FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

Matemática A

12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Funções contínuas e deriváveis (Matemática A 12.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, maio de 2026

Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P, (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a

antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe e Carla Damásio (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE desenvolveu um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.

O EduQA e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Continuidade/ Descontinuidade	**Funções contínuas e deriváveis** **Continuidade**	• Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função que admite limite nesse ponto igual à sua imagem.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 2 Continuidade em intervalos	**Funções contínuas e deriváveis** **Continuidade em intervalos**	• Identificar se uma função é contínua num intervalo aberto, em casos simples, tendo como apoio o conhecimento de uma lista de funções contínuas e respetivas operações.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)
2	Tarefa 3 Regra de L'Hôpital	**Funções contínuas e deriváveis** **Regra de L'Hôpital**	• Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a Regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Organização do trabalho dos alunos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)

2	Tarefa 4 Limites notáveis e Regra de L'Hôpital	**Funções contínuas e deriváveis** **Regra de L'Hôpital**	• Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a Regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 5 Assíntotas verticais e horizontais	**Funções contínuas e deriváveis** **Assíntotas**	• Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 6 Assíntotas oblíquas	**Funções contínuas e deriváveis** **Assíntotas**	• Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 7 Estudo de funções	**Funções contínuas e deriváveis** **Estudo de funções**	• Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	Trabalho em grupo, com discussão final com a turma	• Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

2	Coleção de problemas Continuidade e assíntotas	**Funções contínuas e deriváveis** **Continuidade e assíntotas**	• Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Tarefa 1

Continuidade/Descontinuidade

Parte I – Continuidade num ponto

1. Um grupo de cinco amigos decidiu ir, de comboio, a um parque de trampolins, onde permaneceram duas horas e 10 minutos. À entrada do parque, os visitantes encontraram uma placa (ver imagem ao lado) com as indicações de preços e condições de utilização.

   1.1. Quanto pagaram pelo dia de diversão?

   1.2. Um dos amigos, o Pedro, disse que se tivessem saído cerca de 10 minutos antes poupariam 20% do valor pago e só estariam menos cerca de 8% do tempo. Será que o Pedro está certo na sua afirmação? Porquê?

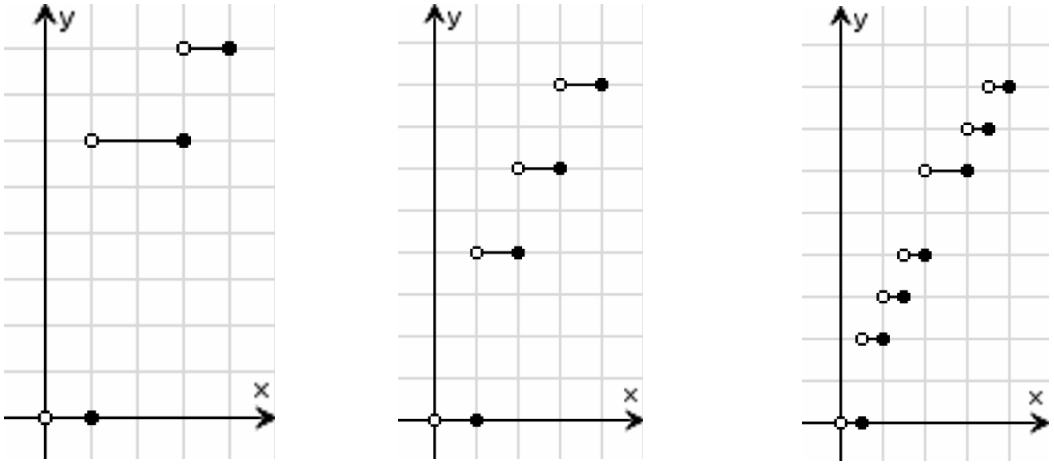
   1.3. Representa, num referencial cartesiano, o gráfico que traduz o preço a pagar pelo aluguer do trampolim em função do tempo.

   1.4. A opção avançada pelo Pedro leva a uma perda de 10 minutos no parque de trampolins.
   Para a mesma poupança de 10€, qual deveria ser o tempo de permanência no parque para a perda ser mínima? E que tempo de permanência permitiria um usufruto dos trampolins por mais tempo sem que o preço aumentasse 10€?

   1.5. No regresso a casa, surgiu uma conversa entre dois dos amigos.
   - *Não acho nada justo o preço dos trampolins, disse um deles. Basta passar um bocadinho da hora e o preço aumenta muito. O valor muda de repente.*
   - *Eu concordo, respondeu o outro. Mas o preço poderia ser mais justo com outro tarifário.*

   Comenta a conversa entre os amigos e averigua da possibilidade de um tarifário menos penalizador nas mudanças de valores a pagar em função do tempo.

2. Na figura, em A, B e C estão representadas três funções reais de variável real, definidas no intervalo $]0, 4]$, sendo os respectivos contradomínios, $\{0,\ 6,\ 8\}$, $\{0,\ 4,\ 6,\ 8\}$ e $\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$, respetivamente.



A B C

2.1. O que podes dizer sobre as mudanças nos valores do contradomínio à medida que os do domínio aumentam.

2.2. Propõe uma função real, definida no mesmo domínio das anteriores, que minimiza as alterações abruptas nas respectivas imagens pertencentes a $]0, 8]$.

3. Considera a função, f, que a cada número real associa o maior número inteiro, menor ou igual a ele.

3.1. Determina:

3.1.1. $f(2,3)$;

3.1.2. $f(1,8753)$;

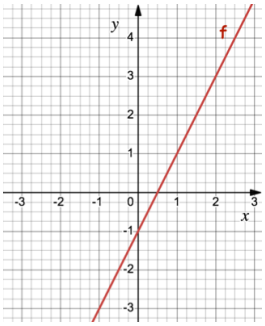
3.1.3. $f(0,99)$;

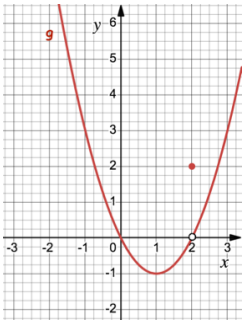
3.1.4. $f(3)$.

