FUNÇÃO COMPOSTA E DERIVADAS

Matemática A

12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Função composta e derivadas (Matemática A 12.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, maio de 2026

Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P, (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a

antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe e Carla Damásio (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE desenvolveu um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.

O EduQA e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - FUNÇÃO COMPOSTA E DERIVADAS

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
4	Tarefa 1 Vamos recordar as derivadas!	**Derivadas** **Taxa de variação** **Derivada** **Função derivada** **Regras de derivação**	• Identificar a derivada de uma dada função num ponto com o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto. • Conhecer a definição de função derivada. • Aplicar as regras de derivação - adição, subtração, multiplicação, divisão e potências com expoente natural - para obter a função derivada. • Reconhecer numérica e graficamente, a relação entre o sinal de derivada e a monotonia de uma função. • Saber que se uma dada função definida num intervalo aberto tem extremo num ponto e tem derivada nesse ponto então essa derivada é nula.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
4	Tarefa 2 Derivada da Função Exponencial de base e e Logarítmica de base e	**Derivadas** **Derivada da função exponencial de base e** **Derivada da função Logarítmica de base e** **Regras de derivação**	• Identificar o número e (número de Euler) como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada. • Conhecer a derivada da função $f(x) = e^x$. • Identificar $g(x) = \ln x$ como a função inversa de $f(x) = e^x$. • Saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. • Conhecer a derivada da função $g(x) = \ln x$	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 3 Função composta	**Função composta**	• Conhecer e aplicar a função composta, em casos simples, analisando o seu domínio.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 4
	
	Regra da cadeia e mais regras de derivação
		Derivadas
		
		Regras de derivação
			• Conhecer o teorema da derivada da função composta (Regra da Cadeia).
			• Conhecer as regras de derivação para funções do tipo:
			  • $f(x) = x^{\alpha}$ (com α real e $x > 0$);
			  • $f(x) = a^{x}$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$);
			  • $f(x) = log\, x$ (com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$);
			  • $f(x) = sen(x)$, $f(x) = cos(x)$ e $f(x) = tg(x)$.
			• Determinar derivadas envolvendo operações com as funções estudadas anteriormente, em casos simples.
				Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões
					• Comunicação Matemática
					• Práticas enriquecedoras e criatividade
					• Raciocínio e lógica matemática
						• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)
						• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
						• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

3	Tarefa 5 **Problemas de otimização**	**Derivadas** **Problemas de optimização**	• Resolver problemas de otimização tendo por base funções deriváveis.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 6 **Segunda derivada e sentido das concavidades**	**Derivadas** **Segunda derivada** **Concavidades e pontos de inflexão**	• Determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. • Relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Coleção de problemas Derivadas	**Derivadas** **Derivada da função exponencial de base e** **Derivada da função Logarítmica de base e** **Regras de derivação** **Segunda derivada**	• Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente..	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

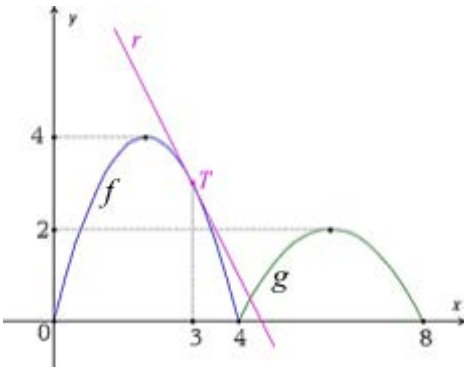
Tarefa 1

Vamos recordar as derivadas!

Parte I – Interpretação geométrica da derivada de uma função

Na figura seguinte estão representados num referencial xOy os gráficos de duas funções quadráticas, sobre as quais se sabe que:

- a função f é definida em $[0, 4]$;
- a função g é definida em $[4, 8]$;
- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto T, de abcissa igual a 3 ;
- a função f anula-se em $x = 0$ e em $x = 4$;
- a função g anula-se em $x = 4$ e em $x = 8$;
- f e g têm máximos 4 e 2, respetivamente.



1. Mostra que f e g podem ser definidas analiticamente por:

$$f(x) = -x^2 + 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 16$$

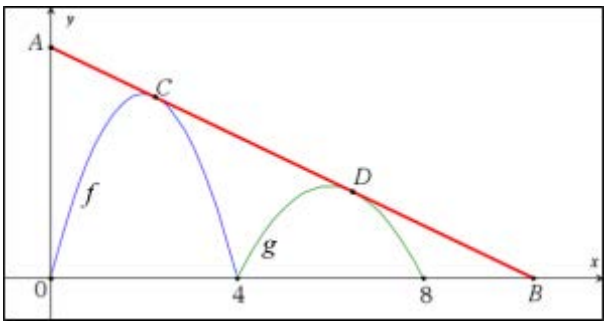
2. Calcula o valor de $g'(6)$.

3. Explica o significado geométrico de $g'(6)$.

4. Determina, por processos algébricos, a equação reduzida da reta r.

5. Na figura seguinte está reproduzida a fotografia de um parque aquático, na qual é possível observar duas pequenas colinas e um escorrega que começa numa plataforma vertical e termina numa piscina.
   Está também reproduzido o esquema de um corte de perfil onde estão representados:
   - o escorrega, pelo segmento de reta $[AB]$;
   - a altura máxima do escorrega, no eixo Oy, pelo ponto A;
   - o final do escorrega, no eixo Ox, pelo ponto B;
   - as duas colinas pelos gráficos das funções f e g.

