resposta.

11. Considere-se uma turma com dez raparigas e quatro rapazes.
Supõe que vão ser escolhidos, aleatoriamente, dois jovens desta turma para constituírem uma comissão que participará num congresso.
Seja X o número de rapazes que integram a comissão.
Constrói a tabela da função massa de probabilidade da variável aleatória X.
Apresenta as probabilidades na forma de fração irredutível.

12. Um saco contém 8 bolas: três bolas estão numeradas com o número 3, quatro com o número 2 e uma com o número 1.

12.1. Extrai-se, ao acaso, uma bola do saco.
Seja X o número da bola extraída.
Constrói a tabela da função massa de probabilidade da variável aleatória X e, determina o valor médio desta variável.
Apresenta todos os valores na forma de dízima.

12.2. Do saco, novamente completo, tira-se, ao acaso, uma bola, observa-se o número e repõe-se a bola no saco juntamente com mais doze bolas com o mesmo número. Seguidamente, tira-se, ao acaso, uma segunda bola do saco.
Sejam A e B os acontecimentos:

- A: "sair bola com o número 2 na primeira extração".
- B: "sair bola com o número 2 na segunda extração".

Indica, justificando, se os acontecimentos A e B são independentes.

13. A empresa *AP* comercializa pacotes de açúcar.

Seja Y a variável aleatória "massa, em gramas, de um pacote de açúcar comercializado pela empresa AP".

Admite que a variável aleatória Y segue uma distribuição normal de valor médio 6,5 gramas e desvio padrão 0,4 gramas.

Um pacote de açúcar encontra-se em condições de ser comercializado se a sua massa estiver compreendida entre 5,7 gramas e 7,3 gramas.

Determina o valor aproximado da probabilidade de, numa amostra de 10 desses pacotes de açúcar, todos estarem em condições de serem comercializados.

14. Os resultados obtidos pelos alunos a uma certa disciplina distribuem-se segundo a distribuição normal $N(12;\ 2,5)$.

14.1. Qual a probabilidade de, escolhendo um destes alunos ao acaso, a sua nota não ser superior a 7 valores?

14.2. Qual a classificação mínima que um aluno deve ter para se situar entre os 2,5% dos alunos com melhores notas?

15. Admite que, numa certa escola, a variável «altura das alunas do 12º ano de escolaridade» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm.

(B) A sua altura é inferior a 180 cm.

(C) A sua altura é superior a 155 cm.

(D) A sua altura é inferior a 155 cm.

Prova modelo - 2001

16. Uma caixa contém duas bolas brancas e três pretas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

(A) $0,9$ (B) $0,8$ (C) $0,7$ (D) $0,6$

Exame - 2019, 2.ªFase

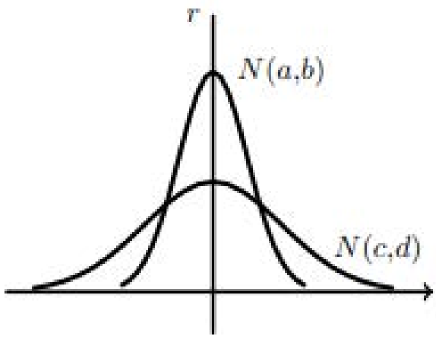
17. Na figura ao lado estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

Uma das distribuições tem valor médio a e desvio padrão b.

A outra distribuição tem valor médio c e desvio padrão d.

Os gráficos são simétricos em relação à mesma reta r.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $a = c$ e $b > d$ (B) $a = c$ e $b < d$

(C) $a > c$ e $b = d$ (D) $a < c$ e $b = d$

Exame - 2002, 1.ª Fase - 2.ª chamada

18. Um dado cúbico equilibrado tem todas as faces numeradas, umas com o número 0 e as restantes com o número 1.

Lança-se o dado três vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos nos três lançamentos».

A função massa de probabilidade da variável X é a seguinte:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Quantas faces estão numeradas com o número 1?

(A) Duas (B) Três (C) Quatro (D) Cinco

Exame - 2018, Ép. especial (adaptado)

19. O comprimento, em centímetros, das peças produzidas por uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 6.

Sabe-se que $P(X > 7) = 0,1$.

Escolhe-se ao acaso uma peça produzida por essa máquina e mede-se o seu comprimento.

Considere os acontecimentos:

- A: "o comprimento da peça escolhida é inferior a 7 cm" ;
- B: "o comprimento da peça escolhida é superior a 6 cm" .

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{8}{9}$

Teste Intermédio 12.º ano - 13.03.2012

20. A função massa de probabilidade de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X > 1 \mid X \leq 3)$?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

Exame - 2017, 2.ª Fase (adaptado)

Coleção de problemas (III)

Modelos de probabilidade

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função massa de probabilidade. Valor médio e desvio padrão populacional. Modelo Normal.

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:

O trabalho a realizar por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam continuar a resolver fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas durante o tempo disponibilizado pelo professor, essa diferença não compromete o objetivo essencial da tarefa.