MATRIZES
(Tema opcional)

Matemática A

12.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2025/2026

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Matrizes (Matemática A 12.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, junho de 2026

Nota de apresentação

O Instituto de Educação, Qualidade e Avaliação I.P, (EduQA), enquanto organismo que sucede à Direção-Geral da Educação (DGE), dá continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido por esta entidade, prosseguindo a conceção e implementação de diversas iniciativas destinadas a apoiar a generalização das Aprendizagens Essenciais de Matemática para os 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, incluindo as disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e os módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a

antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe e Carla Damásio (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE desenvolveu um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o

seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional.

O EduQA e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - MATRIZES

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Conceito de matriz	**Matrizes** **Conceito de matriz**	• Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas. • Entender o conceito de matriz e conhecer alguns casos particulares, nomeadamente matriz retangular, matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna, matriz diagonal e matriz identidade.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)
2	Tarefa 2 Operações com matrizes - I	**Matrizes** **Operações com matrizes**	• Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 3 Operações com matrizes - II	**Matrizes** **Operações com matrizes**	• Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 4 Operações com matrizes - III	**Matrizes** **Operações com matrizes**	• Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
2	Tarefa 5 Soma de matrizes coluna	**Matrizes** **Aplicações às transformações geométricas**	• Caraterizar translações através da soma de matrizes coluna.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação Matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

2	Tarefa 6 Ampliações e deformações	**Matrizes** **Aplicações às transformações geométricas**	• Caraterizar variações de tamanho (scaling) e cisalhamentos (shearing) recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna.	Trabalho a pares, com discussão final com a turma	• Comunicação Matemática • Tarefas e recursos educativos	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Tarefa 7 Matrizes de rotação	**Matrizes** **Aplicações às transformações geométricas**	• Caraterizar rotações no plano, recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna.	Trabalho em grupo, com discussão final com a turma	• Organização do trabalho dos alunos • Recurso sistemático à tecnologia	• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)
2	Coleção de problemas Matrizes	**Matrizes** **Conceito de matriz** **Operações com matrizes** **Aplicações às transformações geométricas**	• Resolver problemas, envolvendo o estudo de operações com matrizes e transformações geométricas.	Trabalho em grupo	• Resolução de Problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática • Avaliação para a aprendizagem	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Tarefa 1

Conceito de matriz

1. Num certo país, uma empresa ferroviária apresentou uma tabela com os tempos médios de viagem, em minutos, entre três cidades (A, B e C) na sua principal linha.

De / Para	Cidade A	Cidade B	Cidade C
Cidade A	0	45	90
Cidade B	45	0	50
Cidade C	90	50	0

Se removeres os títulos obténs um quadro constituído apenas por números, que vamos chamar Matriz, T.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 45 & 90 \\ 45 & 0 & 50 \\ 90 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Repara que, neste quadro, os números surgem organizados em três linhas e três colunas, diz-se por isso, que é uma matriz quadrada de dimensão (ou do tipo) 3×3 .

1.1. Qual é o significado dos números que surgem na linha 1?

1.2. Qual é o significado dos números que surgem na coluna 1?

1.3. Qual é o significado do número que surge na linha 3 e coluna 2? Para referir a posição deste número escrevemos $t_{3,2}$.

1.4. Qual é o valor do elemento $t_{2,1}$ e explica o seu significado no contexto apresentado.

2. Uma padaria vende pão, bolos e doces, e quer registar o número de unidades vendidas de cada produto, durante quatro dias da semana (segunda, terça, quarta e quinta).

Produto	segunda	terça	quarta	quinta
Pães	150	120	140	140
Bolos	30	25	35	15
Doces	60	50	70	85

2.1. Escreve uma matriz A que represente as quantidades vendidas de cada produto nestes quatro dias.

2.2. Quantas linhas e quantas colunas tem esta matriz? Faz sentido dizer que esta matriz é uma matriz quadrada?

2.3. Qual é a dimensão desta matriz?

2.4. Apresenta os valores dos elementos a_{11}, a_{23} e a_{34} e o respetivo significado no contexto apresentado.

2.5. Escreve a *matriz linha* que corresponde ao número de pães vendidos nos quatro dias referidos. Qual é a dimensão desta matriz?

2.6. Escreve a matriz que corresponde às quantidades vendidas de cada produto na quarta-feira? Qual é a sua dimensão? Que nome darias a este tipo de matriz?

3. Na matriz B, apresentada a seguir, estão registados, em milhões, o número de aeronaves que aterraram nos Aeródromos e Aeroportos portugueses, nos anos 2023, 2024 e 2025, durante os meses de maio, junho, julho e agosto.

$$B = \begin{bmatrix} 21{,}7 & 22{,}8 & 24{,}8 & 25{,}1 \\ 22{,}3 & 23{,}3 & 25{,}0 & 25{,}1 \\ 23{,}5 & 24{,}5 & 26{,}2 & 26{,}3 \end{bmatrix}$$

As colunas e as linhas estão organizadas por ordem cronológica.

3.1. Escreve a matriz linha que corresponde aos números de aeronaves que aterraram em Portugal em 2024 nos meses de julho e agosto.

3.2. Escreve a matriz coluna que corresponde aos números de aeronaves que aterraram em Portugal em 2024 e 2025, no mês de agosto.