   Sabe-se que o segmento de reta $[AB]$ é tangente aos gráficos das funções f e g nos pontos C e D, respetivamente.



5.1. Recorrendo ao GeoGebra:

- representa no mesmo referencial as funções f e g;
- coloca um ponto móvel no gráfico da função f e traça uma reta tangente passando por esse ponto;
- movimenta o ponto móvel até obteres uma boa representação do escorrega.

5.2. Determina valores aproximados correspondentes às coordenadas dos pontos A, B, C e D.

5.3. Por questões de segurança, a inclinação dos escorregas desta natureza não deve ser superior a 30^o.
Verifica se este escorrega respeita as condições de segurança.

Parte II – Puzzle de funções derivadas

Os itens seguintes vão ajudar-te a recordar o que aprendeste o ano passado sobre as relações entre:

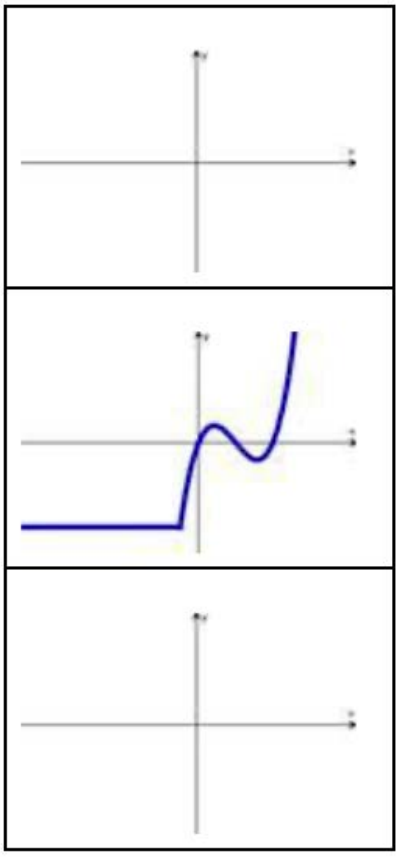
- a monotonia da função e o sinal da sua função derivada;
- os extremos da função e os zeros da sua função derivada.

1. Para completares os puzzles sobre funções e respetivas derivadas, acede aos endereços eletrónicos abaixo indicados e segue as instruções aí disponibilizadas:

- https://mat.absolutamente.net/wp/funcoes-e-derivadas/
- https://mat.absolutamente.net/wp/mais-funcoes-e-derivadas/

2. Na figura ao lado encontra-se representado, no referencial da segunda imagem, o gráfico de uma função.

   Faz o esboço de representações gráficas de funções, no primeiro e no terceiro referencial, de modo que cada representação corresponda à derivada da função representada no gráfico acima.



3. Sistematiza agora o que já sabes sobre as relações entre:
   - a monotonia da função e o sinal da sua função derivada;
   - os extremos da função e os zeros da sua função derivada.

Tarefa 1

Vamos recordar as derivadas!

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
O objetivo desta tarefa é que os alunos revisitem os conceitos relacionados com a derivada estudados no 11.º ano, em particular a identificação do declive da reta tangente num ponto com o valor da derivada nesse ponto e a relação do sinal da derivada com a monotonia da função original. Apesar de não ser assinalado o conceito de segunda derivada, pretende-se também criar um contexto que favoreça uma posterior introdução desse conceito.

Conhecimentos prévios dos alunos: Função quadrática. Declive da reta tangente e estudo da monotonia da função.

Materiais e recursos: Computador com acesso à Internet e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
A resolução algébrica do item 5. da Parte I é desafiante e pode fazer com que o foco da tarefa se desloque para manipulações algébricas complexas e desvalorize a recuperação dos conceitos relevantes. Ainda assim, esta resolução pode constituir um desafio para alunos que pretendam aprofundar conhecimentos ou ser proposta como trabalho complementar para além do contexto da sala de aula.
Durante a exploração da questão 2. Parte II o professor deve valorizar a discussão sobre a possibilidade de existirem diferentes esboços corretos das funções solicitadas. Importa salientar que esses esboços podem diferir entre si por uma constante, uma vez que funções cujos gráficos se obtém por translações verticais apresentam a mesma variação. Consequentemente, essas funções têm a mesma função derivada, aspeto que deve ser explorado e consolidado com os alunos.

Tarefa 2

Derivada da Função Exponencial de base e e Logarítmica de base e

Parte I - Derivada da Função Exponencial de base e

Considera a família de funções do tipo $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

1. Explora a sua representação gráfica com o auxílio da aplicação seguinte:
   https://www.geogebra.org/calculator/vz4xej9b
2. Faz variar o parâmetro a e regista conclusões sobre a relação que identificas entre o gráfico da função e o gráfico da função derivada.
3. Existe algum valor do parâmetro a para o qual a função e a sua função derivada coincidem?