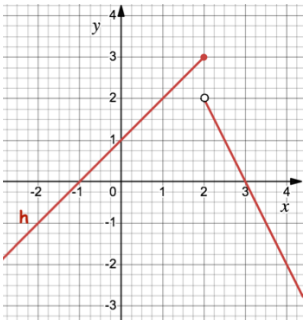
3.2. Representa graficamente a função f no intervalo $[0, 4]$.

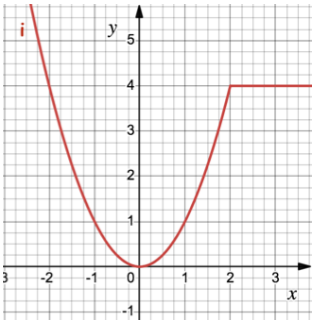
3.3. Como verificamos na questão anterior, não é possível desenhar o gráfico desta função sem levantar o lápis do papel. Porque é que achas que isto acontece?

4. Considera parte dos gráficos das funções f, g, h e i, representadas nas figuras seguintes:









Descreve, para cada uma das funções, o que acontece às suas imagens para valores de x próximos de 2.

5. Considera as funções f, g e h definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = x^3 - 3x\,; \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

5.1. Completa as tabelas seguintes:

x	$f(x) = x^3 - 3x$
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	
$1,0001$	

x	$f(x) = x^3 - 3x$
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	
$0,9999$	

x	$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	
$1,0001$	

x	$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	
$0,9999$	

x	$h(x) =$_____
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	
$1,0001$	

x	$h(x) =$_____
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	
$0,9999$	

5.2. O que podemos afirmar, sobre o limite, de cada função, quando x tende para 1?

5.3. Calcula, se possível, a imagem de $x = 1$ para cada uma das funções apresentadas. O que podes concluir sobre a continuidade em $x = 1$?

Sejam f uma função real de variável real e $a \in D_f$, tem-se que f é contínua em $x = a$ se e só se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Parte II

1. Prova que é contínua no ponto de abcissa zero, a função real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x-2} \text{ se } x \neq 2 \\ 2 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

2. Verifica que é descontínua, para $x = 0$, a função real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ -1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Tarefa 1

Continuidade/Descontinuidade

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo promover o estudo do conceito de continuidade e descontinuidade de funções. Para isso serão analisadas situações inspiradas em contextos do dia a dia, observando-se, também, representações gráficas de algumas funções, estudando, ainda, o comportamento de funções quando x (variável independente) tende para uma certo número real.

Conhecimentos prévios dos alunos: Leitura e interpretação de gráficos. Funções definidas por ramos. Noção intuitiva de limite (comportamento da função quando x tende para um certo valor).

Materiais e recursos: Material de escrita e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Numa primeira fase, os alunos analisam uma situação inspirada em contexto do dia a dia, custos associados ao aluguer de trampolins, modelando-a usando funções. A análise do tarifário do aluguer de trampolins, bem como a proposta apresentada aos alunos para criarem uma situação mais justa, permite explorar representações gráficas que conduzem à discussão e compreensão intuitiva do conceito de continuidade, “desenhar o gráfico sem levantar o lápis”. Na situação inicial, observa-se que o custo do aluguer dos trampolins apresenta variações bruscas, evidenciando um crescimento não contínuo. Já nas propostas elaboradas pelos alunos, poderão surgir modelos com crescimentos dos custos mais regulares e contínuos. Esta análise conduz naturalmente à distinção entre continuidade e descontinuidade nas funções que modelam estas situações.
Na construção do conceito de função contínua num certo número, c, do seu domínio, conduz-se o aluno à exploração dos valores de funções quando x tende para c, recorrendo a tabelas de valores e ao cálculo da imagem de c, se possível.
Recomenda-se a realização desta tarefa em trabalho colaborativo, promovendo a discussão entre os alunos, incentivando a justificação das respostas com base em

representações gráficas. A comparação entre diferentes situações deve ser valorizada, de modo a facilitar a compreensão do conceito de continuidade. Progressivamente, os alunos devem ser orientados da abordagem intuitiva para uma formalização do conceito de continuidade. Se necessário, o professor poderá recordar o cálculo de limites simples, quer a partir de gráficos, quer através de procedimentos analíticos.

Tarefa 2

Continuidade em intervalos

1. Considera as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = \frac{2x^2+x}{x-1} \quad \text{e} \quad h(x) = log_3 x$$

   1.1. Representa graficamente cada uma das funções, recorrendo a tecnologia gráfica.

   1.2. Atendendo à questão anterior, será que alguma das funções é contínua em $\mathbb{R}$?

   1.3. Dá exemplos de intervalos onde as funções são contínuas.

   1.4. Determina o domínio de cada uma das funções.

   1.5. Quais as funções que são contínuas no seu domínio?

2. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2 \ se \ x \geq 0 \\ x^2 + x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

   2.1. Verifica se f é contínua em $x = 0$.

   2.2. O que podes afirmar sobre a continuidade de f em $\mathbb{R}^+$? E em $\mathbb{R}^-$? E no seu domínio? Justifica convenientemente.

3. Considera as funções f e g, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2\pi}{x} \ se \ x \geq \pi \\ sen \ x \ \ se \ x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{\frac{1}{x}+x}$$

   Estuda a continuidade:

   3.1. de cada uma delas no seu domínio;

   3.2. de g em $[-1, 3]$;

   3.3. de f em $[\pi, 2\pi]$.