3.3. A matriz seguinte refere-se ao número de aeronaves que aterraram, durante os meses de junho, julho e agosto de 2025, nas três pistas, pista 1, pista 2 e pista 3, de um determinado aeródromo. As colunas correspondem aos meses apresentados por ordem cronológica.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Durante estes meses, foram realizadas obras de melhoramento no aeródromo, ficando algumas pistas inoperacionais, durante algum tempo.

3.3.1. Quais as pistas que estiveram em obras durante o mês de agosto?

3.3.2. Durante estes três meses, quando é que a pista 1 esteve operacional? Quantas aeronaves aterraram no aeródromo quando a pista 1 esteve operacional?

3.3.3. Se os responsáveis pelas obras tivessem optado por encerrar as pistas por ordem inversa, que matriz obteriam?

4. As matrizes podem ser classificadas como: matriz quadrada; matriz retangular, matriz coluna e matriz linha.

Considera as seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.1. Agrupa as matrizes segundo a sua classificação.

Nota que há matrizes que cabem em mais do que uma "classe".

4.2. As matrizes quadradas podem ainda ser agrupadas em: matriz triangular superior; matriz triangular inferior e matriz diagonal.

Indica as matrizes:

4.2.1. triangular superior;

4.2.2. diagonal;

4.2.3. triangular inferior.

4.3. Qual é o valor dos elementos a_{ij}, com $i \neq j$, numa matriz diagonal.

5. Na designação das matrizes é usual acrescentar em índice a sua dimensão.

Por exemplo, uma matriz A, com 3 linhas por 2 colunas, é usualmente designada por $A_{3\times2}$.

O que podes dizer sobre os valores de n e m quando:

5.1. $B_{n\times m}$ é uma matriz retangular;

5.2. $B_{n\times m}$ é uma matriz quadrada;

5.3. $B_{n\times m}$ é uma matriz coluna;

5.4. $B_{n\times m}$ é uma matriz linha.

Tarefa 1

Conceito de matriz

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos trabalhem o conceito de matriz a partir de situações contextualizadas do quotidiano, permitindo que os alunos compreendam a organização de dados em linhas e colunas, identifiquem os elementos de uma matriz e interpretem o seu significado em diferentes contextos. Pretende-se, ainda, que os alunos reconheçam a dimensão de uma matriz, bem como os diferentes tipos de matrizes.

Conhecimentos prévios dos alunos: Interpretação de dados em contextos reais;

Materiais e recursos: Enunciado da tarefa.

Notas para o professor:
É importante que se discuta a pergunta 4.2 com os alunos, de forma a garantir a compreensão dos conceitos envolvidos. Deve reforçar-se que, numa matriz diagonal, todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Do mesmo modo, é importante consolidar a ideia de que, numa matriz triangular superior, todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, e numa matriz diagonal inferior, todos os elementos acima da diagonal principal, são nulos.
Durante a discussão, o professor deve chamar a atenção dos alunos para possíveis erros frequentes, tais como: trocar a ordem dos índices (linha e coluna) ou a confusão entre dimensão da matriz com o número total de elementos. É importante clarificar que a dimensão se refere ao número de linhas e de colunas, e não à quantidade total de elementos da matriz.

Tarefa 2

Operações com matrizes - I

1. Numa loja de roupa, são vendidas camisolas de algodão, disponíveis em três cores e em quatro tamanhos diferentes. No início do mês de janeiro, fez um inventário para determinar o número de camisolas que tinha em armazém, tendo apurado os valores apresentados na tabela seguinte:

	Tamanhos			
Cores	**S**	**M**	**L**	**XL**
Preto	15	22	28	15
Azul	12	20	35	23
Vermelho	24	32	16	10

1.1. Escreve uma matriz A que represente as quantidades de camisolas que existiam em armazém no início de janeiro.

1.2. Nos meses de janeiro e de fevereiro venderam-se bastantes camisolas que foram registadas nas tabelas seguintes.
Escreve as matrizes J e F que representam as camisolas vendidas em cada um desses meses.

Janeiro	**Tamanhos**			
Cores	**S**	**M**	**L**	**XL**
Preto	2	12	10	5
Azul	5	7	15	8
Vermelho	10	11	10	5

Fevereiro	**Tamanhos**			
Cores	**S**	**M**	**L**	**XL**
Preto	10	10	16	8
Azul	6	10	12	8
Vermelho	12	14	6	4

1.3. Quantas camisolas pretas de tamanho S foram vendidas nos dois meses? E vermelhas de tamanho L?

1.4. Determina a matriz J + F, que representa o número de camisolas vendidas nos dois meses, por tamanho e cor.

1.5. Determina a matriz que representa as camisolas que ficaram em armazém depois das vendas verificadas nestes dois meses.

1.6. O gerente desta loja quer reforçar o número de camisolas em armazém, de modo a ficar com o triplo das camisolas de cada tipo (tamanho e cor) que tinha no inventário que foi realizado no início de janeiro. Escreve uma matriz que represente esse novo inventário.

1.7. O mesmo gerente quer aumentar o número de vendas no mês de março em 50% relativamente ao mês de fevereiro. Escreve uma matriz que represente a quantidade de camisolas de cada tipo que se pretende vender.