Parte II - Derivada da Função Logarítmica de base e

Considera a função f, definida por $f(x) = e^x$:

1. Utilizando a Calculadora Suite do GeoGebra, representa graficamente a função f, e, através de uma reflexão tendo por eixo de simetria a bissetriz dos quadrantes ímpares, obtém o gráfico da função $g(x) = \ln x$.
2. Marca um ponto de coordenadas $(x,\ g(x))$ e o seu transformado através da reflexão considerada no item anterior.
3. Traça a reta tangente ao gráfico de g em $(x,\ g(x))$ e, usando a mesma reflexão, traça a reta tangente ao gráfico de f em $(g(x),\ x)$.
4. Determina o produto dos declives das retas tangentes, qualquer que seja x. O que é que concluis?
5. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f em $(g(x),\ x)$? Justifica.
6. Qual é o declive da tangente ao gráfico de g em $(x,\ g(x))$?.
7. Escreve a expressão analítica da função derivada de $g(x) = \ln x$.

Parte III - Generalização de outras regras de derivação

Nas duas partes anteriores desta tarefa, ficaste a conhecer mais duas funções derivadas:

A função exponencial de base e é a única função exponencial do tipo $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, cuja função derivada é ela própria.

$$(e^x)' = e^x$$

A função derivada da função definida por $y = ln\, x$ é $y' = \frac{1}{x}$.

$$(ln\, x)' = \frac{1}{x}$$

Acrescenta às duas funções derivadas anteriormente consideradas as seguintes funções derivadas:

Função	Função derivada
$x^{\propto}$, $\propto \in \mathbb{R}$, $x > 0$	$\propto x^{\propto-1}$, $\propto \in \mathbb{R}$, $x > 0$
a^x, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$a^x \times ln\, a$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
$log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $x > 0$	$\frac{1}{x\, ln\, a}$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $x > 0$
$sen\,(x)$	$cos\,(x)$
$cos\,(x)$	$-\, sen\,(x)$
$tg\,(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$

1. Determina a função derivada, $f'(x)$, em cada um dos casos seguintes:

1.1. $f_1(x) = x + lnx$

1.2. $f_2(x) = \frac{x}{lnx}$

1.3. $f_3(x) = x^2 log_2 x$

1.4. $f_4(x) = x\, ln3$

1.5. $f_5(x) = 3 + 2\, cos\, x$

1.6. $f_6(x) = sen\, x + cos\, x$

1.7. $f_7(x) = sen\, x\, .\, cosx$

1.8. $f_8(x) = 3x\, tg\, x$

2. Considera a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln x$.

   2.1. Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

   2.2. Constrói o gráfico de g e, a partir dele, esboça os gráficos das funções $a = f(x) - 2$, $b = 2f(x)$, $c = f(x - 2)$ e $d = f(-x)$.

   2.3. Tendo por base a equação da reta que determinaste no item 2.1., determina as equações das retas tangentes às funções definidas em 2.2., atendendo que o ponto de tangência considerado em 2.1. sofreu também a mesma transformação geométrica.

3. Seja h uma função, real de variável real, cuja função derivada é definida por

$$h'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

   3.1. Determina uma equação da reta t, tangente ao gráfico de h no ponto $(-1, -\frac{7}{12})$.

   3.2. Seja u uma reta perpendicular à reta t.

   Sabe-se que:

   - a reta u interseta os eixos Ox e Oy nos pontos X e Y respetivamente;
   - o ponto X tem abcissa positiva;
   - o triângulo $[OXY]$ tem área igual a 12.

   Determina a abcissa do ponto X.

4. Considera a função j, real de variável real, definida por $j(x) = 2x - senx$.

   4.1. Faz um esboço do gráfico da função.

   4.2. Determina, por processos analíticos, a equação da reta tangente ao gráfico de j no ponto de abcissa 0.

   4.3. Sejam r e s as retas de equação $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 1$, respetivamente. Determina as coordenadas dos pontos A e B comuns ao gráfico de j, em $[-\pi, \pi]$, e a r e a s, respetivamente.

   4.4. Determina as equações das retas tangentes ao gráfico de j nos pontos A e B.

Tarefa 2

Derivada da Função Exponencial de base e e Logarítmica de base e

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos ampliem o conjunto de regras de derivação de funções simples, que já conhecem anteriormente. Pretende-se, ainda que os alunos, reconheçam a derivada da função exponencial, de base e, através da análise do gráfico da função e do gráfico da respetiva função derivada. Além disso, procura-se que a derivada da função logarítmica, de base e, seja construída a partir da comparação entre os gráficos da função exponencial e da função logarítmica. Finalmente pretende-se que os alunos tomem conhecimento das regras de derivação das funções exponenciais e logarítmicas, de base diferente de e, e das funções trigonométricas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de derivada, função exponencial, logarítmica e inversa.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:
A ampliação das regras de derivação deve ser apresentada como uma continuação natural do trabalho já desenvolvido anteriormente, reconhecendo que, por exemplo, se determina da mesma forma a equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto. Deste modo, os alunos compreendem que não se trata de aprender novos conceitos ou procedimentos, mas de aplicar os conhecimentos existentes a novas classes de funções.
A apresentação das regras de derivação deve ser acompanhada da comparação entre o gráfico da função e o gráfico da sua função derivada, de modo que, mesmo não sendo efetuada a dedução das fórmulas, os alunos possam verificar que as derivadas apresentadas respeitam as relações entre função e função derivada estudadas anteriormente.