4. Sejam f e g, funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 1 - x$$

   4.1. Caracteriza as funções $f + g$, $\frac{f}{g}$ e $f \circ g$.

4.2. O que podes concluir sobre a continuidade de cada uma destas funções resultantes de operações entre f e g?

- Todas as funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são contínuas no seu domínio.
- Toda a função resultante de operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) de funções contínuas é contínua no seu domínio.
- A composição de duas funções contínuas é uma função contínua no seu domínio.

Tarefa 2

Continuidade em intervalos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa apresenta um conjunto de funções que deverão ser analisadas e representadas graficamente. A partir dessa análise, pretende-se que os alunos discutam e compreendam o conceito de continuidade de uma função em diferentes intervalos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer as diferentes famílias de funções estudadas no Ensino Secundário. Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio.

Materiais e recursos: Material de escrita e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
No primeiro item, os alunos constroem o gráfico de cada uma das funções propostas. Nessa atividade relembram o estudo de diferentes tipos de funções: uma função polinomial, uma função racional (identificando a assíntota vertical do gráfico da função) e uma função logarítmica. Ao analisar estas representações, os alunos contactam com exemplos de funções contínuas nos respetivos domínios.
No segundo item, os alunos são confrontados com uma função que não é contínua em todo o seu domínio, embora o seja em determinados intervalos de números reais. A análise desta justificação permite-lhes identificar pontos de descontinuidade. A justificação pode ser feita com base na representação gráfica ou recorrendo ao conhecimento sobre os diferentes tipos de funções envolvidas.
Os restantes itens têm como objetivo levar os alunos a consolidarem o conhecimento sobre famílias de funções contínuas. Para tal, são convidados a justificar a continuidade em diferentes intervalos, usando a soma, o produto, o quociente e a composição de funções contínuas.

Tarefa 3

Regra de L'Hôpital

1. Considera as funções reais de variável real definidas analiticamente por

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x,\ g(x) = x^2 - 1 \text{ e } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.1. Determina o domínio da função h.

1.2. Representa graficamente a função h, usando tecnologia gráfica.

1.3. Completa a tabela seguinte, recorrendo à calculadora:

x	$h(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-1}$
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	
$0,9999$	
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	
$1,0001$	

1.4. Com base no gráfico e na tabela anterior, descreve o que parece acontecer aos valores de h quando x se aproxima de 1.

1.5. Os valores obtidos aproximam-se de um mesmo número quando x se aproxima de 1 por valores superiores e por valores inferiores? Justifica.

1.6. Calcula, se possível, os valores de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ para $x = 1$.
Estes resultados eram expectáveis com o que sabemos sobre o valor do limite de $h(x)$ quando x se aproxima de 1?

1.7. Fatoriza o numerador da expressão de $h(x)$.

1.8. Fatoriza o denominador da expressão de $h(x)$.

1.9. Simplifica a expressão de $h(x)$, não esquecendo o domínio dessa simplificação.

1.10. Utiliza a expressão simplificada, obtida na alínea anterior, para determinar o valor de $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

1.11. Calcula, se possível, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e compara com $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

2. Considera a função i, definida por $i(x) = \frac{x^2 - x}{e^x - e}$.

2.1. Utiliza um procedimento idêntico ao realizado para a função h e apresentado nos itens 1.1. até 1.5., para conjeturar sobre o valor de $\lim_{x \to 1} i(x)$.

2.2. Considera $j(x) = x^2 - x$ e $k(x) = e^x - e$.
Calcula $j(1)$ e $k(1)$. Estes valores permitem determinar $\lim_{x \to 1} i(x)$? Justifica.

2.3. Analisa a possibilidade de fatorizar cada um dos termos da fração que define $i(x)$ e simplificá-la.

2.4. Calcula, se possível, $\lim_{x \to 1} \frac{j'(x)}{k'(x)}$ e compara com a conjetura que fizeste em 2.1..

3. Considera a função f, definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

3.1. Representa-a graficamente, usando tecnologia gráfica, e observa o seu comportamento quando x assume valores muito grandes e cada vez maiores. Com base na observação, conjetura o valor de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3.2. O que acontece ao numerador e ao denominador de $f(x)$ quando $x \to +\infty$, ou seja, qual o $\lim_{x \to +\infty} (2x + 1)$ e o $\lim_{x \to +\infty} (x - 3)$?

3.3. Considera as funções $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = x - 3$. Calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ e compara com a conjetura que fizeste na questão 3.1.

Tendo em conta o desenvolvimento da tarefa, quando no cálculo do limite, ocorre uma situação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, podemos conjeturar que:

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ _____, com $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$

Tarefa 3

Regra de L'Hôpital

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, os alunos vão ser confrontados com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ e através de vários processos - como a análise gráfica, o cálculo de valores e a fatorização dos termos de uma fração - vão ser conduzidos para a determinação do limite da função. Também vão ser orientados para a aprendizagem da regra de L'Hôpital como um processo para o cálculo desses limites.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções racionais. Noção intuitiva de limite de uma função quando x tende para um número ou para $\pm\ \infty$. Derivadas.

Materiais e recursos: Material de escrita e calculadora gráfica.

Notas para o professor:

Os alunos vão-se confrontar, pela primeira vez, com situações de indeterminação. Os itens propostos são organizados de forma que os alunos se apercebam que, recorrendo a diferentes procedimentos algébricos, conseguem ultrapassar essas indeterminações e calcular os limites das respectivas funções.

Um dos procedimentos propostos orienta-os no sentido da descoberta da regra de L'Hôpital para o cálculo do limites de funções.

Paralelamente, as operações com limites (adição, subtração, multiplicação e divisão) devem emergir naturalmente, quer nas discussões coletivas em sala de aula, quer no trabalho autónomo dos alunos.