2. A tabela seguinte apresenta as encomendas, em quilogramas, feitas por 4 frutarias, no mês de maio de 2023, num mercado abastecedor:

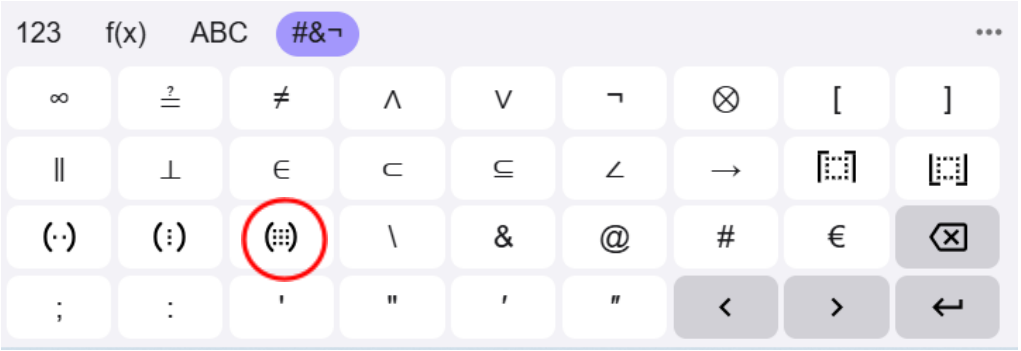
	Frutas (em Kg)		
Frutarias	**Maçã**	**Pera**	**Laranja**
Loja A	200	150	230
Loja B	230	210	280
Loja C	170	120	170
Loja D	120	80	120

2.1. No mês de junho, tendo em conta a fruta vendida nos meses anteriores, as quatro frutarias fizeram um ajustamento relativamente às encomendas do mês anterior de acordo com a tabela seguinte. Por exemplo, a loja D encomendou menos 10 kg de laranjas do que no mês anterior.

	Frutas (em Kg)		
Frutarias	**Maçã**	**Pera**	**Laranja**
Loja A	15	5	0
Loja B	40	25	50
Loja C	-30	-20	-40
Loja D	-20	0	-10

2.1.1. Abre o Geogebra e cria a matriz que representa a encomenda de maio e a matriz que representa os valores dos ajustamentos que irão ser feitos na encomenda a realizar no mês de junho.

Nota: Utiliza, no teclado virtual do Geogebra, o comando para criar matrizes, que está destacado na figura seguinte, com um círculo.



2.1.2. Determina a matriz que representa a encomenda realizada em junho.

2.1.3. Os preços da fruta aumentaram no mês de julho e por esse motivo as quatro frutarias encomendaram menos 30% do que em junho. Determina no Geogebra uma matriz que represente esses novos valores das encomendas.

2.2. A tabela seguinte apresenta as encomendas feitas pelas mesmas quatro frutarias, no mês de maio de 2024, ou seja, um ano depois.

	Frutas (em Kg)		
Frutarias	**Maçã**	**Pera**	**Laranja**
Loja A	230	170	250
Loja B	230	210	280
Loja C	140	120	150
Loja D	110	50	80

2.2.1. Escreve no Geogebra uma matriz que represente as encomendas realizadas em maio de 2024.

2.2.2. Representa no Geogebra uma matriz que registe as diferenças entre as encomendas realizadas em maio de 2024 e em maio de 2023.

2.2.3. O que significam os valores positivos e os valores negativos?

2.2.4. Qual é a frutaria que diminuiu mais a sua encomenda?

3. Será possível somar estas duas matrizes? Explica a tua resposta.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tarefa 2

Operações com matrizes - I

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo proporcionar aos alunos o estudo das operações com matrizes, nomeadamente a adição e a subtração de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar, recorrendo a contextos do quotidiano, neste caso relacionados com inventários, vendas e encomendas. Pretende-se, também, que os alunos compreendam o significado das operações matriciais e interpretem os resultados no contexto dos problemas apresentados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz, dimensão de uma matriz; matrizes quadradas e retangulares e identificação de elementos de uma matriz através da notação adequada.

Materiais e recursos: Calculadora e GeoGebra.

Notas para o professor:
No final desta tarefa, deve ficar claro para os alunos que é apenas possível adicionar ou subtrair matrizes quando estas têm a mesma dimensão. É importante que compreendam o significado desta condição, percebendo que cada elemento só pode ser adicionado ou subtraído com o elemento correspondente na mesma posição. Pretende-se, igualmente, que os alunos interpretem os resultados obtidos à luz do contexto dos dados, evitando a realização de cálculos meramente mecânicos, promovendo-se, assim, uma compreensão mais significativa das operações com matrizes.

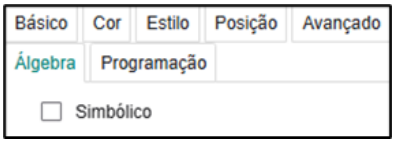
Tarefa 3

Operações com matrizes - II

1. No início do ano letivo, o Francisco comprou, numa papelaria da sua rua, algum material escolar: 6 lápis de cor, 3 esferográficas e 8 cadernos. Cada lápis de que ele gostava custou 0,80€, cada esferográfica 1,50€ e cada caderno 2,40€.