Tarefa 3

Função composta

1. Numa rede social, foi proposto um concurso de vídeo para testar a criatividade do público. Os participantes foram convidados a usar a câmara de vídeo dos seus telemóveis para gravar e editar um pequeno vídeo alusivo à Matemática.
   O vencedor ganha dois vouchers para usar numa loja da sua localidade:
   - com o voucher A recebe um desconto de 30% sobre o valor a pagar na compra efetuada;
   - com o voucher B tem um desconto de 50€ numa compra se o valor a pagar for superior a 210€.

   1.1. O vencedor planeia ir à loja fazer compras num valor entre 300€ e 400€ e, nesse dia, o dono da loja permite que ele utilize sucessivamente os dois vouchers na mesma compra.
   Qual é o voucher que deve aplicar em primeiro lugar? Porquê?

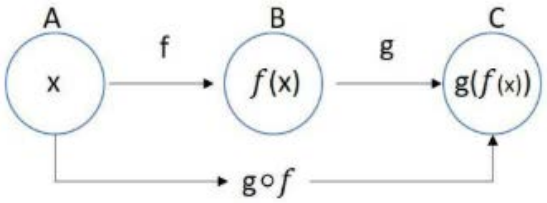
   1.2. Será possível utilizar qualquer uma das sequências dos vouchers na compra se ela for superior de 240€?

   1.3. Designa por x o valor da compra, por f a função que dá o valor calculado após aplicação do voucher A e por g a que dá o valor calculado após aplicação do voucher B.

      1.3.1. Qual é o significado de cada uma das expressões, $g(f(x))$ e $f(g(x))$?

      1.3.2. Quais os valores de x que podem ser considerados na expressão $g(f(x))$? E em $f(g(x))$?

A função que transforma cada objeto x do seu domínio em $g(f(x))$ chama-se função composta da função g com a função f e designa-se por $g \circ f$. Pode ler-se "g após f".



Do mesmo modo, a função definida por $f \circ g$ é a função composta das funções f e g, sendo a imagem de x por essa função, $f(g(x))$.

2. Considera as representações gráficas de duas funções, f e g, em referenciais do plano, como podes observar nas figuras seguintes e conforme a descrição sob cada uma das figuras.

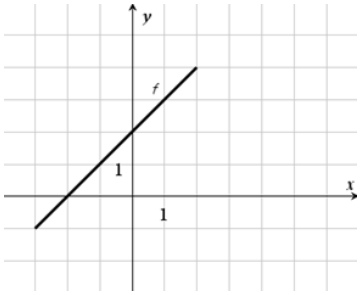
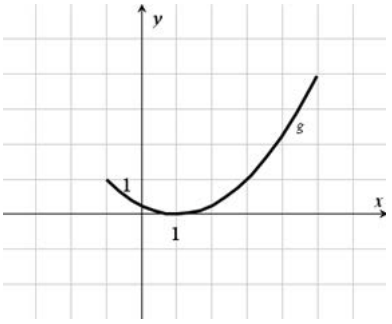
	

Gráfico de f: Segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(-3,-1)$ e $(2,4)$.	Gráfico de g: Parte de uma parábola cujos pontos de coordenadas (x,y) verificam a condição $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$, com $x \in [-1,5]$.

2.1. Completa as seguintes tabelas, sempre que possível.

x	$f(x)$	$(g \circ f)(x)$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

x	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
$3,8$		
$3,9$		
4		
5		

2.2. Como pudeste observar, nem sempre foi possível obter a imagem de x pelas funções $f \circ g$ ou $g \circ f$, pelo que esses valores de x não fazem parte do domínio da respetiva função.

2.2.1. Qual é o domínio de cada uma das funções $f \circ g$ e $g \circ f$?

2.2.2. Considerando, na generalidade, duas funções reais de variável real, h e j, apresenta uma condição que defina o domínio da função $h \circ j$.

2.3. Determina uma expressão analítica para cada uma das funções, $f \circ g$ e $g \circ f$.

3. Considera as funções reais de variável real, g e h, definidas por $g(x) = x^2 - 3$ e por $h(x) = \frac{2}{x}$, em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, respetivamente.

3.1. Determina o contradomínio de cada uma das funções.

3.2. Diz-se que uma função tem um <u>ponto fixo</u> a quando a imagem de a por essa função é igual a a. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um ponto fixo de h, pois $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Mostra que -2 e 1 são pontos fixos de $g \circ h$ e determina o(s) ponto(s) fixo(s) de $h \circ g$.

3.3. Dá exemplo de um número que não faça parte do domínio da função $g \circ h$ e outro que não pertença ao domínio da função $h \circ g$.

3.4. Caracteriza cada uma das funções, $g \circ h$ e $h \circ g$, apresentando o domínio e uma expressão algébrica.

3.5. Calcula os valores de $g'(p)$ e de $h'(p)$, com $p \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

3.6. Mostra que:

3.6.1. $(g \circ h)'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) \times h'\left(\frac{1}{2}\right)$;

3.6.2. $(h \circ g)'(1) = h'(g(1)) \times g'(1)$.

Tarefa 3

Função composta

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo dar a conhecer, aos alunos, a composição de funções. Pretende-se que os alunos aprendam a definir uma função como sendo a composta de outras duas, conhecimento esse que é importante para facilitar o trabalho na determinação de derivadas de muitas outras funções.

