OP5 - MODELOS DISCRETOS

Matemática Cursos Profissionais

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Modelos Discretos (Matemática Cursos Profissionais)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática dos Cursos Profissionais

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, junho de 2026

Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P, (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Carla Damásio e Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE desenvolveu um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.

O EduQA e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - MODELOS DISCRETOS

Aulas (horas)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	Tarefa 1 Sucessões- termo geral e recorrência	**Sucessões** Identificação e definição Formulação de generalizações tendo por base padrões e regularidades	• Identificar sucessões e definir sucessões de diferentes modos: graficamente, termo geral e recorrência. • Procurar padrões e regularidades e formular generalizações em situações diversificadas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C). • Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
2	Ficha de Trabalho I	**Sucessões** Identificação e definição Formulação de generalizações tendo por base padrões e regularidades	• Resolver problemas envolvendo os conceitos associados a sucessões	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

3	Tarefa 2 Quadrados e mais quadrados	**Sucessões** Progressões aritméticas	• Reconhecer progressões aritméticas. • Saber definir progressões aritméticas através do 1.º termo e da razão (r).	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 3 Distância da terra à lua com uma folha de papel A4	**Sucessões** Progressões geométricas	• Reconhecer progressões geométricas. • Saber definir progressões geométricas através do 1.º termo e da razão (r).	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 4 A soma de Gauss	**Sucessões** Soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética	• Determinar a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 5 A lenda do jogo de xadrez	**Sucessões** Soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica	• Determinar a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

3	Tarefa 6 Ainda o jogo de xadrez	**Crescimento linear e crescimento exponencial**	• Distinguir crescimento linear de crescimento exponencial em modelos discretos. Relacionar progressões aritméticas com o crescimento/decrescimento linear discreto e as progressões geométricas com o crescimento/decrescimento exponencial discreto.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Ficha de Trabalho II	**Sucessões** Identificação e definição Formulação de generalizações tendo por base padrões e regularidades	• Resolver problemas envolvendo os conceitos de sucessões	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Tarefa 1

Sucessões - termo geral e recorrência

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com esta tarefa, pretende-se introduzir o tema das sucessões. Para isso, serão exploradas formas de definir uma sucessão, através do termo geral e por recorrência. Além disso, os alunos serão levados a representar sucessões graficamente, a fim de compreenderem melhor o seu comportamento.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regularidades e sequências.

Materiais e recursos: Computador ou calculadora gráfica.

Notas para o professor:

Pretende-se, com esta tarefa, realizar uma primeira abordagem ao tema das sucessões, revisitando os conceitos trabalhados ao longo do Ensino Básico, relacionados com sequências e regularidades.

A partir dos exemplos apresentados, os alunos serão conduzidos a identificarem diferentes tipos de regularidades, de modo a descreverem as sucessões em linguagem corrente. Posteriormente serão incentivados a determinar o termo geral de uma sucessão e a definir uma sucessão por recorrência, promovendo uma compreensão mais aprofundada do tema.

O professor poderá aproveitar o momento de discussão, em grande grupo, para explicitar o conceito de sucessão, bem como os elementos que lhe estão associados, como termo, ordem e domínio. Neste contexto, será importante clarificar que as sucessões constituem um tipo particular de funções, reforçando a compreensão dos alunos acerca da sua estrutura e do seu comportamento.

Tarefa 1

Sucessões - termo geral e recorrência[1]

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões. Como se pode visualizar no vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=QjZkl49Zq_Y

   1.1. Determina o número de pontos das figuras 1, 2, 3 e 4.

   1.2. A figura 5 tem quantos pontos? Justifica a tua resposta.

   1.3. Escreve os seis primeiros termos da sequência numérica associada às figuras.

   1.4. Consegues prever o número de pontos da figura 100? Explica o teu raciocínio.

   1.5. Existe alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

   1.6. Existe alguma figura, nesta sequência, com 41 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

   1.7. Escreve um termo geral do número de pontos de uma figura de ordem n.

2. Considera a sucessão (u_n) , da qual se apresentam alguns dos termos. Sabe-se que $u_1 =- 6$.

$$-6\,;\ \ -9\,;\ \_\_\_\_\_\_\ ;\ \ -15\,;\ \ -18;\ \_\_\_\_\_\ ;\ \ -24;\ \ldots$$

   2.1. Mantendo a regularidade da sucessão, completa os espaços em branco, correspondentes aos valores dos 3.º e 6.º termos.