   1.1. Determina o valor gasto pelo Francisco na compra do material escolar.

   1.2. Cria no Geogebra uma matriz linha m1 que representa o material escolar e uma matriz coluna m2 que representa os preços.
   Nota: Para que a matriz seja representada no Geogebra com números decimais, desativa-se "simbólico", nas configurações, no separador Álgebra.



   1.3. Determina, no Geogebra, o produto das duas matrizes (m1 * m2) e explica como poderá ter sido obtido o resultado e o seu significado no contexto descrito.

   1.4. O Francisco foi a outra papelaria num centro comercial e os preços eram diferentes: cada lápis custava 1,20€, cada esferográfica 1,40€ e cada caderno 2,10€. Cria, no Geogebra, uma nova matriz m4 de dimensão 3×2 que represente os preços das duas papelarias.

   1.5. Determina, no Geogebra, o produto das matrizes m1 × m4.

   1.6. Obtém-se uma nova matriz m5 de dimensão 1×2. Explica como foram obtidos esses dois valores e o que significam.

   1.7. Em qual das papelarias é que o Francisco gastaria menos dinheiro?

   1.8. A Júlia, amiga do Francisco, também foi às compras e pretendia comprar 8 lápis, 5 esferográficas e 4 cadernos. Cria, no Geogebra, uma matriz m6 de dimensão 2×3 em que cada linha representa os materiais que cada um deles queria comprar.

   1.9. Determina, recorrendo ao Geogebra, o que gastaria cada um deles, em cada papelaria, utilizando o produto de matrizes.

2. Considera as seguintes matrizes:

$$A_{1\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1. Tenta determinar no Geogebra o produto $A \times B$ e explica porque não se consegue determinar o produto destas duas matrizes.

2.2. Cria uma nova matriz C, acrescentando linhas ou colunas à matriz B, de modo que seja possível determinar $A \times C$.

2.3. É possível determinar $B \times C$? E o produto $C \times B$?

2.4. Qual é a relação entre as linhas e as colunas de duas matrizes para que seja possível determinar o seu produto?

2.5. Qual é a dimensão das matrizes que se obtêm ao efetuar as seguintes multiplicações?

2.5.1. $A_{3\times2} \times B_{2\times4}$ 2.5.2. $C_{2\times5} \times D_{5\times1}$ 2.5.3. $E_{3\times3} \times F_{3\times2}$

3. Supõe que a dimensão da matriz A é $3 \times c$ e a dimensão da matriz B é $d \times 4$.

3.1. Dá um exemplo de valores que poderão tomar c e d de modo que seja possível determinar $A \times B$.

3.2. Em que condições é que conseguimos determinar $A \times B$.

3.3. Sabendo que é possível determinar $A \times B$, qual é a dimensão da matriz obtida?

3.4. É possível determinar $B \times A$? Justifica a tua resposta.

O produto de matrizes $A \times B$ só é possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

Tarefa 3

Operações com matrizes - II

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo proporcionar que os alunos trabalhem a multiplicação de matrizes recorrendo a situações contextualizadas do quotidiano, promovendo a compreensão das condições de existência do produto matricial e da interpretação dos resultados obtidos. Pretende-se, igualmente, que os alunos compreendam a relação que deve existir entre as dimensões das matrizes para que o produto das mesmas seja possível, e interpretem o significado do seu produto, em diferentes contextos. Deve ser incentivado o uso de tecnologia para efetuar cálculos e validar resultados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz; dimensão de uma matriz; matrizes linha e coluna; adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz.

Materiais e recursos: GeoGebra e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
No final desta tarefa, os alunos devem compreender claramente que o produto de matrizes não corresponde à multiplicação de elemento por elemento. É importante reforçar que esta operação segue regras próprias, diferentes das operações habituais com números.
O professor deve, ainda, promover a compreensão das dimensões das matrizes envolvidas na multiplicação, ajudando os alunos a perceber em que condições o produto é possível e qual a dimensão da matriz resultante. Para tal, pode ser útil recorrer a esquemas visuais ou representações simplificadas que tornem o processo mais intuitivo.
Durante a discussão, a condição de existência do produto de matrizes, bem como a determinação da dimensão da matriz resultante, deve ser explicitada de forma clara e rigorosa.

Embora seja possível recorrer à calculadora gráfica para efetuar cálculos com matrizes, os alunos devem ser incentivados a utilizar o GeoGebra. A familiaridade com esta ferramenta será particularmente importante, uma vez que a sua utilização se revelará determinante no estudo de transformações geométricas definidas por matrizes.

Tarefa 4

Operações com matrizes - III

1. Considera as seguintes matrizes:

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad C_{3\times1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$D_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad E_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad F_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Das operações apresentadas a seguir, identifica aquelas que não podem ser realizadas e, nos casos em que são possíveis, calcula a matriz que se obtém e a respetiva dimensão.

1.1. $A \times E$ 1.2. $E \times A$

1.3. $A \times B$ 1.4. $B \times A$

1.5. $B \times D$ 1.6. $D \times B$

1.7. $C \times D$ 1.8. $D \times C$

1.9. Considera a matriz identidade F.

Determina $D \times F$, $F \times D$ e $B \times F$.

Quais as conclusões que podes registar?