Conhecimentos prévios dos alunos: Generalidades sobre funções, equações envolvendo funções polinomiais e regras de derivação de funções polinomiais e racionais.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Notas para o professor:
No desenvolvimento da questão 1.1., os alunos poderão recorrer a diferentes estratégias e formas de resolução. Assim, devem ser aceites e valorizadas resoluções distintas, desde que devidamente justificadas. No entanto, associado ao estudo das funções, o professor deve privilegiar as resoluções que explicitamente apresentem justificações algébricas.
Na questão 3.6. devem mobilizar os valores calculados anteriormente, por via algébrica. A obtenção destes valores com recurso à calculadora gráfica pode ser usado como uma estratégia de confirmação do trabalho algébrica e também uma forma de familiarizar os alunos com o modo de operacionalizar a composição de funções no ambiente da calculadora gráfica.

Tarefa 4

Regra da cadeia e mais regras de derivação

Parte I

1. Considera a função h, de domínio $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, definida por $h(x) = ln(2x + 1)$.

   1.1. Define a função h como sendo a função composta de outras duas funções, f e g.

   1.2. Existe a seguinte regra para derivar uma função composta:

   > Sendo f e g duas funções, estando $f \circ g$ definida e existindo as funções derivadas, f' e g', então:
   >
   > $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) .$$
   >
   > Este resultado, ou regra da **derivada da função composta**, também é conhecido por **regra da cadeia**.

   Aplica esta regra para obteres a derivada da função h.

2. A regra da cadeia também pode ser apresentada da forma seguinte:

   > *Considerando* $u = g(x)$ *e* $v = f(x)$ *então a derivada da função composta é representada por* $(v(u))' = u' \times v'(u)$.

   2.1. Considera as funções u e v definidas por $u(x) = 1 - 2x$ e $v(x) = x^3$. Identifica a função $v \circ u$ e deriva-a:

   2.1.1. usando a regra da cadeia;

   2.1.2. começa por representar $v \circ u$ na forma de um polinómio reduzido.

   2.2. Pode-se definir cada uma das seguintes funções como sendo uma função composta de v com u , $v \circ u$. Em cada alínea, identifica a função v e determina a função derivada de cada uma das funções compostas:

   2.2.1. u^n, sendo $n \in \mathbb{R}$

   2.2.2. $sen\, u$

   2.2.3. $cos\, u$

   2.2.4. $tg\, u$

2.2.5. e^u

2.2.6. a^u, sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

2.2.7. $ln\, u$

2.2.8. $log_a u$, sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Parte II

1. Identifica a composição em cada uma das seguintes funções e apresenta as expressões algébricas das respectivas funções derivadas.

$f_1(x) = \frac{3}{x^2 - x}$	$f_6(x) = e^{-x^2+5}$
$f_2(x) = (\frac{2}{x})^2$	$f_7(x) = e^{x^2+x} + 1$
$f_3(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$	$f_8(x) = log_2(x^2 + 1)$
$f_4(x) = ln(x^2)$	$f_9(x) = 2^{\frac{1}{x}}$
$f_5(x) = (lnx)^2$	$f_{10}(x) = ln(\frac{x}{x-1})$

2. Considera as funções a, b, c e d, definidas por:

$$a(x) = e^{x^2+x} + 1,\ b(x) = log_2(x^2 + 1),\ c(x) = 2^{\frac{1}{x}} \text{ e } d(x) = ln(\frac{x}{x-1})$$

Determina analiticamente:

2.1. o declive da reta tangente ao gráfico de a no ponto de abcissa -1 ;

2.2. $(b \circ c)'(1)$;

2.3. as abcissas dos pontos do gráfico de d em que o declive da reta tangente ao gráfico, nesses pontos, é $-\frac{1}{2}$.

3. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 1[$ definida por $f(x) = 2x + 3 + ln((1-x)^3)$.
Estuda, sem recorrer à calculadora, exceto para eventuais cálculos numéricos, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
Na tua resposta, apresenta os intervalos de monotonia e o(s) valor(es) de x em que a função f tem extremo(s) relativo(s).

Tarefa 4

Regra da cadeia e mais regras de derivação

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Nesta tarefa, pretende-se que os alunos compreendam a regra da derivada da função composta e a utilizem na extensão das regras de derivação já conhecidas.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regras de derivação.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Após a discussão da questão 2.2. da Parte I é oportuno que o professor possa identificar no formulário dos exames nacionais as regras das derivadas que os alunos determinaram, clarificando as funções, conhecidas e desconhecidas, envolvidas na composição.
No desenvolvimento dos itens da Parte II, o recurso às capacidades gráficas da calculadora, em particular à representação do gráfico da função derivada, constitui uma oportunidade para promover a autonomia dos alunos. Esta abordagem permite-lhes analisar, confrontar e validar as suas próprias conjeturas, favorecendo o desenvolvimento do espírito crítico e a reflexão sobre a correção dos resultados obtidos.

Tarefa 5

Problemas de otimização

1. Uma escola pretende construir um recinto com o formato retangular encostado a um muro existente, para atividades ao ar livre.
   Serão colocados 120 metros de vedação, apenas nos três lados livres do recinto, como mostra a imagem ao lado
   Considera:
   - x a largura do recinto (perpendicular ao muro), em metros;
   - y o comprimento do recinto (paralelo ao muro), em metros.