   2.2. Escreve um termo geral da sucessão.

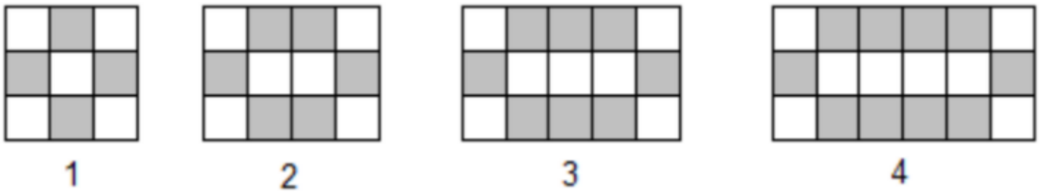
   2.3. Determina o valor de u_{20}?

   2.4. Calcula a ordem do termo $-\ 150$?

   2.5. Sabendo que um dos termos da sucessão é $-\ 303$, qual é a ordem do termo seguinte?

[1] Adaptado de Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano

3. Considera a sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



3.1. Quantos azulejos cinzentos têm a 6.ª e a 7.ª figuras?

3.2. Quantos azulejos brancos têm a 6.ª e a 7.ª figuras?

3.3. Quantos azulejos, no total, tem a 11.ª figura?

3.4. Escreve um termo geral para a sucessão (b_n) dos azulejos brancos e da sucessão (c_n) do número dos azulejos cinzentos.

3.5. Explica como podemos obter um termo geral da sequência do número total (t_n) de azulejos de cada figura e determina-o.

3.6. Relativamente à sucessão (c_n) do número de azulejos cinzentos, preenche os espaços em branco:

$$c_1 = 4$$

$$c_2 = c_1 + \ .....$$

$$c_3 = \ ..... \ + \ 2$$

$$c_4 = c_3 + \ .....$$

$$c_{n+1} = \ .... \ + \ .....$$

3.7. Define a sucessão do número de azulejos cinzentos por recorrência.

3.8. Representa graficamente os primeiros dez termos da sucessão do número de azulejos cinzentos.

Ficha de Trabalho I

Termo geral/Definição por recorrência

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados na tarefa anterior.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema “sucessões”.

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.

Ficha de Trabalho I

Termo geral/Definição por recorrência

1. Escreve possíveis termos gerais das sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) cujos primeiros quatro termos são, respetivamente:

   1.1. $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ ...$

   1.2. $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ ...$

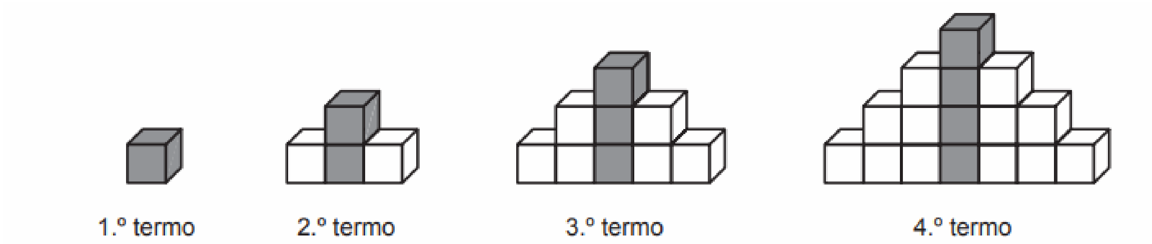
   1.3. $\frac{1}{2},\ \frac{4}{6},\ \frac{7}{10},\ \frac{10}{14},\ ...$

2. Considera a sucessão (u_n) definida pelo termo geral $u_n = 4n - 3$

   2.1. Calcula os quatro primeiros termos e representa-os graficamente.

   2.2. Verifica se 37 é termo da sucessão. Em caso afirmativo, identifica a sua ordem.

3. Na figura seguinte, estão representados os quatro primeiros termos de uma sucessão de sólidos, compostos por cubos geometricamente iguais, que segue a lei de formação sugerida:



Sabe-se que o número total de cubos do termo de ordem n da sucessão é dado pela expressão n^2.

Determina:

   3.1. o número total de cubos do quinto termo da sucessão de sólidos;

   3.2. o número de cubos brancos do 6.º termo;

   3.3. o termo geral da sucessão (b_n), que permite obter o número de cubos brancos;

   3.4. o número de cubos brancos do 30.º termo.