Neste tipo de trabalho com limites de funções, podem surgir situações de indeterminação, como por exemplo $0 \times \infty$ ou $\infty - \infty$, que devem ser analisadas e discutidas de forma análoga às exploradas nesta tarefa. É importante que os alunos compreendam que uma indeterminação não corresponde a um resultado único e imediato, mas sim a uma situação que pode originar diferentes resultados, dependendo da função em estudo.

Tarefa 4

Limites notáveis e Regra de L'Hôpital

O Marquês de L'Hôpital (1661-1704) escreveu o primeiro livro de texto sobre Cálculo Diferencial. Esta obra teve muitas edições e desempenhou um papel significativo na popularização do tema. Muito do conteúdo do livro, incluindo o que hoje se chama "Regra de L'Hôpital", foi baseado no trabalho de Johann Bernoulli com quem L'Hôpital teve aulas particulares remuneradas.

A regra seguinte é conhecida por Regra de L'Hôpital e permite levantar a maior parte das indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Sejam f e g duas funções deriváveis num intervalo aberto I, com $g'(x)\neq 0$, para todo o $x \in I$.

Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ e que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p$.

Considera-se que poderá ser $p \in \mathbb{R}$ ou $p = +\infty$ ou $p = -\infty$.

Nestas condições podemos concluir que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p$$

É de notar que esta regra é válida com $a \in R$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

1. Na tabela seguinte, podes encontrar alguns limites importantes, denominados limites notáveis. Utilizando a Regra de L'Hôpital, determina o valor de cada um deles.

Limite da função	**Tipo de indeterminação**	**Determinar o valor do limite aplicando a Regra de L'Hôpital**	**Conclusão**
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = __$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$
$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x}$	$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = __$	$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} =$	$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} =$
$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$	$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = __$	$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} =$	$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} =$

A Regra de L'Hôpital é também válida para levantar indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, ou seja, é válida quando se está em presença de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm \infty$.

2. Utilizando a Regra de L'Hôpital, determina o valor do limite notável seguinte, com $a > 1 \wedge p \in \mathbb{N}$.

Limite da função	**Tipo de indeterminação**	**Determinar o valor do limite aplicando a Regra de L'Hôpital**	**Conclusão**
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} =$

3. Considera a função $f(x) = \frac{(1,2)^x}{x^4}$.

3.1. Completa a tabela seguinte (recorre à calculadora):

x	$(1,2)^x$	x^4	$f(x) = \frac{(1,2)^x}{x^4}$
5			
10			
20			
100			
200			

3.2. Com base nos valores obtidos, conjetura o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1,2)^x}{x^4}$

3.3. Representa graficamente a função $f(x) = \frac{(1,2)^x}{x^4}$, usando tecnologia gráfica.

Descreve o comportamento do gráfico quando x assume valores muito grandes e cada vez maiores.

3.4. Confirma ou ajusta a conjetura formulada na questão 3.2.

3.5. Justifica que, quando $x \to +\infty$, o quociente $\frac{(1,2)^x}{x^4}$ conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

3.6. Determina o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1,2)^x}{x^4}$, aplicando a Regra de L'Hôpital, tantas vezes quantas necessárias.

3.7. Quantas vezes aplicaste a Regra de L'Hôpital? Justifica.

3.8. Com base no que observaste, conjetura:

se $a > 1$ e $p \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} =$ _____

4. Determina o valor de cada um dos seguintes limites:

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}$

4.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{1-x^2}$

4.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3-3e^x}{2x}$

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{sin\, x}$

4.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{e^x}$

4.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$

4.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+ln\, x}{x^2}$

5. Considera a função f, definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

5.1. Utilizando o GeoGebra ou as potencialidades gráficas da calculadora, conjetura um valor para $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5.2. Utilizando a Regra de L'Hôpital, determina, se possível, o valor deste limite. O que podes concluir? Poderás determinar, analiticamente, o valor deste limite?

6. Considera a função f, definida por $f(x) = \frac{x + cos(x)}{x}$.

   6.1. Utilizando o GeoGebra ou as potencialidades gráficas da calculadora, conjetura um valor para $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   6.2. Utilizando a Regra de L'Hôpital, determina, se possível, o valor deste limite. O que podes concluir? Poderás determinar, analiticamente, o valor deste limite?

Tarefa 4

Limites notáveis e Regra de L' Hôpital

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa visa consolidar o estudo e levantamento de indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ analiticamente, usando a Regra de L'Hôpital, e utilizando a calculadora gráfica ou o Geogebra. Os alunos deverão ser capazes de calcular limites notáveis (exponenciais, logaritmos e trigonométricos) e compreender a hierarquia de crescimento das funções quando $x \to + \infty$.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regras de derivação de funções (exponencial, logarítmica, polinomial e trigonométrica), identificação de indeterminações, noção intuitiva de limite e as condições de aplicação da Regra de L'Hôpital.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica e GeoGebra.

Notas para o professor:

No estudo dos limites notáveis, o professor deve incentivar os alunos a representarem graficamente as duas funções que compõem a função quociente. Em seguida, deve orientá-los a ajustarem a janela de visualização, de modo a conseguirem observar claramente a relação pretendida entre as funções.
Durante a discussão coletiva, o professor deve apresentar exemplos de situações em que a regra de L'Hôpital pode ser aplicada sucessivamente até que a indeterminação deixe de existir. Deverá também explorar exemplos em que a sua aplicação não conduz à eliminação da indeterminação, ajudando os alunos a compreender as suas limitações. Importa ainda salientar que estes casos são pouco frequentes no estudo de funções.

Tarefa 5

Assíntotas verticais e horizontais

1. Considera as seguintes funções:

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad g(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ $\quad m(x) = \frac{x^2-2x+1}{1-x^2}$ $\quad n(x) = e^x - 3$

1.1. Representa-as graficamente, usando tecnologia gráfica.

1.2. Estuda os seus comportamentos em $+\infty$ e em $-\infty$, determinando os respetivos limites quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$.