Nota: Denomina-se **matriz identidade** a toda a matriz diagonal, em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1

2. Uma loja de roupas vende camisolas de algodão disponíveis em três cores e quatro tamanhos diferentes. Para este Inverno, prevê vender uma grande quantidade de camisolas, conforme os números apresentadas na tabela seguinte:

	Tamanhos			
Cores	**S**	**M**	**L**	**XL**
Preto	8	11	13	6
Azul	7	10	18	12
Vermelho	12	16	8	5

2.1. Escreve uma matriz A que represente as quantidades de camisolas que esta loja prevê vender neste inverno.

2.2. Os vários tamanhos não têm o mesmo preço de venda ao público. As camisolas S são vendidas a 40€, as M a 45€, as L a 50€ e as XL a 55€. Escreve uma matriz B que represente os preços das camisolas por tamanho.

2.3. Escreve uma matriz que represente os valores que poderão ser obtidos na venda das camisolas, de cada cor, no caso de serem vendidas todas as camisolas e, explica o significado do primeiro elemento da primeira coluna, no contexto do problema.

2.4. O dono da loja reconsiderou estes preços e decidiu aumentá-los em 20%. Escreve uma matriz que represente os novos preços.

2.5. Escreve uma nova matriz que represente os valores que poderão ser obtidos na venda das camisolas, de cada cor, mas agora com os novos preços, no caso de serem vendidas todas as camisolas.

2.6. Na eventualidade do dono da loja optar por estes novos preços, escreve uma matriz que represente os aumentos no valor das vendas, das camisolas de cada cor, relativamente aos preços anteriores.

Tarefa 4

Operações com matrizes - III

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa é constituída por dois itens de aplicação da multiplicação de matrizes, o primeiro no contexto da matemática e o segundo uma aplicação num contexto real.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz e operações com matrizes.

Materiais e recursos: GeoGebra e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Durante a discussão final, deve ficar claro que a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa. Para tal, é importante identificar os casos em que o produto AB existe, mas o produto BA não, bem como as situações em que ambos os produtos existem, mas apresentam resultados diferentes.
Deve ainda ser clarificado o papel da matriz identidade como o elemento neutro da multiplicação de matrizes, evidenciando que, quando multiplicada por outra matriz compatível, não altera o seu valor.

Tarefa 5

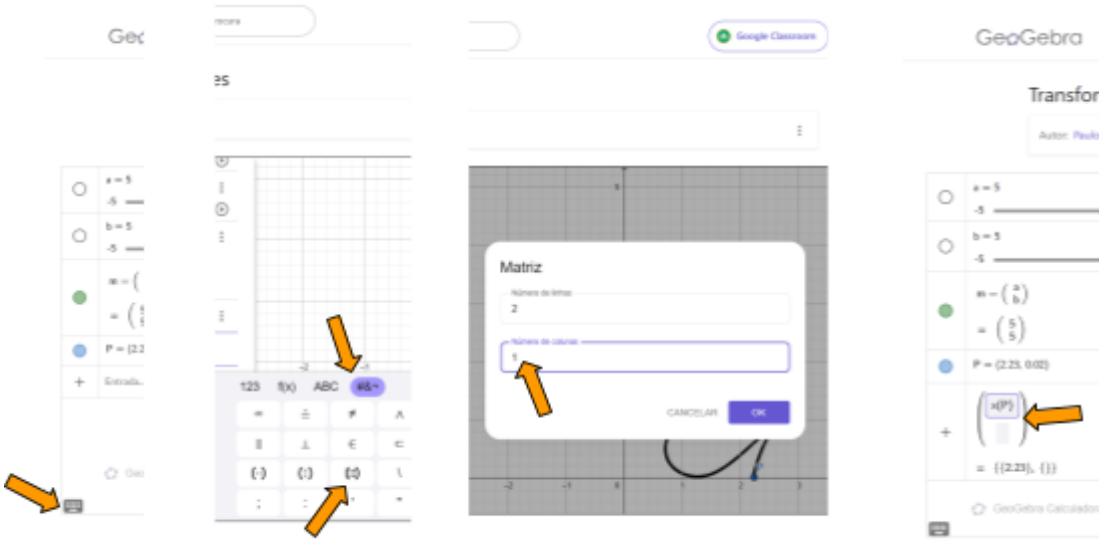
Soma de matrizes coluna

1. Acede à apliqueta que se encontra no seguinte link:

   https://www.geogebra.org/calculator/zvczavzy

1.1. Na janela de Álgebra da apliqueta está representada a matriz coluna "t" e as coordenadas do ponto P, também representado na janela gráfica.

1.2. Representa agora as coordenadas do ponto P numa matriz coluna "$m1$", usando os comandos "$x(P)$" e "$y(P)$".



1.3. Obtém a matriz soma $m1 + t$.

1.4. Define um ponto Q, cujas coordenadas são os elementos da matriz soma. Sugestão: Escrever na janela de álgebra $Q = (\, m2(1,1)\,,\, m2(2,1)\,)$.

1.5. Ativa o traço do ponto Q .

1.6. Arrasta o ponto P sobre a linha da borboleta na apliqueta.

1.7. Altera os valores da matriz t, e volta a arrastar o ponto P sobre a linha da borboleta na apliqueta.

1.8. Qual é a relação entre os pontos P e Q ?

1.9. Qual é o significado geométrico da matriz t?

1.10. A relação identificada no item 1.8. também é válida para outros pontos do espaço? Explica porquê.

2. Qual das seguintes matrizes T, permite obter a transformação do ponto $A(7,3)$ no ponto $A'(10,2)$, através da soma $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + T$?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Tarefa 5

Soma de matrizes coluna

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos estabeleçam a relação entre a adição de matrizes e a translação enquanto transformação geométrica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz, adição de matrizes e a translação enquanto transformação geométrica.