Adaptado de Prova final de matemática 3.º ciclo do Ensino Básico – Época Especial – 2017

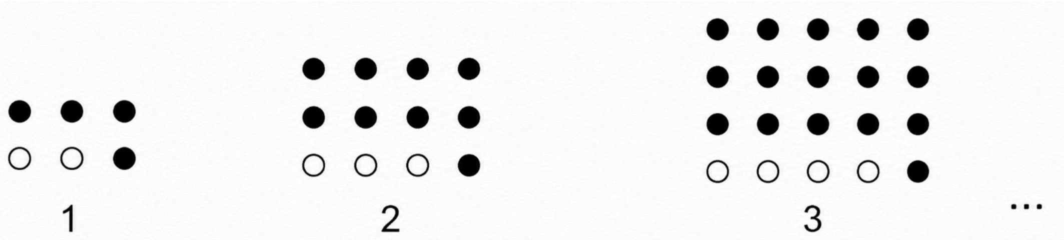
4. Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

4.1. Determina os quatro primeiros termos de (v_n) ;

4.2. Explica porque que razão $-\frac{1}{105}$ não é termo da sucessão (v_n).

5. Nas figuras seguintes estão representados os três primeiros termos de duas sucessões:

- (b_n) , cujos termos correspondem ao número de círculos brancos em cada figura, e
- (p_n) , cujos termos correspondem ao número de círculos pretos.



Em cada item, seleciona a letra correspondente à opção correta.

5.1. Qual das seguintes expressões pode representar um termo geral da sucessão (p_n)?

(A) $(n - 1)^2$ **(B)** n^2 **(C)** $(n + 1)^2$ **(D)** $(n + 2)^2$

5.2. O valor de b_9 é:

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10

6. Considera os quatro primeiros termos de uma sucessão (u_n) : $2;\ -2;\ -6$ e -10

6.1. Escreve um termo geral que represente a sucessão (u_n).

6.2. Define a sucessão (u_n) por recorrência.

7. Seja (a_n) a sucessão definida por: $a_n = -12 - 2n$. Define (a_n) por recorrência.

8. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{9} \\ u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$$

8.1. Calcula o terceiro termo da sucessão (u_n) .

8.2. Em qual das opções seguintes se apresenta um termo geral da sucessão (u_n) .

(A) 3^n **(B)** 3^{n-3} **(C)** $3n$ **(D)** $\frac{n}{9}$

Tarefa 2

Quadrados e mais quadrados

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

O objetivo desta tarefa é estudar casos particulares de sucessões, nomeadamente as progressões aritméticas. Neste âmbito, pretende-se que os alunos compreendam as suas características, identifiquem as regularidades presentes e desenvolvam a capacidade de as descrever e analisar.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de sucessão e formas de definir uma sucessão.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:

No seguimento das tarefas anteriores, os alunos vão trabalhar com mais exemplos de sucessões. Neste caso particular, pretende-se que identifiquem e formulem a propriedade comum que relaciona quaisquer dois termos consecutivos de uma progressão aritmética, nomeadamente o facto de a sua diferença ser constante.

No final desta tarefa, pretende-se que os alunos sejam capazes de definir uma progressão aritmética e determinar o seu termo geral, conhecidos o primeiro termo e a razão.

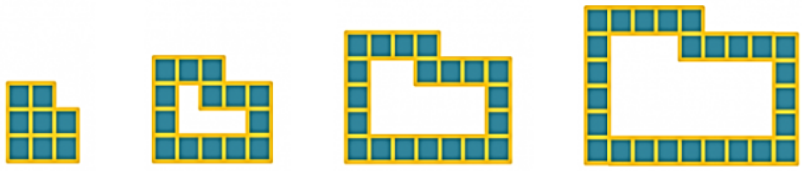
Será conveniente que, antes da resolução do item 1.6. o professor promova uma discussão em grande grupo que permita aos alunos determinar um termo geral para a progressão aritmética associada ao número de quadrados em função da ordem do termo da sequência, bem como generalizar essa expressão para uma progressão aritmética qualquer .

Como aprofundamento, o professor poderá desafiar os alunos a determinarem o termo geral de uma progressão aritmética conhecidos um termo qualquer, diferente do primeiro, e a razão.

Tarefa 2

Quadrados e mais quadrados

1. Observa as figuras seguintes cujo número de quadrados, em cada uma, obedece a uma lei de formação. Seja (q_n) a sucessão do número de quadrados de cada figura.