1.3. Três dessas funções têm assíntotas horizontais aos seus gráficos. Escreve as equações dessas assíntotas.

1.4. Nem todas as funções têm assíntotas horizontais aos seus gráficos. Relaciona os resultados que obtiveste no cálculo dos limites no item 1.2. com a existência de assíntotas horizontais aos gráficos das funções.

A reta de equação $y = b$, $b \in R$, é uma assíntota horizontal do gráfico de f se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

2. Considera as seguintes funções:

$g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ $\quad h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad p(x) = log\,(x+1)$ $\quad m(x) = \frac{x^2-2x+1}{1-x^2}$

2.1. Representa-as graficamente, usando tecnologia.

2.2. Determina os seus domínios.

2.3. Para as quatro funções determina os limites quando x tende para 1 e quando x tende para -1. Se necessário recorre ao cálculo de limites laterais.

2.4. Três dessas funções têm assíntotas verticais aos seus gráficos. Escreve as equações dessas assíntotas.

2.5. Nem todas as funções têm assíntotas verticais aos seus gráficos? Relaciona os resultados que obtiveste nos itens 2.2. e 2.3. com a existência de assíntotas verticais aos gráficos das funções.

A reta de equação $x = a$, $a \in R$, é uma assíntota vertical do gráfico de f se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \quad \text{ou}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

3. Averigua a existência de assíntotas horizontais ou verticais ao gráfico das seguintes funções:

3.1. $f(x) = \frac{3x^2+9x}{x^2-9}$

3.2. $g(x) = 2x - 1 + ln\, x$

3.3. $h(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2$

Tarefa 5

Assíntotas verticais e horizontais

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos formalizem o conhecimento intuitivo que adquiriram sobre assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função, aquando do estudo das funções racionais no 11.º ano.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções reais de variável real (polinomiais, racionais, logarítmicas e exponenciais), domínio de uma função, cálculo de limites de uma função, incluindo limites laterais.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica ou GeoGebra.

Notas para o professor:
O professor deve promover a discussão sobre a pertinência do estudo de assíntotas verticais, tendo em conta o domínio da função. Neste contexto, os alunos devem ser capazes de justificar a existência de assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função, recorrendo ao cálculo dos limites adequados.
Para além disso, a comunicação matemática deve ser valorizada, incluindo a justificação da inexistência de assíntotas. Esta discussão é fundamental para que os alunos consigam identificar e sustentar, de forma correta e rigorosa, as suas observações e conclusões por escrito.

Tarefa 6

Assíntotas oblíquas

1. Considera as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{2x^2+5x+4}{x+2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x + 1$$

1.1. Representa-as graficamente, usando tecnologia.

1.2. Existem assíntotas ao gráfico da função f? Justifica a tua resposta.

1.3. Numa folha de cálculo cria uma tabela semelhante à que se apresenta a seguir e preenche-a:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) - g(x)$
1			
10			
100			
200			
500			
1000			
…			

1.4. Analisa os valores de $f(x) - g(x)$, quando x toma valores cada vez maiores.

1.4.1. O que acontece aos valores das imagens de x, nas duas funções, quando x toma valores cada vez maiores?

1.4.2. Faz uma conjetura sobre o valor de limite de $f(x) - g(x)$, quando x tende para $+\infty$.

1.5. Determina analiticamente $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$.

Dada uma função f, real de variável real, diz-se que a reta de equação $y = mx + b\ (m,\ b \in R)$ é uma assíntota não vertical (oblíqua ou horizontal) do gráfico de f se:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

A partir desta expressão poder-se-á encontrar um processo prático para determinar o declive e a ordenada na origem da equação de uma assíntota não vertical.
O gráfico de f admite uma assíntota de equação $y = mx + b$ se e só se existirem dois números reais m e b tais que:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

ou

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

Se $m = 0$, obtém-se uma assíntota horizontal de equação $y = b$.

2. Considera a função g, definida por:

$$g(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$$

Mostra que a reta de equação $y = 3x + 5$ é uma equação de uma assíntota oblíqua ao gráfico de g.

3. Considera uma função f, real de variável real.

Sabe-se que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x - 3) = 0$.

O que se pode afirmar quanto à existência de assíntotas não verticais ao gráfico de f?

4. Determina as equações das assíntotas (verticais e não verticais) aos gráficos das seguintes funções:

4.1. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$

4.2. $g(x) = 5x + 2^x$

4.3. $h(x) = 3x - 4 + \ln x$

4.4. $i(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$

4.5. $j(x) = \frac{e^x}{x+1}$

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.

   Sabe-se que:

   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1$
   - o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua

   Qual é o declive dessa assíntota?

   (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2

   Exame 2016, 1.ª Fase

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

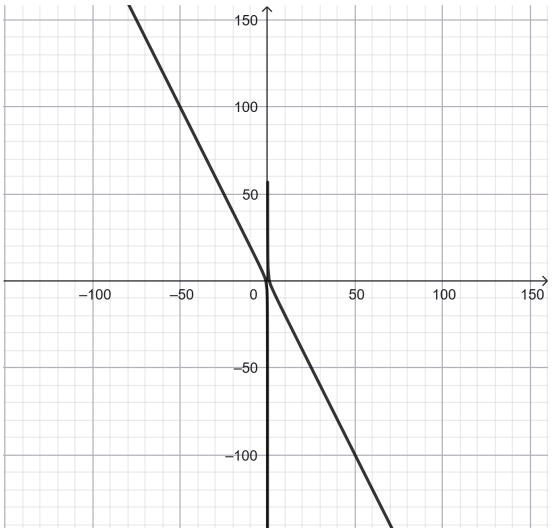
   A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico de f.