Materiais e recursos: GeoGebra.

Notas para o professor:
O recurso ao GeoGebra facilita a visualização e a compreensão da associação entre a soma de um ponto com um vetor e a soma de duas matrizes coluna, em que os elementos da segunda matriz correspondem às coordenadas do vetor translação. Através desta exploração, os alunos reconhecem que, em ambos os casos, o resultado corresponde às coordenadas do ponto transformado pela translação.
Se os alunos revelarem dificuldades na identificação da relação do item 1.8., o professor poderá sugerir o traçado do segmento de reta $[PQ]$, de modo a evidenciar a invariância associada a uma translação.

Tarefa 6

Ampliações e deformações

Parte I

Acede à apliqueta que se encontra no link seguinte:

https://www.geogebra.org/calculator/fs4amecx

Na janela de Álgebra da apliqueta são apresentadas a matriz identidade "h" e a imagem designada por "img", também representado na janela gráfica.

1. Obtém a matriz que resulta de multiplicar uma constante k pela matriz h, escrevendo na janela de Álgebra: $k \times h$.

2. Obtém o transformado da imagem associada à matriz produto ($m1$), usando o comando "AplicarMatriz(m1, img)" na caixa de entrada.

3. Altera o valor de k, manipulando o seletor e observa o efeito correspondente na imagem transformada.

4. Caracteriza a transformação geométrica associada à matriz $m1$.

5. Considera os pontos C e D de coordenadas $(2, 5)$ e $(5, 1)$, respetivamente.
   5.1. Representa o segmento de reta $[CD]$.
   5.2. Determina o comprimento do segmento de reta $[CD]$.
   5.3. Obtém o transformado do segmento de reta $[CD]$, $[C'D']$, por aplicação da matriz $m1$ e descreve a transformação geométrica observada.
   5.4. Considera $k = 3$ e escreve as coordenadas dos extremos do segmento de reta transformado e o seu comprimento.
   5.5. Calcula $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e relaciona o resultado com os extremos do segmento do segmento de reta $[C'D']$.
   5.6. Qual é a transformação geométrica associada à matriz $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, em que k é um número real?

6. Em qual das seguintes opções estão representadas as coordenadas do ponto transformado do ponto $P(-1, 5)$ pela transformação associada à matriz $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$?

(A) $(-3, 3)$ (B) $(3, -3)$ (C) $(2, -10)$ (D) $(-2, 10)$

Parte II

Acede agora à aplicação que se encontra no link seguinte:

https://www.geogebra.org/calculator/smdahn7q

Na janela de Álgebra da apliqueta são apresentados dois seletores "a" e "b", a matriz "c" que depende dos valores anteriores e a imagem designada por "img", também representado na janela gráfica.

1. Obtém o transformado da imagem associada à matriz c, usando o comando "$AplicarMatriz(c, img)$" na caixa de entrada.

2. Altera o valor de a, manipulando o seletor e observa o efeito correspondente na imagem transformada.
   A transformação geométrica é designada por cisalhamento horizontal. Descreve por palavras tuas o efeito de um cisalhamento horizontal associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, indicando os pontos que se mantêm invariantes.

3. Atribui agora o valor zero ao parâmetro "a" e faz variar o valor de "b".
   Como designas a transformação associada a uma matriz do tipo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$?

4. Considera o ponto C de coordenadas $(3, 1)$.
   4.1. Calcula as coordenadas do ponto obtido por um cisalhamento associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.
   4.2. Calcula a matriz associada a um cisalhamento que transforma o ponto C no ponto $C'(5, 10)$.

5. Considera agora a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5.1. Obtém o transformado dos pontos de coordenadas $(-5, 7)$ e $(1, 10)$ pelo cisalhamento associado à matriz anterior.

5.2. Abre o GeoGebra e representa um triângulo qualquer.

5.3. Obtém o cisalhamento do triângulo representado pela matriz considerada.

5.4. Altera a posição e a forma do triângulo por arrastamento dos vértices e descreve o efeito observado.

5.5. Estabelece uma conjetura para o efeito do cisalhamento da matriz anterior sobre qualquer ponto e prova essa conjetura.

Tarefa 6

Ampliações e deformações

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos caraterizem variações de tamanho (scaling) e cisalhamentos (shearing) no plano, recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna. Para ilustrar essas transformações geométricas realizadas sobre uma figura, recorre-se, nesta tarefa, a construções no Geogebra.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz e operações com matrizes; Homotetias.