1.1. Desenha as figuras de ordem 5 e 6 da sucessão (q_n) .

1.2. Determina o número de quadrados em cada uma das quatro primeiras figuras da sucessão (q_n).

1.3. Explica como podemos determinar q_{19} e q_{20}.

1.4. Compara o número de quadrados de duas figuras consecutivas. O que concluis?

Sugestão: Calcula:

$q_{20} - q_{19}$ $\quad$ $q_5 - q_4$ $\quad$ $q_4 - q_3$ $\quad$ $q_2 - q_1$

1.5. Pesquisa qual é a designação que se dá a uma sucessão que verifique a conclusão a que chegaste no item anterior. Em seguida, completa o texto seguinte, selecionando a palavra adequada a cada espaço de acordo com os dados apresentados na tabela.

A cada espaço corresponde uma só opção.

Uma sucessão em que a ___(I)___ entre dois termos consecutivos é ___(II)___.
designa-se por progressão ___(III)___.
Essa constante denomina-se por ___(IV)___ da progressão aritmética.

(I)	(II)	(III)	(IV)
constante diferença soma produto quociente	constante maior menor diferente regular	regular constante aritmética geométrica especial	constante diferença soma produto razão

1.6. Com base nos resultados obtidos nos itens anteriores. completa as igualdades seguintes:

$q_2 = q_1 + \ldots\ldots \times 6$

$q_3 = q_2 + \ldots\ldots \times 6 = q_1 + \ldots\ldots \times 6$

$q_4 = q_3 + \ldots\ldots \times 6 = q_2 + \ldots\ldots \times 6 = q_1 + \ldots\ldots \times 6$

$q_5 = q_4 + \ldots\ldots \times 6 = q_3 + \ldots\ldots \times 6 = q_2 + \ldots\ldots \times 6 = q_1 + \ldots\ldots \times 6$

$q_6 = q_1 + \ldots\ldots \times 6$

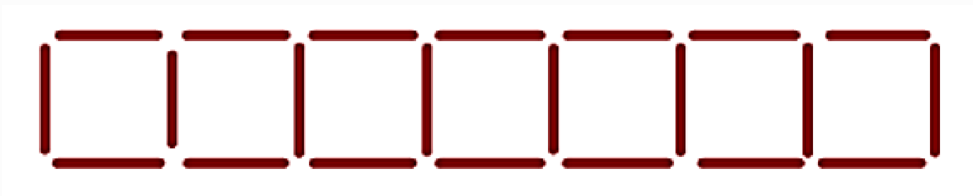
$q_n = q_1 + \ldots\ldots \times r$

Termo geral da sucessão do número de quadrados definido a partir do 1.º termo e da razão, r.

O termo geral duma progressão aritmética, (u_n) *, definido a partir do primeiro termo e da razão, r, é da forma:* $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

1.7. Representa graficamente os sete primeiros termos de (q_n). Estabelece uma relação entre o gráfico desta sucessão e o que estudaste sobre o gráfico de uma função afim.

2. Considera a imagem seguinte, em que está representado o 7.º termo de uma sucessão. O primeiro termo é constituído por 4 segmentos que formam o primeiro quadrado, e cada termo é construído a partir do anterior, acrescentando um quadrado adjacente (partilhando um lado com o anterior) .



2.1. Determina o número de segmentos necessários para construir a figura com 10 quadrados.

2.2. Calcula quantos segmentos são necessários para obter o 20.º termo.

2.3. É possível construir uma figura deste tipo com 303 segmentos? Justifica a tua resposta.

2.4. Explica por que razão a sucessão do número de segmentos de cada figura é uma progressão aritmética.

2.5. Define, por um termo geral, a progressão aritmética que te permite obter o número de segmentos de uma figura em função da sua ordem.