   1.1. Mostra que a quantidade de vedação utilizada pode ser expressa por:
   $$2x + y = 120$$
   1.2. Determina uma expressão de y em função de x .
   1.3. Mostra que a área A, em m^2, do recinto pode ser expressa por:
   $$A(x) = x(120 - 2x)$$
   1.4. Indica para que valores de x a função A é válida.
   1.5. Determina, através de processos algébricos, a área máxima do recinto a construir.
   1.6. Determina as dimensões do recinto para as quais a sua área é máxima.

2. Uma empresa de entregas estima que o custo diário total (C), em centenas de euros, associado à distribuição de encomendas depende do número diário de entregas x, e pode ser modelado por:
   $$C(x) = 2x + \frac{500}{x}, x > 0$$
   A parte polinomial representa os custos operacionais (combustível, horas extra e manutenção), enquanto que a parte racional traduz os custos fixos diluídos pelo número de entregas.
   2.1. Qual será o custo diário total se forem feitas 5 entregas? E se forem 20?
   2.2. Através de processos analíticos, determina o número de entregas diárias que minimiza o custo total. Qual será esse custo mínimo?

3. Uma empresa pretende construir um depósito com o formato cilíndrico sem tampa para armazenar água, como mostra a imagem ao lado. O depósito deve ter volume igual a 32 m³.

O custo do material utilizado é:

- 20 € por m^2 na base;
- 10 € por m^2 na superfície lateral.

Considera:

- r o raio da base do depósito (em metros);
- h a altura do depósito (em metros).

3.1. Se o raio da base for igual a $2m$, qual deverá ser a altura do cilindro?

3.2. Determina uma expressão de h em função de r.

3.3. Mostra que o custo total C, em euros, pode ser expresso em função de r por:

$$C(r) = 20\pi r^2 + \frac{640}{r}$$

3.4. Determina, através de processos algébricos, as dimensões do depósito que minimizam o seu custo de construção.

4. A temperatura T, em °C, de um forno, t minutos após ser ligado, é modelada por:

$$T(t) = 200 \times \left(1 - e^{-0,2t}\right) + 20,\ t \geq 0.$$

4.1. Qual é a temperatura do forno no instante em que é ligado? O que representa esse valor no contexto do problema?

4.2. Mostra, através de processos algébricos, que a função T é crescente.

4.3. Qual é a temperatura para a qual o forno tende, se ficar ligado por tempo indeterminado?

5. O número médio diário de visitantes de um site, ($N(t)$), (t) dias após uma campanha publicitária, é modelado por:

$$N(t) = 200\, t \times e^{-0,1t}, t \geq 0.$$

5.1. Qual foi o número de visitantes que o site teve no 5.º dia após a realização da campanha?

5.2. Determina, através de processos algébricos, o número máximo de visitantes e o dia em que tal ocorreu.

5.3. Explica por que razão o modelo faz sentido apenas para $t \geq 0$.

6. Um aluno do 12.º ano está a preparar-se para o exame nacional de Matemática A e pretende planear o número médio diário de horas de estudo.
   O nível global de desgaste diário d (mental e físico), medido numa escala adimensional, é modelado pela função:

$$d(t) = 0,4t^2 - 5ln(t),\ t > 0$$

   6.1. Indica o domínio da função d e justifica-o no contexto do problema.

   6.2. O Bernardo pretende estudar, em média, 3 horas e meia por dia. Qual será o seu nível global de desgaste diário?

   6.3. A tabela seguinte permite avaliar qualitativamente o impacto do número de horas de estudo no bem-estar do aluno.

Valor de $(d(t))$	Interpretação
$d(t) \leq 0,4$	Desgaste baixo – regime equilibrado
$0,4 < d(t) \leq 2$	Desgaste moderado – aceitável a curto prazo
$2 < d(t) \leq 5$	Desgaste elevado – começa a ser prejudicial
$d(t) > 5$	Desgaste excessivo – claramente prejudicial para a saúde

   Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, determina o(s) intervalo(s) de tempo correspondente(s) a um desgaste excessivo.
   Apresenta o resultado em horas e minutos.
   Nota: Nos cálculos intermédios conserva no mínimo 3 casas decimais.

   6.4. Determina, através de processos algébricos, o tempo que deverá estudar por dia para minimizar o nível global de desgaste diário.

Tarefa 5

Problemas de otimização

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com o desenvolvimento desta tarefa, pretende-se que os alunos compreendam o papel da derivada e do estudo da monotonia de uma função em problemas de modelação e optimização, recorrendo a procedimentos algébricos. Os alunos devem compreender que a obtenção de valores ótimos recorrendo a processos numéricos, usando a calculadora gráfica, e a procedimentos algébricos são processos complementares e que ambos são relevantes no tratamento de modelos matemáticos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regras de derivação.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:
A obtenção de soluções ótimas em problemas de modelação deve ser um processo claro para os alunos, devendo serem capazes de definir algebricamente os modelos em situações simples, identificando as variáveis envolvidas e as relações entre elas, ou apropriar-se de modelos fornecidos no enunciado.
No caso de modelos fornecidos no enunciado, os alunos devem ser orientados a compreendê-los e a apropriarem-se dele, interpretando o seu significado e as restrições apresentadas, caso existam. Desta forma, promove-se não apenas a aplicação de processos de otimização usuais, mas também a compreensão do papel da modelação matemática na resolução de problemas do quotidiano.