Materiais e recursos: GeoGebra e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Os alunos podem revelar alguma dificuldade para explicar o efeito de um cisalhamento sobre uma figura. Nestes casos, o professor deverá sugerir que observem o comportamento relativo de dois pontos da figura transformada, de modo a analisarem as alterações ocorridas e retirarem conclusões sobre as propriedades deste tipo de transformação.
O aluno pode também revelar dificuldade na identificação e compreensão da existência de pontos invariantes em cisalhamentos horizontais e cisalhamentos verticais. Nesses casos, a intervenção do professor pode seguir uma abordagem semelhante à anteriormente referida, incentivando a observação e análise de pontos específicos da figura transformada, de modo a que os alunos identifiquem e compreendam essas invariâncias.
Na pergunta 5.3., os alunos podem considerar que o facto de o triângulo deixar de existir como figura bidimensional, resulta de um erro do GeoGebra ou da sua própria construção. Nessa situação, o professor poderá intervir solicitando que verifiquem as coordenadas dos vértices do triângulo transformado, de modo a perceberem se ocorreu algum erro ou se o resultado obtido corresponde, de facto, ao esperado.

Na pergunta 5.5., os alunos podem revelar dificuldade na compreensão do cisalhamento sobre o triângulo. Se for o caso, o professor deverá orientá-los através de questões que conduzam à análise das coordenadas dos pontos transformados, de modo que percebam que, a abcissa fica sempre igual à ordenada. Pretende-se, assim, levar os alunos a concluir que todos os pontos transformados pela aplicação daquela matriz pertencem à reta de equação $y = x$.

Tarefa 7

Matrizes de rotação

1. Abre um ficheiro da calculadora do GeoGebra e:
   - representa na folha gráfica o ponto A de coordenadas $(4, 0)$;
   - escreve na entrada de Álgebra a matriz $$m1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   - obtém o ponto A', usando o comando "$Aplicarmatriz(m1, A)$", que é imagem do ponto A pela transformação geométrica , associada à matriz $m1$.
   - move o ponto A para diferentes posições e, para cada posição do ponto A, observa a posição do ponto A', transformado do ponto A'.

   1.1. Identifica a transformação geométrica que transforma o ponto A no ponto A'.

   1.2. Substitui a matriz $m1$, por cada uma das matrizes indicadas a seguir e descreve a transformação geométrica correspondente:

   1.2.1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   1.2.2. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

   1.2.3. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

   1.3. Qual é matriz associada à rotação de centro na origem e ângulo:

   1.3.1. $\frac{3\pi}{2}$ 1.3.2. $\frac{2\pi}{3}$ 1.3.3. α

2. Abre o ficheiro GeoGebra https://www.geogebra.org/calculator/qprybwyx .
   Usa a ferramenta "Seletor", disponível no separador das ferramentas para construir um seletor, α, com formato de ângulo e a matriz rotação, $m1$, de centro na origem e amplitude α .

   2.1. Aplica a matriz $m1$ à estrela E_1 e, fazendo variar α, descobre as amplitudes das rotações de centro na origem que transformam a estrela E_1 na estrela E_2 e na estrela E_3, respetivamente.

   2.2. Qual é a amplitude mínima positiva da rotação que transforma a estrela E_2 na estrela E_3?

3. Abre o ficheiro geogebra https://www.geogebra.org/calculator/ymcqwu9n e considera as matrizes de rotação $m1$ e $m2$ de amplitudes $\frac{\pi}{2}$ e π, respetivamente.

   3.1. Compara e explica o resultado obtido quando aplicas a matriz $m2$ à imagem "img" e, de seguida, à imagem obtida, img', aplicas a matriz $m1$, e quando aplicas a matriz produto $m1 \times m2$ a img.

   3.2. Qual é a amplitude do ângulo mínimo positivo da rotação associada à matriz $m1 \times m2$?

   3.3. Aplica agora a matriz produto $m2 \times m1$ a img e compara com o resultado anterior.
   Poderemos afirmar que o produto de matrizes de rotação é comutativo? Justifica.

4. Considera a matriz M e a matriz coluna Z com as coordenadas do afixo do número complexo $z = a + bi$.

$$M = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$$

   4.1. Calcula o produto $M \times Z$

   4.2. Calcula o produto $e^{i\alpha} \times z$, na forma algébrica.

   4.3. Compara os dois produtos anteriores (itens 4.1. e 4.2.) e apresenta uma razão que explique os resultados obtidos.

Tarefa 7

Matrizes de rotação

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo principal levar os alunos a conhecer matrizes associadas a rotações no plano, com centro na origem, identificando o ângulo associado à rotação na matriz.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de matriz, multiplicação de matrizes, trigonometria e rotações no plano.

Materiais e recursos: GeoGebra e calculadora gráfica.

Notas para o professor:
Através de uma exploração dinâmica no GeoGebra, os alunos são orientados a visualizarem as rotações associadas às matrizes que envolvem razões trigonométricas. Ao longo dessa atividade, têm também a oportunidade de descobrir e deduzir propriedades fundamentais destas transformações, como a comutatividade do produto de matrizes de rotação.
Na questão 2. é importante que o professor oriente os alunos na criação de um seletor no formato "ângulo", porque, quando a criação é feita automaticamente pelo Geogebra, os seletores gerados aparecem no formato "número", o que pode dificultar a compreensão do conceito que se pretende trabalhar.
No item 4. pretende-se que os alunos estabeleçam conexões entre a rotação associada a uma matriz e a rotação definida através do produto de números complexos, promovendo assim uma conexão entre estes dois temas.