Adaptado de https://nrich.maths.org/problems/seven-squares

Tarefa 3

Distância da terra à lua com uma folha de papel A4

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é que os alunos explorem casos particulares de sucessões, nomeadamente, as progressões geométricas. Neste âmbito, pretende-se que os alunos compreendam as suas características, identifiquem as regularidades presentes e desenvolvam a capacidade de as descrever e analisar.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de sucessão e formas de definir uma sucessão.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:
No seguimento das tarefas anteriores, os alunos vão estudar nesta tarefa outros exemplos de sucessões. Neste caso particular, pretende-se que identifiquem e formulem a propriedade comum que relaciona quaisquer dois termos consecutivos de uma progressão geométrica, nomeadamente o facto de o seu quociente ser constante.
A determinação do número de dobragens da folha de papel para que o valor da altura da torre de papel seja igual à distância da Terra à Lua, permite aos alunos construir a sucessão das alturas após cada dobragem. A partir desta exploração, são conduzidos à identificação de uma regularidade, nomeadamente o facto do quociente entre dois termos consecutivos da sucessão ser constante.
No final desta tarefa, pretende-se que os alunos sejam capazes de definir uma progressão geométrica e determinar o seu termo geral conhecidos o primeiro termo e a razão.
No item 1.6. o professor deverá orientar uma discussão que conduza os alunos à dedução da forma mais simplificada do termo geral da progressão geométrica.
Como aprofundamento, poder-se-á desafiar os alunos a determinarem um termo geral de uma progressão geométrica quando é conhecido um termo qualquer, diferente do primeiro, bem como a respetiva razão.

Tarefa 3

Distância da terra à lua com uma folha de papel A4

Em astronomia, a distância lunar é a medida da distância da Terra até a Lua. Essa distância varia de acordo com a posição da Lua na sua órbita. A distância média entre o centro da Terra e o centro da Lua é de 384 400 km, a distância mais próxima (perigeu) é de 363 300 km e a distância mais longa (apogeu) é de 405 500 km.

Fonte: Wikipédia

O teu caderno poderá ter as dimensões de uma folha A4.
A espessura de uma folha do teu caderno é aproximadamente de 0,074 mm.
Imagina agora que dobras a folha ao meio, depois voltas a dobrar ao meio e assim sucessivamente (supõe que o consegues fazer indefinidamente, apesar de a folha se tornar cada vez mais pequena).
Se continuarmos o processo, quantas dobragens são precisas para se obter uma torre de papel, de tal forma que se consiga chegar à Lua?

1. Podes começar por organizar a informação numa tabela semelhante à que se apresenta a seguir:

Número de dobragens (n)	Altura correspondente (mm) (a_n)

2. Compara a altura de duas figuras consecutivas. O que concluis?

Sugestão: Calcula: $a_2 : a_1$

$a_3 : a_2$

$a_4 : a_3$

$a_5 : a_4$

3. Pesquisa qual é a designação que se dá a uma sucessão que verifique a regularidade que observaste no item anterior. Em seguida, completa o texto seguinte, selecionando a palavra adequada a cada espaço de acordo com os dados apresentados na tabela. A cada espaço corresponde uma só opção.

Uma sucessão em que o ___(I)___ entre dois termos consecutivos é ___(II)___.
chama-se progressão ___(III)___.
Essa constante denomina-se por ___(IV)___ da progressão geométrica.

(I)	(II)	(III)	(IV)
constante diferença soma produto quociente	constante maior menor diferente regular	regular constante aritmética geométrica especial	constante diferença soma produto razão

4. Completa as igualdades:

(2.ª dobragem) $a_2 = a_1 \times$ .....

(3.ª dobragem) $a_3 = a_2 \times$ ..... $= a_1 \times$ .....

(4.ª dobragem) $a_4 = a_3 \times$ ..... $= a_2 \times$ ..... $= a_1 \times$ .....

(5.ª dobragem) $a_5 = a_4 \times$ ..... $= a_3 \times$ ..... $= a_2 \times$ .....

(6.ª dobragem) $a_6 = a_1 \times$ .....

(n.ª dobragem) $a_n = a_1 \times$ ..... Termo geral da sucessão das alturas da torre de papel, em função do número de dobragens a partir do 1º termo e da razão.

O termo geral duma progressão geométrica, (u_n), definido a partir do primeiro termo e da razão, r, é da forma: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Com o auxílio da calculadora, determina o número de dobragens necessário para obteres a distância média da Terra à Lua.

Tarefa 4

A soma de Gauss

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa pretende-se que os alunos calculem a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Conhecimentos prévios dos alunos: Definição de progressão aritmética e termo geral.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas para o professor:

A partir da história clássica do matemático Gauss, que ainda em pequeno, em poucos minutos, calculou a soma dos 100 primeiros números naturais, pretende-se orientar os alunos para a dedução de uma expressão geral da fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Em seguida, é apresentado um exemplo de aplicação dessa fórmula, no qual os alunos devem calcular o número de parcelas de uma soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética, sabendo previamente o valor dessa soma.