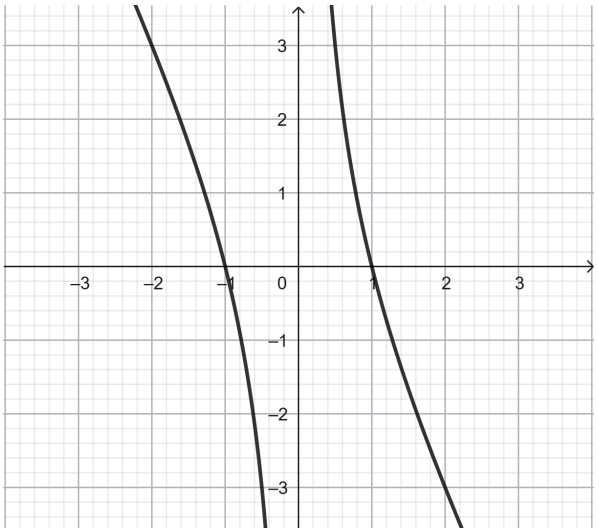
   Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{f(x)}$?

   (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) $+\infty$

   Exame 2014, Ép. Especial

7. Os dois gráficos que se seguem dizem respeito à mesma função em janelas de visualização diferentes. Qual será a expressão analítica desta função?





   Sugestão: Para responderes à questão, percorre as seguintes etapas:

   a) Observa e regista os aspetos que te parecem mais significativos em cada um dos gráficos.

b) Escreve uma equação para a reta que parece estar representada no gráfico da esquerda.

c) Escreve uma expressão analítica de uma função com uma assíntota vertical $x = 0$.

d) Escreve uma expressão analítica de uma função polinomial com os zeros que observas no gráfico da direita.

e) Escreve uma expressão analítica que possa ser representada por aqueles gráficos.

f) Confirma com tecnologia gráfica se a expressão analítica da função que encontraste na alínea anterior tem aquelas representações nas duas janelas de visualização. Se não estiver bem tenta perceber porquê e corrige a expressão analítica da função.

Adaptado de Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário, 1998.
Funções: Matemática - 11º ano de escolaridade

Tarefa 6

Assíntotas oblíquas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo promover nos alunos a compreensão do conceito de assíntotas não verticais: oblíquas e horizontais. Tem, ainda, como objetivo consolidar a aprendizagem de assíntotas verticais ao gráfico de uma função.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções reais de variável real e limites de funções.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica, folha de cálculo e GeoGebra.

Notas para o professor:
Através da representação gráfica, da análise numérica e da formalização analítica, recorrendo à tecnologia, promove-se a compreensão do conceito de assíntota não vertical ao gráfico de uma função. Em pequenos grupos, seguidos de momentos de discussão coletiva, os alunos são incentivados a formular conjeturas e, posteriormente, a formalizar as condições em que uma reta pode ser assíntota ao gráfico de uma função.
Com o desenvolvimento desta tarefa, pretende-se ainda que os alunos consigam determinar analiticamente as equações das assíntotas, explorando as expressões que permitem calcular o declive e a ordenada na origem.
Deve valorizar-se a comparação entre abordagens gráficas, numéricas e analíticas, bem como a interpretação crítica dos gráficos em diferentes janelas de visualização.
É igualmente importante apoiar os alunos na transição da observação empírica para a formalização matemática do conceito de assíntota, reforçando a ligação entre limites e comportamento das funções relativamente às assíntotas.
No trabalho proposto nesta tarefa, é natural que os alunos encontrem expressões que conduzam à indeterminação da forma $\infty - \infty$. Nestas situações, o professor deve informar que se trata de uma indeterminação e pode, através de exemplos, justificar tal afirmação. Deve, contudo, orientar a resolução algébrica (como, por

exemplo, simplificando as expressões ou reduzindo ao mesmo denominador) de modo a obter indeterminações em que se use a regra de L'Hôpital.
Na sequência da definição de assíntotas oblíquas, deve salientar-se que o facto do cálculo do declive resultar em zero, não implica, necessariamente, a existência de uma assíntota horizontal. Do mesmo modo, a obtenção de um limite finito no cálculo do declive não garante necessariamente a existência de uma assíntota oblíqua.

Tarefa 7

Estudo de funções

1. Seja f a função definida por $f(x) = ln(x + 2) + x$.

   Estuda a função tendo em vista a sua representação gráfica.

   No teu estudo deves:

   - determinar o domínio;
   - analisar o comportamento da função nos extremos do domínio;
   - determinar os intervalos de monotonia e os extremos;
   - estudar a concavidade;
   - determinar o número de zeros da função, justificando;
   - indicar todas as assíntotas;
   - esboçar o gráfico.

2. Considera a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - 3x & se \quad x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 2 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

   2.1. Estuda a continuidade em $x = 0$.

   2.2. Estuda a monotonia da função para $x \leq 0$.

   2.3. Determina a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = e - 1$.

3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{-x}} & se \quad x \leq 0 \\ \ln(x+1) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

   Estuda a função, tendo em vista a sua representação gráfica.

   No teu estudo deves:

   - analisar a continuidade;
   - estudar a monotonia e a existência de eventuais extremos, para $x < 0$;
   - estudar a concavidade e a existência de pontos de inflexão, para $x > 0$;
   - determinar assíntotas, caso existam;
   - fazer a representação gráfica da função.

4. Seja f uma função contínua no seu domínio, cuja tabela de variação é a seguinte:

x	-2		0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$n.d.$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$n.d.$		2		-1	

Sabe-se ainda que $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4.1. Qual é o domínio da função?

4.2. O que podes dizer acerca da existência de assíntotas ao gráfico da função, paralelas aos eixos coordenados? Justifica.

4.3. Quais são os extremos relativos e classifica-os?

4.4. Qual o contradomínio da função?

4.5. Esboça uma possível representação gráfica da função.

5. Seja g uma função duas vezes diferenciável em R, cuja segunda derivada tem o seguinte quadro de sinais:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Sabe-se ainda que:

- $g(-1) = 0$;
- $g(2) = 3$;
- $g'(-1) \neq 0$.