Tarefa 6

Segunda derivada e concavidades

1. Considera a função real de variável real, j , definida por $j(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$.

   1.1. Utiliza tecnologia gráfica e representa, no mesmo referencial, a função j e a respetiva função derivada de j (j');

   1.2. Carateriza a monotonia da função j, a partir do sinal de j';

   1.3. Representa, no mesmo referencial, a função j e a função derivada de j' (j'');

   1.4. Que conclusões podemos retirar acerca do sentido das concavidades da função j a partir do sinal da sua segunda derivada, j''?

   1.5. Determina o zero de j'' e observa o gráfico de j no ponto correspondente a esse zero. O que acontece ao sentido da concavidade do gráfico da função j nesse ponto?

   1.6. Representa, no mesmo referencial, o gráfico de cada uma das funções j' e j''. Será possível determinar o tipo de extremo de j a partir do sinal de j'' nos zeros de j'? Explica.

2. Recorrendo ao GeoGebra, representa graficamente a função h, definida por:

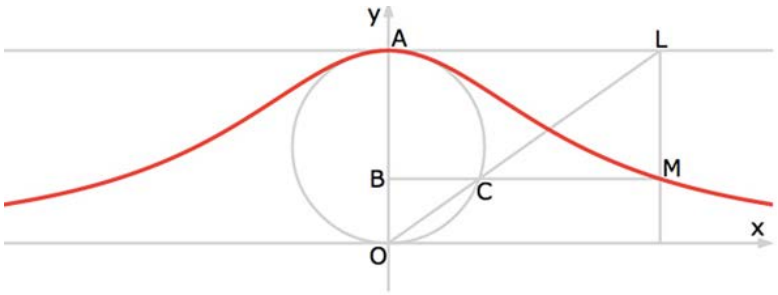
   $$h(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{21}{10}x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{2}{5}.$$

   2.1. Coloca um ponto móvel P sobre o gráfico da função e traça nele a respetiva reta tangente;

   2.2. Move o ponto P ao longo do gráfico de h e observa a evolução dos declives da reta tangente ao gráfico de h nesse ponto. O que podes concluir acerca da relação entre a variação dos declives das retas tangentes à medida que o valor da abcissa de P aumenta e o sinal da função h''?

3. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^3 + 4x$.
   Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, cujo declive é o maior possível.

4. Na figura seguinte, encontras uma curva desenhada com base numa circunferência.



Esta curva é conhecida por Curva de Agnesi, uma vez que foi estudada pela grande matemática Maria Gaetana Agnesi no séc. XVIII.

A equação de uma curva destas pode escrever-se da forma $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, sendo a o raio da circunferência.

Considera a curva baseada numa circunferência de diâmetro 1, gráfico de uma função real de variável real g.

4.1. Determina a segunda derivada da função g.

4.2. O que podes concluir sobre a concavidade do gráfico da função g?

5. Considera a função real de variável real , k, definida por

$k(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$.

Estuda a função k, percorrendo as seguintes etapas:

5.1. Determina k' e k''.

5.2. Constrói a tabela de sinais da função k''.

5.3. Com base na tabela anterior, tira conclusões sobre:

5.3.1. o sentido das concavidades do gráfico da função k;

5.3.2. a monotonia da função k'.

6. Seja g uma função de domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$, cuja derivada, com o mesmo domínio, é definida por $g'(x) = log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico, quanto à existência de pontos de inflexão e de extremos relativos no intervalo $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$.

Tarefa 6

Segunda derivada e concavidades

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos compreendam a relação entre o sinal da segunda derivada de uma função e as concavidades do gráfico da função. Devem, igualmente, os alunos explorar a relação entre a segunda derivada e a primeira derivada de uma função. Os alunos devem ainda ficar familiarizados com o conceito de ponto de inflexão.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regras de derivação.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Durante a discussão da tarefa, o professor deve informar os alunos sobre a existência de processos automáticos de obtenção da função derivada com recurso à tecnologia, sem que isso diminua a importância da obtenção da sua expressão por processos algébricos.
Com a questão 3. pretende-se que os alunos compreendam a diferença entre maximizar uma função e maximizar o declive da reta tangente, alertando para o facto de que a segunda derivada permite estudar a monotonia da variação da função, ou seja, a monotonia da primeira derivada.

Coleção de problemas

Derivadas

1. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

   Sabe-se que $f(x) = 2x + 1$ e que $(f \circ g)(x) = 7$, para todo o valor real de x.

   Qual das seguintes expressões define a função g?

   (A) -3 (B) 3 (C) $x - 3$ (D) $x + 3$

   Exame – 2019, Ép. especial

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 13$.

   Considera, para cada número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = kx + 2$.

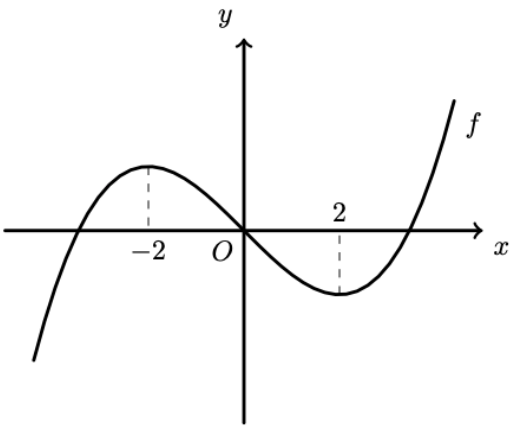
   Determina o valor de k para o qual se tem $(g \circ f)(-3) = 6$ -

   Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014 (adaptado)

3. Na figura ao lado, está representada, num referencial, o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

   Tal como a figura sugere, a função f tem um máximo relativo para $x = -2$ e tem um mínimo relativo para $x = 2$.