Tarefa 4

A soma de Gauss

Conta-se que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855) era um aluno bastante rebelde nos primeiros anos da escola. Certo dia, o seu professor, exausto com o seu comportamento e querendo mantê-lo ocupado, propôs-lhe um desafio que julgava ser demorado: “Soma todos os números inteiros de 1 a 100”.
Passados uns minutos Gauss respondeu: “O resultado da soma é 5050”.
O professor ficou muito admirado com uma resposta correta, obtida tão rapidamente.
Como é que Gauss terá feito esta soma em tão pouco tempo? Diz-se que ele procedeu da maneira que vamos mostrar de seguida.

1. Seja (u_n) a sequência dos 100 primeiros números inteiros.

   1.1. Determina os valores em falta e completa as tabelas seguintes:

u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_{97}	u_{98}	u_{99}	u_{100}
1	2							100

Somas	Resultados
$u_1 + u_{100}$	
$u_2 + u_{99}$	
$u_3 + u_{98}$	
$u_4 + u_{97}$	
...	
$u_{50} + u_{51}$	

   1.2. Quantas somas é possível fazer que dão o mesmo valor, usando sempre duas das 100 parcelas?

   1.3. Com base nas respostas aos itens anteriores, calcula o valor da soma dos 100 primeiros números inteiros.

1.4. Escreve uma expressão que possa traduzir o modo como Gauss fez o cálculo da soma dos números inteiros de 1 a 100.

> A soma S_n de n termos de uma progressão aritmética (u_n) pode ser calculada utilizando a seguinte fórmula:
>
> $S_n = (u_1 + u_n) \times \frac{n}{2}$ ou a equivalente $S_n = \frac{u_1+u_n}{2} \times n$
>
> Sendo:
> - u_1 a primeira parcela da soma
> - u_n a última parcela da soma
> - n o número de parcelas

2. A plateia de um grande anfiteatro de Lisboa tem muitas cadeiras. A primeira fila tem 20 cadeiras, a segunda fila tem 22, a terceira fila tem 24 e assim sucessivamente até à 34.ª fila.

2.1. Encontra uma expressão que represente o número de cadeiras em cada fila da plateia deste anfiteatro (termo geral da sequência do número de cadeiras).

2.2. A sequência referida é uma progressão aritmética? Justifica a tua resposta.

2.3. Calcula o número total de cadeiras deste anfiteatro.

2.4. Há necessidade de aumentar o número de cadeiras para fazer um super anfiteatro, mantendo as primeiras filas com o mesmo número de cadeiras. Seguir-se-á a mesma regra para colocar as restantes cadeiras. Cada fila terá mais duas cadeiras que a fila anterior. Pretende-se que o anfiteatro passe a ter lugares para 3450 espetadores. Quantas filas terá o novo anfiteatro? Apresenta todos os cálculos que tiveste de efetuar.

Tarefa 5

A lenda do jogo de xadrez

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa pretende-se que os alunos, partindo do exemplo da contagem do números de grãos de trigo que existem em todas as casas de um tabuleiro de xadrez, conheçam a expressão simplificada que permite calcular a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Progressões geométricas.

Materiais e recursos: Calculadora

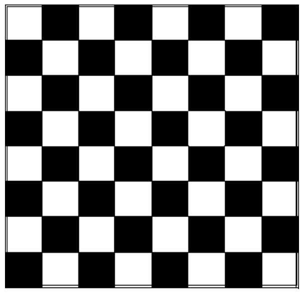
Notas para o professor:

Como ponto de partida, os alunos começam por determinar o número de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro de xadrez e, posteriormente, calculam a soma total desses grãos. A partir desta exploração, pretende-se introduzir e dar a conhecer a expressão simplificada que permite calcular a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Os itens estão organizados para que os alunos consigam deduzir a soma pretendida.
No entanto, é expectável que surjam algumas dificuldades, quer na compreensão da fórmula, quer no cálculo da soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica quando o primeiro valor considerado não corresponde ao primeiro termo da sucessão.

Tarefa 5

A lenda do jogo de xadrez



Diz a lenda que um antigo Xá da Pérsia ficou tão impressionado com o jogo de xadrez, que ofereceu, ao seu inventor, a recompensa que ele desejasse.
O inventor (provavelmente um matemático experiente...) pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa adjacente, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim sucessivamente, até se percorrerem todas as casas do tabuleiro.
Conta-se que o Xá ficou estupefacto, tendo até considerado que era ofensivo o pedido do inventor por se tratar de uma coisa tão insignificante!
Contudo, o inventor manteve o pedido e insistiu que lhe bastaria vê-lo concretizado...
Quantos grãos de trigo pediu, afinal, o inventor do jogo de xadrez?