5.1. Estuda a função quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico.

5.2. Determina os pontos de inflexão, justificando.

5.3. Poderá existir um extremo relativo no ponto de abcissa $x = -1$? Justifica.

5.4. Esboça uma possível representação gráfica da função g que seja compatível com a informação dada.

6. Considera a função $f(x) = 2ln(x^2 + x) - 3x$.

   6.1. Determina o domínio de f;

   6.2. Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico da função f interseta os eixos coordenados?

   6.3. Utilizando processos analíticos responde às questões que se seguem:

      6.3.1. Estuda a função quanto à monotonia e à existência de extremos;

      6.3.2. Estuda a função quanto à concavidade e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

7. Considera as funções definidas algebricamente por

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-4)}{4x^2-4} \text{ e } g(x) = \frac{x}{1-logx}$$

   7.1. Representa graficamente cada uma das funções, usando tecnologia. Através da observação gráfica o que podes dizer quanto à existência de assíntotas?

   7.2. Verifica a tua resposta ao item anterior, determinando, analiticamente, as equações das assíntotas.

Tarefa 7

Estudo de funções

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo consolidar, nos alunos, uma visão global do estudo de funções reais de variável real, integrando diferentes conceitos, como o domínio, a continuidade, a monotonia, os extremos, a concavidade, os pontos de inflexão, as derivadas e a representação gráfica.
Pretende-se que os alunos compreendam de que forma as diferentes características de uma função se articulam entre si, contribuindo para a análise completa do comportamento de uma função, tirando conclusões fundamentadas sobre o respetivo gráfico.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções reais de variável real; domínio e contradomínio; continuidade; derivadas; relação da monotonia com o sinal da derivada; extremos relativos; concavidade e pontos de inflexão; assíntotas verticais, horizontais e oblíquas.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica ou GeoGebra.

Notas para o professor:
Durante o trabalho dos alunos o professor deve promover um compromisso entre a observação da representação gráfica das funções e a identificação das características que se podem inferir dos diferentes procedimentos algébricos.
As restrições no domínio de funções, ou a necessidade de considerar apenas intervalos de números reais, nomeadamente em funções logarítmicas, deve ser também objeto de análise com a representação gráfica das funções em estudo.
Devem ainda ser analisadas situações em que a observação de representações podem induzir a erros, como por exemplo, a perceção da existência de assíntotas oblíquas em gráficos de funções logarítmicas. Nestas situações o recurso a procedimentos algébricos assume especial relevância, quer para sustentar conclusões sólidas, quer como um instrumento de comunicação matemática eficaz.

Coleção de problemas

Continuidade e assíntotas

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+1} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora

1.1. Averigue se f é contínua em $x = 0$.

1.2. Mostre que a reta $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Exame 2025, 2.ª Fase

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida para um certo $a \in \mathbb{R}^+$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(ax)}{e^x - 1} & se \quad x < 0 \\ \ln(2 - e^{-x}) + x + 2 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora

2.1. Determine o valor de a para o qual existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2.2. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

Determine uma equação dessa assíntota.

Exame 2023, Época Especial

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-cosx}{x} & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Averigue se f é contínua no ponto de abcissa 0.

Justifique a sua resposta.

Exame 2019, 1.ª Fase

4. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{x+k} & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2x + \ln(x+1)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Qual o valor de k?

(A) 0 (B) 1 (C) $ln\ 2$ (D) $ln\ 3$

Exame 2015, 2.ª Fase

5. Sejam f e g funções contínuas de domínios R e $]0, +\infty[$, respetivamente, e seja r a reta de equação $y = 2x - 1$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$
- nos respetivos domínios, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- as duas funções admitem segunda derivada finita no seu domínio.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$

II. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$

III. $f''(x) < g''(x)$, qualquer que seja $x \in]0, +\infty[$

Justifique que as proposições I, II e III são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Exame – 2023, 1.ª Fase (adaptado)

6. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por:

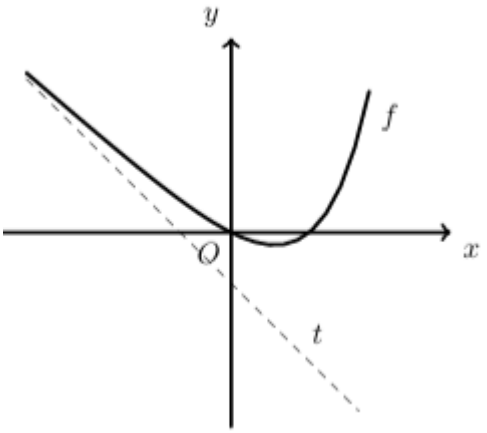
$$f(x) = \frac{ln\ x + 2x}{x}$$

O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal. Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

Exame 2023, 2.ª Fase

7. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.

A reta t, de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$. Qual é o valor do $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x + 1)$?



(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Exame 2008, 1.ª Fase

8. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g.

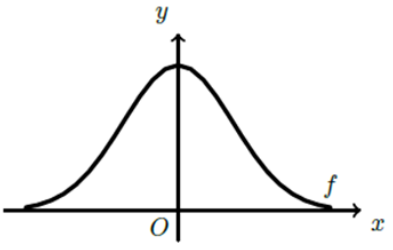
Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) -1 (D) $-\infty$

Exame 2017, 1.ª Fase

9. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função f positiva e cuja curva do gráfico é simétrica em relação ao eixo das ordenadas, da qual a reta de equação $y = 0$ é assíntota.

Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)}$?