Coleção de problemas

Matrizes

1. Dosagens de medicamentos em pacientes hospitalizados [1]:

   Numa enfermaria de um hospital estão a ser administrados três tipos de medicamentos
   (Med 1, Med 2, Med 3) a quatro pacientes (Pac 1, Pac 2, Pac 3, Pac 4), com as seguintes dosagens diárias (em mg):

	Pac 1	Pac 2	Pac 3	Pac 4
Med 1	10	40	30	20
Med 2	20	0	10	10
Med 3	30	0	0	20

1.1. Considera a matriz A que representa a informação das dosagens diárias dos medicamentos tomadas pelos quatro pacientes. Qual é a dimensão dessa matriz?

1.2. O que representa cada uma das colunas da matriz A? E o que significa cada uma das linhas da matriz A?

1.3. Identifica os elementos a_{14}, a_{23} e a_{31} e explica o seu significado no contexto apresentado?

1.4. Na sequência da monitorização do estado dos doentes, foi feito um ajustamento da terapêutica, com as seguintes indicações de aumento, manutenção ou redução das dosagens (em mg):

	Pac 1	Pac 2	Pac 3	Pac 4
Med 1	5	-10	-10	0
Med 2	0	10	-10	5
Med 3	-20	10	5	10

Considera a matriz B que representa as alterações das dosagens dos medicamentos para os vários pacientes. Obtém a matriz C que representa as dosagens alteradas dos medicamentos para os vários pacientes. Qual a relação que existe entre a matriz C e as matrizes A e B?

[1] Adaptado de Matrizes para o Ensino Secundário, Susana Carreira, EduQa e Universidade do Algarve - Faculdade de Ciências e Tecnologia

1.5. Admite que cada um dos três medicamentos tem um custo de 0,60€ por miligrama. Considera as dosagens diárias estabelecidas após o ajustamento feito à prescrição inicial.

1.5.1. Obtém matriz D que representa o custo da dosagem diária de cada medicamento para os vários pacientes.

1.5.2. Indica os elementos d_{11}, d_{24} e d_{32}, e explica o seu que significado no contexto apresentado.

1.5.3. Qual é a relação que existe entre as Matrizes D e C?

1.6. Após o ajustamento das dosagens diárias a administrar, estima-se que o Paciente 1 fique internado 3 dias, o Paciente 2 fique 8 dias, o Paciente 3 fique 5 dias e o Paciente 4 fique 10 dias. Recorrendo a matrizes, determina:

1.6.1. a quantidade total de cada medicamento que será necessária para o grupo de pacientes, enquanto decorre o internamento;

1.6.2. o custo total de cada medicamento que será administrado ao grupo de pacientes, enquanto decorre o internamento.

2. Escreve as coordenadas do transformado de cada um dos pontos seguintes pela translação associada à matriz $T = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.1. $(2, 5)$ **2.2.** $(-1, 3)$ **2.3.** $(-6, -2)$

3. Determina a matriz que transforma por uma translação:

3.1. o ponto de coordenadas $(2, 4)$ no ponto $(3, 1)$;

3.2. o ponto de coordenadas $(-3, -1)$ no ponto $(5, -2)$.

4. Escreve a matriz transformação para a rotação de centro O e ângulo:

4.1. $\frac{\pi}{2}$ **4.2.** $-\frac{\pi}{4}$ **4.3.** $\frac{5\pi}{6}$ **4.2.** $-\frac{2\pi}{3}$

5. Determina a imagem dos pontos de coordenadas:

5.1. $(4, -1)$ na rotação de centro O e ângulo $-\frac{3\pi}{4}$;

5.2. $(3, 2)$ na rotação de centro O e ângulo $\frac{4\pi}{3}$.

6. Descreve a transformação geométrica definida pelas seguintes matrizes transformação:

6.1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix}$

6.3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6.4. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6.6. $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

7. Encontra uma matriz transformação para as seguintes transformações geométricas:

7.1. Ampliação pelo fator 4.

7.2. Cisalhamento na direção do eixo yy de $-\frac{2}{3}$.

7.3. Cisalhamento na direção do eixo xx de $\frac{7}{2}$.

7.4. Redução pelo fator $\frac{1}{3}$.

8. Considera a matriz rotação, A, de centro O e ângulo $\frac{5\pi}{4}$ e a matriz transformação B para uma ampliação pelo fator $\frac{5}{2}$.

8.1. Determina as matrizes transformação A e B.

8.2. Determina a imagem do ponto de coordenadas $(-\ 3, 4)$ na transformação obtida pela aplicação da matriz $A \times B$.

8.3. Determina agora a imagem do ponto de coordenadas $(-\ 3, 4)$ na transformação obtida pela aplicação da matriz $B \times A$. O que observas?

Coleção de problemas

Matrizes

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Com este conjunto de exercícios/problemas pretende-se proporcionar aos alunos um trabalho de aplicação dos conceitos trabalhados nas tarefas anteriores.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos trabalhados no tema “Matrizes”.

Materiais e recursos: Internet e calculadora.

Notas para o professor:
O trabalho a desenvolver por cada grupo de alunos pode assumir formatos diferenciados. O professor poderá, eventualmente, sugerir outros exercícios/problemas para que os alunos possam dar continuidade a este trabalho fora da sala de aula. Caso alguns alunos não consigam resolver todas as propostas no tempo disponibilizado, essa diferença não compromete o objetivo essencial da atividade a realizar.