1. Justifica que a sucessão dos números de grãos em cada casa é uma progressão geométrica, identificando a respetiva razão.
2. Quantos grãos estão em cada uma das casas da primeira linha do tabuleiro de xadrez?
3. Designa por S_8 a soma dos grãos que são colocados nas 8 casas da primeira linha do tabuleiro e calcula esse valor.

> Existe um procedimento matemático para calcular de forma rápida a soma de termos uma progressão geométrica:
>
> A soma S_n de n termos de uma progressão geométrica (u_n) pode ser calculada utilizando a seguinte fórmula:
>
> $$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$
>
> Sendo:
> - u_1 a primeira parcela da soma
> - r a razão da progressão
> - n o número de parcelas

4. Usa a fórmula anterior para calcular S_8 e confirma a tua resposta anterior .
5. Aplica agora a expressão para calcular o número total de grãos das primeiras vinte casas do tabuleiro.
6. Calcula o número total de grãos que estão na terceira linha do tabuleiro.
7. Calcula o número total de grãos que o inventor pediu.

Tarefa 6

Ainda o jogo de xadrez

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é que os alunos distingam crescimento linear de crescimento exponencial em modelos discretos, relacionando progressões aritméticas com o crescimento/decrescimento linear discreto e as progressões geométricas com o crescimento/decrescimento exponencial, também em modelos discretos.

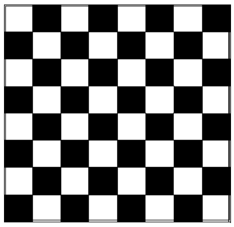
Conhecimentos prévios dos alunos: Progressões aritméticas e progressões geométricas.

Materiais e recursos: Computador com folha de cálculo.

Notas para o professor:
Para resolver esta tarefa, os alunos devem recorrer a uma folha de cálculo para observar e comparar o comportamento dos dois tipos de sequências: progressões aritméticas e progressões geométricas. Através desta exploração, pretende-se que os alunos distingam crescimento linear de crescimento exponencial, em modelos discretos.
Na resolução da tarefa na folha de cálculo irão surgir números escritos em notação científica, sendo uma boa oportunidade para os alunos revisitarem esta forma de escrita de números, muito grandes ou muito pequenos, trabalhada no ensino básico.

Tarefa 6

Ainda o jogo de xadrez



Na tarefa anterior ficámos a conhecer a história do inventor do jogo de xadrez que pediu ao antigo Xá da Pérsia como recompensa um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa adjacente, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim sucessivamente, até se percorrerem todas as 64 casas do tabuleiro.

Suponhamos agora que o inventor pediria um milhão de grãos de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois milhões de grãos pela segunda casa adjacente, três milhões pela terceira, quatro milhões pela quarta, e assim sucessivamente, até se percorrerem todas as 64 casas do tabuleiro.

O que te parece? A soma dos grãos de trigo seria um número maior neste segundo pedido ou no primeiro?

1. Organiza uma folha de cálculo onde coloques:
   - relativamente ao primeiro pedido
     - na primeira coluna, o número de grãos de trigo de cada uma das 64 casas do tabuleiro em cada linha;
     - na segunda coluna, em cada linha, a soma dos grãos de trigo que se vão obtendo, somando todos os grãos acumulados até essa linha;
   - relativamente ao segundo pedido
     - na terceira coluna, o número de grãos de trigo de cada uma das 64 casas do tabuleiro em cada linha;
     - na quarta coluna, em cada linha, a soma dos grãos de trigo que se vão obtendo, somando todos os grãos acumulados até essa linha;
   - relativamente ao conjunto dos dois pedidos
     - na quinta coluna, a diferença entre as somas dos grãos de trigo do primeiro e do segundo pedido que se vão obtendo em cada linha.

   Depois de organizares esta folha de cálculo, responde às seguintes questões:

   1.1. Qual o pedido mais vantajoso?

   1.2. Se o tabuleiro tivesse metade das casas (32) a tua resposta seria a mesma?

   1.3. Qual é o número máximo de casas para que a resposta seja diferente da do item 1.2.?

Ficha de Trabalho II

Progressões aritméticas e geométricas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema “sucessões”.