   A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f.



   Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente.

   Qual é o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \leq 0$?

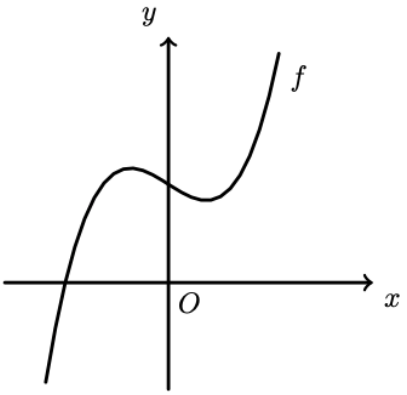
   (A) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$ (B) $]-\infty, -2] \cup [0, 2]$

   (C) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ (D) $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

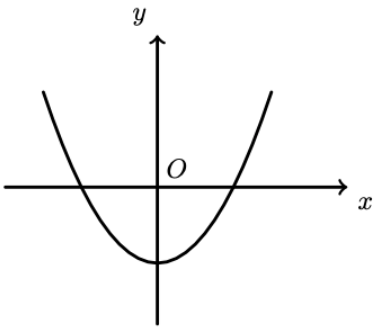
   Exame – 2017, Ép. especial (adaptado)

4. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f.

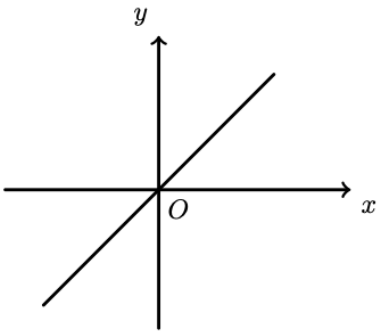
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?



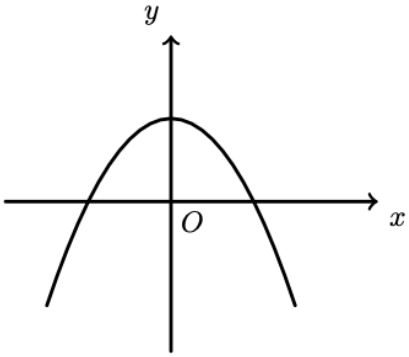
(A)



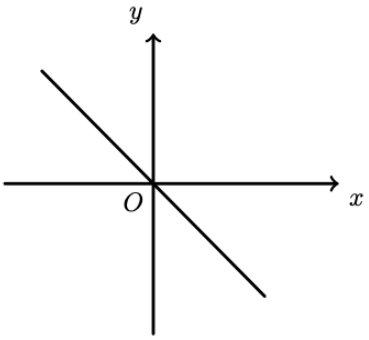
(B)



(C)



(D)



5. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4 + x)^2$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

(B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$.

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$.

Exame – 2013, Ép. especial

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

A tabela de variação de sinal da função de f'', segunda derivada de f, é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$.

Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A) $]-15,-5[$ **(B)** $]0,10[$ **(C)** $]-5,5[$ **(D)** $]5,15[$

Exame – 2017, 2.ª fase

7. A temperatura T, em °C, de um forno, t minutos após ser ligado, é modelada por:

$$T(t) = 200 \times \left(1 - e^{-0,2t}\right) + 20, \; t \geq 0.$$

7.1. Determina a expressão que permite calcular a **taxa de aquecimento** do forno em função do tempo decorrido após ter sido ligado.

7.2. Qual é a taxa de aquecimento do forno aos 5 minutos.

7.3. Determina a partir da expressão da **taxa de aquecimento** , o instante em que ela é máxima.

7.4. Justifica a resposta anterior recorrendo à função $T''(x)$.

8. Considere uma função, f, de domínio $\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, e a função f", segunda derivada da função, f.

Sabe-se que:

- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$;
- a função f'' tem exatamente dois zeros: $\frac{3}{4}$ e 3;
- as retas r e s são tangentes ao gráfico da função f nos pontos de abscissas -2 e -1, respetivamente.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f tem dois pontos de inflexão, de abcissa $\frac{3}{4}$ e 3.

II. O declive da reta r é menor do que o declive da reta s.

Justifique que as proposições I e II **são falsas**.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Exame – 2025, Ep. especial

9. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, e cuja derivada, também de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por $f'(x) = e^{lnx+2} - lnx$.

Mostra que $f''(x) = \frac{1}{x}(e^{lnx+2} - 1)$ e estuda, sem recorrer à calculadora, a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

10. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por $g'(x) = \frac{x-e^{3x}}{x}$.

Estuda, sem recorrer à calculadora gráfica, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na tua resposta, apresenta:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

Exame – 2022, Ép. especial (adaptado)

11. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, sabe-se que a sua derivada, f', é definida por $f'(x) = \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2}$.

Resolve o item seguinte recorrendo a métodos analíticos.
Mostra que $f''(x) = \frac{12}{(x+2)^3}$ e estuda f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.
Na tua resposta, apresenta:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso existam.

Coleção de problemas

Derivadas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos oportunidades de aplicação e consolidação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema "funções".

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.