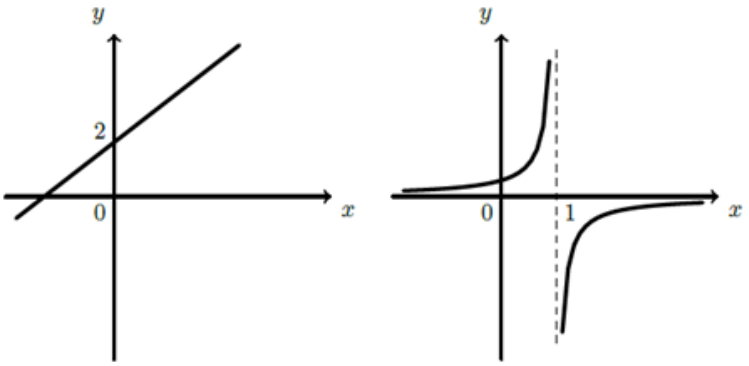


Exame 2004, 1.ª Fase

10. De duas funções, f e g, sabe-se que:

- o gráfico de f é uma reta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras ao lado estão representadas parte dessa reta e parte dessa hipérbole.



A reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de g.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$?

(A) 0 (B) 2 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Exame - 2006, 2.ª Fase

11. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a reta de equação $y = -4$, assíntota do gráfico de h.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 4 (D) 0

Exame 2010, Época Especial

12. Qual o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{log_2 x}{e^x - 1}$?

(A) 0 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

Exame 2003, 1.ª fase - 2.ªchamada

13. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas .

Exame – 2009, 1.ª Fase

14. Na figura ao lado está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $[0, +\infty[$.

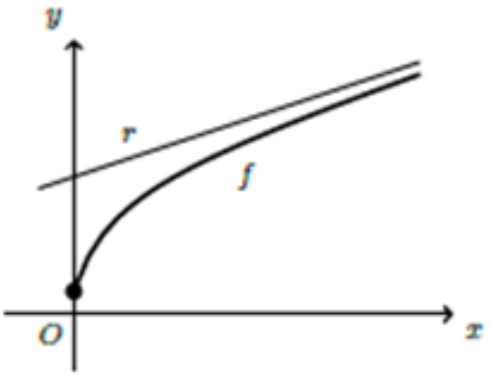
A reta r, de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ é assíntota ao gráfico de f.

Seja h a função definida em $[0, +\infty[$ por

$$h(x) = \frac{x}{f(x)}$$

O gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

Qual das equações seguintes define essa assíntota?



(A) $y = \frac{1}{3}$ (B) $y = \frac{1}{2}$ (C) $y = 2$ (D) $y = 3$

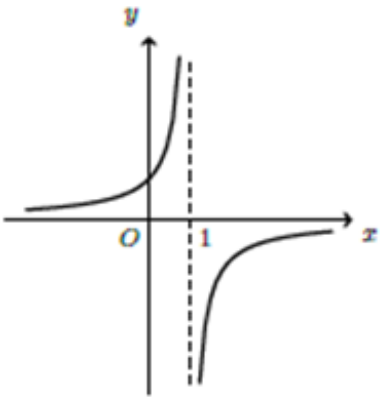
Teste Intermédio 12.º ano, 29.04.2008

15. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função g, real de variável real.

Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função g.

Seja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$.

O valor do $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:



(A) $-\infty$ (B) $+\infty$

(C) 0 (D) 1

Exame 2007, 2.º fase.

16. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + ln(e^x + 1)$.

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Determine uma equação dessa assíntota.

Exame – 2020, 1.ª Fase

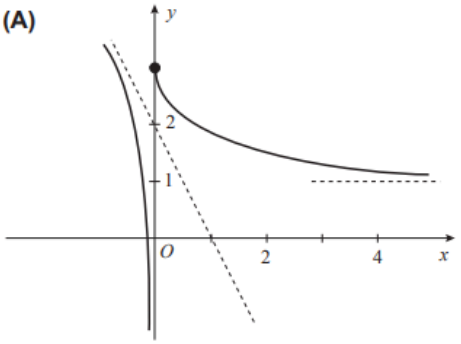
17. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

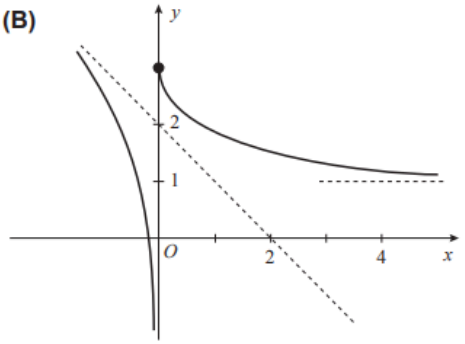
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = 2$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico de f?

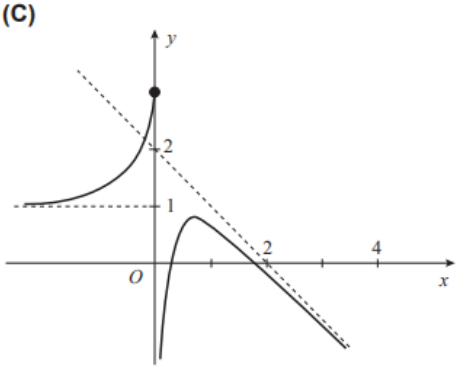
(A)



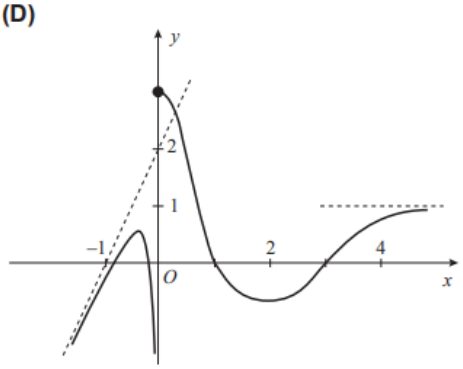
(B)



(C)



(D)



Nota: Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, as assíntotas desse gráfico.

Exame 2013, Época Especial.

Coleção de problemas

Continuidade e assíntotas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema "Funções".

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.