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:

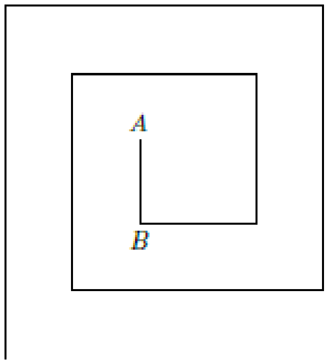
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.

Ficha de Trabalho II

Progressões aritméticas e geométricas

1. De uma progressão aritmética, (v_n), sabe-se que $v_1 = -2$ e $v_{12} = 18 + v_6$.
Averigua se 60 é termo da progressão (v_n). Justifica a tua resposta, apresentando todos os cálculos que tiveres de efetuar.

2. A figura ao lado representa uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir do segmento de reta $[AB]$, de comprimento 5 cm. O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em B, foi construído com mais 2 cm do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais 2 cm do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de reta sempre mais 2 cm do que o anterior.



Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, determina, em metros, o comprimento dessa linha (que compõe a espiral).

Adaptado de Exame Matemática A - 2023, 1.ª Fase

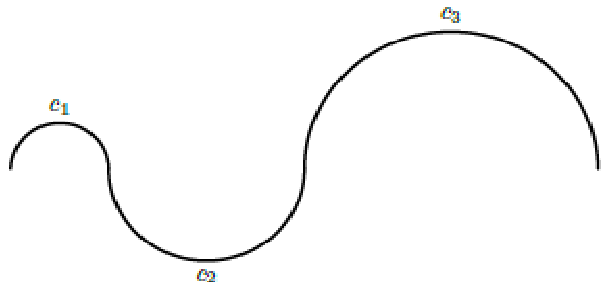
3. Seja (v_n) uma progressão geométrica.
Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_7 = 36$. Qual é o valor de v_6?
(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2n + 1$.
Determina a soma dos primeiros duzentos termos da sucessão (u_n).

5. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.
Para se preparar para a audição de piano, a Manuela praticou durante 22 dias.
Sabe-se que a Manuela praticou:
   - em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
   - 60 minutos no quarto dia;

Determina quantos minutos a Manuela praticou no total dos 22 dias.

6. Uma composição geométrica é formada por uma sequência de dez semicircunferências. Com exceção da primeira, o raio de cada semicircunferência é sempre o dobro do raio da anterior.
Na figura, estão representadas as três primeiras semicircunferências, c_1, c_2 e c_3 com raios de 1 cm, 2 cm e 4 cm, respetivamente.



O Xavier, aluno do 12.º ano, afirmou que o comprimento total desta composição é superior a 10 m.
Verifica a veracidade dessa afirmação, apresentando todos os cálculos que efetuares.

7. A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é 93.
Determine o terceiro termo desta progressão.

8. O João e a Joana vão poupar dinheiro para comprar uma bicicleta de montanha que custa aproximadamente 2000€.
   - O João decidiu colocar no mealheiro 100€ e no mês seguinte 110€, e depois 120€ e assim sucessivamente, ou seja, sempre mais 10€ em cada mês do que no mês anterior.
   - A Joana decidiu colocar 1€ no mealheiro e no mês seguinte 2€, e depois 4€ e assim sucessivamente, ou seja, em cada mês o dobro da quantia que colocou no mês anterior.

   Qual destes dois amigos consegue poupar mais rapidamente a quantia necessária para comprar a bicicleta?
   Justifica a tua resposta, apresentando os cálculos que efetuaste.
   Sugestão: Recorre a uma folha de cálculo para apoiar a tua resolução.

9. A bactéria Escherichia coli, conhecida como *E. coli*, é um microrganismo que vive naturalmente no intestino de humanos e de outros animais. A maioria das suas estirpes é inofensiva e até contribui para o bom funcionamento do sistema digestivo. No entanto, algumas variantes podem causar doenças, como infeções intestinais.
Em condições ideais, (quando há abundância de nutrientes a temperatura é adequada, cerca de 37°C, e o ambiente é estável) a bactéria Escherichia coli (E. coli) pode duplicar a sua população a cada 20 minutos.

Admite que, num dado instante inicial, uma bactéria se divide em duas e que, a **partir desse instante**, de 20 em 20 minutos, cada bactéria existente se divide em duas outras bactérias.
Assim, no instante inicial, existem duas bactérias e, por exemplo, passados 40 minutos, o número de bactérias existentes é oito. Justifica que o número de bactérias existentes passadas 5 horas desde o instante inicial é superior a 65 000.